Dariusz Jakóbczak

Podstawy analizy matematycznej

skrypt Wydziału Elektroniki i Informatyki
Politechniki Koszalińskiej

Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Koszalińskiej
Koszalin 2008

ISBN 978-83-7365-157-9

Przewodniczący Uczelnianej Rady Wydawniczej
Bronisław Słowiński

Recenzja
Witold Kosiński

Redakcja
Agnieszka Czajkowska

WYDAWNICTWO UCZELNIANE POLITECHNIKI KOSZALIŃSKIEJ
75–620 Koszalin, ul. Racławicka 15–17

Koszalin 2008, wyd. I, ark. wyd. 5,35

Spis treści

Literatura:

1. Kuratowski K.: *Rachunek różniczkowy i całkowy. Funkcje jednej zmiennej*. PWN, Warszawa 1979.
2. Krysicki W., Włodarski L.: *Analiza matematyczna w zadaniach (cz.1)*. PWN, Warszawa 1980.
3. Sidorowicz J.: *Matematyka. Wykłady dla studentów wydziałów technicznych (t.1)*. Wydawnictwo WSI, Koszalin 1996.
4. *Poradnik matematyczny* pod red. Dziubińskiego i Świątkowskiego. PWN, Warszawa 1985.
5. Decewicz G., Żakowski W.: *Matematyka – cz. I.* WNT, Warszawa 1994.
6. Maurin K.: *Analiza- cz. I. Elementy.* PWN, Warszawa 1977.
7. Leitner R.: *Zarys matematyki wyższej dla studentów.* WNT, Warszawa 1995.
8. Minorski W.P.: *Zbiór zadań z matematyki wyższej.* WNT, Warszawa 1974.
9. Leja F.: *Analiza matematyczna.* PWN, Warszawa 1972.
10. Fichtenholz G.M.: *Rachunek różniczkowy i całkowy.* PWN, Warszawa 1994.
11. Zaporożec G.I.: *Metody rozwiązywania zadań z analizy matematycznej.* WNT, Warszawa 1976.
12. WWW.WIKIPEDIA.PL, 05.02.2008.
13. WWW.ANALIZA.MATEMATYKA.ORG, 05.02.2008.
14. WWW.PORTALWIEDZY.ONET.PL, 05.02.2008.
15. WWW.MATH.EDU.PL, 05.02.2008.
16. Gdowski B., Pluciński E.: *Zbiór zadań z matematyki.* WNT, Warszawa 1974.
17. Haggarty R.: *Fundamentals of mathematical analysis.* Addison-Wesley, Oxford Brookes University 1993.

Wstęp

Skrypt „Podstawy analizy matematycznej” ma w swoich założeniach przybliżyć studentom kursów wyrównawczych najważniejsze pojęcia, definicje i twierdzenia dotyczące ciągów liczbowych, granicy ciągów, funkcji elementarnych i działań wykonywanych na funkcjach, granicy funkcji i zastosowania pochodnej funkcji. Oprócz podstawowej wiedzy matematycznej, opisującej dany temat w sposób przystępny i przemawiający do intuicji, w każdym rozdziale znajdują się przykłady inżynierskiego i technicznego wykorzystania omawianych zagadnień. Do każdej partii materiału podane są przykładowe zadania z rozwiązaniami oraz zestaw zadań do samodzielnego wykonania z podaną odpowiedzią (trudniejsze zadania oznaczone są symbolem *).

W rozdziale 1 zawarto materiał o rodzajach i własnościach ciągów liczbowych, o granicy ciągu i sposobach wyznaczania granicy ciągu. Umieszczono podstawowe definicje i twierdzenia dotyczące ciągów liczbowych. Podano także kilka przykładów praktycznego zastosowania ciągu i jego granicy.

W rozdziale 2 opisano funkcje jednej zmiennej rzeczywistej, podstawowe definicje i własności funkcji, rodzaje i cechy funkcji elementarnych. Omówiono operację złożenia funkcji elementarnych oraz poszukiwanie funkcji odwrotnej do funkcji elementarnej. Zdefiniowano najważniejsze cechy złożenia funkcji i funkcji odwrotnej, podano kilka przykładów inżynierskiego zastosowania funkcji.

W rozdziale 3 znajduje się materiał odnośnie granicy i ciągłości funkcji jednej zmiennej. Opisano definicje i własności granicy funkcji, podano definicje Cauchy’ego i Heinego granicy funkcji (obustronnej i jednostronnej). Omówiono podstawowe twierdzenia o granicach funkcji w punkcie właściwym (będącym liczbą) i niewłaściwym (czyli w nieskończoności), podano przykłady wyznaczania granicy funkcji i jej wykorzystanie np. do badania asymptot funkcji. Opracowano pojęcie ciągłości funkcji oraz definicje i własności dotyczące funkcji ciągłych. Podano przykłady sprawdzania ciągłości funkcji w punkcie oraz rozwiązane zadania dotyczące granicy funkcji oraz ciągłości funkcji.

W rozdziale 4 wyjaśniono i zdefiniowano pojęcie ilorazu różnicowego oraz podano definicję i własności pochodnej funkcji w punkcie. Pokazano, dla wybranych funkcji elementarnych, wyznaczanie funkcji pochodnej na podstawie definicji. Udowodniono wzory na pochodną sumy, różnicy, ilorazu oraz iloczynu funkcji, podano wzór na pochodną funkcji złożonej. Umieszczono przykładowe obliczenia dotyczące pochodnej funkcji oraz pochodnych wyższych rzędów. Wyjaśniono zastosowanie pierwszej i drugiej pochodnej do badania takich własności funkcji jak: przedziały monotoniczności, ekstremum lokalne (maksimum, minimum), wypukłość funkcji, punkty przegięcia. Omówiono sposoby wyznaczania asymptot funkcji. Podano przykłady badania przebiegu zmienności funkcji z wykorzystaniem całej wiedzy na temat sprawdzania własności funkcji wraz z wykonaniem wykresu funkcji. Opisano kilka przykładów inżynierskiego zastosowania pochodnej i wykorzystania twierdzenia Taylora i wzoru Maclaurina.

Podejmując się napisania tego skryptu autor miał na uwadze umieszczenie jak największej liczby przykładów, mających na celu jak najprostsze wyjaśnienie studentom kursów wyrównawczych omawianego materiału i zastosowanie opisanej teorii w obliczeniach inżynierskich.

Rozdział 1. Ciągi liczbowe, granica ciągu

1.1 Rodzaje i własności ciągów liczbowych

W życiu codziennym często można spotkać się z ciągami: ciąg samochodów na ulicy (pierwszy, drugi, trzeci…), ciąg ludzi w kolejce (zerowy na chwilę wyszedł, pierwszy, drugi, trzeci…), ciąg sklepów w centrum handlowym. Jeżeli elementami ciągu są liczby, a nie samochody, ludzie czy sklepy, to mówimy o ciągu liczbowym. Zatem:

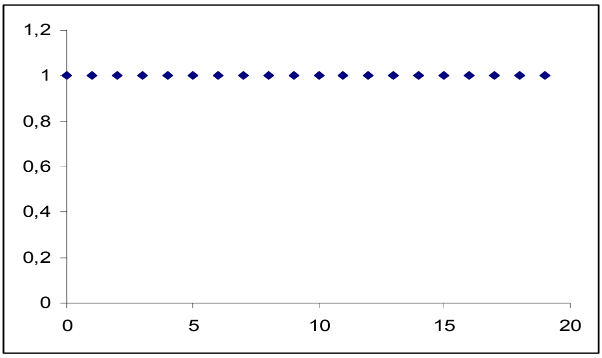
Ciąg liczbowy składa się z liczb.

Samochodom na ulicy można przyporządkować ich pojemność silnika, numer rejestracyjny (bez liter) lub rok produkcji. Ludziom w kolejce można przypisać ich wzrost, wagę lub wiek. Sklepom możemy przyporządkować ich powierzchnię, wielkość czynszu lub liczbę pracowników. Powyższe przykładowe ciągi z samochodami, ludźmi czy sklepami zostały opisane słownie, bez użycia wzorów matematycznych. <u>***Sposób opisowy***</u> jest jedną z możliwości słownej charakteryzacji ciągów liczbowych, <u>***nie nadaje się jednak do obliczeń matematycznych***</u>. Ciąg samochodów, ludzi czy sklepów jest na ogół przypadkowy. Znajomość pojemności silnika dla pięciu początkowych samochodów nie pozwoli na określenie pojemności szóstego; wiedza o wzroście dziesięciu pierwszych ludzi w kolejce nie umożliwia przewidywania wzrostu jedenastej osoby itd.

Uwaga

Ciąg liczbowy musi zostać opisany symbolami matematycznymi w taki sposób, aby umożliwić obliczenie dowolnego elementu ciągu.

W niektórych dziedzinach nauki operacje wykonywane są na zbiorze liczb całkowitych, a w szczególności na zbiorze liczb naturalnych. Taki dział matematyki nazywa się matematyką dyskretną. Np. w informatyce współrzędne punktu (piksela) na ekranie dane są liczbami naturalnymi, w kombinatoryce istnieją wzory na obliczenie liczby permutacji, kombinacji lub wariacji dla konkretnych danych naturalnych, w logice klasycznej i w systemie dwójkowym (binarnym) wykorzystuje się wartości 0 i 1, w rachunku prawdopodobieństwa wyniki rzutu kostką czy monetą mają ustalone wartości naturalne, a starożytne pojęcie równań diofantycznych dotyczy równań o rozwiązaniach będących liczbami całkowitymi.



Rys. 1.1. Ciąg dwudziestu początkowych liczb naturalnych umieszczonych jako punkty o współrzędnej x = 0,1,2,…,19 w układzie współrzędnych prostokątnych dla współrzędnej y = 1 (wykres punktowy).

Odwieczną dyskusję, czy zero jest liczbą naturalną, rozstrzyga następujące oznaczenie zbiorów: liczby naturalne **N** = {0,1,2,3,…,99,…}, liczby naturalne dodatnie $\mathbf{N}^+$ = {1,2,3,…,99,…}. Są to *zbiory nieskończone*, ponieważ mają nieskończoną liczbę elementów. Zbiory **N** i $\mathbf{N}^+$ są ograniczone z dołu (posiadają kres dolny), ponieważ istnieje najmniejszy element zbioru (odpowiednio 0 i 1); nie są natomiast ograniczone z góry (nie posiadają kresu górnego), ponieważ kolejne elementy zbioru *rosną do nieskończoności* ($+\infty$). W zależności od konkretnego pojęcia lub zadania wykorzystywane będą zbiory **N** albo $\mathbf{N}^+$. Elementy ciągów będą numerowane (indeksowane) liczbami naturalnymi.

Definicja 1.1

Jeżeli każdemu elementowi n zbioru **N** (bądź $\mathbf{N}^+$) zostanie przyporządkowana liczba rzeczywista obliczona wg ustalonego wzoru wyznaczającego a_n , to mówi się, że określony został *ciąg liczbowy* a_n.

Zapis $a_n : \mathbf{N} \to \mathbf{A}$ oznacza, iż każdej liczbie $n \in \mathbf{N}$ przyporządkowana jest liczba ze zbioru **A** (np. **A** = **R**, bądź **A** = **N** czy $\mathbf{A} = \mathbf{N}^+$).

Zapis $a_n : \mathbf{N}^+ \to \mathbf{A}$ oznacza, iż każdej liczbie $n \in \mathbf{N}^+$ przyporządkowana jest liczba ze zbioru **A** (np. **A** = **R** lub **A** = **N**, albo $\mathbf{A} = \mathbf{N}^+$).

Zbiór liczb rzeczywistych **R** zawiera zbiór liczb naturalnych (zbiór liczb naturalnych zawarty jest w zbiorze liczb rzeczywistych, jest jego podzbiorem), czyli każda liczba naturalna jest liczbą rzeczywistą, ale nie każda liczba rzeczywista jest liczbą naturalną (np. $\frac{1}{2} \notin \mathbf{N}$, $\pi \notin \mathbf{N}^+$). Fakt zawierania zbiorów zapisuje się następująco:

$$\mathbf{N}^+ \subset \mathbf{N} \subset \mathbf{R}.$$

<u>Przykłady ciągów liczbowych i ich własności:</u>

1) $a_n : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $a_n = n$. Elementami ciągu są kolejne liczby naturalne: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, $a_5 = 5$... Jest to ciąg rosnący: każdy kolejny element $a_{n+1} = n+1$ jest większy od poprzedniego elementu $a_n = n$, ograniczony z dołu przez liczbę 0 (kres dolny zbioru wartości ciągu), nieograniczony z góry (kolejne elementy rosną do nieskończoności).

2) $a_n : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $a_n = 2n$. Elementami ciągu są kolejne liczby naturalne podzielne przez 2 (czyli ***liczby parzyste***): $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$,

a_4 = 8, a_5 = 10... Jest to ciąg rosnący: każdy kolejny element $a_{n+1} = 2(n+1) = 2n+2$ jest większy od poprzedniego elementu $a_n = 2n$, ograniczony z dołu przez liczbę 0 (kres dolny zbioru wartości ciągu), nieograniczony z góry (kolejne elementy rosną do nieskończoności).

3) $a_n : \mathbf{N} \to \mathbf{N}^+$, $a_n = 2n+1$. Elementami ciągu są kolejne liczby naturalne niepodzielne przez 2 (czyli ***liczby nieparzyste***): a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 7, a_4 = 9, a_5 = 11... Jest to ciąg rosnący: każdy kolejny element $a_{n+1} = 2(n+1)+1 = 2n+3$ jest większy od poprzedniego elementu $a_n = 2n+1$, ograniczony z dołu przez liczbę 1 (kres dolny zbioru wartości ciągu), nieograniczony z góry (kolejne elementy rosną do nieskończoności).

4) $a_n : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $a_n = \sqrt{n}$. Kilka początkowych elementów: $a_0 = \sqrt{0} = 0$, $a_1 = \sqrt{1} = 1$, $a_2 = \sqrt{2}$ (w przybliżeniu 1,4142) , $a_3 = \sqrt{3}$ (w przybliżeniu 1,7321), $a_4 = \sqrt{4} = 2$, $a_5 = \sqrt{5}$ (w przybliżeniu 2,2361). Jest to ciąg rosnący: każdy kolejny element $a_{n+1} = \sqrt{n+1}$ jest większy od poprzedniego elementu $a_n = \sqrt{n}$, ograniczony z dołu przez liczbę 0 (kres dolny zbioru wartości ciągu), nieograniczony z góry (kolejne elementy rosną do nieskończoności).

5) $a_n : \mathbf{N}^+ \to \mathbf{R}$, $a_n = 1/n$. Kilka początkowych elementów: a_1 = 1/1 = 1, a_2 = 1/2 = 0.5, a_3 = 1/3 = 0.3333…, a_4 = ¼ = 0.25, a_5 = 1/5 = 0.2, a_6 = 1/6 = 0.16666… Jest to ciąg malejący: każdy kolejny element $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ jest mniejszy od poprzedniego elementu $a_n = \frac{1}{n}$, ograniczony z dołu przez liczbę 0 (kres dolny zbioru wartości ciągu) – pomimo iż żaden element nie przyjmie wartości 0; ograniczony z góry przez liczbę 1 (kres górny zbioru wartości ciągu).

Dotychczas rozpatrzone ciągi były monotoniczne.

6) a_n : **N** $\rightarrow$ **R** , $a_n = (-1)^n$. Kilka początkowych elementów: $a_0 = (-1)^0 = 1$, $a_1 = (-1)^1 = -1$, $a_2 = (-1)^2 = 1$, $a_3 = (-1)^3 = -1$. Nie jest to ciąg monotoniczny (ani rosnący, ani malejący, ani stały), przyjmuje na przemian dwie wartości 1 oraz -1, które są odpowiednio kresem górnym i dolnym zbioru wartości ciągu).

Definicje 1.2-1.10:

D. 1.2

Ciąg a_n jest ***rosnący***, jeżeli $\forall n : a_n < a_{n+1}$

(*kolejne wyrazy są coraz większe*).

Ciągi w przykładach 1) - 4) są przykładami ciągów rosnących (podaj trzy inne przykłady ciągów rosnących).

W celu udowodnienia, iż ciąg jest rosnący, należy wykazać: $a_{n+1} - a_n > 0$.

Przykład: $a_n = n^2$.

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1 > 0 .$$

D. 1.3

Ciąg a_n jest ***malejący***, jeżeli $\forall n : a_n > a_{n+1}$

(*kolejne wyrazy są coraz mniejsze*).

Ciąg w przykładzie 5) jest ciągiem malejącym (podaj trzy inne przykłady ciągów malejących).

W celu udowodnienia, iż ciąg jest malejący, należy wykazać: $a_{n+1} - a_n < 0$.

Przykład: $a_n = -n$.

$a_{n+1} - a_n = -(n+1) - (-n) = -n - 1 + n = -1 < 0$.

D. 1.4

Ciąg a_n jest ***nierosnący***, jeżeli $\forall n : a_n \geq a_{n+1}$

(*każdy następny wyraz jest nie większy od poprzedniego)*.

W szczególności ciągi malejące są także ciągami nierosnącymi

W celu udowodnienia, iż ciąg jest nierosnący, należy wykazać: $a_{n+1} - a_n \leq 0$.

D. 1.5

Ciąg a_n jest ***niemalejący***, jeżeli $\forall n : a_n \leq a_{n+1}$

(*każdy następny wyraz jest nie mniejszy od poprzedniego).*

W szczególności ciągi rosnące są także ciągami niemalejącymi

W celu udowodnienia, iż ciąg jest niemalejący, należy wykazać: $a_{n+1} - a_n \geq 0$.

D. 1.6

Ciąg a_n jest ***stały***, jeżeli $\forall n : a_n = a_{n+1}$

(*wszystkie wyrazy ciągu mają taką samą wartość)*.

Przykłady ciągów stałych: a_n = 1 , a_n = -3. Ciąg stały jest szczególnym przypadkiem ciągu nierosnącego i ciągu niemalejącego.

W celu udowodnienia, iż ciąg jest stały, należy wykazać: $a_{n+1} - a_n = 0$.

Ciąg nazywa się ***monotonicznym***, jeżeli spełnia jedną z def. D.1.2 do D.1.6 (ciąg monotoniczny jest rosnący, malejący, nierosnący, niemalejący lub stały).

Ciąg w przykładzie 6) nie jest ciągiem monotonicznym (podaj trzy przykłady ciągów monotonicznych i trzy przykłady ciągów, które nie są monotoniczne).

D. 1.7

Ciąg a_n jest ***ograniczony z dołu***, jeżeli $\exists t \in R \quad \forall n : t \leq a_n$.

Ciągi w przykładach 1) - 6) są przykładami ciągów ograniczonych z dołu (podaj trzy inne przykłady ciągów ograniczonych z dołu).

D. 1.8

Ciąg a_n jest ***ograniczony z góry***, jeżeli $\exists T \in R \quad \forall n : T \geq a_n$.

Ciągi w przykładach 5) - 6) są przykładami ciągów ograniczonych z góry (podaj trzy inne przykłady ciągów ograniczonych z góry).

D. 1.9

Kresem dolnym zbioru wartości ciągu nazywa się największą liczbę spośród ograniczających ciąg z dołu.

D. 1.10

Kresem górnym zbioru wartości ciągu nazywa się najmniejszą liczbę spośród ograniczających ciąg z góry.

Zadanie: Jakie cechy posiada ciąg a_n : $\mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $a_n = (-2)^n$? Kilka początkowych elementów: $a_0 = (-2)^0 = 1$, $a_1 = (-2)^1 = -2$, $a_2 = (-2)^2 = 4$, $a_3 = (-2)^3 = -8$. Nie jest to ciąg monotoniczny, przyjmuje na przemian wartości dodatnie i ujemne, nie jest ograniczony z dołu i z góry, brak kresu górnego i dolnego zbioru wartości ciągu. Mówimy wtedy, że mamy do czynienia z ciągiem nieograniczonym z dołu i z góry.

Ciąg arytmetyczny

Załóżmy, iż co miesiąc wpłacamy na książeczkę oszczędnościową stałą kwotę *K*. Wartości naszych oszczędności na koniec każdego miesiąca tworzą ***ciąg arytmetyczny*** o wyrazie początkowym równym 0 i stałej różnicy $r = K$.

Definicja 1.11
Jeżeli każdy kolejny element ciągu powstaje poprzez dodanie do elementu poprzedniego liczby rzeczywistej *r*, to taki ciąg zwany jest ***arytmetycznym***. Liczba *r* jest stałą różnicą danego ciągu arytmetycznego.

Istnieje konieczność określenia pierwszego elementu ciągu (a_0 lub a_1). Własności ciągu arytmetycznego można zapisać następująco:

$$\forall n : a_{n+1} = a_n + r , \qquad \textbf{(1.1)}$$

$$r = a_1 - a_0 = a_2 - a_1 = ... = a_{n+1} - a_n .$$

Tak zdefiniowany (1.1) ciąg arytmetyczny a_n może być uważany za przykład ciągu rekurencyjnego (wyliczenie kolejnego elementu a_{n+1} wymaga znajomości elementu poprzedniego a_n).

Uwaga
Jeżeli ***r* > 0**, to ciąg arytmetyczny jest rosnący; oznacza to, iż kolejne wyrazy ciągu są coraz większe.
Jeżeli ***r* < 0**, to ciąg arytmetyczny jest malejący; oznacza to, iż kolejne wyrazy ciągu są coraz mniejsze.
Jeżeli ***r* = 0**, to ciąg arytmetyczny jest stały; oznacza to, iż kolejne wyrazy ciągu są takie same.

Przykłady zastosowania ciągów arytmetycznych:

1) Co tydzień zajętość dysku twardego zwiększa się o 100MB (r = 100). Całkowita wielkość plików i folderów na koniec każdego tygodnia tworzy rosnący ciąg arytmetyczny: a_1 = 1MB (początkowa pojemność zbiorów na dysku), $a_{n+1} = a_n + 100$ dla n = 1,2,3…. Oczywiście zajętość nie może wzrastać w nieskończoność i w praktyce ograniczona jest całkowitą pojemnością dysku twardego.

2) Miesięczna rata kredytu wynosi 500 zł. Całkowita wielkość kwoty do spłaty na początku każdego miesiąca tworzy malejący ciąg arytmetyczny (r = -500): a_0 = 10000 zł (kredyt), $a_{n+1} = a_n - 500$ dla n = 0,1,2…. Kolejne elementy ciągu są obliczane aż do osiągnięcia wartości 0. Kiedy to nastąpi? Po 20 miesiącach, czyli a_{20} = 0.

3) Suma stu kolejnych liczb całkowitych od 1 do 100 (szkolne zadanie księcia matematyków Gaussa - porównaj wzór na sumę początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego) wynosi:

$1+2+3+\ldots+50+51+\ldots+98+99+100 = 101\cdot 100/2 = 101\cdot 50 = 5050.$

Wzory dla ciągów arytmetycznych:

1) Obliczanie dowolnego wyrazu ciągu arytmetycznego:

Zastanówmy się nad następującymi dwoma zależnościami: zależnością (1.1) oraz poniższą.

$a_n = a_0 + n \cdot r$, jeżeli wyraz początkowy to a_0; **(1.2)**

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, jeżeli wyraz początkowy to a_1. **(1.3)**

Tak określone (1.2, 1.3) ciągi arytmetyczne a_n nie są rekurencyjne (w celu wyznaczenia dowolnego *n* - tego elementu ciągu należy znać wielkości określające ciąg arytmetyczny: wyraz początkowy i stałą różnicę *r*), nie jest wykorzystany poprzedni element ciągu a_{n-1}.

Uzasadnienie wzoru na dowolny wyraz ciągu arytmetycznego jest proste: każdy kolejny wyraz powstaje poprzez dodanie do wyrazu poprzedniego stałej różnicy *r*, czyli dla obliczenia elementu a_n dodajemy *n* - razy wartość *r* (w przypadku wyrazu początkowego a_0) lub *n*-1 krotnie wartość *r* (w przypadku wyrazu początkowego a_1).

Przykłady:

Jeżeli $a_0 = 3$, $r = 2$, to $a_{20} = 3+20 \cdot 2 = 43$.

Jeżeli $b_1 = -5$, $r = -0.5$, to $b_{20} = -5 +19 \cdot (-0.5) = -14.5$.

2) Suma *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego:

$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, jeżeli początkowy wyraz to a_1; **(1.4)**

$S_n = a_0 + a_1 + ... + a_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i = \frac{a_0 + a_{n-1}}{2} \cdot n$, jeżeli początkowy wyraz to a_0.

