

## RACHUNEK NIEPEWNOŚCI POMIARÓW W PRACOWNI FIZYCZNEJ

Poniższy wykład jest rezultatem przyjęcia międzynarodowych norm definiowania, oceny i zapisu niepewności pomiaru, opracowanych przez *International Organization for Standardization (ISO)*. Międzynarodowa konwencja dotycząca rachunku niepewności pomiaru została zaakceptowana nie tylko jako narzucone odgórnie prawo, ale przede wszystkim ze względu na zalety przyjętych rozwiązań i korzyści wynikające z ich szerokiego zastosowania. Te coraz to nowocześniejsze zmiany wprowadzono do tegoż tematu ze względu na lepszą motywację do nauki rachunku niepewności przez studentów, przez co przestanie on być postrzegany jako uciążliwość, wprowadzona przez fizyków dla celów dydaktyki ćwiczeń laboratoryjnych. Ten przyjęty w świecie sposób analizy niepewności pomiarów, jednolity dla różnych działów nauki i techniki, będzie z pewnością uznany za umiejętność profesjonalną, potrzebną wszystkim wykonującym pomiary.

### 1. Rozkład Gaussa

Jednym z fundamentalnych założeń analizy wyników pomiarów jest założenie, że **wynik pomiaru** bezpośredniego jest **zmienną losową**. Natomiast rozkład wyników pomiarów bezpośrednich, w granicy, gdy liczba pomiarów rośnie nieograniczenie, jest opisany funkcją gęstości prawdopodobieństwa postaci

$$N(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

zwaną rozkładem Gaussa, albo rozkładem normalnym. Stosowane oznaczenia symboliczne zmiennej losowej i wyniku pomiaru są identyczne. Rozkład normalny zależy od dwóch parametrów  $\mu$  i  $\sigma$  zwanych odpowiednio wartością średnią i odchyleniem standardowym.

Charakteryzują one nieskończony zbiór wyników pomiarów, inaczej populację. W odniesieniu do skończonego zbioru wyników doświadczeń, inaczej próby, definiuje się tzw. estymatory wartości średniej i odchylenia standardowego pomiaru, oznaczone odpowiednio  $\bar{x}$  i  $S_x$ . Związek  $\mu$  i  $\sigma$  z wartością średnią  $\bar{x}$  i odchyleniem standardowym wartości średniej pojedynczego pomiaru  $S_x$  oraz odchyleniem standardowym wartości średniej  $S_{\bar{x}}$ , dla próby złożonej z  $n$  wyników, ma postać asymptotyczną:

$$\bar{x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu, \quad S_x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma, \quad S_{\bar{x}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Funkcja  $N(x)$  jest unormowana do jedności  $\int_{-\infty}^{\infty} N(x) dx = 1$ . Prawdopodobieństwo uzyskania wyniku pomiaru  $x$  różniącego się od wartości średniej  $\mu$  mniej niż o:  $\sigma$ ,  $2\sigma$ ,  $3\sigma$  wynosi odpowiednio

