Γ-convergence for Beginners, guide d'introduction.

March 2, 2013

1 Exemples introductifs

Transitions de phases (ex 0.1 p 4) :

On considère un fluide isotherme sous deux phases dans une région bornée de l'espace :

Etudier le comportement des liquides revient à minimiser une fonctionnelle de la forme $\int_{\Omega}(W(u) + \varepsilon^2|D(u)|^2)$ sous une contrainte de masse.

W est un terme issu de la théorie des fluides de Van Der Waals, le second terme traduit un critère de minimalité de l'interface. ε est lié à la dimension de la zone de transition des phases.

La Γ-convergence permet de donner une solution au problème limite quand $\varepsilon \to 0$.

2 Définition

Déf (déf 1.5 p 22): Une suite $(f_j)_{j\in\mathbb{N}} : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ Γ-converge vers $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si pour tout $x \in X$:

i) $\forall\,(x_j) \to x\ \liminf\ f_j(x_j) \geq f(x)$.

ii)$\exists\,(x_j) \to x$ telle que $\limsup\ f_j(x_j) \leq f(x)$.

Rem (théo 1.21 p 29) : Le lien avec le problème initial peut être vu : si les $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ atteignent leurs minimums sur un même compact K (on dit qu'elles sont équi-moyennement coercive), et si f est la Γ-limite des (f_j) alors :

$\exists \min_X\ f = lim_j\ inf_X\ f_j$.

De plus si (x_j) est une suite telle que $f_j(x_j) \to lim_j\ inf_X\ f_j$ alors toute valeur d'adhérence de la suite réalise un minimum de f.

On voit alors qu'on peut résoudre le type de problème présenté en introduction sous couvert d'une hypothèse raisonnable.

Rem (p 41-42) : On voit que la définition de la Γ-convergence dépend des définitions des limites sur l'espace, et donc de la topologie dont il est muni. Pour des raisons pratiques, prendre des limites trop fortes est inexploitable (les propriétés à vérifier sont trop fortes). Pour cela, lorsque l'espace de départ sera L^p, (ou $W^{1,p}$) , et que les fonctionnelles seront de la forme $F(u) = \int f(u)$, on considèrera l'espace muni de sa topologie faible. f sera appelé l'intégrande de F.

3 Propriétés

3.1 Cas général :

Déf (déf 1.2 p 21, 1.30 p 33) : Une fonction f est dite semi-continue inférieurement (sci) si et seulement si :

$\forall x \in X\ \forall (x_j) \to x$ telle que $f(x) \leq \liminf_j f(x_j)$.

Etant donné une fonction, on peut définir son enveloppe semi-continue inférieurement $sc\,f$ comme la plus petite fonction sci inférieure à f, c'est à dire :

$sc\,f\ (x) = \sup\{g(x) |\ g\ sci\ et\ g \leq f\}$.

Rem (théo 1.35 p 34) : On peut motiver l'introduction de la notion de semi-continuité inférieure dans le cadre de la recherche de minimas avec deux résultats :

Si f est sci sur un compact, alors elle atteint sonf infimum.

Si f est moyennement coercive (elle atteint son infimum sur un compact) alors son enveloppe semi-continue inférieurement admet un minimum et il est égal à l'infimum de la fonction, et les points de minimum sont les valeurs d'adhérence des (x_j) telles que $f(x_j) \to \inf_X f$.

Prop (prop 1.28 p 32) : La Γ limite d'une suite de fonctions est toujours sci.

On peut donc remarquer qu'une suite constante de fonctions ne Γ convergera vers elle-même que si elle est sci.

On peut même montrer que la Γ limite d'une suite constante est égale à l'enveloppe semi-continue inférieurement de la fonction.

3.2 Cas des problèmes intégraux :

4 Calcul de Γ-limites

Dans le cas général, vérifier la définition sera souvent le moyen le plus efficace de prouver une Γ convergence. Intuiter la Γ limite pourra cependant être plus délicat.

Prop (prop 1.44 p 36, lemme d'Urysohn) : $f = \Gamma lim(f_j)$ si et seulement si pour toute suite extraite (f_{j_k}) il existe une sous-suite qui Γ converge vers f.

La compacité de la Γ convergence peut alors se révéler utile : $\forall (f_j)$ il existe (f_{j_k}) telle que $\Gamma \, lim \, (f_{j_k})$ existe.

On voit alors qu'il suffit de prouver que la Γ limite ne dépend pas de la suite extraite considérée.

Prop (théo 2.20 p 49) : Soit $1 < p < \infty$, (F_j) une suite de fonctionnelles de la forme :

$F_j(u) = \int f_j(u)$ où les intégrandes (f_j) vérifient : $\sup_j f_j(0) < \infty$ et $f_j(z) \geq c_1|z|^p - c_2$, uniformément, avec $c_1, c_2 > 0$.

On pose $f_j^{**} = \sup\{g(z),\ g\ convexe,\ sci\ g \leq f\}$ l'enveloppe sci convexe de f_j.

Alors (F_j) Γ converge vers un certain F si et seulement si (f_j^{**}) Γ converge vers un certain f et $F(u) = \int f(u)$.

On voit ici que la Γconvergence des fonctionnelles sous forme intégrale se ramène à la Γ convergence de fonctions liées aux intégrandes.

5 Application à des exemples