Uzasadnienie wzoru (1.4) na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego: ułamek we wzorze oznacza średnią arytmetyczną liczoną dla wyrazu początkowego i ostatniego, a wszystkich wyrazów jest *n*. Warto także zauważyć, że:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1}, \text{ bo } a_2 + a_{n-1} = a_1 + r + a_n - r$$

i takich par wyrazów ciągu jest n/2.

Przykłady:

Jeżeli $a_0 = 3$, $r = 2$, to $a_{20} = 43$ oraz

$$S_{21} = a_0 + a_1 + ... + a_{20} = \sum_{i=0}^{20} a_i = 3 + 5 + 7 + ... + 43 = \frac{a_0 + a_{20}}{2} \cdot 21 =$$
$$= 23 \cdot 21 = 483.$$

Jeżeli $b_1 = -5$, $r = -0.5$, to $b_{20} = -14.5$ oraz

$$S_{20} = b_1 + b_2 + ... + b_{20} = \sum_{i=1}^{20} b_i = -5 - 5.5 - 6 - ... - 14.5 = \frac{b_1 + b_{20}}{2} \cdot 20 =$$
$$= (-19.5) \cdot 10 = -195.$$

Ciąg geometryczny

Załóżmy, iż dziesięć lat temu miałeś jedną płytę z muzyką i co roku liczba płyt w Twojej kolekcji wzrasta trzykrotnie. Liczba płyt na koniec każdego roku tworzy ***ciąg geometryczny*** o wyrazie początkowym równym 1 i stałym ilorazie *q = 3*.

Definicja 1.12

Jeżeli każdy kolejny element ciągu powstaje poprzez pomnożenie elementu poprzedniego przez liczbę rzeczywistą *q*, to taki ciąg zwany jest ***geometrycznym***. Liczba *q* jest stałym **ilorazem** danego ciągu geometrycznego.

Istnieje konieczność określenia pierwszego elementu ciągu (a_0 lub a_1). Własności ciągu geometrycznego można zapisać następująco:

$$\forall n : a_{n+1} = a_n \cdot q \, , \tag{1.5}$$

$$q = \frac{a_1}{a_0} = \frac{a_2}{a_1} = \ldots = \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ dla } a_0 , a_1 ,\ldots, a_n \neq 0.$$

Tak zdefiniowany (1.5) ciąg geometryczny a_n może być uważany za przykład ciągu rekurencyjnego (wyliczenie kolejnego elementu a_{n+1} wymaga znajomości elementu poprzedniego a_n).

Uwaga

Jeżeli:

1) $q > 1$ i początkowy wyraz ciągu jest dodatni,
 to ciąg geometryczny jest **rosnący**;
2) $q > 1$ i początkowy wyraz ciągu jest ujemny,
 to ciąg geometryczny jest **malejący;**
3) $q \in (0;1)$ i początkowy wyraz ciągu jest dodatni,
 to ciąg geometryczny jest **malejący**;
4) $q \in (0;1)$ i początkowy wyraz ciągu jest ujemny,
 to ciąg geometryczny jest **rosnący**;
5) $q < 0$, to ciąg geometryczny **nie jest monotoniczny**
 (przyjmuje na przemian wartości dodatnie i ujemne);
6) $q = 1$, to ciąg geometryczny jest **stały**;
7) $q = 0$, to wszystkie elementy ciągu geometrycznego
 (z wyjątkiem być może pierwszego) **równe są 0**.

Jeżeli pierwszy element ciągu geometrycznego równa się 0, to wszystkie elementy tego ciągu równe są 0.

Przykłady występowania ciągu geometrycznego:

1) Trzydzieści lat temu na wyspie X było 10 komputerów. Co roku liczba komputerów na wyspie X wzrasta dwukrotnie. Ile komputerów jest obecnie? Ile będzie za 5 lat?

$$a_1 = 10\ ,\ q = 2\ ,\ a_{n+1} = a_n \cdot 2\ .$$

$$a_2 = 20,\ a_3 = 40,\ a_4 = 80,\ a_5 = 160,\ \ldots$$

2) Siedem lat temu w mieście Y było 1 milion osób bez telefonu komórkowego. Co roku liczba ta zmniejsza się trzykrotnie. Ile osób obecnie jest bez telefonu komórkowego?

$$a_0 = 1000000\ ,\ q = 1/3\ ,\ a_{n+1} = a_n /3.$$

$$a_1 = 333333,\ a_2 = 111111,\ a_3 = 37040,\ a_4 = 12350,\ \ldots$$

Wzory dla ciągów geometrycznych

1) Obliczanie dowolnego wyrazu ciągu geometrycznego:

$a_n = a_0 \cdot q^n$, jeżeli wyraz początkowy to a_0;	**(1.6)**
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, jeżeli wyraz początkowy to a_1.	**(1.7)**

Tak określone (1.6, 1.7) ciągi geometryczne a_n nie są rekurencyjne (w celu wyznaczenia dowolnego *n* - tego elementu ciągu należy znać wielkości określające ciąg geometryczny: wyraz początkowy i stały iloraz *q*), nie jest wykorzystany poprzedni element ciągu a_{n-1}.

Uzasadnienie wzoru na dowolny wyraz ciągu geometrycznego jest proste: każdy kolejny wyraz powstaje poprzez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez iloraz *q*, czyli dla obliczenia elementu a_n mnożymy *n* - razy wartość *q* (w przypadku wyrazu początkowego a_0) lub n-1 krotnie wartość q (w przypadku wyrazu początkowego a_1).

Przykłady:

Jeżeli $a_0 = 3$, $q = 2$, to $a_{10} = 3 \cdot 2^{10} = 3072$.

Jeżeli $b_1 = -5$, $q = 0.5$, to $b_7 = -5 \cdot (0.5)^6 = -0.078125$.

2) Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1-q^n}{1-q} \cdot a_1 \text{ , jeżeli początkowy wyraz to } a_1;$$

$$S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i = \frac{1-q^n}{1-q} \cdot a_0 \text{ , jeżeli początkowy wyraz to } a_0. \quad \textbf{(1.8)}$$

Przykłady:

Jeżeli $a_0 = 3$, $q = 2$, to $a_{10} = 3072$ oraz

$$S_{11} = a_0 + a_1 + \ldots + a_{10} = \sum_{i=0}^{10} a_i = 3 + 6 + 12 + \ldots + 3072 = \frac{1-2^{11}}{1-2} \cdot 3 = 6141.$$

Jeżeli $b_1 = -5$, $q = 0.5$, to $b_7 = -0.078125$ oraz

$$S_7 = b_1 + b_2 + \ldots + b_7 = \sum_{i=1}^{7} b_i = -5 - \frac{5}{2} - \frac{5}{4} - \ldots - \frac{5}{64} = \frac{1-(0.5)^7}{1-0.5} \cdot (-5) =$$

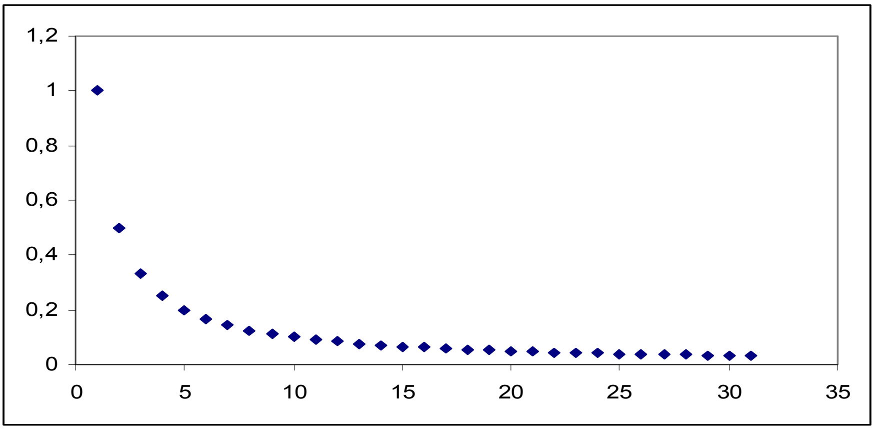
$$= -\frac{635}{64} = -9.921875.$$

* Dla dociekliwych pozostawiam udowodnienie wzorów (1.8), np. za pomocą indukcji matematycznej. Warto zauważyć, iż

$$\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{(1-q)(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1})}{1-q} = \sum_{i=0}^{n-1} q^n .$$

1.2 Definicja i własności granicy ciągu

Na początku rozdziału 1.1 omówiono przykłady ciągów liczbowych: $\sqrt{n}$, *1/n*, *(-1)*^{n}. Pierwszy z nich jest rosnący do nieskończoności dla coraz większych *n* (mówi się, że ma granicę +∞), drugi maleje do zera dla kolejnych *n* (jego granicą jest 0), a trzeci nie jest monotoniczny i przyjmuje na przemian dwie wartości (nie ma granicy).



Rys. 1.2. Ciąg trzydziestu jeden początkowych liczb postaci *1/n* umieszczonych jako punkty w układzie współrzędnych prostokątnych o współrzędnej *x* = 1,2,…,31 oraz o wartościach dążących do zera (zbliżających się do osi OY) - przykład wykresu punktowego.

Pojęcie „granicy ciągu" dotyczy „zachowania" kolejnych elementów ciągu dla coraz większych liczb *n* (dla *n* dążących do nieskończoności, czyli *n* → ∞).

Definicja 1.13

Liczba g jest *granicą ciągu* a_n (ciąg jest *zbieżny* do *g*), jeżeli:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in N \quad \forall n > m : |a_n - g| < \varepsilon \ .$$

Definicja 1.13 zawiera w sobie informację, iż dla dostatecznie dużych wartości *n* (dla *n* większych od pewnego *m*) elementy ciągu leżą „bardzo blisko” granicy, czyli $|a_n - g| < \varepsilon$ dla dowolnie małej dodatniej wartości ε. Na przykład elementy ciągu a_n = *1/n* leżą coraz bliżej liczby g = 0 dla coraz większych *n*.

Zauważmy, że zmiana ε ma wpływ na miejsce *m*, od którego wszystkie następne wyrazy ciągu leżą bliżej niż w odległości ε.

Notacja. Symbol „granicy ciągu” to: lim a_n = *g* lub $a_n \to g$ dla $n \to \infty$ (przy symbolu granicy ciągu zawsze będzie „ciche” założenie, iż $n \to \infty$).

<u>Przykład wyznaczenia granicy ciągu z definicji</u>: czy *1/n* → 0 *?*

Dla dowolnego ε > 0 znaleziony zostanie indeks *m* taki, aby $\forall n > m : |a_n - g| < \varepsilon$ dla a_n = *1/n* oraz g = 0. Wybierzmy ε i sprawdźmy, od którego miejsca wyrazy ciągu leżą bliżej niż ε od granicy g = 0.

$$|a_n - g| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ dla } n > \frac{1}{\varepsilon} = m \ ,$$

czyli dla $m = \frac{1}{\varepsilon}$ będącego pierwszą (mówimy - najmniejszą) liczbą naturalną, jaka przekracza liczbę rzeczywistą $\frac{1}{\varepsilon}$. Wtedy

$$\forall n > m : |a_n - g| = \frac{1}{n} < \varepsilon \, .$$

<u>* Przykład wyznaczenia granicy ciągu z definicji</u>: czy $\sqrt[n]{3} \to 1$ *?*

Dla dowolnego ε > 0 znaleziony zostanie indeks *m* taki, aby $\forall n > m : |a_n - g| < \varepsilon$ dla $a_n = \sqrt[n]{3}$ oraz g = 1. Wybierzmy ε i sprawdźmy, od którego miejsca wyrazy ciągu leżą bliżej niż ε od granicy g = 1.

$$|a_n - g| = |\sqrt[n]{3} - 1| = \sqrt[n]{3} - 1 < \varepsilon \text{ dla } n > \log_{\varepsilon+1} 3 = m \ ,$$

czyli dla $m = \log_{\varepsilon+1} 3$ będącego pierwszą (mówimy - najmniejszą) liczbą naturalną, jaka przekracza liczbę rzeczywistą $\log_{\varepsilon+1} 3$. Wtedy

$$\forall n > m : |a_n - g| = \sqrt[n]{3} - 1 < \varepsilon .$$

Własności granic dwóch ciągów zbieżnych

1) Suma ciągów zbieżnych: jeżeli $a_n \to g$ oraz $b_n \to h$, to $(a_n + b_n) \to (g+h)$.

Jeżeli dwa ciągi mają granicę, to suma tych ciągów także posiada granicę równą sumie granic.

Przykład: lim *1/n* = 0, lim *5* = *5*, zatem lim (5+*1/n*) = 5+0 = 5.

2) Różnica ciągów zbieżnych: jeżeli $a_n \to g$ oraz $b_n \to h$, to $(a_n - b_n) \to (g-h)$.

Jeżeli dwa ciągi mają granicę, to różnica tych ciągów także posiada granicę równą różnicy granic.

Przykład: lim *6/n* = 0, lim *5/n* = *0*, zatem lim (5/n-*6/n*) = 0-0 = 0.

3) Iloczyn ciągów zbieżnych: jeżeli $a_n \to g$ oraz $b_n \to h$, to $(a_n \cdot b_n) \to (g \cdot h)$.

Jeżeli dwa ciągi mają granicę, to iloczyn tych ciągów także posiada granicę równą iloczynowi granic.

Przykład: lim *9/n* = 0, lim (*-1/n)* = *0*, zatem lim (9/n)·(-1/*n*) = 0·0 = 0.

W szczególności, gdy b_n = b = const. (ciąg stały), to $(a_n \cdot b) \to (g \cdot b)$.

Przykład: lim $(9/n) = 0$, lim 7 = 7, zatem lim $7 \cdot (9/n) = 7 \cdot 0 = 0$.

4) Iloraz ciągów zbieżnych: jeżeli $a_n \to g$ oraz $b_n \to h$, to $(a_n \,/\, b_n) \to (g \,/\, h)$ o ile $b_n \neq 0$ i $h \neq 0$.

Jeżeli dwa ciągi mają granicę, to iloraz tych ciągów także posiada granicę równą ilorazowi granic pod warunkiem, iż ciąg z mianownika ma niezerowe wyrazy oraz granicę różną od zera.

Przykład: lim $9/n = 0$, lim 2 = 2, zatem lim $9/(2n) = 0/2 = 0$.

Rozważmy ***ciągi monotoniczne i ograniczone***. Jeżeli dany ciąg jest rosnący i jednocześnie ograniczony z góry (np. kolejne pokonywane wysokości w lekkoatletycznym skoku wzwyż są coraz większe, lecz ograniczone możliwościami zawodników i wysokością stojaka z poprzeczką), to nie może rosnąć do nieskończoności, lecz musi posiadać skończoną granicę. Analogicznie jeżeli ciąg jest malejący i jednocześnie ograniczony z dołu, to nie może maleć do minus nieskończoności, lecz musi posiadać skończoną granicę. Nasuwa się więc pytanie:

Czy istnieje związek pomiędzy monotonicznością i ograniczonością ciągu a istnieniem granicy?

Odpowiedź zawarta jest w następującym twierdzeniu:

Twierdzenie 1.1
Ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny, czyli ciąg rosnący i ograniczony z góry (np. $-1/n \to 0$) albo ciąg malejący i ograniczony z dołu (np. $1/n$) posiada granicę.

Inny przykład ciągu malejącego i ograniczonego z dołu: $a_n = (½)^n$ dla $n \in \mathbf{N}$. Kolejne wyrazy ciągu to: 1, ½, ¼, 1/8, 1/16… Jest to ciąg malejący, ograniczony z dołu przez 0 i zbieżny do zera. Ogólnie: ciąg postaci $a_n = s^n$ dla $s \in [0;1)$ dąży do zera.

Istnieją także ciągi, które nie są monotoniczne, ale są ograniczone i zbieżne, np. $a_n = (-½)^n$ dla $n \in \mathbf{N}$. Kolejne wyrazy ciągu to: 1, -½, ¼, -1/8, 1/16… Jest to ciąg ograniczony z góry przez 1 i ograniczony z dołu przez -½, wyrazy na przemian przyjmują wartości dodatnie i ujemne, zbiegają do 0. Ogólnie: ciąg postaci $a_n = s^n$ dla $s \in (-1;0)$ dąży do zera.

Wniosek: Ciąg $a_n = q^n$ dla $q \in (-1;1)$ dąży do zera.

Wniosek ten zostanie wykorzystany do wzoru na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego dla $n \to \infty$, czyli otrzymamy wzór na sumę wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego pod warunkiem, iż iloraz $q \in (-1;1)$.

Dany jest wzór: $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1-q^n}{1-q} \cdot a_1$.

Jeżeli $q^n \to 0$ dla $q \in (-1;1)$, to $S_n \to \frac{1-0}{1-q} \cdot a_1 = \frac{a_1}{1-q}$.

W szczególności dla $q = 0$ wszystkie wyrazy (z wyjątkiem pierwszego a_1) równe są zero i $S_n = \frac{a_1}{1-q} = a_1$.

Uwaga

Wyprowadzony wzór na sumę wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego

$$S = \frac{a_1}{1-q} \text{ dla } q \in (-1;1) \qquad \textbf{(1.9)}$$

posłuży do zamiany dowolnego ułamka okresowego na ułamek zwykły.

Przykład ***zamiany ułamka okresowego na zwykły*** (z wykorzystaniem wzoru 1.9): dany jest ułamek okresowy 0,(25).

0,(25) = 0,252525…= 0,25+0,0025+0,000025+… $= a_1 + a_2 + a_3 + ... = S$.

Jest to ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie a_1 = 0,25 oraz ilorazie

q = 0,01 ∈ (-1;1). Podstawiamy do wzoru:

$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{0{,}25}{1-0{,}01} = \frac{0{,}25}{0{,}99} = \frac{25}{99}$. Czyli $0,(25) = \frac{25}{99}$.

Zadanie: zamień ułamek okresowy 1,3(2) na ułamek zwykły. Uwaga: 1,3(2)=1,3+0,0(2). Dlaczego $1{,}3(2) = \frac{13}{10} + \frac{2}{90} = ...$?

A co z ułamkiem 2,(789) ? Co powiesz o zapisie 5,0(2)3 ?

Spróbujmy teraz wyjaśnić, jaka jest idea bardzo ważnego ***twierdzenia o trzech ciągach***. Załóżmy, iż trzy obiekty wyruszają z tego samego punktu z różną prędkością: obiekt *A* z najmniejszą prędkością, obiekt *B* ze średnią prędkością, obiekt *C* z największą prędkością: *v(A)<v(B)<v(C)*. Załóżmy również, iż w wyznaczonym przedziale czasowym [t_1, t_2] obiekty *A* oraz *C* mogą osiągnąć punkt docelowy *P*. Wynika z tego, iż także obiekt *B* może osiągnąć punkt docelowy *P* w wyznaczonym przedziale czasowym [t_1, t_2].

Jeżeli dodatkowo z jakiegoś powodu (np. niezbadana do końca nieskończoność w kosmosie) różnica pomiędzy t_1 a t_2 maleje i w końcu t_1 = t_2 = t, to również obiekt *B* może osiągnąć punkt docelowy *P* w czasie *t*.

Twierdzenie o trzech ciągach

Założenia

Dla ciągów a_n, b_n, c_n spełnione jest:

1) $\exists m \in N \quad \forall n > m : a_n \leq b_n \leq c_n$

(nierówność dla elementów ciągów zachodzi od pewnego indeksu *m*);

2) lim a_n = lim c_n = *g* (skrajne ciągi są zbieżne i mają taką samą granicę).

Teza

Ciąg b_n jest zbieżny oraz lim $b_n = g$.

Przykłady zastosowania tw. o trzech ciągach:

1) *1/n* < *2/n* < *3/n* dla $n \in$ $\mathbf{N}^+$; *1/n* → 0 i *3/n* → 0 ; czyli *2/n* → 0.

Uwaga: spróbuj wykazać granicę ciągów *2/n* i *3/n* z definicji (tak jak powyżej dla ciągu *1/n).*

2) Dlaczego a_n = $(½)^n$ → 0? Nierówność $0 \leq (\frac{1}{2})^n \leq \frac{1}{n+1}$ zachodzi dla każdego $n \in$ **N**. Skrajne ciągi dążą do zera, więc środkowy również. Można także posłużyć się nierównością $0 \leq (\frac{1}{2})^n \leq \frac{1}{n}$ dla każdego $n \in$ $\mathbf{N}^+$.

3) Znajdź granicę ciągu $a_n = \sqrt[n]{2^n + 5^n + 6^n}$ dla $n \in$ $\mathbf{N}^+$.

Spełniona jest nierówność dla każdego $n \in$ $\mathbf{N}^+$:

$$6^n < 2^n + 5^n + 6^n < 6^n + 6^n + 6^n .$$

Zatem zachodzi również : $\sqrt[n]{6^n} < \sqrt[n]{2^n + 5^n + 6^n} < \sqrt[n]{3 \cdot 6^n}$.

Ciąg $\sqrt[n]{6^n} = 6$, natomiast ciąg $\sqrt[n]{3 \cdot 6^n} = 6 \cdot \sqrt[n]{3} \to 6 \cdot 1 = 6$, ponieważ ciąg $\sqrt[n]{3}$ jest malejący (wykaż to*), ograniczony z dołu i kres dolny wartości elementów ciągu wynosi 1, a więc jest zbieżny do granicy 1 (granicę tę wykazaliśmy wcześniej z definicji). Na mocy twierdzenia o trzech ciągach:

$$\sqrt[n]{2^n + 5^n + 6^n} \to 6 .$$

Wynik ten można skomentować następująco: *w nieskończoności (czyli przy obliczaniu granicy ciągu) najbardziej istotną rolę odgrywa największy składnik* (w tym przypadku element 6^n pod pierwiastkiem n-tego stopnia).

Ciągi zbieżne do ± nieskończoności

Często w literaturze matematycznej używane jest pojęcie „ciągi rozbieżne do nieskończoności". Rozsądniej jest jednak zarezerwować pojęcie „ciąg rozbieżny" dla ciągu, który nie ma granicy (np. $(-1)^n$) i traktować granicę $\pm\infty$ jako pełnoprawną wraz z granicami liczbowymi.

Kiedy ciąg może mieć granicę w ± nieskończoności:

1) Ciąg rosnący i nieograniczony z góry na pewno rośnie (zbiega) do plus nieskończoności.

2) Ciąg malejący i nieograniczony z dołu na pewno maleje (zbiega) do minus nieskończoności.

Definicja 1.14a

Ciąg a_n jest zbieżny do $+\infty$, jeżeli:

$$\forall s > 0 \quad \exists m \in N \quad \forall n > m : a_n > s .$$

Oznacza to, iż dla dowolnie dużej liczby rzeczywistej s można znaleźć taki indeks m , aby $\forall n > m : a_n > s$.

Definicja 1.14b

Ciąg a_n jest zbieżny do -∞, jeżeli:

$$\forall s < 0 \quad \exists m \in N \quad \forall n > m : a_n < s \,,$$

Oznacza to, iż dla dowolnie małej liczby rzeczywistej *s* można znaleźć taki indeks *m* , aby $\forall n > m : a_n < s$.

Przykład wyznaczenia granicy ciągu $a_n = \sqrt{n}$ z definicji 1.14a. Czy $\sqrt{n} \to \infty$?

Dla dowolnego *s* > 0 znaleziony zostanie indeks *m* taki, aby $\forall n > m : a_n > s$.

$$a_n = \sqrt{n} > s \,;\; n > s^2 = m \;;\; m = s^2 \,.$$

Czyli $m = s^2$ oraz $\forall n > m : \sqrt{n} > s$.

Przykład wyznaczenia granicy ciągu $a_n = -n$ z definicji 1.14b. Czy $-n \to -\infty$?

Dla dowolnego *s* < 0 znaleziony zostanie indeks *m* taki, aby $\forall n > m : a_n < s$.

$$a_n = -n < s \,;\; n > -s = m \;;\; m = -s \,.$$

Czyli $m = -s$ oraz $\forall n > m : -n < s$.

W przypadku ciągów o granicy nieskończonej twierdzenie o trzech ciągach może zostać zredukowane do dwóch twierdzeń o dwóch ciągach. Oto dwie wersje **twierdzenia o dwóch ciągach**:

Twierdzenie 1.2

Jeżeli dla ciągów a_n , b_n spełnione jest:

1) $\exists m \in N \quad \forall n > m : a_n \le b_n$

(nierówność dla elementów ciągów zachodzi od pewnego *m*);

2) lim a_n = +∞ (ciąg o mniejszych wyrazach dąży do nieskończoności).