$$P(|x - \mu| < \sigma) = \int_{\mu - \sigma}^{\mu + \sigma} N(x) dx = 0,683$$

analogicznie

$$P(|x - \mu| < 2\sigma) = \int_{\mu-2\sigma}^{\mu+2\sigma} N(x) dx = 0,954$$

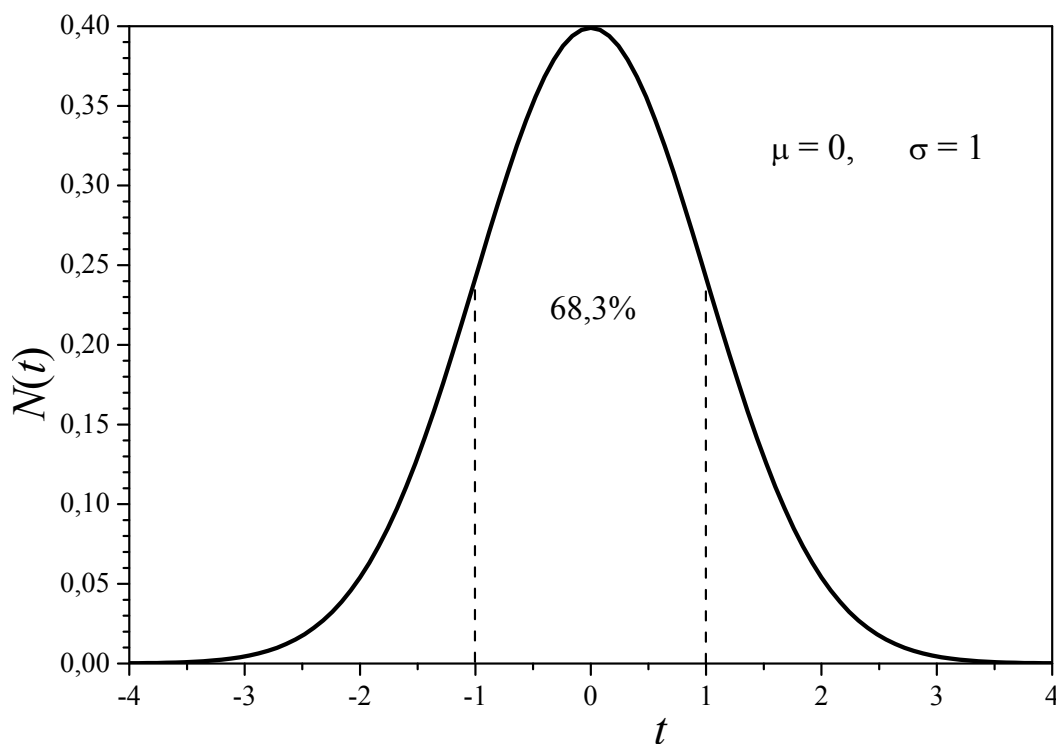
$$P(|x - \mu| < 3\sigma) = \int_{\mu-3\sigma}^{\mu+3\sigma} N(x) dx = 0,997$$

W praktyce często korzystamy z tzw. **standardowego rozkładu Gaussa**, który charakteryzuje się wartością średnią  $\mu = 0$  i odchyleniem standardowym  $\sigma = 1$ .

Rozkład standardowy otrzymujemy przez podstawienie:

$$t = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$N(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$



Standardowy rozkład Gaussa

Rozkład prawdopodobieństwa Gaussa daje możliwość obliczenia prawdopodobieństwa, że dowolny wynik pomiaru znajduje się w zadanym przedziale wartości  $x$ .

W przedziale:

$(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$  mieści się 68,27% wyników,

$(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma)$  mieści się 95,45% wyników,

$(\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma)$  mieści się 99,73% wyników.

## 2. Odchylenie standardowe. Wartość średnia

Dla zmiennej losowej opisanej funkcją gęstości prawdopodobieństwa  $f(x)$ , często zwanej rozkładem gęstości prawdopodobieństwa, odchylenie standardowe jest zdefiniowane jako dodatni pierwiastek z funkcji  $\sigma^2$  rozkładu  $f(x)$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

gdzie  $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$  jest wartością średnią rozkładu.

W wielu przypadkach rozkład  $f(x)$  jest nieznany i ocena odchylenia standardowego odbywa się na podstawie skończonej liczby pomiarów. W odniesieniu do próby  $n$  pomiarów  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru ma postać

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

a odchylenie standardowe średniej wyraża się wzorem

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

gdzie  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ .

Odchylenie standardowe stanowi miarę szerokości rozkładu, tj. miarę rozrzutu wartości wielkości mierzonych. Wartość średnia wyników pomiarów bezpośrednich jest podobnie jak wynik pojedynczego pomiaru zmienną losową i podlega rozkładowi normalnemu. Odchylenie standardowe wartości średniej  $S_{\bar{x}}$  dla  $n$  pomiarów jest  $\sqrt{n}$  razy mniejsze od odchylenia standardowego  $S_x$  pojedynczego pomiaru

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}}.$$

Wartości średnie i odchylenia standardowe będące miarą niepewności pomiarowych można łatwo obliczać posługując się kalkulatorami umożliwiającymi obliczenia statystyczne [3].

## 3. Pomiar i niepewność pomiaru

Pomiar wielkości fizycznej polega na porównaniu, w określony sposób z wielkością tego samego rodzaju, przyjętą za jednostkę miary.