Wówczas: lim b_n = +∞.

Przykład zastosowania tw. 1.2: $n \le n^2$ dla każdego $n \in$ **N**; lim $n = \infty$, więc lim $n^2 = \infty$.

Twierdzenie 1.3

Jeżeli dla ciągów a_n, b_n spełnione jest:

1) $\exists m \in N \quad \forall n > m : a_n \le b_n$

(nierówność dla elementów ciągów zachodzi od pewnego m);

2) lim $b_n = -\infty$ (ciąg o większych wyrazach dąży do minus nieskończoności).

Wówczas: lim $a_n = -\infty$.

Przykład zastosowania tw. 1.3: $-n \le -\sqrt{n}$ dla każdego $n \in$ **N**; lim $(-\sqrt{n}) = -\infty$, więc lim $(-n) = -\infty$.

Własności granic ciągów w nieskończoności i zerze (symbole oznaczone i nieoznaczone)

Symbolami oznaczonymi nazywamy takie działania na ciągach zbieżnych do $\pm\infty$ i do 0, których wynik można przewidzieć natychmiast, bez długich przekształceń i obliczeń.

Przykłady symboli oznaczonych:

1) Jeżeli lim $a_n = \pm\infty$, to lim $(1/a_n) = 0$.

Przykład: $a_n = \sqrt{n}$, $a_n = -n^3$, $a_n = (-2)^n$.

Symbol oznaczony: $\frac{1}{\pm\infty} = 0$.

2) Jeżeli lim $a_n = 0$ oraz $\exists m \in N \quad \forall n > m : a_n > 0$, to lim $(1 / a_n) = +\infty$.

Przykład: $a_n = 6/n$, $a_n = (½)^n$.

Symbol oznaczony: $\frac{1}{0^+} = \infty$.

Symbol "0^+" oznacza zbieżność ciągu do zera od strony liczb dodatnich.

3) Jeżeli lim $a_n = 0$ oraz $\exists m \in N \quad \forall n > m : a_n < 0$, to lim $(1 / a_n) = -\infty$.

Przykład: $a_n = -8/n$, $a_n = -(½)^n$.

Symbol oznaczony: $\frac{1}{0^-} = -\infty$.

Symbol "0^-" oznacza zbieżność ciągu do zera od strony liczb ujemnych.

Uwaga Jeżeli lim $a_n = 0$ oraz wyrazy ciągu nie mają stałego znaku (z wyjątkiem skończonej liczby początkowych elementów), to lim $(1/a_n)$ nie istnieje.

Przykład: $a_n = (-½)^n$, lim $1/a_n$ nie istnieje.

4) Jeżeli lim $a_n = \infty$ oraz lim $b_n = \infty$, to:

$$\lim (a_n \cdot b_n) = \infty, \ \lim (a_n + b_n) = \infty, \ \lim (a_n^{\,b_n}) = \infty$$

dla $a_n > 0$ począwszy od pewnego n.

Przykład: $a_n = \sqrt{2n}$, $b_n = n^5$.

Symbole oznaczone: $\infty \cdot \infty = \infty$, $\infty + \infty = \infty$, $\infty^{\infty} = \infty$.

5) Jeżeli $\lim a_n = -\infty$ oraz $\lim b_n = \infty$, to:

$$\lim (a_n \cdot b_n) = -\infty \text{ , } \lim (a_n - b_n) = -\infty, \lim (b_n^{\ an}) = 0$$

dla $b_n > 0$ począwszy od pewnego n.

Przykład: $a_n = -\sqrt{3n}$, $b_n = 7n^5$.

Symbole oznaczone: $(-\infty) \cdot \infty = -\infty$, $-\infty - \infty = -\infty$, $\infty^{-\infty} = 0$.

6) Jeżeli $\lim a_n = -\infty$ oraz $\lim b_n = -\infty$, to:

$$\lim (a_n \cdot b_n) = \infty \text{ , } \lim (a_n + b_n) = -\infty, \lim (a_n^{\ bn}) = 0.$$

Przykład: $a_n = -4\sqrt{3n}$, $b_n = -2n^9$.

Symbole oznaczone: $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$, $(-\infty)^{-\infty} = 0$.

***Symbole nieoznaczone* - ** działania na ciągach zbieżnych do $\pm\infty$ i do 0, których wyniku nie można przewidzieć natychmiast: wynik działania zależy od konkretnych ciągów i wymaga obliczenia dla danego przypadku.

Przykłady symboli nieoznaczonych:

1) Jeżeli $\lim a_n = \infty$ oraz $\lim b_n = \infty$, to:

$$\lim (a_n - b_n) = ? \text{ , } \lim (a_n / b_n) = ?.$$

Przykłady: $\lim (n - n) = 0$, $\lim (n^2 - n) = \lim n(n-1) = \infty$.

$$\lim (n/n) = 1 \text{ , } \lim (n^2/n) = \lim n = \infty.$$

Symbole nieoznaczone: $\infty - \infty$, $\pm \infty / \infty$.

2) Jeżeli lim $a_n = 0$ oraz lim $b_n = 0$, to lim (a_n / b_n) = ?

Przykłady: lim $(1/n)/(1/n) = 1$, lim $(1/n^2)/(1/n)$ = lim $(1/n) = 0$.

Symbol nieoznaczony: 0 / 0.

3) Jeżeli lim $a_n = 0$ oraz lim $b_n = \infty$, to lim $(a_n \cdot b_n)$ = ?

Przykłady: lim $(1/n)\cdot n = 1$, lim $(1/n^2)\cdot n$ = lim $(1/n) = 0$.

Symbol nieoznaczony: $0 \cdot \pm\infty$.

4) Jeżeli lim $a_n = 1$ oraz lim $b_n = \infty$, to lim $(a_n{}^{bn})$ = ?

Przykłady: lim $1^n = 1$, lim $(1+\frac{1}{n})^n$ = 2,718281… = e (liczba Eulera – podstawa logarytmu naturalnego).

Symbol nieoznaczony: 1^∞.

5) Jeżeli lim $a_n = \infty$ oraz lim $b_n = 0$, to lim $(a_n{}^{bn})$ = ?

Przykłady: lim $n^0 = 1$, lim $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = 1$, ale $\sqrt[n]{2^n + 5^n + 6^n} \to 6$.

Symbol nieoznaczony: ∞^0.

Przy wyznaczaniu granicy ciągu będącej symbolem nieoznaczonym w wielu przypadkach dokonuje się dozwolonych przekształceń algebraicznych i sprowadza się wyraz ciągu do postaci symbolu oznaczonego lub wykorzystuje się znane już granice (przykłady poniżej).

1.3 Wyznaczanie granicy ciągu

Przykłady obliczeń granicy ciągu (najwięcej przykładów dotyczy oczywiście ciągów, których granice tworzą symbole nieoznaczone). Przy każdej granicy zastanów się, jaki symbol nieoznaczony przedstawia:

1) $\lim(\sqrt{2n}-\sqrt{n}) = \lim\sqrt{n}(\sqrt{2}-1)$ = c· ∞ = ∞ dla c > 0.

2) $\lim(\sqrt{2n}-\sqrt{3n}) = \lim\sqrt{n}(\sqrt{2}-\sqrt{3})$ = c· ∞ = -∞ dla c < 0.

3) $\lim(8^n-7^n) = \lim\ 8^n(1-\frac{7^n}{8^n}) = \lim\ 8^n(1-(\frac{7}{8})^n) = \lim\ 8^n(1-0) =$

$= \lim 8^n = \infty$.

4) $\lim\frac{5n+1}{2n-3} = \lim\frac{n(5+\frac{1}{n})}{n(2-\frac{3}{n})} = \lim\frac{5+\frac{1}{n}}{2-\frac{3}{n}} = \frac{5}{2}$.

Uwaga

Jeżeli w liczniku i mianowniku występują wyrażenia wielomianowe oraz największa potęga *n* jest taka sama, to granicą ciągu jest ułamek złożony ze współczynników przy największej potędze z licznika i mianownika.

5) $\lim \dfrac{-7n^3+1}{2n^3-3} = \lim \dfrac{n^3(-7+\frac{1}{n^3})}{n^3(2-\frac{3}{n^3})} = \lim \dfrac{-7+\frac{1}{n^3}}{2-\frac{3}{n^3}} = \dfrac{-7}{2}$.

6) $\lim \dfrac{7n^2-5n+1}{8n+3} = \lim \dfrac{n^2(7-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2})}{n(8+\frac{3}{n})} = \lim \dfrac{n(7-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2})}{8+\frac{3}{n}} = \dfrac{\infty}{8} = \infty$.

Uwaga

Jeżeli w liczniku i mianowniku występują wyrażenia wielomianowe oraz w liczniku występuje większa potęga *n* niż w mianowniku i współczynniki przy największych potęgach w liczniku i mianowniku mają ten sam znak, to granicą ciągu jest ∞.

7) $\lim \dfrac{7n^3-5n+1}{-8n+3} = \lim \dfrac{n^3(7-\frac{5}{n^2}+\frac{1}{n^3})}{n(-8+\frac{3}{n})} =$

$= \lim \dfrac{n^2(7-\frac{5}{n^2}+\frac{1}{n^3})}{-8+\frac{3}{n}} = \dfrac{\infty}{-8} = -\infty$.

Uwaga

Jeżeli w liczniku i mianowniku występują wyrażenia wielomianowe oraz w liczniku występuje większa potęga *n* niż w mianowniku i współczynniki przy największych potęgach w liczniku i mianowniku mają inny znak, to granicą ciągu jest $-\infty$.

8) $\lim \dfrac{7n^2-5n+1}{8n^4+3n^3-n}$ = $\lim \dfrac{n^2(7-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^4(8+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^3})}$ =

= $\lim \dfrac{7-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}{n^2(8+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^3})}$ = $\dfrac{7}{\infty}=0$.

> **Uwaga**
> Jeżeli w liczniku i mianowniku występują wyrażenia wielomianowe oraz w mianowniku występuje większa potęga *n* niż w liczniku, to granicą ciągu jest 0.

9) lim $(-3)^n$ nie istnieje (dlaczego?).

10) $\lim (1+\frac{2}{n})^n$ = $\lim [(1+\frac{2}{n})^{\frac{n}{2}}]^2$ = e^2.

11) $\lim (1-\frac{1}{n})^n$ = $\lim [(1+\frac{-1}{n})^{-n}]^{-1}$ = e^{-1}=1/e.

12) $\lim (\frac{5n+2}{5n})^n$ = $\lim [(1+\frac{2}{5n})^n$ = $\lim [(1+\frac{2}{5n})^{\frac{5n}{2}}]^{\frac{2}{5}}$ = $e^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{e^2}$.

13) lim (2n-1) = ∞ (ciąg arytmetyczny – dlaczego?).

14) lim (-n+5) = $-\infty$ (ciąg arytmetyczny – dlaczego?).

15) $\lim (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ = $\lim (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ =

= $\lim \dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ = $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\dfrac{1}{\infty}=0$.

16) lim $(2\sqrt{n+1}-\sqrt{4n})$ = lim $(2\sqrt{n+1}-\sqrt{4n})\cdot\dfrac{2\sqrt{n+1}+\sqrt{4n}}{2\sqrt{n+1}+\sqrt{4n}}$ =

= lim $\dfrac{4(n+1)-4n}{2\sqrt{n+1}+\sqrt{4n}}$ = lim $\dfrac{4}{2\sqrt{n+1}+\sqrt{4n}}=\dfrac{4}{\infty}=0$.

17) lim $\dfrac{1}{n}\cdot\sqrt{n}$ = lim $\dfrac{1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}\cdot\sqrt{n}$ = lim $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ =0.

18) lim $n\cdot\sin(\dfrac{1}{n})=1$ (granica tego typu pojawi się w rozdziale 3).

19) lim $n\cdot\sin(\dfrac{1}{3n})=$ lim $\dfrac{1}{3}\cdot 3n\cdot\sin(\dfrac{1}{3n})=\dfrac{1}{3}$.

20) lim $\sqrt[n]{n}=1$.

21) lim $\sqrt[n]{a}=1$ dla każdego *a*>0.

22) $\sqrt[n]{4^n+5^n}\to 5$ (tw. o trzech ciągach).

23) $\sqrt[n]{0.4^n+8^n+9^n+0.3^n}\to 9$ (tw. o trzech ciągach).

24) lim $\dfrac{2^{2n}+5}{4^n-9}=$ lim $\dfrac{4^n+5}{4^n-9}=$ lim $\dfrac{4^n(1+\frac{5}{4^n})}{4^n(1-\frac{9}{4^n})}=$ lim $\dfrac{4^n}{4^n}=1$.

25) lim $\dfrac{7\cdot 2^{2n}+5}{4^n-9}=$ lim $\dfrac{7\cdot 4^n+5}{4^n-9}=$ lim $\dfrac{4^n(7+\frac{5}{4^n})}{4^n(1-\frac{9}{4^n})}=$ lim $\dfrac{7\cdot 4^n}{4^n}=7$.

1.4 Przykładowe zastosowania ciągów

1) Jak przybliżyć $\sqrt{a}$ dla dowolnej liczby rzeczywistej a > 0?

Niech $\sqrt{a} = x > 0$. Dany jest ciąg przekształceń:

$$a = x^2 \text{ /:2,}$$

$$\frac{a}{2} = \frac{x^2}{2} \text{ /:x>0,}$$

$$\frac{a}{2x} = \frac{x}{2},$$

$$\frac{a}{2x} = x - \frac{x}{2},$$

$$x = \frac{a}{2x} + \frac{x}{2},$$

$$x = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x}).$$

Ostatnie równanie jest podstawą do utworzenia ciągu kolejnych przybliżeń $\sqrt{a}$ dla dowolnej liczby rzeczywistej a > 0. Ciąg kolejnych przybliżeń x_n jest następujący:

$$x_o = a \text{ , } x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}), x_n \rightarrow \sqrt{a} \text{ dla } n \in \mathbf{N} \text{ oraz } a > 0. \qquad \textbf{(1.10)}$$

Uzasadnienie zbieżności ciągu 1.10 (zasada indukcji matematycznej):

$x_o = a$, $x_1 = \dfrac{a+1}{2}$, x_1 leży bliżej od $\sqrt{a}$ niż x_0;

jeżeli $x_n \rightarrow \sqrt{a}$, to $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + \dfrac{a}{x_n}) \rightarrow \dfrac{1}{2}(\sqrt{a} + \dfrac{a}{\sqrt{a}}) = \sqrt{a}$;

zatem: $\left|x_{n+1} - x_n\right| \to \left|\sqrt{a} - \sqrt{a}\right| = 0$.

Jest to (1.10) ciąg rekurencyjny – do obliczenia kolejnej wartości x_{n+1} potrzebny jest element poprzedni x_n, wymagana jest wartość początkowa (x_0 lub x_1).

Przykład: a = 2, $\sqrt{2} = ?$

Wartość startowa (początkowa) $x_o = 2$;

Pierwsze przybliżenie: $x_1 = \frac{1}{2}(x_0 + \frac{a}{x_0}) = \frac{a+1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$ (nie do przyjęcia).

> **Uwaga**
>
> W praktyce obliczenia można zacząć od wartości początkowej $x_1 = \frac{a+1}{2}$.

Drugie przybliżenie: $x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + \frac{a}{x_1}) = \frac{17}{12} = 1{,}41(6)$ - jeżeli do dalszych obliczeń wystarczająca jest jedna cyfra po przecinku, to już mamy wynik: $\sqrt{2} \approx 1{,}4$.

Trzecie przybliżenie: $x_3 = \frac{1}{2}(x_2 + \frac{a}{x_2}) = 1{,}414215686$, co daje dobre przybliżenie już do czwartej cyfry po przecinku: $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$.

Oblicz czwarte przybliżenie: $x_4 = \frac{1}{2}(x_3 + \frac{a}{x_3})$. A piąte?

Każde kolejne przybliżenie pierwiastka gwarantuje większą dokładność obliczeń. Kiedy zakończyć obliczenia pierwiastka? Możliwości są co najmniej dwie: albo podamy, dla jakiego *n* chcemy zakończyć przybliżenie x_n (gorsze rozwiązanie – dlaczego?); albo dla dowolnego a > 0 podamy dokładność, z jaką chcemy zakończyć obliczenia (lepsze rozwiązanie – dlaczego?).

Granica ciągu kolejnych przybliżeń:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) \to \sqrt{a} \text{ dla } x_o = a > 0 \text{ oraz } n \in \mathbf{N}.$$

Dla a = *0* podajemy oddzielnie: $\sqrt{0} = 0$.

Zadanie: Wyznacz przybliżenie $\sqrt{3}$ z dokładnością 0,001 (do trzeciej cyfry po przecinku), oblicz przybliżenie $\sqrt{13}$ z dokładnością 0,01 (do drugiej cyfry po przecinku).

2) Ciąg liczb Fibonacciego.

Leonardo z Pizy (zwany Fibonaccim) w 13. wieku określił szczególny ciąg liczb naturalnych, w którym każdy element jest sumą dwóch poprzednich. Czyli jest to rekursja, która do wyznaczenia aktualnej wartości ciągu nie wykorzystuje tylko jednego poprzedniego elementu (jak np. w przybliżaniu pierwiastka), lecz dwa ostatnie wyrazy ciągu.

Definicja liczb Fibonacciego

F(0) = 0, F(1) = 1, F(n+2) = F(n+1) + F(n) dla $n \in$ **N**.

Czyli jest to ciąg liczb rosnący do nieskończoności: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89… Największą niedogodnością definicji rekurencyjnej jest konieczność wyznaczenia wszystkich liczb od *F(2)* do np. *F(999)*, podczas gdy interesuje nas tylko *F(1000)*. Pojawia się tutaj bardzo istotne zagadnienie *eliminacji rekursji*, czyli wyznaczenie tych samych elementów ciągu w sposób jawny – bez obliczania elementów poprzednich. W przypadku liczb Fibonacciego otrzymano następujący wzór (1.11) na dowolny wyraz ciągu (Dlaczego właśnie taki wzór? Odpowiedź na przedmiocie „Matematyka dyskretna i logika”):

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n] \text{ dla } n \in \mathbf{N}. \quad \mathbf{(1.11)}$$

Jest to wzór jawny, wymagający podstawienia dowolnego *n*. Oblicz na podstawie tego wzoru kilka początkowych elementów ciągu.

3) Kwadrat dowolnej liczby naturalnej

Do czego może być przydatna suma kolejnych liczb nieparzystych: 1+3+5+7+…? Zdefiniowano ciąg: $a_n = \sum_{i=1}^{n}(2i-1)$. Początkowe elementy ciągu a_n:

$$a_0 = \sum_{i=1}^{0}(2i-1) = 0;$$

Uwaga

Przyjmuje się, że zawsze, gdy górna granica sumowania jest mniejsza od dolnej granicy, wynik sumowania jest 0.

$$a_1 = \sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1;$$

$$a_2 = \sum_{i=1}^{2}(2i-1) = 1 + 3 = 4;$$

$$a_3 = \sum_{i=1}^{3}(2i-1) = 1 + 3 + 5 = 9;$$

$a_4 = \sum_{i=1}^{4}(2i-1) = 1 + 3 + 5 + 7 = 16\ldots$i tak dalej sumuje się kolejne liczby nieparzyste.

Co otrzymano jako wynik sumowania? Kwadraty kolejnych liczb naturalnych. Wzór na ciąg a_n można zapisać (1.12) w wersji rekurencyjnej:

$$a_{n+1} = a_n + 2(n+1) - 1 = a_n + 2n + 1 \text{ dla } a_0 = 0 \text{ oraz } n \in \mathbf{N}. \qquad \textbf{(1.12)}$$

Otrzymano więc wzory (1.13, 1.14) na kwadraty kolejnych liczb naturalnych:

$$n^2 = a_n = \sum_{i=1}^{n} (2i - 1) \text{ dla } n \in \mathbf{N}, \qquad \textbf{(1.13)}$$

$$n^2 = a_n = a_{n-1} + 2n - 1 \text{ dla } a_0 = 0 \text{ oraz } n \in \mathbf{N}^+. \qquad \textbf{(1.14)}$$

Z drugiej strony kolejne liczby nieparzyste dodatnie tworzą ciąg arytmetyczny b_n o pierwszym wyrazie $b_1 = 1$ i stałej różnicy $r = 2$. Można więc wykorzystać wzór na sumę kolejnych n elementów ciągu arytmetycznego:

$$b_1 + b_2 + ... + b_n = \sum_{i=1}^{n} b_n = \frac{b_1 + b_n}{2} \cdot n = \frac{1 + 2n - 1}{2} \cdot n = n^2. \qquad \textbf{(1.15)}$$

Czyli faktycznie suma kolejnych n liczb nieparzystych równa jest n^2 (uzasadnienie 1.15). Innym dowodem tego stwierdzenia może być dowód indukcyjny (patrz: „Matematyka dyskretna i logika”). Otrzymano więc sposób obliczania kwadratu liczby naturalnej wykorzystujący tylko dodawanie. Można także zapisać:

$$n^2 = \sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) =$$

$$= 1 + (1 + 2) + (1 + 4) + ... + (1 + 2n - 2) = \sum_{i=1}^{n} (1 + 2i - 2) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n} 2(i - 1) = n + 2\sum_{i=1}^{n} (i - 1)$$

oraz

$$n^2 = \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = \sum_{i=1}^{n}2i - \sum_{i=1}^{n}1 = 2\sum_{i=1}^{n}i - n = -n + 2\sum_{i=1}^{n}i .$$

Otrzymano wzory 1.16 oraz 1.17 wykorzystujące sumy kolejnych liczb parzystych:

$$n^2 = n + 2\sum_{i=1}^{n}(i-1) \ , \qquad \textbf{(1.16)}$$

$$n^2 = -n + 2\sum_{i=1}^{n}i . \qquad \textbf{(1.17)}$$

4) Przybliżenie liczby *e*

Na końcu rozdziału 1.2, jako przykład granicy będącej symbolem nieoznaczonym nr 4, określono liczbę Eulera *e* = lim $(1+\frac{1}{n})^n$ = 2,718281…

Innym sposobem wyznaczenia liczby *e* jest obliczenie sumy:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots \qquad \textbf{(1.18)}$$

Pochodzenie wzoru 1.18 wiąże się ze wzorem Taylora (patrz rozdział 4) w analizie matematycznej. Przypomnijmy definicję funkcji „silnia”:

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n \ \text{ dla } n \in \mathbf{N}. \qquad \textbf{(1.19)}$$

Ze wzoru 1.19 wynika, iż 0! = 1 (jeżeli górna granica iloczynu $\prod$ jest mniejsza od dolnej granicy, to wartość iloczynu wynosi 1). Zatem:

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} ...$$

Większa dokładność przybliżenia wymaga więc dodania kolejnego wyrazu ciągu $\frac{1}{n!}$.

1.5 Zadania

1) Zbadaj monotoniczność i ograniczoność ciągu $a_n = \sqrt{\frac{1}{n}}$.

2) Zbadaj monotoniczność i ograniczoność ciągu $a_n = n^{-3}$.

3) Wyznacz siódmy element ciągu arytmetycznego a_n, jeżeli $a_1 = 0{,}3$ i *r* = 1,5. Oblicz sumę pierwszych siedmiu elementów tego ciągu.

4) Wyznacz piąty element ciągu geometrycznego a_n, jeżeli $a_1 = 8$ i *q* = 0,5. Oblicz sumę pierwszych pięciu elementów tego ciągu.

5) Udowodnij z definicji granicy ciągu, że $a_n = \frac{1}{2\sqrt{n}} \to 0.$

6) Udowodnij z definicji granicy ciągu, że $a_n = \frac{1}{3n^2} \to 0.$

7) Zamień ułamek okresowy 0,(12) na ułamek zwykły.

8) Zamień ułamek okresowy 3,5(2) na ułamek zwykły.

9) Pokaż z definicji granicy ciągu, że $a_n = \sqrt[3]{n} \to \infty.$

10) Pokaż z definicji granicy ciągu, że $a_n = 2^n \to \infty.$

11) Pokaż z definicji granicy ciągu, że $a_n = -\sqrt[5]{n} \to -\infty.$

12) Pokaż z definicji granicy ciągu, że $a_n = -n^3 \to -\infty.$

13) Oblicz lim$(\sqrt{2n} - \sqrt{5n})$.

14) Oblicz lim $\dfrac{5n^3+1}{12n^3-3}$.

15) Oblicz lim $\dfrac{7n^4-15n+1}{18n+3}$.

16) Oblicz lim $\dfrac{6n^2-5n+61}{8n^7+3}$.

17) Oblicz lim $(1+\dfrac{7}{n})^n$.

18) Oblicz lim $(\dfrac{9n+8}{9n})^n$.

19) Oblicz lim $(3\sqrt{n-7}-\sqrt{9n})$.

20) Oblicz lim $2n\cdot\sin(\dfrac{1}{5n})$.

21) * Wyznacz szóste przybliżenie $\sqrt{5}$.

22) *Wyznacz przybliżenie $\sqrt{7}$ z dokładnością 0,01.

23) *Wyznacz przybliżenie liczby *e* z dokładnością 0,001.

24) Wyznacz największą trzycyfrową liczbę Fibonacciego.

25) Wyznacz najmniejszą trzycyfrową liczbę Fibonacciego, która jest liczbą pierwszą.

26) *Oblicz 13^2 za pomocą samych dodawań.

27) Podaj przykład ciągu malejącego, którego granicą jest liczba 5.

28) Podaj przykład ciągu rosnącego, którego granicą jest liczba -6.

29) Podaj przykład ciągu ograniczonego, który jest rozbieżny.

30) Podaj przykład ciągu, który jest jednocześnie arytmetyczny i geometryczny.

31) Udowodnij z definicji granicy, iż ciąg stały zawsze jest zbieżny.

32) Zastosuj tw. o trzech ciągach w przypadku ciągu $a_n=\sqrt[n]{8^n+5^n+6^n}$.

33) Zastosuj tw. o trzech ciągach w przypadku ciągu $a_n=\sqrt[n]{4^n+0.9^n}$.

34) lim $\dfrac{3\cdot 5^{2n}+15}{2\cdot 25^n-92}=?$

35) lim $\dfrac{(-0.9)^n}{5^n-2}=?$

36) lim $(\sqrt{9n^2+91}-3n)$ = ?

37) lim $(\sqrt{4n^2+9n-6}-2n)$ = ?

38) *Czy ciąg malejący może dążyć do ∞? Uzasadnij odpowiedź.

39) *Czy ciąg rosnący może dążyć do $-\infty$? Uzasadnij odpowiedź.

40) *Czy ciąg nieograniczony może mieć skończoną granicę?

41) lim $\dfrac{5^{2n}+5}{5^n-2}=?$

42) lim $\dfrac{9^n}{8^n-422}=?$

43) lim $(\sqrt{n^2+1}-2n)$ = ?

44) lim $(\sqrt{4n^2+9n-6}-9n)$ = ?

Odpowiedzi

1) Ciąg malejący o wartościach z przedziału (0;1].

2) Ciąg malejący o wartościach z przedziału (0;1].

3) $a_7=9{,}3$. **4)** $a_5=q$.

5) Dla dowolnego ε > 0 znaleziony zostanie indeks *m* taki, aby

$\forall n>m:|a_n-g|<\varepsilon$ dla $a_n=\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ *i g* = 0.

$$|a_n-g|=\left|\frac{1}{2\sqrt{n}}-0\right|=\frac{1}{2\sqrt{n}}<\varepsilon\ ,\ n>\frac{1}{4\varepsilon^2}=m\ .$$

Czyli $m = \frac{1}{4\varepsilon^2}$ i $\forall n > m : |a_n - g| = \frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon$.

6) Dla dowolnego ε > 0 znaleziony zostanie indeks *m* taki, aby

$\forall n > m : |a_n - g| < \varepsilon$ dla $a_n = \frac{1}{3n^2}$ *i* $g = 0$.

$|a_n - g| = \left|\frac{1}{3n^2} - 0\right| = \frac{1}{3n^2} < \varepsilon$, $n > \frac{1}{\sqrt{3\varepsilon}} = m$.

Czyli $m = \frac{1}{\sqrt{3\varepsilon}}$ i $\forall n > m : |a_n - g| = \frac{1}{3n^2} < \varepsilon$.

7) $0,(12) = \frac{12}{99}$.

9) Dla dowolnego *s* > 0 znaleziony zostanie indeks *m* taki, aby

$\forall n > m : a_n > s$.

$a_n = \sqrt[3]{n} > s$; $n > s^3 = m$; $m = s^3$. Czyli $m = s^3$ oraz $\forall n > m : \sqrt[3]{n} > s$.

10) Dla dowolnego *s* > 0 znaleziony zostanie indeks *m* taki, aby

$\forall n > m : a_n > s$.

$a_n = 2^n > s$; $n > \log_2 s = m$. Czyli $m = \log_2 s$ oraz $\forall n > m : 2^n > s$.

11) Dla dowolnego *s* < 0 znaleziony zostanie indeks *m* taki, aby

$\forall n > m : a_n < s$.

$a_n = -\sqrt[5]{n} < s$; $n > (-s)^5 = m$; $m = (-s)^5$. Czyli $m = (-s)^5$ oraz

$\forall n > m : -\sqrt[5]{n} < s$.

12) Dla dowolnego *s* < 0 znaleziony zostanie indeks *m* taki, aby

$\forall n > m : a_n < s$.

$a_n = -n^3 < s$; $n > \sqrt[3]{-s} = m$. Czyli $m = \sqrt[3]{-s}$ oraz $\forall n > m : -n^3 < s$.

13) $-\infty$. **14)** $\frac{5}{12}$. **15)** ∞. **16)** 0. **17)** e^7. **18)** $\sqrt[9]{e^8}$. **19)** 0. **20)** $\frac{2}{5}$. **24)** 987.

25) 233. **27)** $a_n = 5 + \frac{89}{n}$. **28)** $a_n = -6 - \frac{5689}{n}$. **29)** $a_n = (-1)^n$.

30) $a_n = 51$. **31)** Dla dowolnego ε > 0 $\forall n : |a_n - g| = 0 < \varepsilon$. **32)** $a_n \to 8$.

33) $a_n \to 4$. **34)** $\frac{3}{2}$. **35)** 0. **36)** 0. **37)** $\frac{9}{4}$. **38)** Nie. **39)** Nie. **40)** Nie. **41)** ∞.

42) ∞. **43)** $-\infty$. **44)** $-\infty$.

Rozdział 2. Funkcje jednej zmiennej rzeczywistej

2.1 Rodzaje funkcji elementarnych

Kiedy mamy do czynienia z pojęciem „funkcji"? Każdy używany samochód ma swój nr rejestracyjny. Oczywiście niektóre tablice rejestracyjne leżą jeszcze w urzędzie nieodebrane. Nie zmienia to jednak faktu, iż każdemu samochodowi na drodze przyporządkowany jest dokładnie jeden nr rejestracyjny. Oznacza to, iż określona została funkcja ze zbioru samochodów na naszych drogach w zbiór tablic rejestracyjnych. Pojedyncze egzemplarze aut mogą stać w szopie bez tablic rejestracyjnych, lecz takie pojazdy nie należą do zbioru, na którym określamy nasze przyporządkowanie (mówimy, że nie należą do dziedziny funkcji).

Innym przykładem określenia funkcji jest przyporządkowanie każdemu człowiekowi jego grupy krwi. Każdy człowiek ma dokładnie jedną grupę krwi. Oczywiście ta sama grupa krwi może występować u dwóch osób. Nie zmienia to jednak faktu, iż przyporządkowanie każdemu człowiekowi jego grupy krwi jest funkcją.

Definicja 2.1

Niech X i Y oznaczają dwa dowolne (niepuste) zbiory. Jeżeli każdemu elementowi zbioru X zostanie przyporządkowany dokładnie jeden element zbioru Y, to oznacza, że określona została ***funkcja jednej zmiennej*** o zmiennej niezależnej (argument funkcji) ze zbioru X (dziedzina funkcji $D = X$) i wartościach w zbiorze $A \subseteq Y$ (A - przeciwdziedzina funkcji, zbiór zmiennej zależnej, zbiór wartości funkcji). Można zapisać symbolicznie funkcję o nazwie f jako $f : X \to Y$.

Uwaga

Zapis „$f : X \to Y$” oznacza, że „funkcja f odwzorowuje zbiór X w zbiór Y” lub „funkcja f działa ze zbioru X w zbiór Y”.

Jeżeli $A \subset Y$ (A - przeciwdziedzina funkcji) oraz $f : X \to A$, wówczas czyta się: „funkcja f odwzorowuje zbiór X *na* zbiór A” lub „funkcja f działa ze zbioru X *na* zbiór A”.

Pojęcie „dziedziny funkcji” jest kluczowe przy dalszym omawianiu różnych rodzajów funkcji. Bez odpowiedniego określenia dziedziny nie można myśleć o wykorzystaniu funkcji w jakichkolwiek obliczeniach. Zapamiętajmy więc:

Uwaga

Dziedzina funkcji oznacza zbiór tych argumentów funkcji, dla których oblicza się wartość funkcji.

Symbol funkcji, nazwy zbiorów oraz argumentów i wartości zależą od konkretnej sytuacji, np. $f(x) = y$, gdzie $x \in X$, $y \in Y$; $g(t) = r$ dla $g: A \to B$; $h(s) = v$ gdzie $s \in S$, $v \in V$. Matematyczny opis przyporządkowania nazywa się ***wzorem funkcji***, np. $f(x) = x$, $g(t) = t^2$. Ciągi liczbowe z rozdziału 1 należy uznać jako funkcje o argumentach ze zbioru $\mathbf{N}$ lub $\mathbf{N}^+$. W dalszych rozdziałach dziedzina funkcji jest podzbiorem liczb rzeczywistych (funkcje jednej zmiennej rzeczywistej).

Definicja 2.2

Wykresem funkcji $f : X \to Y$ nazywamy zbiór wszystkich punktów (x,y) na płaszczyźnie współrzędnych prostokątnych (płaszczyźnie kartezjańskiej) takich, że $f(x) = y$ dla $x \in X$, $y \in Y$.

Uwaga
Wykresy funkcji w rozdziałach 2, 3 i 4 *wykonane są w sposób inżynierski, tzn, skala na osi OX i OY jest inna (w celu uzyskania przejrzystego wykresu).*

Jeżeli funkcja jest opisana wzorem bez dodatkowych informacji i zastrzeżeń, to dziedzinę funkcji określa się jako zbiór wszystkich wartości zmiennej niezależnej, dla których wzór określający funkcję ma sens (np. mianownik ułamka musi być różny od zera, pod pierwiastkiem stopnia parzystego musi być wyrażenie nieujemne, logarytmować można tylko liczbę dodatnią).

Pojęcie „***monotoniczności funkcji***" i odpowiednie definicje są analogiczne jak w przypadku ciągów liczbowych.

Definicje 2.3 – 2.12:

Def. 2.3) Funkcja $f: X \to Y$ jest ***rosnąca***, jeżeli

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Funkcja jest zatem rosnąca, jeżeli dla coraz większych argumentów otrzymujemy coraz większe wartości. Przykład funkcji rosnącej: *f(x)* = *x*. Uzasadnienie:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = x_1 - x_2 < 0 .$$

Podaj trzy inne przykłady i uzasadnienia funkcji rosnącej.

Def. 2.4) Funkcja $f: X \to Y$ jest ***malejąca***, jeżeli

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Funkcja jest zatem malejąca, jeżeli dla coraz większych argumentów otrzymujemy coraz mniejsze wartości. Przykład funkcji malejącej: *f(x) = -x*. Uzasadnienie:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = -x_1 + x_2 > 0\,.$$

Podaj trzy inne przykłady i uzasadnienia funkcji malejącej.

Def. 2.5) Funkcja f: *X* $\rightarrow$ *Y* jest ***nierosnąca***, jeżeli

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Def. 2.6) Funkcja f: *X* $\rightarrow$ *Y* jest ***niemalejąca***, jeżeli

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Def. 2.7) Funkcja f: *X* $\rightarrow$ *Y* jest ***stała***, jeżeli

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

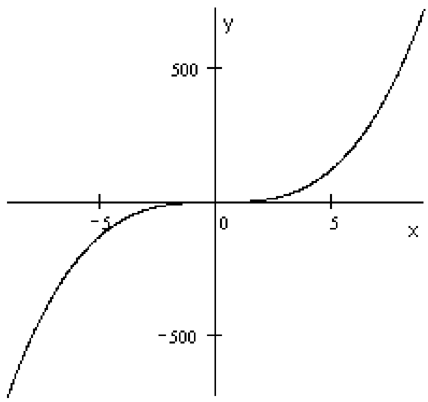
Funkcja jest zatem stała, jeżeli dla wszystkich argumentów otrzymujemy takie same wartości. Przykład funkcji stałej: *f(x) = -1* (uzasadnij i podaj trzy inne przykłady funkcji stałej).

Def. 2.8) Funkcja f : *X* $\rightarrow$ *Y* jest ***różnowartościowa***, jeżeli dla różnych argumentów otrzymujemy różne wartości:

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Geometrycznie różnowartościowość funkcji oznacza, iż każda prosta prostopadła do osi OY ma z wykresem funkcji co najwyżej jeden punkt wspólny.

Przykład funkcji, która jest różnowartościowa: $f(x) = 2x$ (uzasadnij i podaj trzy inne przykłady funkcji różnowartościowej).
Przykład funkcji, która nie jest różnowartościowa: $f(x) = x^2$ dla $x \in [-2;2]$, ponieważ $f(2) = 4$ i $f(-2) = 4$.



Rys. 2.1. Przykład funkcji rosnącej, różnowartościowej (także wzajemnie jednoznacznej) i nieparzystej: $f(x) = x^3$, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

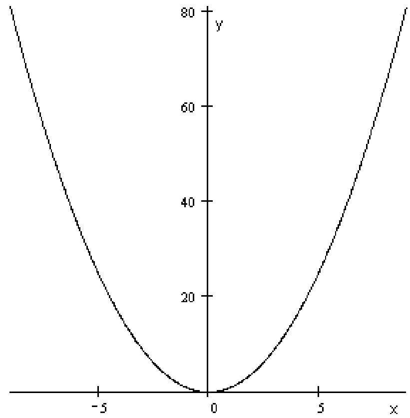
Def. 2.9) Funkcję $f : X \to Y$ nazywa się ***wzajemnie jednoznaczną***, jeżeli jest różnowartościowa oraz funkcja działa na zbiór Y (czyli Y jest przeciwdziedziną - zbiorem wszystkich wartości funkcji).

Def. 2.10) Funkcja $f : X \to Y$ jest ***parzysta***, jeżeli

$$\forall x \in X : -x \in X \wedge f(x) = f(-x).$$

Przykład funkcji parzystej: $f(x) = |x|$ (uzasadnij i podaj trzy inne przykłady funkcji parzystej).

Geometrycznie parzystość funkcji oznacza, iż oś OY jest osią symetrii wykresu funkcji.



Rys. 2.2. Przykład funkcji, która nie jest monotoniczna w całej dziedzinie (malejąca dla $x \le 0$ i rosnąca dla $x \ge 0$), nie jest różnowartościowa, jest parzysta: $f(x) = x^2$, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

Def. 2.11) Funkcja f: $X \to Y$ jest ***nieparzysta***, jeżeli

$$\forall x \in X : -x \in X \wedge f(x) = -f(-x).$$

Przykład funkcji nieparzystej: $f(x) = x^3$ – rys. 2.1 (uzasadnij nieparzystość i podaj trzy inne przykłady funkcji nieparzystej).

Geometrycznie nieparzystość funkcji oznacza, iż środek układu współrzędnych jest środkiem symetrii wykresu funkcji.

Def. 2.12) Dwie **funkcje f i g są *równe*** (takie same), jeżeli mają taką samą dziedzinę $D = D_f = D_g$ oraz $\forall x \in D : f(x) = g(x)$.

Przykład funkcji, które <u>są równe</u>: $f(x) = x^2(x+1)$, $g(x) = x^3 + x^2$, $D = D_f = D_g = \mathbf{R}$.

Przykłady funkcji, które <u>nie są równe</u>:

a) $f(x)=\frac{x^2}{x}$, $g(x)=x$, D_f = **R** \ {0}, D_g = **R**;

b) $f(x)=\log(x^2)$, $g(x)=2\log(x)$, D_f = **R** \ {0}, D_g = $\mathbf{R}^+$.

Definicja 2.13

Do ***funkcji elementarnych*** zalicza się funkcje, które określone są wzorami zawierającymi skończoną liczbę działań algebraicznych (dodawanie, mnożenie, potęgowanie i działania odwrotne) na zmiennej niezależnej. Są to funkcje: wielomianowe, wymierne, niewymierne, trygonometryczne, wykładnicze, logarytmiczne oraz funkcje odwrotne do funkcji elementarnych i funkcje będące złożeniem funkcji elementarnych.

<u>Funkcje wielomianowe (wielomiany)</u> są to funkcje, których dziedziną są wszystkie liczby rzeczywiste i które dane są przez wzór:

$$f(x)=a_0\cdot x^n+a_1\cdot x^{n-1}+...+a_{n-1}\cdot x+a_n \tag{2.1}$$

z pewnymi rzeczywistymi liczbami $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Liczby rzeczywiste a_i nazywa się współczynnikami wielomianu (2.1), natomiast największa potęga naturalna n, dla której $a_0 \neq 0$, zwana jest stopniem wielomianu (2.1).

<u>Cechy wielomianów</u>:

1) Funkcja stała $f(x) = c$, $c = const.$ jest wielomianem stopnia 0.
2) Funkcja liniowa $f(x) = ax+b$ jest wielomianem stopnia 1 (rosnąca dla $a>0$, malejąca dla $a < 0$, stała dla $a = 0$, nieparzysta dla $b = 0$).
3) Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2+bx+c$ jest wielomianem stopnia 2.
4) Jeżeli wszystkie potęgi argumentu x są parzyste, to wielomian jest funkcją parzystą, np. $f(x) = ax^2+c$, $f(x) = ax^4+bx^2+c$.

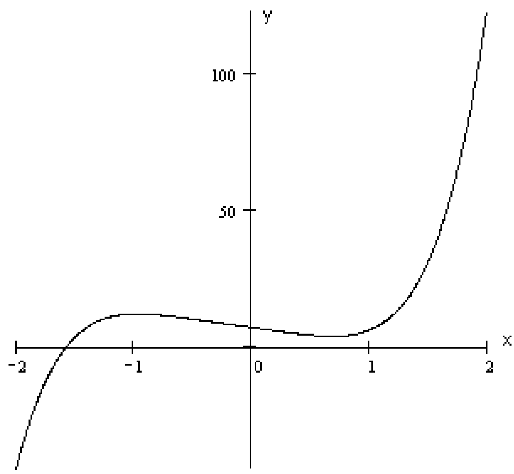
5) Jeżeli wszystkie potęgi argumentu *x* są nieparzyste, to wielomian jest funkcją nieparzystą, np. $f(x) = ax$, $f(x) = ax^5+bx^3+cx$.

6) Wielomian W_n stopnia *n* nieparzystego ma co najmniej jedno miejsce zerowe x_0. Możliwy jest rozkład:

$$W_n(x) = (x - x_0) \cdot W_{n-1}(x) .$$

7) Dowolny wielomian W_n stopnia *n* ma co najwyżej *n* miejsc zerowych x_1, $x_2, \ldots, x_n$. Wówczas możliwy jest rozkład na czynniki:

$$W_n(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) .$$



Rys. 2.3. Fragment wykresu wielomianu $f(x) = 3x^5+2x^4-6x+7$ dla $x \in [-2;2]$.

<u>**Funkcje wymierne**</u> powstają z ilorazu dwóch wielomianów:

$$f(x) = \frac{a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot x + a_n}{b_0 \cdot x^k + b_1 \cdot x^{k-1} + \ldots + b_{k-1} \cdot x + b_k} . \tag{2.2}$$

Dziedziną funkcji wymiernych (2.2) są wszystkie liczby rzeczywiste x z wyjątkiem tych, dla których mianownik zeruje się.

<u>Cechy funkcji wymiernych:</u>

1) Jeżeli $n \geq k$, to funkcję wymierną nazywa się ***niewłaściwą***.
2) Jeżeli $n < k$, to funkcję wymierną nazywa się ***właściwą***.

3) Każdą funkcję wymierną niewłaściwą można przedstawić jako sumę wielomianu i funkcji wymiernej właściwej (poprzez dzielenie dwóch wielomianów z licznika i mianownika funkcji wymiernej niewłaściwej), np.

$$f(x) = \frac{8x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 3}{2x^2 + x - 1} = 4x^2 - x - \frac{1}{2} + \frac{-0.5x + 2.5}{2x^2 + x - 1}.$$

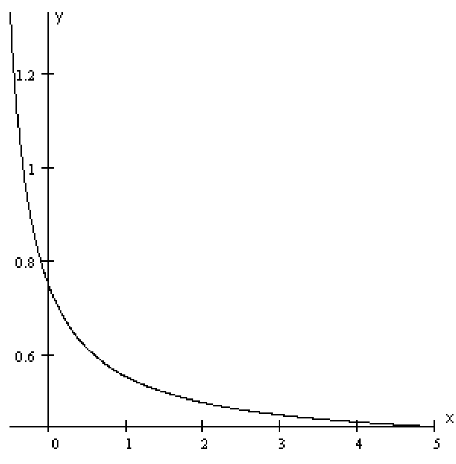
Dziedziną tej funkcji wymiernej f są liczby $x \in$ **R** \ {-1;½}.

4) Jeżeli w liczniku i mianowniku funkcji wymiernej występują funkcje liniowe (ściślej- afiniczne), to taka funkcja nazywa się ***homograficzną***:

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \text{ dla } D = \mathbf{R} \setminus \{-d/c\}. \qquad \textbf{(2.3)}$$

Współczynniki rzeczywiste funkcji homograficznej (2.3) muszą spełniać warunki: $c \neq 0$, $a \cdot d - b \cdot c \neq 0$.

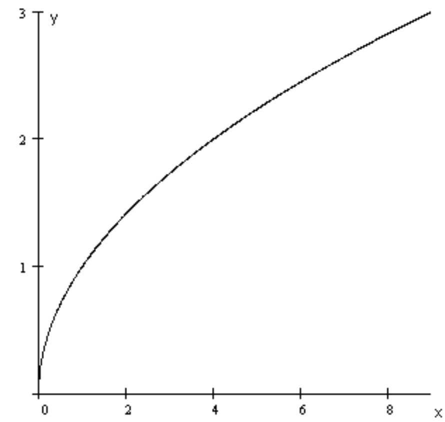
5) Miejsca zerowe funkcji wymiernej (2.2), zapisanej w postaci jednego ułamka (ilorazu), to miejsca zerowe licznika. Funkcja homograficzna (2.3) posiada dokładnie jedno miejsce zerowe $x_0 = -b/a$.



Rys. 2.4. Fragment wykresu funkcji homograficznej $f(x) = \frac{2x+3}{5x+4}$ dla $x \in$ [-0.5;5].

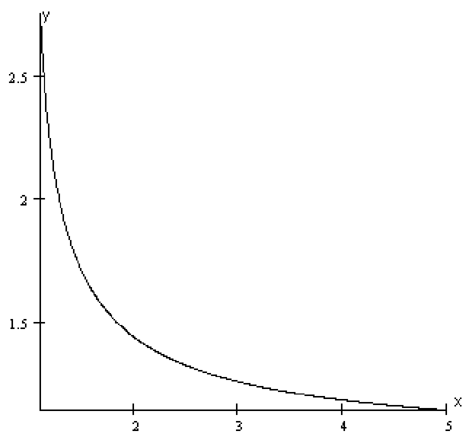
<u>Funkcje niewymierne</u> powstają wtedy, gdy argument funkcji występuje pod znakiem pierwiastka, na przykład:

1) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, funkcja rosnąca, wartości funkcji są nieujemne.



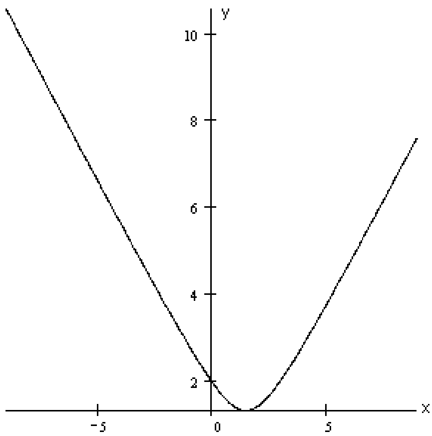
Rys. 2.5. Fragment wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ dla $x \in [0;9]$.

2) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$, $x \neq 1$.



Rys. 2.6. Fragment malejącego wykresu funkcji $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$ dla $x \in (1;5]$.