Pomiary fizyczne dzielimy na bezpośrednie i pośrednie. Pomiary bezpośrednie polegają na bezpośrednim porównaniu wielkości mierzonej z odpowiednią miarą wzorcową. Wartość liczbową wielkości mierzonej jest odczytywana wprost ze skali przyrządu pomiarowego. Pomiary pośrednie są

bardziej złożone, gdyż wymagają kilku wielkości,  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , związanych z wielkością  $Z$ , przez nas wyznaczaną, pewną zależnością matematyczną

$$Z = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Niepewność pomiaru jest parametrem związanym z rezultatem pomiaru, charakteryzującym rozrzut wyników, który można w uzasadniony sposób przypisać wartości mierzonej. Przykładowym parametrem określającym niepewność pomiaru może być odchylenie standardowe obliczone dla serii pomiarów, lecz na pełną niepewność powinny składać się wszystkie przyczynki pochodzące od rozrzutu wyników, rozkładu prawdopodobieństwa mierzonej wielkości i inne wynikające z naszej wiedzy o pomiarze.

Terminu *błąd pomiaru* należy używać w znaczeniu jakościowym albo w odniesieniu do różnicy między wartością zmierzoną i rzeczywistą.

#### 4. Niepewność standardowa, ocena niepewności typu $A$ i $B$

**Niepewność standardowa** jest to niepewność pomiaru odpowiadająca odchyleniu standardowemu wartości średniej. Symbol niepewności standardowej można zapisywać na trzy sposoby:  $u$ ,  $u(x)$ ,  $u(\text{stężenie NaCl})$ . Oznaczenia z użyciem nawiasów stosujemy, gdy trzeba określić, co jest wielkością mierzoną.

Ocena **niepewności typu  $A$**  oparta jest na metodzie określenia niepewności pomiaru drogą analizy statystycznej serii wyników pomiarów.

Ocena **niepewności typu  $B$**  oparta jest na metodzie określenia niepewności pomiaru drogą inną niż w przypadku  $A$ , na przykład na podstawie parametru klasy dokładności przyrządu pomiarowego lub elementarnej działki tego przyrządu.

Rozróżnienie metod obliczeń typu  $A$  i  $B$  wskazuje na dwie różne drogi oceny składników niepewności.

Obydwa sposoby oceny są oparte na rozkładach prawdopodobieństwa, a ilościową miarą każdego z tych składników jest odchylenie standardowe.

Niepewność standardową wyniku  $x$  bezpośredniego pomiaru w ocenie typu  $A$  wyraża się wzorem

$$u(x) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Tak zdefiniowana niepewność standardowa odpowiada odchyleniu standardowemu wartości średniej.

Niepewność standardową szacuje się metodą typu  $B$  w przypadku, gdy jest dostępny tylko jeden wynik pomiaru albo gdy wyniki nie wykazują rozrzutu. Wówczas niepewność standardową ocenia się na podstawie wiedzy o parametrach klasy dokładności przyrządu pomiarowego lub wartości elementarnej działki, tj. niepewności wzorcowania  $\Delta x$ .

Przyjmuje się, że wartość ta jest równa połowie szerokości rozkładu jednostajnego z odchyleniem standardowym

$$u(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}}.$$

Można również stosować inne rozkłady.

Jeżeli oba typy niepewności występują jednocześnie, to należy posłużyć się prawem sumowania wariancji, które prowadzi do następującego wzoru na niepewność standardową (całkowitą)

$$u_c(x) = \sqrt{u^2(x) + (\Delta x)^2 / 3}$$

$u(x)$  – niepewność standardowa obliczona metodą  $A$ .

## 5. Elementarna działka i parametry klasy dokładności

Działką elementarną nazywamy zakres wielkości mierzonej odpowiadający odległości między kolejnymi kreskami podziałki analogowej przyrządu pomiarowego. W odniesieniu do przyrządów cyfrowych działka elementarna to jednostka ostatniego miejsca znaczącego wartości wyniku, odczytanego ze skali przyrządu pomiarowego.

Dla tych przyrządów niepewność pomiaru podawana jest przez producenta w instrukcji obsługi, najczęściej jako suma określonego ułamka  $c_x$  wielkości mierzonej  $x$  i ułamka  $c_z$  zakresu  $z$ . Ułamki te nazywają się parametrami klasy dokładności przyrządu pomiarowego:

$$\Delta x = c_x x + c_z z$$

Niepewność maksymalna jest często większa od działki elementarnej. Dla niektórych przyrządów podawany jest tylko parametr zakresu  $c_z$ .