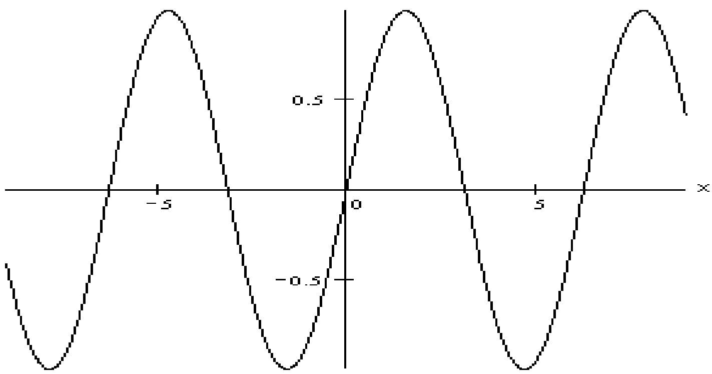
3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 4}$, D = **R**, wartości funkcji są nieujemne.



Rys. 2.7. Fragment wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 4}$.

Funkcje trygonometryczne:

1) ***f(x) = sin(x)***, $x \in$ **R**.



Rys. 2.8. Fragment wykresu funkcji *f(x) = sin(x)* dla $x \in [-3\pi;3\pi]$.

Własności funkcji sinus:

a) wartości z przedziału [-1;1];
b) funkcja okresowa o okresie podstawowym T = 2π, czyli $\forall x : \sin(x) = \sin(x + 2\pi)$;

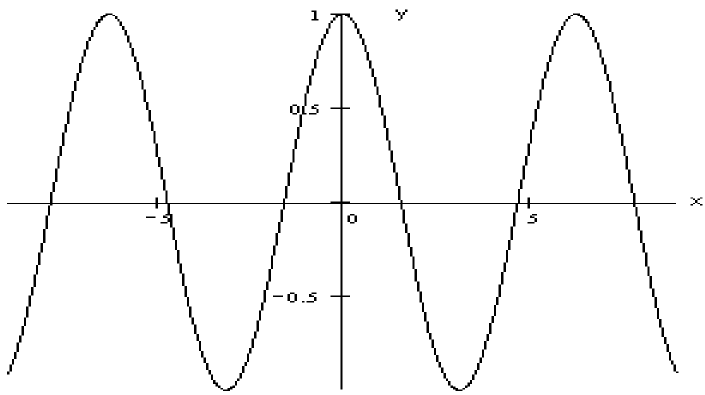
c) funkcja nieparzysta, czyli $\forall x : \sin(x) = -\sin(-x)$;

d) miejsca zerowe (wartości funkcji równe zero) w punktach *x* = *k*π dla dowolnej liczby całkowitej *k*;

e) największa wartość *sin(x)* = 1 dla *x* = π/2+2*k*π dla dowolnej liczby całkowitej *k*;

f) najmniejsza wartość *sin(x)* = -1 dla *x* = 3π/2+2*k*π dla dowolnej liczby całkowitej *k*.

2) ***f(x) = cos(x)***, *x* ∈ **R**.



Rys. 2.9. Fragment wykresu funkcji *f(x)* = *cos(x)* dla *x* ∈ [-3π;3π].

Własności funkcji cosinus:

a) wartości z przedziału [-1;1];

b) funkcja okresowa o okresie podstawowym T = 2π, czyli $\forall x : \cos(x) = \cos(x + 2\pi)$;

c) funkcja parzysta, czyli $\forall x : \cos(x) = \cos(-x)$;

d) miejsca zerowe (wartości funkcji równe zero) w punktach *x* = π/2+*k*π dla dowolnej liczby całkowitej *k*;

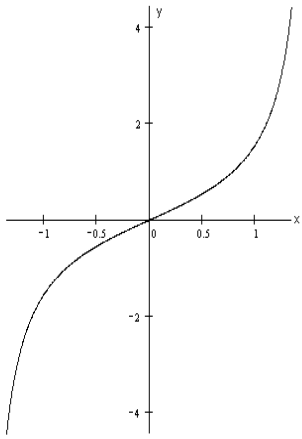
e) największa wartość *cos(x)* = 1 dla *x* = 2*k*π dla dowolnej liczby całkowitej *k*;

f) najmniejsza wartość *cos(x)* = -1 dla *x* = π+2*k*π dla dowolnej liczby całkowitej *k*.

Uwaga

Podstawowy związek między sinusem a cosinusem dowolnego kąta x zwany jest *„jedynką trygonometryczną”*: $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$.

3) ***f(x) = tg (x)***, $x \in$ **R** \ {$\pi/2+k\pi$ dla dowolnej liczby całkowitej *k*}.



Rys. 2.10. Fragment wykresu funkcji *f(x) = tg(x)* dla $x \in (-\pi/2;\pi/2)$.

Własności funkcji tangens:

a) wartości z przedziału $(-\infty;\infty)$;

b) $tg(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ dla $x \in$ **R** \ {$\pi/2+k\pi$ dla dowolnej liczby całkowitej *k*};

c) funkcja okresowa o okresie podstawowym T = π, czyli $\forall x \in D: tg(x)=tg(x+\pi)$;

d) funkcja nieparzysta, czyli $\forall x \in D: tg(x)=-tg(-x)$;

e) funkcja rosnąca w przedziałach $(-\pi/2+k\pi;\ \pi/2+k\pi)$ dla dowolnej liczby całkowitej *k*;

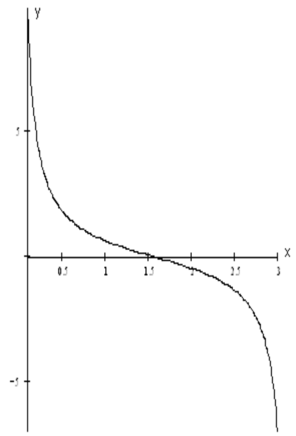
f) miejsca zerowe (wartości funkcji równe zero) w punktach $x = k\pi$ dla dowolnej liczby całkowitej *k*;

g) największa i najmniejsza wartość funkcji tangens nie istnieje;

h) asymptoty pionowe w punktach $x = \pi/2+k\pi$ dla dowolnej liczby całkowitej k (wykres funkcji zbliża się do linii pionowej dla $y \to \pm\infty$, ale jej nie dotyka).

Uwaga
W większości programów komputerowych funkcja *tangens* ma symbol *tan*. Można również skorzystać ze wzoru: $tg(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Można też znaleźć w podręcznikach skrótowe oznaczenia na te funkcje, w których opuszcza się znak nawiasu przy argumencie, pisząc np. *sin x* w miejsce *sin(x)* czy *cos x* w miejsce *cos(x)* oraz podobnie *tg x* w miejsce *tg(x)*.

4) ***f(x) = ctg (x)***, $x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi$ dla dowolnej liczby całkowitej $k\}$.



Rys. 2.11. Fragment wykresu funkcji *f(x) = ctg(x)* dla $x \in (0;\pi)$.

<u>Własności funkcji cotangens:</u>

a) wartości z przedziału $(-\infty;\infty)$;

b) $ctg(x) = \dfrac{1}{tg(x)} = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi$ dla dowolnej liczby całkowitej $k\}$;

c) funkcja okresowa o okresie podstawowym $T = \pi$, czyli $\forall x \in D : ctg(x) = ctg(x+\pi)$;

d) funkcja nieparzysta, czyli $\forall x \in D : ctg(x) = -ctg(-x)$;

e) funkcja malejąca w przedziałach (kπ; π+kπ) dla dowolnej liczby całkowitej *k*;

f) miejsca zerowe (wartości funkcji równe zero) w punktach *x* = π/2+*k*π dla dowolnej liczby całkowitej *k*;

g) największa i najmniejsza wartość funkcji cotangens nie istnieje;

h) asymptoty pionowe w punktach *x* = *k*π dla dowolnej liczby całkowitej *k* (wykres funkcji zbliża się do linii pionowej dla *y* → ±∞, ale jej nie dotyka).

Uwaga

W większości programów komputerowych brak funkcji *cotangens*. Można jednak skorzystać ze wzorów: $ctg(x) = \dfrac{1}{tg(x)}$ lub $ctg(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

<u>Funkcje wykładnicze</u> są to funkcje postaci $f(x) = a^x$ dla współczynnika rzeczywistego a ∈ (0;1) ∪ (1;∞) i dziedzinie x ∈ **R**. Współczynnik a jest też zwany podstawą.

<u>Własności funkcji wykładniczych:</u>

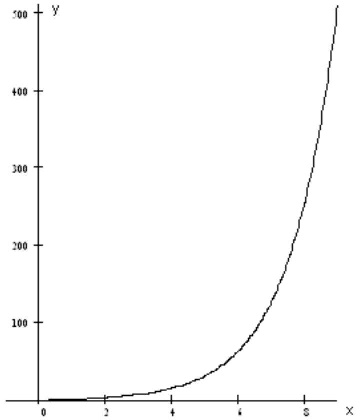
a) wartości z przedziału (0;∞);

b) funkcja malejąca dla a ∈ (0;1) i rosnąca dla a ∈ (1;∞);

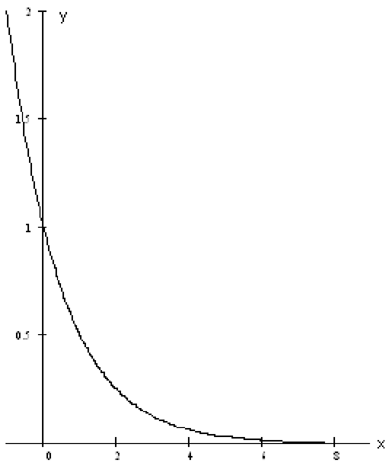
c) miejsca zerowe nie istnieją;

d) największa i najmniejsza wartość funkcji wykładniczej nie istnieje;

e) asymptota pozioma dla *y* = 0 (wykres funkcji zbliża się do linii poziomej dla *x* → ±∞ do, ale jej nie dotyka).



Rys. 2.12. Fragment wykresu funkcji $f(x) = 2^x$.



Rys. 2.13. Fragment wykresu funkcji $f(x) = (\frac{1}{2})^x$.

<u>Funkcje logarytmiczne</u> są to funkcje postaci $f(x) = \log_a x$ dla podstawy logarytmu $a \in (0;1) \cup (1;\infty)$ i dziedzinie $x > 0$.

Uwaga

Tutaj, jak w większości opracowań, od razu odstąpiliśmy od narzucającej się, zgodnie z def. 2.2, notacji $log_a(x)$.

Własności funkcji logarytmicznych:

a) wartości z przedziału (-∞;∞);

b) jeżeli $y = \log_a x$, to $a^y = x$;

c) jeżeli a = 10, to logarytm nazywa się dziesiętny i można zapisać: *y = log(x)*;

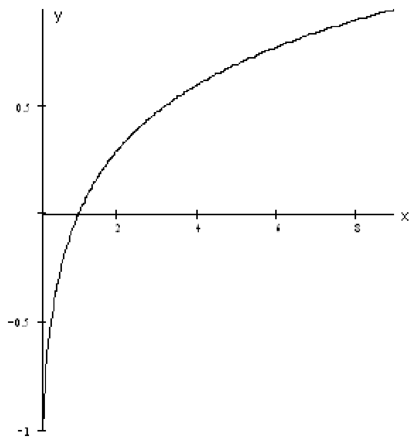
d) jeżeli podstawą logarytmu jest liczba *e* (wspomniana w rozdziale 1 liczba Eulera 2,71…), to logarytm nazywa się naturalny i zapisuje się *y = ln(x)*;

e) funkcja malejąca dla $a \in (0;1)$ i rosnąca dla $a \in (1;\infty)$;

f) miejsce zerowe dla *x* = 1;

g) największa i najmniejsza wartość funkcji logarytmicznej nie istnieje;

h) asymptota pionowa dla *x* = 0 (wykres funkcji zbliża się do linii pionowej dla $y \to \pm\infty$, ale jej nie dotyka).



Rys. 2.14. Fragment wykresu funkcji $f(x) = \log_{10}(x) = \log(x)$.

Wzory typu *y = f(x)* nazywa się wzorami ***jawnymi***. Można także spotkać funkcje opisane wzorami ***uwikłanymi*** postaci *F(x,y)* = 0, np. *sin(x+y)* = 0, *x+y-5* = 0 (jest to oczywiście funkcja jawna *y* = *-x+5*). Inna postać wzoru funkcji to postać ***parametryczna***, w której argument *x* i wartość funkcji *y* opisane są pewną zależnością od parametru *t*: $x = x(t)$, $y = y(t)$; np. $x = 2t+1$; $y = t^2$ dla $t \in [0;1]$. Dla t = ½ otrzymujemy przykładowo punkt o współrzędnych $x = 2$, $y = ¼$.

Do funkcji elementarnych zalicza się także funkcje, które można otrzymać poprzez działania algebraiczne (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie i pierwiastkowanie) na funkcjach omówionych w rozdziale 2.1.

2.2 Funkcja złożona

Funkcje elementarne powstają również w wyniku złożenia funkcji omówionych w rozdziale 2.1. ***Złożenie dwóch funkcji można rozumieć jako działanie, w którym wartość jednej funkcji staje się argumentem drugiej funkcji***. Na przykład w życiu codziennym dany miesiąc pracy, traktowany jako argument pierwszej funkcji, daje jako wartość kwotę miesięcznej pensji. A z kolei wartość pensji staje się argumentem dla drugiej funkcji, której efektem jest wydawanie i zagospodarowanie zarobku. W komputerze wartość danej komórki pamięci, wyliczona w wyniku jednego procesu (funkcji), może stać się argumentem dla następnych działań (procesów).

Definicja 2.14

Jeżeli funkcja *f* odwzorowuje zbiór *X na* zbiór *Y*, natomiast funkcja *g* działa ze zbioru Y w zbiór A, to funkcję *h* taką że:

$$h: X \to A\ ,\ h(x) = g(f(x))$$

nazywamy *złożeniem* funkcji *f* z funkcją *g* oraz oznaczamy symbolem $h = g \circ f$ tzn.

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ dla } x \in X.$$

Tak więc wartość funkcji *f(x)*, nazywaną funkcją ***wewnętrzną***, jest argumentem funkcji *g* - funkcji ***zewnętrznej***. Istotny jest fakt, iż przeciwdziedzina funkcji wewnętrznej *f* staje się dziedziną funkcji zewnętrznej *g*.

<u>Własności złożenia funkcji:</u>

1) Złożenie funkcji nie jest (na ogół) przemienne, tzn. ***istotne jest ustalenie funkcji wewnętrznej i zewnętrznej***:

$$(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x) \qquad (2.4)$$

Przykłady złożenia funkcji i braku przemienności tej operacji (2.4):

a) f: [0;π] → [0;1] , $f(x) = sin(x) = y$; g: [0;1] → [0;1] , $g(y) = \sqrt{y}$;

$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{\sin(x)}$, h : [0;π] → [0;1].

g: [0;∞) → [0;∞) , $g(x) = \sqrt{x} = y$; f: [0; ∞) → [-1;1] , $f(y) = sin(y)$;

$s(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sin(\sqrt{x})$, s : [0; ∞) → [-1;1].

$$\boldsymbol{h(x) \neq s(x)}$$

b) f: **R**\{0} → (0; ∞), $f(x) = x^2 = y$; g: (0; ∞) → **R** , $g(y) = \log_8(y)$;

$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \log_8(x^2)$, h : **R**\{0} → **R**.

g: (0;∞) → **R** , $g(x) = \log_8(x) = y$; f: **R** → [0; ∞), $f(y) = y^2$;

$s(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = [\log_8(x)]^2 = \log_8{}^2(x)$, s : (0; ∞) → [0;∞).

$$\boldsymbol{h(x) \neq s(x)}$$

c) f: **R**\{0} → **R**\{0}, $f(x) = 1/x = y$; g: **R**\{0} → **R**\{1} , $g(y) = y + 1$;

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{x} + 1 = \frac{x+1}{x}, \ h : \mathbf{R}\backslash\{0\} \to \mathbf{R}\backslash\{1\}.$$

g: **R**\{-1}→ **R**\{0} , $g(x) = x + 1 = y$; f : **R**\{0} → **R**\{0}, $f(y) = 1/y$;

$$s(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{x+1} =, \ s : \mathbf{R}\backslash\{-1\} \to \mathbf{R}\backslash\{0\}.$$

$$\boldsymbol{h(x) \neq s(x)}$$

d) f: **R** → **R**, $f(x) = 2x+6$; g: **R** → **R** , $g(x) = -x + 1$;

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = -(2x + 6) + 1 = -2x - 5 , \ h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}.$$

$$s(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(-x + 1) + 6 = -2x + 8 , \ s : \mathbf{R} \to \mathbf{R}.$$

$$\boldsymbol{h(x) \neq s(x)}$$

2) Złożenie dowolnej funkcji g z funkcją $f(x) = x$ jest zawsze przemienne (dla odpowiednich dziedzin i przeciwdziedzin) i wynikiem takiego złożenia jest ta sama funkcja g:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x) , \ (f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) .$$

3) Istnieją przykłady funkcji, dla których złożenie jest przemienne (są to wyjątki potwierdzające regułę, iż ***w ogólnym przypadku złożenie funkcji nie jest działaniem przemiennym***).

Przykłady złożenia funkcji, które jest przemienne (np. dla funkcji potęgowych):

a) f: (0; ∞) → (0; ∞), $f(x) = x^2$; g: (0; ∞) → (0; ∞), $g(x) = 1/x = x^{-1}$;

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}, \; h: (0; \infty) \rightarrow (0; \infty);$$

$$s(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\frac{1}{x})^2 = (x^{-1})^2 = x^{-2} = \frac{1}{x^2}, \; s\text{:}(0;\infty) \rightarrow (0;\infty).$$

$$h(x) = s(x)$$

b) f: [0; ∞)→ [0; ∞), $f(x) = x^4$; g: [0; ∞)→ [0; ∞) , $g(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$;

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^4} = (x^4)^{\frac{1}{2}} = x^2, \; h: [0; \infty) \rightarrow [0; \infty);$$

$$s(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^4 = (x^{\frac{1}{2}})^4 = x^2, \; s: [0; \infty) \rightarrow [0; \infty).$$

$$h(x) = s(x)$$

Uwaga

Złożenie funkcji potęgowych $f(x) = x^a$ oraz $g(x) = x^b$ jest przemienne, ponieważ $(x^a)^b = (x^b)^a$.

Złożenie funkcji wymaga więc ustalenia, wartość której funkcji jest argumentem innej funkcji. Należy zwrócić uwagę na fakt, iż przeciwdziedzina jednej funkcji staje się dziedziną drugiej funkcji. **Naszkicowanie wykresów funkcji występujących w podrozdziale 2.2 oraz określenie ich własności jest dodatkowym i bardzo kształcącym ćwiczeniem*.

<u>*Najważniejszą rzeczą dla Czytelnika w przypadku funkcji złożonej jest zrozumienie sensu pojęcia „funkcji złożonej" i umiejętność wyznaczenia funkcji złożonej z rozróżnieniem funkcji wewnętrznej i zewnętrznej oraz uwzględnieniem odpowiednich dziedzin i przeciwdziedzin funkcji.*</u>

2.3 Funkcja odwrotna

Funkcje elementarne powstają również jako funkcje odwrotne do funkcji omówionych w rozdziale 2.1. Operacja szukania funkcji odwrotnej nie może być kojarzona ze zwykłym odwracaniem wartości liczbowej. W przypadku liczb mamy $x^{-1} = \frac{1}{x}$, natomiast dla funkcji symbol funkcji odwrotnej $f^{-1}(x)$ to nie jest $\frac{1}{f(x)}$:

$$f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}.$$

Odwrotność funkcji można zapisać tak:

$$[f(x)]^{-1} = \frac{1}{f(x)}.$$

Wyznaczenie funkcji odwrotnej można kojarzyć z odwracaniem działań algebraicznych: działaniem odwrotnym do potęgowania jest pierwiastkowanie (za chwilę okaże się np., iż funkcją odwrotną do $f(x) = x^2$ jest $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$), działaniem odwrotnym do mnożenia jest dzielenie, a działaniem odwrotnym do logarytmowania $log_a x$ jest operacja a^x (dlatego funkcje logarytmiczne i wykładnicze są wzajemnie odwrotne).

Definicja 2.15

Niech funkcja różnowartościowa *f* odwzorowuje zbiór *X* na zbiór *Y* (czyli *f* jest funkcją wzajemnie jednoznaczną). Jeżeli każdemu elementowi $y \in Y$ przyporządkowany zostanie jedyny (na mocy różnowartościowości funkcji *f*) element $x \in X$ spełniający równość $f(x) = y$, to tak określone odwzorowanie zbioru *Y* na zbiór *X* nazywa się ***funkcją odwrotną*** do *f* i oznaczone jest symbolem f^{-1}, tzn.

$$f^{-1}: Y \to X,$$

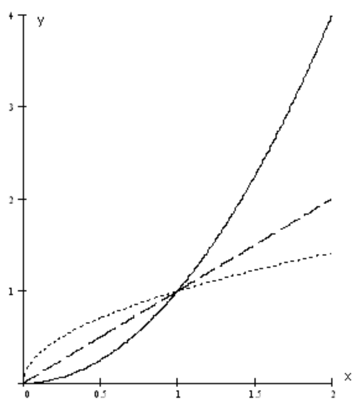
gdzie dla każdego $x \in X$ oraz $y \in Y$: $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

Uwaga

Funkcja *g* jest odwrotna do funkcji *f* wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$g(f(x)) = f(g(x)) = x \,. \qquad \textbf{(2.5)}$$

*Z uwagi tej wynika fakt, iż wykresy danej funkcji i funkcji odwrotnej (2.5) są symetryczne względem prostej y = x (*rys. 2.15*).*



Rys. 2.15. Fragment wykresu funkcji $f(x) = x^2$ i funkcji odwrotnej $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ oraz oś symetrii $y = x$.

Z definicji funkcji odwrotnej można wnioskować, iż w celu znalezienia funkcji odwrotnej należy rozwiązać równanie *y = f(x)* względem zmiennej x (wyznaczyć niewiadomą *x* z równania *y - f(x) = 0*).

<u>Przykłady wyznaczenia funkcji odwrotnej</u> (zwróć uwagę na dziedziny i przeciwdziedziny poszczególnych funkcji):

1) $f(x) = 3x-2$, $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

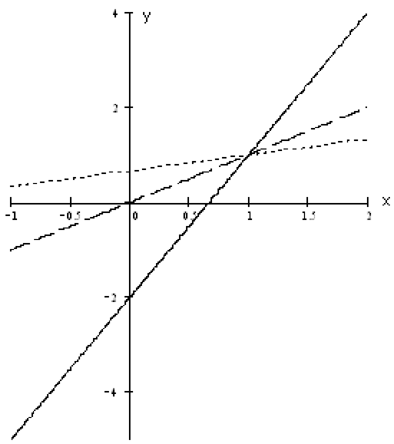
$$y = 3x-2,\ 3x = y+2,\ x = \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}.$$

Funkcją odwrotną do $f(x) = 3x-2$ jest funkcja $g(x) = f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$,

$g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

Sprawdzenie obliczeń:

$$f(g(x)) = 3(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}) - 2 = x,\ g(f(x)) = \frac{1}{3}(3x-2) + \frac{2}{3} = x.$$



Rys. 2.16. Fragment wykresu funkcji $f(x) = 3x - 2$ i funkcji odwrotnej $f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{3}$ oraz oś symetrii *y = x*.

2) $f(x) = x^2$, f : [0; ∞)→ [0; ∞).

$y = x^2$, $x = \sqrt{y}$.

Funkcją odwrotną do $f(x) = x^2$ jest funkcja $g(x) = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$,

g: [0; ∞)→ [0; ∞).

Sprawdzenie obliczeń i narysowanie wykresów z symetrią osiową jest zadaniem dla Czytelnika.

3) $f(x) = x^2$, f : (-∞; 0] → [0; ∞).

$y = x^2$, $x = -\sqrt{y}$.

Funkcją odwrotną do $f(x) = x^2$ jest funkcja $g(x) = f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$,

g: [0; ∞)→ (-∞; 0].

Sprawdzenie obliczeń i narysowanie wykresów z symetrią osiową jest zadaniem dla Czytelnika.

4) $f(x) = 2^x$, f : **R** → (0; ∞).

$y = 2^x$, $x = log_2 y$.

Funkcją odwrotną do $f(x) = 2^x$ jest funkcja $g(x) = f^{-1}(x) = \log_2 x$,

g: (0; ∞)→ **R**.

Sprawdzenie obliczeń i narysowanie wykresów z symetrią osiową jest zadaniem dla Czytelnika.

5) $f(x) = \frac{1}{x+1}$, f : **R**\{-1} → **R**\{0}.

$$y = \frac{1}{x+1}, \quad x = \frac{1}{y} - 1 = \frac{1-y}{y} .$$

Funkcją odwrotną do $f(x) = \frac{1}{x+1}$ jest funkcja

$g(x) = f^{-1}(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$, g: **R**\{0} → **R**\{-1}. Sprawdzenie obliczeń i narysowanie wykresów z symetrią osiową jest zadaniem dla Czytelnika.

6) $f(x) = \frac{2x+5}{4x-6}$, f: **R**\{3/2} → **R**\{1/2}.

$y = \frac{2x+5}{4x-6}$, $x = \frac{6y+5}{4y-2}$.

Funkcją odwrotną do $f(x) = \frac{2x+5}{4x-6}$ jest funkcja $g(x) = f^{-1}(x) = \frac{6x+5}{4x-2}$,

g: **R**\{1/2} → **R**\{3/2}. Sprawdzenie obliczeń i narysowanie wykresów z symetrią osiową jest zadaniem dla Czytelnika.

7) $f(x) = x^3$, f: **R** → **R**.

$y = x^3$, $x = \sqrt[3]{y}$.

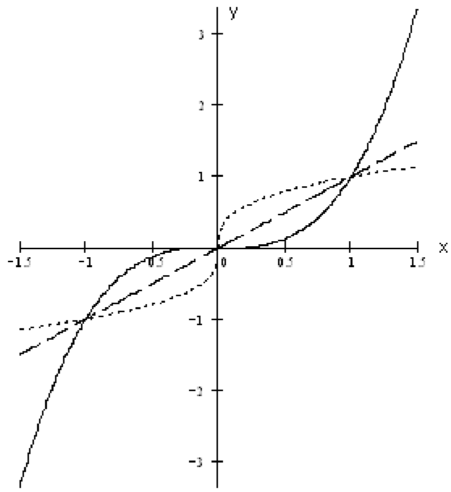
Funkcją odwrotną do $f(x) = x^3$ jest funkcja $g(x) = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, g:**R** → **R**.

8) $f(x) = \sqrt[4]{1+\sqrt{x}}$, f: [0; ∞) → [1; ∞).

$y = \sqrt[4]{1+\sqrt{x}}$, $x = (y^4 - 1)^2 = y^8 - 2y^4 + 1$.

Funkcją odwrotną do $f(x) = \sqrt[4]{1+\sqrt{x}}$ jest funkcja

$g(x) = f^{-1}(x) = x^8 - 2x^4 + 1$, g: [1; ∞) → [0; ∞). Sprawdzenie obliczeń i narysowanie wykresów z symetrią osiową jest zadaniem dla Czytelnika.



Rys. 2.17. Fragment wykresu funkcji $f(x) = x^3$ i funkcji odwrotnej $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ oraz oś symetrii *y* = *x*.

9) $f(x) = \sqrt[5]{\ln(x)}$, f: (0; ∞) → **R**.

$y = \sqrt[5]{\ln(x)}$, $x = e^{(y^5)} = \exp(y^5)$.

Funkcją odwrotną do $f(x) = \sqrt[5]{\ln(x)}$ jest funkcja $g(x) = f^{-1}(x) = \exp(x^5) = e^{(x^5)}$, *g:* **R** → (0; ∞). Sprawdzenie obliczeń i narysowanie wykresów z symetrią osiową jest zadaniem dla Czytelnika.

10) $f(x) = \dfrac{1}{\log(x)}$, f: (0; 1) ∪ (1; ∞) → **R**\{0}.

$y = \dfrac{1}{\log(x)}$, $x = 10^{\frac{1}{y}}$.

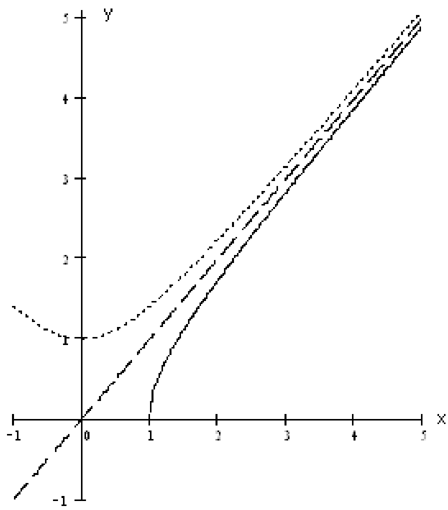
Funkcją odwrotną do $f(x) = \dfrac{1}{\log(x)}$ jest funkcja $g(x) = f^{-1}(x) = 10^{\frac{1}{x}}$, *g:* **R**\{0} → (0; 1) ∪ (1; ∞). Sprawdzenie obliczeń i narysowanie wykresów z symetrią osiową jest zadaniem dla Czytelnika.

11) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, f: [1; ∞) → [0; ∞).

$y = \sqrt{x^2 - 1}$, $x = \sqrt{y^2 + 1}$.

Funkcją odwrotną do $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ jest funkcja

$g(x) = f^{-1}(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, *g:* [0; ∞) → [1; ∞).



Rys. 2.18. Fragment wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ i funkcji odwrotnej $f^{-1}(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ oraz oś symetrii *y* = *x*, która jest również asymptotą ukośną funkcji.

12) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, f: (-∞; -1] → [0; ∞).

$y = \sqrt{x^2 - 1}$, $x = -\sqrt{y^2 + 1}$.

Funkcją odwrotną do $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ jest funkcja

$g(x) = f^{-1}(x) = -\sqrt{x^2 + 1}$, g: [0; ∞) $\to$ (-∞; -1]. Sprawdzenie obliczeń i narysowanie wykresów z symetrią osiową jest zadaniem dla Czytelnika.

Czy wykonując złożenie funkcji można coś powiedzieć o funkcji odwrotnej?

Uwaga

Związek między złożeniem funkcji a funkcją odwrotną jest następujący: jeżeli f i g są dowolnymi funkcjami różnowartościowymi, to $h = g \circ f$ jest także funkcją różnowartościową oraz

$$h^{-1} = (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}. \qquad \textbf{(2.6)}$$

Przykład zastosowania powyższej uwagi:

f: **R** $\to$ **R**, $f(x) = 3x+9$; g: **R** $\to$ **R** , $g(x) = -5x + 1$;

$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = -5(3x+9)+1 = -15x - 44$, h : **R** $\to$ **R**.

f^{-1} : **R** $\to$ **R**, $f^{-1}(x) = x/3 - 3$; g^{-1} : **R** $\to$ **R** , $g^{-1}(x) = \dfrac{-x+1}{5}$;

$$h^{-1}(x) = (g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{-x+1}{5} - 3 =$$

$$= \frac{-x}{15} - \frac{44}{15}$$

h^{-1} : **R** $\to$ **R**.

Funkcja odwrotna do h może zostać obliczona wprost:

$y = -15x - 44$, $x = \dfrac{-y}{15} - \dfrac{44}{15}$, zatem faktycznie $h^{-1}(x) = \dfrac{-x}{15} - \dfrac{44}{15}$.

Funkcja odwrotna zachowuje monotoniczność: funkcja odwrotna do funkcji rosnącej pozostaje rosnąca, natomiast funkcja odwrotna do funkcji malejącej pozostaje malejąca.

W niniejszym opracowaniu należy jeszcze wspomnieć o funkcjach odwrotnych do funkcji trygonometrycznych, czyli o ***funkcjach cyklometrycznych*** (oznaczonych nazwą ***arcus***), aczkolwiek fragment o funkcjach cyklometrycznych *można pominąć przy pierwszym czy*taniu.

1) Funkcja odwrotna do *sinusa*, czyli ***arcus sinus***

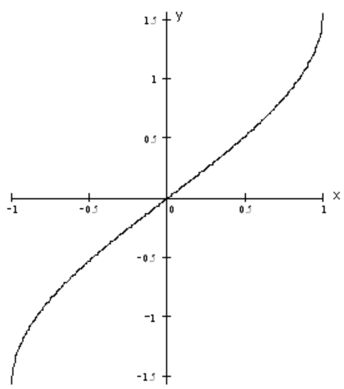
Dana funkcja musi być w swej dziedzinie wzajemnie jednoznaczna, aby istniała funkcja odwrotna. Zatem:

$$\text{jeżeli } f(x) = \sin(x),\ f : [-\pi/2; \pi/2] \to [-1;1]\ ,$$

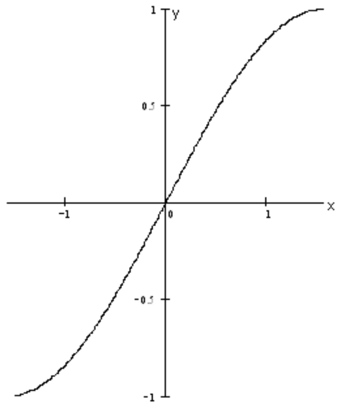
$$\text{to } f^{-1}(x) = \arcsin(x),\ f^{-1} : [-1;1] \to [-\pi/2; \pi/2].$$

$$\sin(x) = y \Leftrightarrow x = \arcsin(y).$$

Przykład: *arc sin*(½) = $\pi/6$, ponieważ *sin*($\pi/6$) = ½.



Rys. 2.19. Wykres funkcji $f(x) = \arcsin(x)$ dla $x \in$ [-1;1].



Rys. 2.20. Wykres funkcji $f(x) = \sin(x)$ dla $x \in [-\pi/2; \pi/2]$.

Uwaga
W większości programów komputerowych funkcja *arc sin* ma symbol *asin*.

Funkcja *arc sin* jest rosnąca i nieparzysta.

2) Funkcja odwrotna do *cosinusa*, czyli ***arcus cosinus***

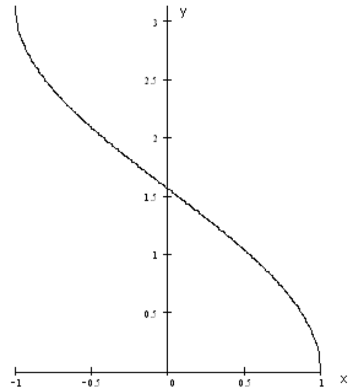
Dana funkcja musi być w swej dziedzinie <u>wzajemnie jednoznaczna</u>, aby istniała funkcja odwrotna. Zatem:

jeżeli $f(x) = cos(x)$, $f : [0; \pi] \rightarrow [-1;1]$,

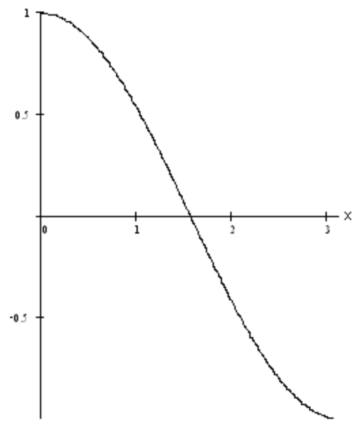
to $f^{-1}(x) = arc\ cos(x)$, $f^{-1} : [-1;1] \rightarrow [0; \pi]$.

$$cos(x) = y \Leftrightarrow x = arc\ cos(y).$$

Przykład: *arc cos*(½) = π/3 , ponieważ *cos*(π/3) = ½.



Rys. 2.21. Wykres funkcji $f(x) = \arccos(x)$ dla $x \in$ [-1;1].



Rys. 2.22. Wykres funkcji $f(x) = \cos(x)$ dla $x \in$ [0; π].

Uwaga

W większości programów komputerowych funkcja *arc cos* ma symbol *acos*.

Funkcja *arc cos* jest malejąca.

3) Funkcja odwrotna do *tangensa*, czyli ***arcus tangens***

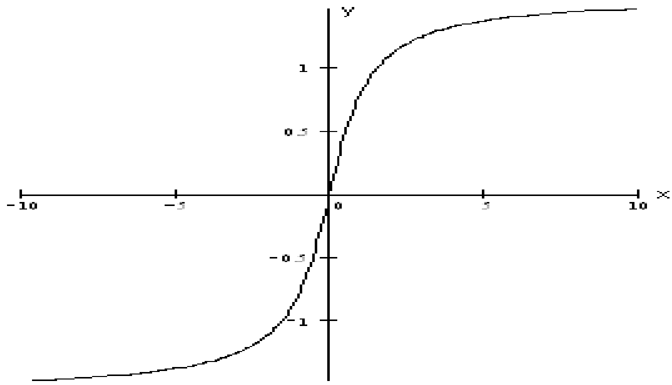
Dana funkcja musi być w swej dziedzinie <u>wzajemnie jednoznaczna</u>, aby istniała funkcja odwrotna. Zatem:

jeżeli $f(x) = tg(x)$, $f : [-\pi/2; \pi/2] \rightarrow \mathbf{R}$,

to $f^{-1}(x) = arc\ tg(x)$, $f^{-1} : \mathbf{R} \rightarrow [-\pi/2; \pi/2]$.

$$tg(x) = y \Leftrightarrow x = arc\ tg(y).$$

Przykład: $arc\ tg(1) = \pi/4$, ponieważ $tg(\pi/4) = 1$.



Rys. 2.23. Wykres funkcji $f(x) = arctg(x)$ dla $x \in (-\infty;\infty)$.

Uwaga

W większości programów komputerowych funkcja *arc tg* ma symbol *atan*.

Funkcja *arc tg* jest rosnąca i nieparzysta, posiada asymptoty poziome $y = -\pi/2$ oraz $y = \pi/2$.

4) Funkcja odwrotna do *cotangensa*, czyli ***arcus cotangens***

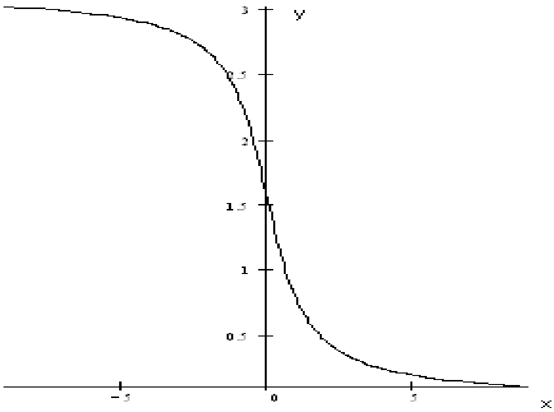
Dana funkcja musi być w swej dziedzinie wzajemnie jednoznaczna, aby istniała funkcja odwrotna. Zatem:

jeżeli $f(x) = ctg(x)$, $f : [0; \pi] \rightarrow \mathbf{R}$,

to $f^{-1}(x) = arc\ ctg(x)$, $f^{-1} : \mathbf{R} \rightarrow [0; \pi]$.

$$ctg(x) = y \Leftrightarrow x = arc\ ctg(y).$$

Przykład: *arc ctg*(1) = π/4 , ponieważ c*tg*(π/4) = 1.



Rys. 2.24. Wykres funkcji $f(x) = arcctg(x)$ dla $x \in (-\infty;\infty)$.

Uwaga

W większości programów komputerowych brak funkcji *arc ctg* i należy korzystać ze wzoru $arcctg(x) = \frac{\pi}{2} - arctg(x) = \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Funkcja *arc ctg* jest malejąca, posiada asymptoty poziome *y* = 0 i *y* = π.

<u>Najważniejszą rzeczą w przypadku funkcji odwrotnych jest zrozumienie sensu pojęcia „funkcji odwrotnej" i umiejętność wyznaczenia funkcji odwrotnej dla odpowiednich dziedzin i przeciwdziedzin funkcji.</u>

2.4 Przykładowe obliczenia

1) Wykonaj złożenie funkcji (pamiętaj o odpowiednich dziedzinach i przeciwdziedzinach funkcji):

a) f: [0;π] → [-1;1] , $f(x) = cos(x) = y$; g: [-1;1] → [4;6] , $g(y) = y + 5$;

$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = 5 + \cos(x)$, h : [0;π] → [4;6].

b) g: (-∞;∞) → (-∞;∞) , $g(x) = x + 5 = y$; f : (-∞; ∞) → [-1;1] , $f(y) = cos(y)$;

$s(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \cos(x + 5)$, s : (-∞; ∞) → [-1;1].

c) f: **R** → (0; ∞), $f(x) = 2^x = y$; g: (0; ∞) → **R** , $g(y) = \log_2(y)$;

$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \log_2(2^x) = x \cdot \log_2 2 = x \cdot 1 = x$,

h : **R** → **R**.

d) g: (0;∞) → **R** , $g(x) = \log_3(x) = y$; f : **R** → (0; ∞), $f(y) = 3^y$;

$s(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3^{\log_3 x} = x$, s : (0; ∞) → (0; ∞).

Uwaga
W przykładach c) i d) otrzymano funkcję identycznościową, lecz w innej dziedzinie i przeciwdziedzinie.

e) f : **R**\{0} → **R**\{0}, $f(x) = 1/x = y$; g: **R**\{0} → **R**\{-2} , $g(y) = \sqrt[3]{y - 8}$;

$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt[3]{\frac{1}{x} - 8} = \sqrt[3]{\frac{1 - 8x}{x}}$, h : **R**\{0} → **R**\{-2}.

f) g: **R** $\to$ **R** , $g(x) = x^3 - 5x^2 - x + 1 = y$; f : **R** $\to$ **R**, $f(y) = 2y\text{-}7$;

$$s(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(x^3 - 5x^2 - x + 1) - 7$$
$$s(x) = 2x^3 - 10x^2 - 2x - 5$$
s : **R** $\to$ **R**.

Złożenie dwóch wielomianów jest również wielomianem.

g) f : **R** $\to$ **R**, $f(x) = -x+2$; g: **R** $\to$ **R** , $g(x) = \sqrt[5]{2x-9}$;

$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt[5]{2(-x+2)-9} = \sqrt[5]{-2x-5}$, h : **R** $\to$ **R**.

$s(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = -\sqrt[5]{2x-9} + 2$, s : **R** $\to$ **R**.

h) f : **R** $\to$ [0; ∞), $f(x) = x^4$; g: [0; ∞) $\to$ [-1;1], $g(x) = \sin(2x)$;

$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sin(2x^4)$, h : **R** $\to$ [-1;1].

i) f : **R** $\to$ **R**, $f(x) = 2x^3$; g: **R** $\to$ [1; ∞) , $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$;

$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{(2x^3)^2 + 1} = \sqrt{4x^6 + 1}$, h : **R** $\to$ [1; ∞).

2) Znajdź funkcję odwrotną (pamiętaj o odpowiednich dziedzinach i przeciwdziedzinach funkcji oraz o symetrii osiowej danej funkcji i funkcji odwrotnej):

a) $f(x) = 7x+5$, f : **R** $\to$ **R**

$y = 7x+5$, $7x = y\text{-}5$, $x = \frac{1}{7}y - \frac{5}{7}$.

Funkcją odwrotną do $f(x) = 7x+5$ jest funkcja $g(x) = f^{-1}(x) = \frac{1}{7}x - \frac{5}{7}$,

g: **R** $\to$ **R**.

Sprawdzenie obliczeń:

$$f(g(x)) = 7(\frac{1}{7}x - \frac{5}{7}) + 5 = x,\ g(f(x)) = \frac{1}{7}(7x+5) - \frac{5}{7} = x.$$

Zadanie: narysuj wykresy funkcji i sprawdź symetrię osiową.

b) $f(x) = 2x^6$, f: $[0; \infty) \to [0; \infty)$.

$$y = 2x^6,\ x = \sqrt[6]{\frac{y}{2}}.$$

Funkcją odwrotną do $f(x) = 2x^6$ jest funkcja $g(x) = f^{-1}(x) = \sqrt[6]{\frac{x}{2}}$,

g: $[0; \infty) \to [0; \infty)$.

c) $f(x) = 2x^6$, f: $(-\infty; 0] \to [0; \infty)$.

$$y = 2x^6,\ x = -\sqrt[6]{\frac{y}{2}}.$$

Funkcją odwrotną do $f(x) = 2x^6$ jest funkcja $g(x) = f^{-1}(x) = -\sqrt[6]{\frac{x}{2}}$,

g:$[0; \infty) \to (-\infty; 0]$.

d) $f(x) = 2^{5x}$, f: **R** $\to (0; \infty)$.

$y = 2^{5x}$, $5x = log_2 y$.

Funkcją odwrotną do $f(x) = 2^{5x}$ jest funkcja

$$g(x) = f^{-1}(x) = \frac{1}{5}\log_2 x = \log_2 \sqrt[5]{x},$$ g: $(0; \infty) \to$ **R**.

e) $f(x) = \dfrac{1}{2x-4}$, f: **R**\{2} $\to$ **R**\{0}.

$$y = \frac{1}{2x-4},\ x = \frac{1}{2y} + 2 = \frac{1+4y}{2y}\ .$$

Funkcją odwrotną do $f(x) = \frac{1}{2x-4}$ jest funkcja

$g(x) = f^{-1}(x) = \frac{1}{2x} + 2 = \frac{1+4x}{2x}$, g: **R**\{0} → **R**\{2}.

f) $f(x) = 7x^9$, f : **R** → **R**.

$$y = 7x^9,\ x = \sqrt[9]{\frac{y}{7}}\ .$$

Funkcją odwrotną do $f(x) = 7x^9$ jest funkcja $g(x) = f^{-1}(x) = \sqrt[9]{\frac{x}{7}}$,

g : **R** →**R**.

g) $f(x) = \sqrt[3]{1+\sqrt{x}}$, f : [0; ∞) → [1; ∞).

$$y = \sqrt[3]{1+\sqrt{x}},\ x = (y^3-1)^2 = y^6 - 2y^3 + 1\ .$$

Funkcją odwrotną do $f(x) = \sqrt[3]{1+\sqrt{x}}$ jest funkcja

$g(x) = f^{-1}(x) = x^6 - 2x^3 + 1$, g: [1; ∞) → [0; ∞).

h) $f(x) = \sqrt[4]{2\ln(x)}$, f : [1; ∞) → [0; ∞).

$$y = \sqrt[4]{2\ln(x)},\ x = e^{(\frac{y^4}{2})} = \exp(\frac{y^4}{2})\ .$$

Funkcją odwrotną do $f(x) = \sqrt[4]{2\ln(x)}$ jest funkcja

$g(x) = f^{-1}(x) = \exp(\frac{x^4}{2}) = e^{(\frac{x^4}{2})}$, g: [0; ∞) → [1; ∞).

i) $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{\log_5(x)}}$, f: (1; ∞) → (0; ∞).

$y=\dfrac{2}{\sqrt{\log_5(x)}}$, $x=5^{\frac{4}{y^2}}$.

Funkcją odwrotną do $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{\log_5(x)}}$ jest funkcja

$g(x)=f^{-1}(x)=5^{\frac{4}{x^2}}$, g: (0; ∞) → (1; ∞).

j) $f(x)=\sqrt{x^2+9}$, f: [0; ∞) → [3; ∞).

$y=\sqrt{x^2+9}$, $x=\sqrt{y^2-9}$.

Funkcją odwrotną do $f(x)=\sqrt{x^2+9}$ jest funkcja

$g(x)=f^{-1}(x)=\sqrt{x^2-9}$, g: [3; ∞) → [0; ∞).

k) $f(x)=\sqrt{x^2+9}$, f: (-∞; 0] → [3; ∞).

$y=\sqrt{x^2+9}$, $x=-\sqrt{y^2-9}$.

Funkcją odwrotną do $f(x)=\sqrt{x^2+9}$ jest funkcja

$g(x)=f^{-1}(x)=-\sqrt{x^2-9}$, g: [3; ∞) → (-∞; 0].

l) $f(x)=-\sqrt{x^2+9}$, f: [0; ∞) → (-∞; -3].

$y=-\sqrt{x^2+9}$, $x=\sqrt{y^2-9}$.

Funkcją odwrotną do $f(x)=-\sqrt{x^2+9}$ jest funkcja

$g(x)=f^{-1}(x)=\sqrt{x^2-9}$, g: (-∞; -3] → [0; ∞).

m) $f(x) = -\sqrt{x^2+9}$, f: (-∞; 0] → (-∞; -3].

$y = -\sqrt{x^2+9}$, $x = -\sqrt{y^2-9}$.

Funkcją odwrotną do $f(x) = -\sqrt{x^2+9}$ jest funkcja

$g(x) = f^{-1}(x) = -\sqrt{x^2-9}$, g: (-∞; -3] → (-∞; 0].