## 6. Złożona niepewność standardowa. Prawo przenoszenia niepewności

W przypadku pomiarów pośrednich wielkości  $Z$ , będącej funkcją bezpośrednio mierzonych  $n$  wielkości  $x$ , otrzymujemy wyniki:

$$\bar{x}_1 \pm u(x_1), \quad \bar{x}_2 \pm u(x_2), \quad \dots, \quad \bar{x}_n \pm u(x_n)$$

gdzie  $\bar{x}_i$  - średnia wartość wielkości  $x_i$ ,  $u(x_i)$  - jej niepewność standardowa.

**Złożoną niepewność standardową** nieskorelowanych pomiarów pośrednich oznaczamy  $u_c(x)$  i obliczamy ze wzoru:

$$u_c(Z) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)}$$

Powyższy wzór nosi nazwę **prawa przenoszenia** lub prawa propagacji niepewności pomiarowych [4].

## 7. Niepewność względna

**Niepewnością standardową względną** nazywamy stosunek niepewności standardowej do wartości średniej. Oznaczamy ją symbolem  $u_r(x)$  (indeks od ang. *relative*), obliczamy

$$\frac{u(x)}{\bar{x}}$$

Wartość tej niepewności wyrażamy często w procentach.

Niepewność względna jako wielkość bezwymiarowa pozwala porównywać precyzję pomiarów różnych wielkości fizycznych.

## 8. Niepewność rozszerzona, współczynnik rozszerzenia

Niepewność rozszerzona jest miarą pewnego przedział otaczającego wynik pomiaru. Miarę tę obliczamy podobnie jak przedział ufności w metodach statystycznych, mnożąc oszacowaną niepewność standardową przez bezwymiarowy współczynnik rozproszenia. Jest to umownie przyjęta liczba  $k = 2 \div 3$  wybrana tak, aby w omawianym przedziale znalazła się większość wyników pomiaru, potrzebna do danych zastosowań, np. do wnioskowania o zgodności z wartością tabelaryczną. Niepewność rozszerzoną wielkości mierzonej  $Z$  oznaczamy symbolem  $U(Z)$ :

$$U(Z) = ku_c(Z)$$

W zgodności z międzynarodową praktyką do obliczania  $U$  przyjmuje się umowną wartość  $k = 2$ . Wartości  $k$  inne niż 2 mogą być stosowane tylko w przypadku szczególnych zastosowań i winny być dyktowane przez ustalone i udokumentowane wymagania. Do tych szczególnych przypadków zaliczamy pomiar, którego niepewność złożona jest zdominowana przez pojedynczy przyczynik o małej liczbie pomiarów. W takim przypadku zaleca się przyjąć wartość  $k$  równą wartości funkcji  $t$  Studenta z poziomem 95%.

## 9. Waga statystyczna. Średnia ważona

Założmy, że wykonano pomiary tej samej wielkości  $x$  za pomocą różnych przyrządów lub metod pomiarowych. Wyniki pomiarów są charakteryzowane w każdej grupie wartością średnią  $x_1, x_2, \dots, x_n$  i niepewnością standardową  $u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_n)$ . Wartość średnia ważona wielkości  $x$  zdefiniowana jest następująco

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

gdzie waga  $w_i$  pomiarów  $i$ -tej grupy jest obliczana ze wzoru

$$w_i = \frac{1}{(u(x_i))^2}$$

a niepewność średniej ważonej jest średnią ważoną niepewności poszczególnych pomiarów

$$u(x_w) = \frac{\sum_{i=1}^n w_i u(x_i)}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

## 10. Wykresy

Prezentując wyniki pomiarów w postaci wykresów, należy pamiętać, aby miały one walor czytelności. Dlatego, przy ich sporządzaniu, należy kierować się następującymi zasadami:

a. Sporządzając wykresy należy dobrać taki układ współrzędnych ( $X$ ,  $Y$ ), o ile to jest możliwe, aby badana zależność funkcyjna pomiędzy wynikami pomiarów  $x$  i  $y$  była liniowa. Dla przykładu, jeśli ilustrowana zależność jest postaci:

$y = ax + b$ , to przedstawiamy ją we współrzędnych liniowo-liniowych,

$y = ab^x$ , - liniowo( $X$ )-logarytmicznych( $Y$ ),

$y = ax^b$ , - logarytmiczno( $X$ )-logarytmicznych( $Y$ ),

gdzie  $a$  i  $b$  są współczynnikami stałymi.