3) Wykorzystanie związku (2.6) pomiędzy funkcją złożoną a funkcją odwrotną:

f: **R** → **R**, $f(x) = 7x+9$; g: **R** → **R** , $g(x) = -2x+1$;

$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = -2(7x+9)+1 = -14x-17$, h : **R** → **R**.

f^{-1} : **R** → **R**, $f^{-1}(x) = x/7 - 9/7$; g^{-1} : **R** → **R** , $g^{-1}(x) = \dfrac{-x+1}{2}$;

$$h^{-1}(x) = (g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = \frac{1}{7} \cdot \frac{-x+1}{2} - \frac{9}{7} =$$

$$= \frac{-x}{14} - \frac{17}{14}$$

h^{-1} : **R** → **R**.

Funkcja odwrotna do *h* może zostać obliczona wprost:

$y = -14x - 17$, $x = \dfrac{-y}{14} - \dfrac{17}{14}$, zatem faktycznie $h^{-1}(x) = \dfrac{-x}{14} - \dfrac{17}{14}$.

**Naszkicowanie wykresów funkcji występujących w podrozdziale 2.4 oraz określenie ich własności jest dodatkowym i bardzo kształcącym ćwiczeniem.*

2.5 Inżynierskie zastosowania funkcji

Przykład 1: złożoność obliczeniowa.

W informatyce, mówiąc o algorytmach, występuje pojęcie „złożoności obliczeniowej”. Pod tym terminem kryje się liczba wykonywanych działań i operacji (a więc czas działania algorytmu) w zależności od liczby danych *n*. Konkretny problem, jeżeli jest rozwiązywalny, może zostać rozwiązany przez jeden lub kilka algorytmów. Mówi się o złożoności obliczeniowej algorytmów następujących rzędów:

a) złożoność liniowa – rzędu n,
b) złożoność kwadratowa – rzędu n^2,
c) złożoność potęgowa – rzędu n^k,
d) złożoność logarytmiczna – rzędu $\log(n)$,
e) złożoność wykładnicza – rzędu 2^n,
f) złożoności mieszane – rzędu $n \cdot \log(n)$, $n^2 \cdot \log(n)$.

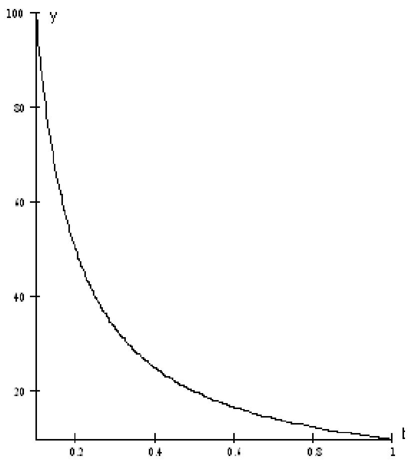
Poszczególne rzędy złożoności obliczeniowej oznaczają funkcje, których wartości uzależniają liczbę działań i operacji od liczby danych *n*. Np. złożoność kwadratowa oznacza większą liczbę działań (dłuższy czas) niż złożoność liniowa, a z kolei złożoność wykładnicza oznacza większą liczbę operacji niż złożoność logarytmiczna.

Przykład 2: prędkość poruszania się obiektu.

Załóżmy, iż ustalona jest odległość $s = const.$ w linii prostej od punktu A od punktu B. Wówczas prędkość poruszania się obiektu po linii prostej od punktu A od punktu B jest funkcją czasu, w jakim obiekt przemieści się od punktu A od punktu B: $v(t) = \frac{s}{t}$ dla $t > 0$. Ta zależność funkcyjna jest ***odwrotnie***

proporcjonalna do czasu: im większy czas, tym mniejsza prędkość (jeżeli czas rośnie do nieskończoności, to prędkość maleje do zera), natomiast im mniejszy czas, tym większa prędkość (jeżeli czas maleje do zera, to prędkość rośnie do nieskończoności). Jest to zachowanie znane dla ciągu liczbowego $a_n = 1/n$.

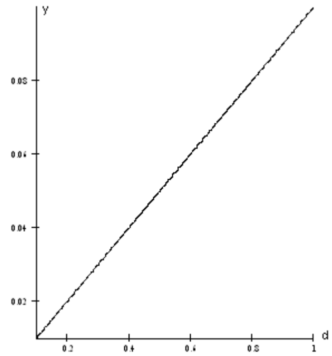
Jeżeli np. *s* = 10 [metrów], to dana jest funkcja homograficzna $v(t) = \frac{10}{t}$ dla *t > 0*.



Rys. 2.25. Fragment wykresu funkcji homograficznej $v(t) = \frac{10}{t}$ dla *t* > 0.

Załóżmy teraz, iż ustalony jest czas *t* = *const.* przemieszczania się obiektu. Wówczas prędkość poruszania się obiektu jest funkcją drogi *d*, jaką pokona obiekt: $v(d) = \frac{d}{t}$ dla $d \geq 0$. Ta zależność funkcyjna jest ***wprost proporcjonalna***: im większa przebyta droga w danym czasie, tym większa prędkość, a im mniejsza droga, tym mniejsza prędkość.

Jeżeli np. *t* = 10 [sekund], to dana jest funkcja liniowa $v(d) = \frac{d}{10} = 0.1 \cdot d$ dla $d \geq 0$.



Rys. 2.26. Fragment wykresu funkcji liniowej $v(d) = 0.1d$ dla $d \geq 0$.

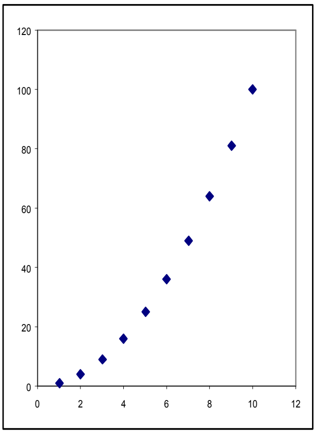
Przykład 3: próbkowanie danych.

Załóżmy, iż co jedną sekundę w czasie *n* = 1 do *n* = 10 (czyli *n* = 1,2,…,10 [s]) zanotowano następującą liczbę *l* spadających jesienią liści wraz ze wzrostem czasu *n,* a tym samy ze wzrostem siły wiatru:

***n*=**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
***L(n)*=**	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

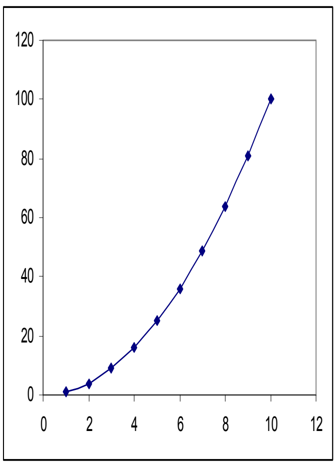
Tab. 2.1. Liczba spadających liści *l(n)* dla *n* sekund.

Dla takich argumentów *n* i wartości *l(n)* można narysować wykres punktowy:



Rys. 2.27. Wykres punktowy dla danych z tab. 2.1.

Łatwo zauważyć, iż dane w tab. 2.1 układają się zgodnie ze wzorem *l(n)* = n^2 dla *n* = 1,2,…,10. Można zadać sobie pytanie, ile wynosi liczba spadających liści *l* po czasie *t* = 1.5, 2.8 czy 9.6 sekundy. Na podstawie próbkowania danych (danych z tab. 2.1- *tablicy wartości funkcji*) określamy funkcję *l(t)* = t^2 dla t $\in$ [1;10].



Rys. 2.28. Wykres funkcji kwadratowej *l(t)* = t^2 dla t $\in$ [1;10].

Oczywiście liczba liści jest wielkością naturalną i gdy np. dla t = 1.5 obliczono l(t) = t^2 = $(1.5)^2$ = 2.25, to liczbę liści zaokrąglamy w celach praktycznych do najbliższej liczby całkowitej [$l(t)$] = [2.25] = 2.

2.6 Zadania

1) Podaj pięć przykładów przyporządkowań będących funkcją i występujących w otaczającym nas świecie.

2) Wykonaj złożenie funkcji (pamiętaj o odpowiednich dziedzinach i przeciwdziedzinach funkcji):

a) f: $[0;\frac{1}{2}\pi] \to [-1;1]$, $f(x) = cos(2x) = y$;

g: $[-1;1] \to [-5;1]$, $g(y) = 3y - 2$;

$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = ?$, h : $[0;\pi/2] \to [-5;1]$.

b) g: $(-\infty;\infty) \to (-\infty;\infty)$, $g(x) = 6x + 15 = y$;

f: $(-\infty;\infty) \to [-1;1]$, $f(y)=cos(3y)$;

$s(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = ?$, s : $(-\infty;\infty) \to [-1;1]$.

c) f: $\mathbf{R} \to (0;\infty)$, $f(x) = 3^x = y$; g: $(0;\infty) \to \mathbf{R}$, $g(y) = \log_3(y)$;

$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = ?$, h : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

d) g: $(0;\infty) \to \mathbf{R}$, $g(x) = \log_5(x) = y$; f: $\mathbf{R} \to (0;\infty)$, $f(y) = 5^y$;

$s(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = ?$, s : $(0;\infty) \to (0;\infty)$.

e) f: **R**$^+ \to$ **R**$^+$, $f(x) = 2/x = y$; g: **R**$^+ \to (3; \infty)$, $g(y) = \sqrt[4]{y+81}$;

$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = ?$, h : **R**$^+ \to (3; \infty)$.

f) g: **R** $\to$ **R** , $g(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + 1 = y$; f: **R** $\to$ **R**, $f(y) = -y-17$;

$s(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = ?$, s : **R** $\to$ **R**.

g) f: **R** $\to$ **R**, $f(x) = -3x+22$; g: **R** $\to$ **R** , $g(x) = \sqrt[5]{2x}$;

$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = ?$, h : **R** $\to$ **R**;

$s(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = ?$, s : **R** $\to$ **R**.

h) f: **R** $\to [0; \infty)$, $f(x) = 9x^4$; g: $[0; \infty) \to [-1;1]$, $g(x) = -\sin(2x)$;

$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = ?$, h : **R** $\to [-1;1]$.

i) f: **R** $\to$ **R**, $f(x) = -2x^7$; g: **R** $\to [4; \infty)$, $g(x) = \sqrt{x^2+16}$;

$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = ?$, h : **R** $\to [4; \infty)$.

3) Znajdź funkcję odwrotną (pamiętaj o odpowiednich dziedzinach i przeciwdziedzinach funkcji oraz o symetrii osiowej danej funkcji i funkcji odwrotnej):

a) $f(x) = -7x-5$, f : **R** $\to$ **R**;

b) $f(x) = 3x^2$, f : $[0; \infty) \to [0; \infty)$;

c) $f(x) = 12x^6$, f : $(-\infty; 0] \to [0; \infty)$;

d) $f(x) = 2^{-x}$, f : **R** $\to (0; \infty)$;

e) $f(x) = \dfrac{-2}{x-4}$, f: **R**\{4} $\to$ **R**\{0};

f) $f(x) = -17x^9+2$, f : **R** $\to$ **R**;

g)* $f(x)=\sqrt[3]{8+3\sqrt{x}}$, f: [0; ∞) → [2; ∞);

h)* $f(x)=\sqrt[4]{-\ln(x)}$, f: (0;1] → [0; ∞);

i)* $f(x)=\dfrac{-6}{\sqrt{\log_9(x)}}$, f: (1; ∞) → (-∞; 0);

j) $f(x)=\sqrt{x^2+25}$, f: [0; ∞) → [5; ∞);

k) $f(x)=\sqrt{6x^2+9}$, f: (-∞; 0] → [3; ∞);

l) $f(x)=-\sqrt{x^2+64}$, f: [0; ∞) → (-∞; -8];

m) $f(x)=-\sqrt{5x^2+81}$, f: (-∞; 0] → (-∞; -9].

4)* Wykorzystaj związek (2.6) pomiędzy funkcją złożoną a funkcją odwrotną:

f: **R** → **R**, $f(x) = -7x^3+9$; g: **R** → **R** , $g(x)=-2x-3$;

$h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))=?$, h : **R** → **R**.

f^{-1} : **R** → **R**, $f^{-1}(x)=?$; g^{-1} : **R** → **R** , $g^{-1}(x)=?$;

$h^{-1}(x)=(g\circ f)^{-1}(x)=(f^{-1}\circ g^{-1})(x)=f^{-1}(g^{-1}(x))=?$, h^{-1} :**R** → **R**.

Funkcja odwrotna do h może zostać obliczona wprost: $h^{-1}(x)=?$.

**Naszkicowanie wykresów funkcji występujących w podrozdziale 2.6 oraz określenie ich własności jest dodatkowym i bardzo kształcącym ćwiczeniem.*

Odpowiedzi

2) a) $h(x)$ = 3cos(2x)-2; **b)** $s(x)$ = cos(18x+45); **c)** $h(x)$ = x; **d)** $s(x)$ = x;

e) $h(x)=\sqrt[4]{\frac{2}{x}+81}$; **f)** $s(x)=-2x^3+x^2+7x-18$; **g)** $h(x)=\sqrt[5]{-6x+44}$;

$s(x)=-3\sqrt[5]{2x}+22$; **h)** $h(x)=-\sin(18x^4)$; **i)** $h(x)=\sqrt{4x^{14}+16}$.

3) a) $f^{-1}(x)=\frac{-x-5}{7}$; **b)** $f^{-1}(x)=\sqrt{\frac{x}{3}}$; **c)** $f^{-1}(x)=-\sqrt[6]{\frac{x}{12}}$;

d) $f^{-1}(x)=-\log_2 x=\log_2\frac{1}{x}$; **e)** $f^{-1}(x)=\frac{-2+4x}{x}=4-\frac{2}{x}$;

f) $f^{-1}(x)=\sqrt[9]{\frac{2-x}{17}}$; **g)** $f^{-1}(x)=(\frac{x^3-8}{3})^2$; **h)** $f^{-1}(x)=e^{-x^4}$;

j) $f^{-1}(x)=\sqrt{x^2-25}$; **k)** $f^{-1}(x)=-\sqrt{\frac{x^2-9}{6}}$; **l)** $f^{-1}(x)=\sqrt{x^2-64}$;

m) $f^{-1}(x)=-\sqrt{\frac{x^2-81}{5}}$.

4) $h(x) = 14x^3-21$; $h^{-1}(x)=\sqrt[3]{\frac{21+x}{14}}$; $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\frac{9-x}{7}}$; $g^{-1}(x)=\frac{-x-3}{2}$.

Rozdział 3. Granica i ciągłość funkcji jednej zmiennej

3.1 Definicja i własności granicy funkcji

W rozdziale 1 omówiono granicę ciągu liczbowego przy $n \to \infty$, natomiast w rozdziale 2 opisano funkcje elementarne i ich własności. Wiemy, iż ciągi liczbowe są to funkcje o dziedzinie w zbiorze liczb naturalnych. ***Jak powiązać pojęcie „granicy" z dowolną funkcją?***

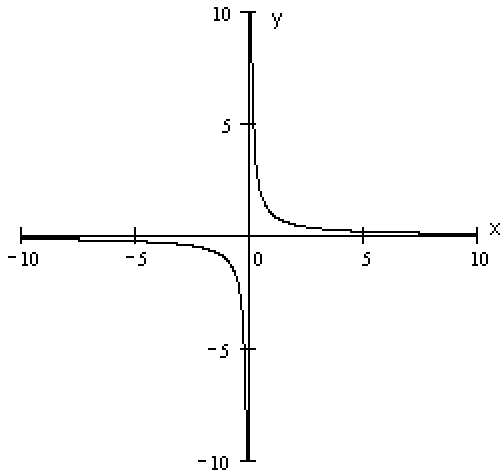
Otóż jeżeli do dziedziny funkcji będzie należał przedział $(-\infty; \infty)$, $(c; \infty)$ lub $[c;\infty)$ dla pewnej liczby rzeczywistej c, to wówczas analogicznie jak dla ciągów można mówić o granicy funkcji f dla argumentu $x \to \infty$ (czyli w ***punkcie niewłaściwym* +∞**), co zapisujemy $\lim_{x\to\infty} f(x)$ i rozumiemy jako opis „zachowania" funkcji dla argumentu dążącego do nieskończoności. Jeżeli natomiast do dziedziny funkcji f będzie należał przedział $(-\infty; \infty)$, $(-\infty; c)$ lub $(-\infty; c]$ dla pewnej liczby rzeczywistej c, to wtedy można mówić o granicy funkcji f dla argumentu $x\to-\infty$ (czyli w **punkcie niewłaściwym -∞**), co zapisujemy $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ i rozumiemy jako opis „zachowania" funkcji dla argumentu dążącego do minus nieskończoności.

Przykłady granic w punktach niewłaściwych $+\infty$ oraz $-\infty$:

1) Niech $f(x) = 1/x$ dla $x \in (0; \infty)$. Granicą wartości funkcji dla $x \to \infty$ jest liczba 0 (wykres funkcji zbliża się do prostej $y = 0$ dla $x \to \infty$), czyli

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Wynik ten jest zgodny z naszą wiedzą o ciągach: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

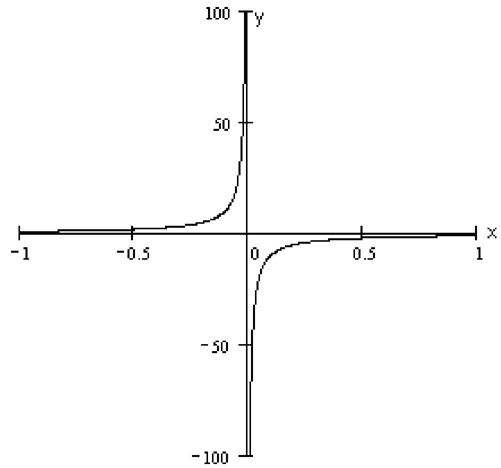


Rys. 3.1. Wykres funkcji *f(x) = 1/x*, *f* : **R** \ {0}→ **R** \ {0}.

2) Niech *f(x) = 1/x* dla *x* ∈ (-∞; 0). Granicą wartości funkcji dla *x* → -∞ jest liczba 0 (jak poprzednio wykres funkcji zbliża się do prostej *y* = 0 dla *x* → -∞), czyli

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Wynik ten jest zgodny z naszą wiedzą o ciągach: $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{-n} = 0$.



Rys. 3.2. Wykres funkcji *f(x) = -1/x*, *f* : **R** \ {0}→ **R** \ {0}.

W powyższych przykładach 1 i 2 pokazano, iż w punktach niewłaściwych +∞ oraz -∞ funkcja *f(x)* = *1/x*, a również *f(x)* = *-1/x*, posiadają ***granicę właściwą***, będącą liczbą skończoną równą 0.

3) Niech *f(x)* = *x* dla $x \in (-\infty; +\infty)$. Granicą wartości funkcji dla $x \to -\infty$ jest granica niewłaściwa -∞: wykres funkcji zbliża się do minus nieskończoności dla $x \to -\infty$, czyli

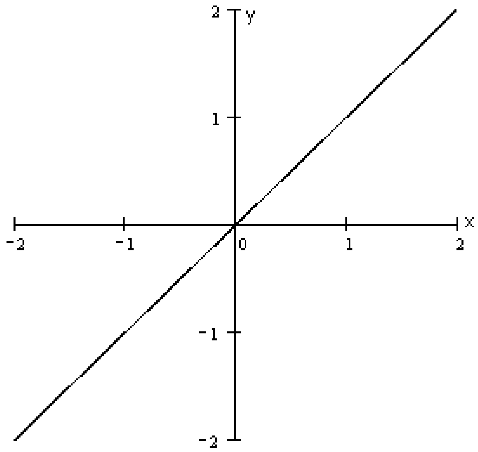
$$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty .$$

Wynik ten jest zgodny z naszą wiedzą o ciągach: $\lim_{n \to \infty} (-n) = -\infty$.

Granicą wartości funkcji *f(x)* = *x* dla $x \to \infty$ jest granica niewłaściwa ∞ (wykres funkcji zbliża się do nieskończoności dla $x \to \infty$), czyli

$$\lim_{x \to \infty} x = \infty .$$

Wynik ten jest zgodny z naszą wiedzą o ciągach: $\lim_{n \to \infty} n = \infty$.



Rys. 3.3. Wykres funkcji *f(x)* = *x*, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

W powyższym przykładzie 3 pokazano, iż w punktach niewłaściwych +∞ oraz -∞ funkcja *f(x)* = *x* posiada ***granicę niewłaściwą*** odpowiednio +∞ oraz -∞.

Jak powiązać omówione dotychczas granice funkcji z życiowym przykładem? Otóż załóżmy, iż w chwili *t* = 0 sytuacja finansowa pana o imieniu Bob jest następująca:

1) posiada nieograniczone oszczędności;
2) zaczyna nową pracę w nowej firmie i nie otrzymał jeszcze wypłaty.

Styl życia Boba i warunki zatrudnienia w nowej firmie powodują, iż wydatki i przychody Boba kształtują się wg schematu (wraz z liczbą lat *t*):

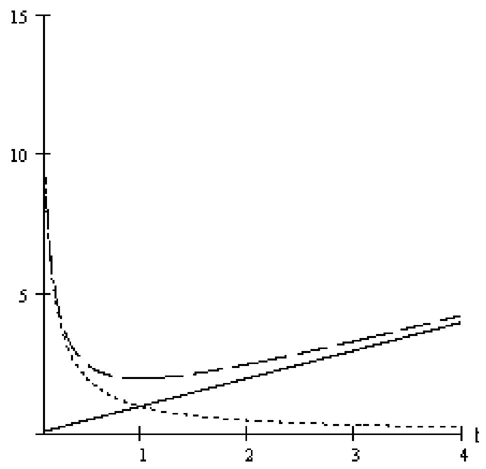
1) oszczędności f_1 topnieją w tempie odwrotnie proporcjonalnym do mijającego czasu wg wzoru: $f_1(t) = 1/t$;
2) pensja f_2 rośnie wprost proporcjonalnie do przepracowanych lat wg wzoru: $f_2(t) = t$.

Wykresy funkcji f_1 (rys. 3.1) oraz f_2 (rys. 3.3) pozwalają nam prześledzić sytuację Boba w czasie początkowym $t = 0$. Sytuacji Boba w czasie początkowym odpowiadają granice funkcji dla $t = 0$: oszczędności dążą do nieskończoności, pensja zerowa. Jednocześnie widzimy, iż granice funkcji dla *t* dążącego do nieskończoności odpowiadają sytuacji Boba wraz z mijającymi latami *t*: funkcja f_1 maleje do zera (oszczędności topnieją do zera), natomiast pensja f_2 rośnie bez ograniczeń do nieskończoności.

W takiej to sytuacji znalazł się Bob i chciałby odpowiedzieć sobie na pytanie:

Czy grozi mu *dołek finansowy*? A jeżeli tak, to po upływie ilu lat *t*?

Stan finansów Boba w chwili *t* jest sumą oszczędności i pensji: $f = f_1 + f_2$ (rys. 3.4). Wykonaliśmy więc operację dodawania funkcji. To działanie na funkcjach, jak i pozostałe: odejmowanie, mnożenie, dzielenie i złożenie funkcji oraz funkcja odwrotna, pojawiły się w rozdziale 2.



Rys. 3.4 Wykresy funkcji $f_1(t) = 1/t$ (linia kropkowana), $f_2(t) = t$ (linia ciągła) oraz $f(t) = t + 1/t$ (linia złożona z odcinków).

Z wykresu łatwo można odczytać, iż dołek finansowy dopadnie Boba po upływie czasu $t = 1$ [rok]. Jest to punkt przecięcia funkcji f_1 oraz f_2. Więcej o sposobach szukania ważnych punktów na wykresie funkcji, takich jak dołek (minimum funkcji) czy górka (maksimum funkcji), Czytelnik znajdzie w rozdziale 4. Jest tam m.in. dokładnie omówiona funkcja $f(t) = t + 1/t$.

Zanim pojawią się formalne definicje interesującej nas teorii, rozważmy pewne kwestie dotyczące granicy funkcji w sposób odbiegający nieco od innych opracowań, lecz nie odbiegający od prawdy w przypadku funkcji elementarnych.

Granica funkcji może zostać wyznaczona dla argumentu dążącego do liczby rzeczywistej s należącej lub nie należącej do dziedziny funkcji, ale leżącej na granicy dziedziny. W przypadku funkcji elementarnych dziedzina funkcji jest przedziałem lub sumą przedziałów otwartych lub domkniętych obustronnie albo jednostronnie. Granicę dziedziny będziemy rozumieć jako liczbę leżącą na brzegu przedziału z dziedziny.

Uwaga

Jeżeli liczba rzeczywista s należy do dziedziny funkcji *D* oraz s nie leży na granicy dziedziny *D*, wówczas granicą funkcji elementarnej dla argumentu $x \to s$ jest wartość funkcji w punkcie s.