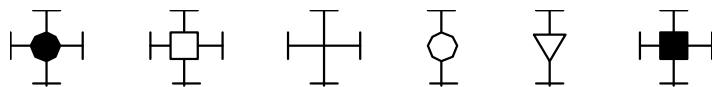
b. Przyjęte podziałki powinni dawać możliwość łatwego odczytu współrzędnych dowolnego punktu. Warunek ten jest spełniony, jeżeli jednej działce na osiach liniowego układu współrzędnych odpowiadają następujące liczby jednostek:

$1 \cdot 10^n$ ,  $2 \cdot 10^n$ ,  $2,5 \cdot 10^n$ ,  $5 \cdot 10^n$ ,  $n$  – liczba całkowita.

c. Podziałki nie muszą zaczynać się od zera, ale powinna to być jedna z liczb postaci – zob. pkt. b. Skrajne wartości zmiennej powinny znajdować się na początku i odpowiednio na końcu arkusza.

d. Jeżeli wartości pomiarów  $x$  i  $y$  są obciążone niepewnościami, to jednostkowe działki na osiach należy wybrać tak, aby wartości niepewności były dobrze widoczne.

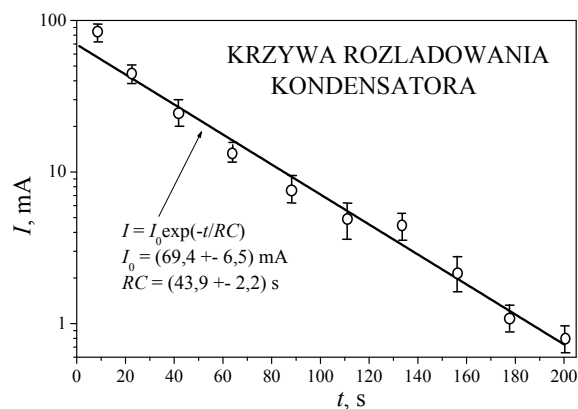
e. Po naniesieniu na arkusz układu współrzędnych, doborze i zaznaczeniu podziałek, nanosimy wartości pomiarów i ich niepewności w postaci symboli graficznych np.:



Środki geometryczne tych symboli powinny odpowiadać dokładnie wartościom pomiarów.

f. Krzywą (gładką) aproksymującą naniesione wyniki rysujemy w taki sposób, aby odzwierciedlała ona postać matematyczną funkcji dopasowującej. W przypadku, gdy na jednym wykresie nanosimy kilka krzywych, punkty pomiarowe należące do każdej z nich zaznaczamy innym symbolem graficznym.

g. Wykres powinien być zaopatrzony w legendę zawierającą nazwę przedstawionej zależności oraz inne konieczne objaśnienia. Komentarze na osiach powinny zawierać symbole fizyczne nazw prezentowanych zmiennych oraz ich jednostki w układzie SI.



## Literatura

1. Texeira, Pacheco, „Delphi 6 – Vademecum profesjonalisty”, 2002 r.
2. A. Grażyński, „Delphi 4 dla każdego”, Helion, Gliwice 1999 r.
3. Edward Mulas, Roman Rumianowski. „Rachunek niepewności pomiaru w pracowni fizycznej. Nowa kodyfikacja”. Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2002 r.
4. J.R.Taylor. „Wstęp do analizy błędu pomiarowego”. PWN, Warszawa, 1995 r.
5. A. Strzałkowski, A. Śliżyński. „Matematyczne metody opracowania wyników pomiarów”. PWN, Warszawa 1995 r.
6. „WIEM Onet.pl” – encyklopedia portalu internetowego Onet.pl, 2004 r. Encyklopedia opracowana na podstawie Popularnej Encyklopedii Powszechnej Wydawnictwa Fogra.
7. H. Kąkol, „Podstawowe pojęcia statystyki i rachunku prawdopodobieństwa. Propozycja dydaktyczna”. WN WSP, Kraków 1990.
8. A.F.Żarnecki, Wykład multimedialny z fizyki, Politechnika Wrocławska, 2003 r.