Symbolicznie można zapisać:

jeżeli $f : D \to R \wedge s \in D \wedge s \notin$ *granica(D)*, to $\lim_{x \to s} f(x) = f(s)$.

Przykłady granic w ***punktach właściwych*** (czyli będących liczbą skończoną):

1) Dla funkcji z rys. 3.1 dziedzina *D* = (0; ∞) i liczba *s* = 5:

$$\lim_{x \to 5} \frac{1}{x} = \frac{1}{5}.$$

2) Dla funkcji z rys. 3.2 dziedzina *D* = (-∞; 0) i liczba *s* = -8:

$$\lim_{x \to -8} \frac{1}{x} = -\frac{1}{8}.$$

3) Dla funkcji z rys. 3.3 dziedzina *D* = (-∞; ∞) i liczba *s* = 0:

$$\lim_{x \to 0} x = 0.$$

W przypadku liczby *s* ∈ *D* rozważenia wymagają jeszcze dwa przypadki, gdy *s* leży na granicy dziedziny:

1) Dziedzina *D* jest postaci (-∞; *s*], (*c*; *s*] lub [*c*; *s*] dla pewnej liczby rzeczywistej *c* < *s*. Wówczas istnieje wartość funkcji w punkcie *s* oraz dla argumentów mniejszych od *s* (leżących na osi liczbowej po lewej stronie liczby *s*) i dlatego mówimy o ***granicy lewostronnej*** w punkcie *s*. Fakt ten oznaczamy górnym wskaźnikiem minus przy *s*:

$$\lim_{x \to s^-} f(x) = f(s).$$

2) Dziedzina *D* jest postaci [*s*; ∞), [*s*; *c*] lub [*s; c*) dla pewnej liczby rzeczywistej *c* > *s*. Wówczas istnieje wartość funkcji w punkcie *s* oraz dla argumentów większych od *s* (leżących na osi liczbowej po prawej stronie liczby *s*) i dlatego mówimy o ***granicy prawostronnej*** w punkcie *s*. Fakt ten oznaczamy górnym wskaźnikiem plus przy *s*:

$$\lim_{x\to s^+} f(x) = f(s)\,.$$

Krótko mówiąc: nie ma problemu z wyznaczeniem granicy funkcji elementarnej w punkcie należącym do dziedziny funkcji, ponieważ granicą jest wartość funkcji w danym punkcie (może to być granica obustronna, lewostronna lub prawostronna). Nie musi tak być, gdy dowolna funkcja (spoza funkcji elementarnych) nie jest ciągła.

Prawdziwe obliczenia granicy zaczynają się dla argumentu dążącego do liczby *s*, która nie należy do dziedziny funkcji. Wówczas dziedzina funkcji może być postaci: (*s*; ∞), (*s*; *c*], (*s; c*) dla *c* > *s* lub (-∞; *s*), (*c*; *s*), [*c*; *s*) dla *c* < *s*.

Rozpatrzmy funkcję z rys. 3.1: liczba *s* = 0 $\notin$ D. Na rys. 3.1 można zaobserwować, iż wartości funkcji dążą do nieskończoności przy $x \to 0$ od strony prawej, czyli istnieje granica prawostronna:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty\,.$$

Jest to zgodne z wiedzą o symbolach oznaczonych w przypadku ciągów:

$$[\frac{1}{0^+}] = \infty\,. \tag{3.1}$$

Wzór (3.1) jest ***zapisem symbolicznym*** i należy rozumieć go w odniesieniu do granic.

Z kolei na rys. 3.1 można zaobserwować, iż wartości funkcji dążą do minus nieskończoności przy $x \to 0$ od strony lewej, czyli istnieje granica lewostronna:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty\,.$$

Jest to zgodne z wiedzą o symbolach oznaczonych w przypadku ciągów:

$$[\frac{1}{0^-}] = -\infty . \quad \textbf{(3.2)}$$

Wzór (3.2) jest ***zapisem symbolicznym*** i należy rozumieć go w odniesieniu do granic.

Przyjmując dla funkcji *f(x)* = *1/x* dziedzinę **R**\{0} można stwierdzić, iż granica lewostronna i prawostronna przy $x \to 0$ różni się. Jest to związane z brakiem ciągłości funkcji w punkcie *x* = 0, ale pojęcie „ciągłości funkcji" zostanie wyjaśnione później.

Przykłady wyznaczenia granicy funkcji w punkcie nie należącym do dziedziny funkcji:

1) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 1+1 = 2$.

2) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x\to -1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x+1} = \lim_{x\to -1}(x-1) = -1-1 = -2$.

3) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$.

4) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{|x|}} = \infty$.

W analizie matematycznej istnieją dwie równoważne definicje granicy funkcji: Cauchy'ego i Heinego.

Ideą definicji **Cauchy'ego** jest pokazanie zależności, że w przypadku granicy właściwej g funkcji f w punkcie x_0 (czyli $\lim_{x\to x_0} f(x) = g$) z faktu, iż pewne argumenty x leżą „bardzo blisko" punktu x_0 (czyli $0 < |x - x_0| < \delta$) wynika zawsze, iż wartości funkcji dla argumentów x położone są „bardzo blisko" granicy g (czyli $|f(x) - g| < \varepsilon$).

Def. 3.1 - definicja Cauchy'ego granicy funkcji

Liczbę g nazywamy granicą funkcji f w punkcie x_0, jeżeli dla każdej dowolnie małej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba rzeczywista $\delta > 0$, że z nierówności $0 < |x - x_0| < \delta$ wynika $|f(x) - g| < \varepsilon$.

Powyższa definicja Cauchy'ego oznacza, iż dla dowolnie małej odległości ε (pomiędzy wartością $f(x)$ a granicą g) można dobrać dowolnie małą odległość δ (pomiędzy argumentem x a punktem x_0).

Uwaga

Jeżeli punkt x_0 należy do dziedziny funkcji f, to w przypadku wspomnianych wcześniej funkcji elementarnych zachodzi:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g = f(x_0).$$

Wówczas w definicji Cauchy'ego spełniona jest nierówność z drugiej części implikacji: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Definicja **Heinego** odwołuje się do wiedzy o ciągach liczbowych:

Def. 3.2 - definicja Heinego granicy funkcji

Funkcja f posiada granicę właściwą g w punkcie x_0, jeżeli dla każdego ciągu argumentów a_n zbieżnego do x_0, czyli dla $a_n \to x_0$ ciąg wartości $f(a_n)$ dąży do liczby g.

Uwaga

Jeżeli punkt x_0 należy do dziedziny funkcji f, to w przypadku funkcji elementarnych zachodzi:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g = f(x_0).$$

Wówczas w definicji Heinego odpowiedni ciąg wartości $f(a_n)$ dąży do $f(x_0)$.

Analogicznie do def. 3.1 i 3.2 definiuje się granice lewostronne (dla argumentów $x < x_0$), co zapisujemy:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = g$$

oraz prawostronne (dla argumentów $x > x_0$):

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = g\ .$$

Def. 3.3 - definicja Cauchy'ego granicy lewostronnej funkcji

Liczbę g nazywamy lewostronną granicą funkcji f w punkcie x_0, jeżeli dla każdej dowolnie małej liczby rzeczywistej ε > 0 istnieje taka liczba rzeczywista δ > 0, że z nierówności $0 < x_0 - x < \delta$ wynika $|f(x) - g| < \varepsilon$.

Def. 3.4 - definicja Cauchy'ego granicy prawostronnej funkcji

Liczbę g nazywamy prawostronną granicą funkcji f w punkcie x_0, jeżeli dla każdej dowolnie małej liczby rzeczywistej ε > 0 istnieje taka liczba rzeczywista δ > 0, że z nierówności $0 < x - x_0 < \delta$ wynika $|f(x) - g| < \varepsilon$.

Dla dowolnie małej odległości ε (pomiędzy wartością $f(x)$ a granicą g) można dobrać dowolnie małą odległość δ (pomiędzy argumentem x a punktem x_0). Zauważmy różnicę z warunku $0 < x - x_0 < \delta$ w porównaniu z warunkiem $0 < |x - x_0| < \delta$ w def. 3.1.

Def. 3.5 - definicja Heinego granicy lewostronnej funkcji

Funkcja *f* posiada lewostronną granicę właściwą *g* w punkcie x_0, jeżeli dla każdego ciągu argumentów a_n zbieżnego do x_0 i takiego, iż począwszy od pewnego *n*: $a_n < x_0$, odpowiedni ciąg wartości $f(a_n)$ dąży do liczby *g*.

Def. 3.6 - definicja Heinego granicy prawostronnej funkcji

Funkcja f posiada prawostronną granicę właściwą g w punkcie x_0, jeżeli dla każdego ciągu argumentów a_n zbieżnego do x_0 i takiego, iż począwszy od pewnego n: $a_n > x_0$, odpowiedni ciąg wartości $f(a_n)$ dąży do liczby g.

Uwaga
Definicje Cauchy'ego i Heinego można stosować zamiennie.

Jeżeli granica funkcji liczona jest dla argumentu $x \to \infty$ lub dla $x \to -\infty$, to mówi się o granicy funkcji w *punkcie niewłaściwym*. Wówczas definicje Cauchy'ego i Heinego przyjmują następującą postać:

Def. 3.7 - definicja Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie niewłaściwym +∞

Liczbę g nazywamy granicą funkcji f w punkcie niewłaściwym $+\infty$, jeżeli dla każdej dowolnie małej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba rzeczywista M, że z nierówności $x > M$ wynika $\left|f(x) - g\right| < \varepsilon$.

Def. 3.7 zawiera w sobie informację, iż dla dowolnie dużego argumentu x możemy znaleźć wartość funkcji $f(x)$ leżącą bardzo blisko granicy g.

Def. 3.8 - definicja Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie niewłaściwym -∞

Liczbę g nazywamy granicą funkcji f w punkcie niewłaściwym $-\infty$, jeżeli dla każdej dowolnie małej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba rzeczywista M, że z nierówności $x < M$ wynika $\left|f(x) - g\right| < \varepsilon$.

Def. 3.8 zawiera w sobie informację, iż dla dowolnie małego argumentu x możemy znaleźć wartość funkcji $f(x)$ leżącą bardzo blisko granicy g.

Def. 3.9 - definicja Heinego granicy funkcji w punkcie niewłaściwym +∞

Funkcja *f* posiada granicę *g* w punkcie w punkcie niewłaściwym +∞, jeżeli z faktu, iż dla każdego ciągu argumentów a_n (o elementach należących do dziedziny funkcji) zbieżnego do +∞ wynika, że odpowiedni ciąg wartości $f(a_n)$ dąży do liczby *g*.

Def. 3.10 - definicja Heinego granicy funkcji w punkcie niewłaściwym -∞

Funkcja *f* posiada granicę *g* w punkcie w punkcie niewłaściwym -∞, jeżeli z faktu, iż dla każdego ciągu argumentów a_n (o elementach należących do dziedziny funkcji) zbieżnego do -∞ wynika, że odpowiedni ciąg wartości $f(a_n)$ dąży do liczby *g*.

Granice w punktach niewłaściwych zapisuje się:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = g \text{ oraz } \lim_{x\to-\infty} f(x) = g\,.$$

Granica w punkcie x_o może okazać się nieskończona. Mówimy wtedy o <u>granicy niewłaściwej</u>.

Def. 3.11 - definicja Cauchy'ego granicy niewłaściwej +∞

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \ \forall\ M\in\mathbf{R}\ \exists\ \delta>0:\ (0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x) > M).$$

Definicja 3.11 zawiera w sobie fakt, iż w przypadku granicy wynoszącej +∞ dla każdego argumentu x leżącego dowolnie blisko punktu x_o możemy znaleźć dowolnie dużą wartość funkcji $f(x)$.

Def. 3.12 - definicja Cauchy'ego granicy niewłaściwej -∞

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \ \forall\ M\in\mathbf{R}\ \exists\ \delta>0:\ (0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x) < M).$$

Definicja 3.12 zawiera w sobie fakt, iż w przypadku granicy wynoszącej -∞ dla każdego argumentu x leżącego dowolnie blisko punktu x_o możemy znaleźć dowolnie małą wartość funkcji $f(x)$. Zwróćmy uwagę na kolejność występowania kwantyfikatora ogólnego ∀ przed kwantyfikatorem szczegółowym ∃.

W przypadku granic niewłaściwych można także mówić o granicach lewo- i prawostronnych. Są one szczególnymi przypadkami granic z def. 3.11 i 3.12.

Def. 3.13 - definicja Cauchy'ego lewostronnej granicy niewłaściwej +∞

$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall\, M\in\mathbf{R}\ \exists\, \delta>0\colon (0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow f(x) > M)$.

Def. 3.14 - definicja Cauchy'ego prawostronnej granicy niewłaściwej +∞

$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall\, M\in\mathbf{R}\ \exists\, \delta>0\colon (0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) > M)$.

Def. 3.15 - definicja Cauchy'ego lewostronnej granicy niewłaściwej -∞

$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall\, M\in\mathbf{R}\ \exists\, \delta>0\colon (0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow f(x) < M)$.

Def. 3.16 - definicja Cauchy'ego prawostronnej granicy niewłaściwej -∞

$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall\, M\in\mathbf{R}\ \exists\, \delta>0\colon (0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) < M)$.

W def. 3.13-3.16 zamieniono różnicę $|x - x_0|$ z def. 3.11 i 3.12 na odpowiednie różnice bez wartości bezwzględnej, w zależności od położenia argumentu x względem x_0.

Definicje Heinego w przypadku granicy niewłaściwej przyjmą następującą postać, w której granice ciągu wartości funkcji $f(a_n)$ wynoszą odpowiednio +∞ i -∞:

Def. 3.17 - definicja Heinego granicy niewłaściwej +∞

$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall\, a_n \in D\ (\lim a_n = x_0 \Rightarrow \lim f(a_n) = +\infty)$.

Def. 3.18 - definicja Heinego granicy niewłaściwej -∞

$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall\, a_n \in D\ (\lim a_n = x_0 \Rightarrow \lim f(a_n) = -\infty)$.

Definicje lewostronnych i prawostronnych granic niewłaściwych wg Heinego pozostawiam jako ćwiczenie.

Uwaga
Weźmy pod uwagę dwie różne sytuacje: istnienie granicy niewłaściwej $\pm\infty$ oraz brak granicy. Co innego oznacza, iż w jakimś punkcie właściwym lub niewłaściwym funkcja ma granicę $+\infty$ lub $-\infty$, a co innego oznacza brak granicy w danym punkcie.

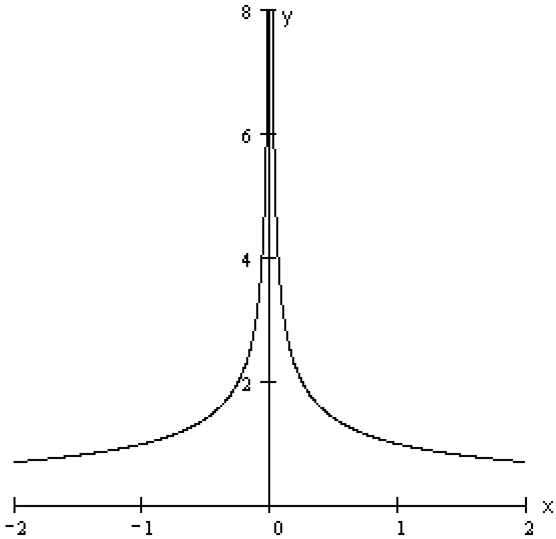
Większość wprowadzonych definicji granic została wyjaśniona na początku tego rozdziału dla funkcji z rys. 3.1 - 3.3. Najważniejszy na początku dla czytelnika jest fakt, aby kojarzyć granicę z „zachowaniem” funkcji w punkcie x_0 lub $\pm\infty$ i sprawnie ją wyliczyć (np. wartość funkcji w punkcie x_0, jeżeli istnieje). Więcej obliczeń granic znajdzie się w podrozdziale 3.2. Jakie są podstawowe własności granicy funkcji?

Podstawowe twierdzenia o granicach funkcji

Tw. 3.1) Granica funkcji (właściwa lub niewłaściwa) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy granice lewo- i prawostronna istnieją i są sobie równe:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \Leftrightarrow (\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = g).$$

Przykład: $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{|x|}} = \infty$, $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sqrt{|x|}} = \infty$, więc $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{|x|}} = \infty$.



Rys. 3.5. Wykres funkcji $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$, f : **R\{0}** → **R⁺**.

$$\lim_{x \to -9^+} \frac{1}{\sqrt{|x|}} = \frac{1}{3},\ \lim_{x \to -9^-} \frac{1}{\sqrt{|x|}} = \frac{1}{3}, \text{ więc } \lim_{x \to -9} \frac{1}{\sqrt{|x|}} = \frac{1}{3}.$$

Tw. 3.2) ***Suma granic***: jeżeli $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = g_1$ oraz $\lim_{x \to x_0} f_2(x) = g_2$, to:

$$\lim_{x \to x_0} (f_1(x) + f_2(x)) = g_1 + g_2 .$$

Przykład: $\lim_{x \to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$, więc $\lim_{x \to 2} (\frac{1}{x} + x^2) = \frac{9}{2}$.

Tw. 3.3) ***Różnica granic***: jeżeli $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = g_1$ oraz $\lim_{x \to x_0} f_2(x) = g_2$, to:

$$\lim_{x \to x_0} (f_1(x) - f_2(x)) = g_1 - g_2 .$$

Przykład: $\lim_{x\to 0.5}\dfrac{1}{x}=2$, $\lim_{x\to 0.5}x^2=0.25$, więc

$\lim_{x\to 0.5}(\dfrac{1}{x}-x^2)=1.75$.

Tw. 3.4) ***Iloczyn granic***: jeżeli $\lim_{x\to x_0}f_1(x)=g_1$ oraz $\lim_{x\to x_0}f_2(x)=g_2$, to:

$$\lim_{x\to x_0}(f_1(x)\cdot f_2(x))=g_1\cdot g_2.$$

Przykład: $\lim_{x\to 2}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}$, $\lim_{x\to 2}x^2=4$, więc $\lim_{x\to 2}(\dfrac{1}{x}\cdot x^2)=2$.

Tw. 3.5) ***Iloraz granic***: jeżeli $\lim_{x\to x_0}f_1(x)=g_1$ oraz $\lim_{x\to x_0}f_2(x)=g_2$, to:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{g_1}{g_2}\ \text{dla}\ g_2\neq 0.$$

Przykład: $\lim_{x\to 2}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}$, $\lim_{x\to 2}x^2=4$, więc $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2}{(\frac{1}{x})}=8$.

Tw. 3.6) ***Twierdzenie o granicy trzech funkcji*** (jest to analogia tw. o trzech ciągach).

Jeżeli dla trzech funkcji f_1, f_2, f_3 spełnione są warunki:

a) $f_1(x)\leq f_2(x)\leq f_3(x)$ dla każdego x należącego do pewnego sąsiedztwa punktu x_0;

b) $\lim_{x\to x_0}f_1(x)=g$ oraz $\lim_{x\to x_0}f_3(x)=g$,

to również $\lim_{x\to x_0}f_2(x)=g$.

Wybrane granice funkcji:

a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$ (jest to granica typu *0/0*), **(3.3)**

b) $\lim_{f(x)\to 0}\dfrac{\sin(f(x))}{f(x)}=1$, **(3.4)**

Uwaga

Równości (3.3) i (3.4) mówią nam, iż w przypadku obliczania sinusa kąta leżącego bardzo blisko zera, wartość funkcji sinus można zastąpić jej argumentem (wielkością kąta) – jest to bardzo ważna własność w zastosowaniach technicznych.

c) $\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ (jest to granica typu *1*$^{\infty}$), **(3.5)**

d) $\lim_{f(x)\to 0^+}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}=e$, **(3.6)**

e) $\lim_{x\to +\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{x}=e$, **(3.7)**

f) $\lim_{f(x)\to +\infty}(1+\dfrac{1}{f(x)})^{f(x)}=e$. **(3.8)**

Wzory (3.5)-(3.8) są uogólnieniami granic ciągów.

W przypadku funkcji symbole (wyrażenia) oznaczone i nieoznaczone są takie same jak dla ciągów liczbowych.

3.2 Wyznaczanie granicy funkcji

Przy wyznaczaniu granicy funkcji będącej symbolem nieoznaczonym w wielu przypadkach dokonuje się dozwolonych przekształceń algebraicznych i sprowadza się wzór funkcji do postaci symbolu oznaczonego lub wykorzystuje się znane już granice.

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2} =$

$= \lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{4}$.

2) $\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^2} = 0$.

3) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x^2} = 0$.

4) $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{2x})^x = \lim_{x\to+\infty}[(1+\frac{1}{2x})^{2x}]^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

5) $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^{3x} = \lim_{x\to+\infty}[(1+\frac{1}{x})^x]^3 = e^3$.

6) $\lim_{x\to 0^+}(1+\sin(x))^{\frac{7}{\sin(x)}} = \lim_{x\to 0^+}[(1+\sin(x))^{\frac{1}{\sin(x)}}]^7 = e^7$.

7) $\lim_{x\to 0}\frac{4\sin(x)}{x} = 4\cdot 1 = 4$.

8) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x\to 0} 3\cdot\frac{\sin(3x)}{3x} = 3\cdot 1 = 3$.

9) $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin(5x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{(\frac{\sin(5x)}{x})} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{5(\frac{\sin(5x)}{5x})} = \frac{2}{5\cdot 1} = \frac{2}{5}$.

10) $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$.

11) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x+4}}{x} = +\infty$.

12) $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x+4}}{x} = -\infty$.

13) $\lim_{x\to \infty} x^3 = \infty$.

14) $\lim_{x\to -\infty} x^3 = -\infty$.

15) $\lim_{x\to -\infty} x^8 = \infty$.

16) $\lim_{x\to \infty} (2x^3 + 5x^2 - x + 8) = \lim_{x\to \infty} x^3 (2 + \frac{5x^2}{x^3} - \frac{x}{x^3} + \frac{8}{x^3}) =$

$= \lim_{x\to \infty} x^3 (2 + \frac{5}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{8}{x^3}) = \infty$.

17) $\lim_{x\to \infty} (-2x^3 + 5x^2 - x + 8) = \lim_{x\to \infty} x^3 (-2 + \frac{5x^2}{x^3} - \frac{x}{x^3} + \frac{8}{x^3}) =$

$= \lim_{x\to \infty} x^3 (-2 + \frac{5}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{8}{x^3}) = -\infty$.

Granicą każdego <u>wielomianu</u> przy x → +∞ jest:

a) plus nieskończoność, jeżeli współczynnik przy największej potędze jest dodatni;

b) minus nieskończoność, jeżeli współczynnik przy największej potędze jest ujemny.

18) $\lim_{x\to-\infty}(2x^3+5x^2-x+8)= \lim_{x\to-\infty} x^3(2+\frac{5x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}+\frac{8}{x^3})=$

$=\lim_{x\to-\infty} x^3(2+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{8}{x^3})=-\infty$.

19) $\lim_{x\to-\infty}(-2x^3+5x^2-x+8)=\lim_{x\to-\infty} x^3(-2+\frac{5x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}+\frac{8}{x^3})=$

$=\lim_{x\to-\infty} x^3(-2+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{8}{x^3})=+\infty$.

20) $\lim_{x\to-\infty}(2x^4+5x^2-x+8)= \lim_{x\to-\infty} x^4(2+\frac{5x^2}{x^4}-\frac{x}{x^4}+\frac{8}{x^4})=$

$=\lim_{x\to-\infty} x^4(2+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{8}{x^4})=+\infty$.

21) $\lim_{x\to-\infty}(-2x^4+5x^2-x+8)=\lim_{x\to-\infty} x^4(-2+\frac{5x^2}{x^4}-\frac{x}{x^4}+\frac{8}{x^4})=$

$=\lim_{x\to-\infty} x^4(-2+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{8}{x^4})=-\infty$.

Granicą każdego <u>wielomianu</u> przy x → -∞ jest:

a) plus nieskończoność, jeżeli wielomian ma stopień parzysty i współczynnik przy największej potędze jest dodatni albo wielomian ma stopień nieparzysty i współczynnik przy największej potędze jest ujemny;

b) minus nieskończoność, jeżeli wielomian ma stopień parzysty i współczynnik przy największej potędze jest ujemny albo wielomian ma stopień nieparzysty i współczynnik przy największej potędze jest dodatni.

22) $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{2x+3}{6x-12} = -\infty$.

23) $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{2x+3}{6x-12} = +\infty$.

24) $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{-2x+3}{6x-12} = +\infty$.

25) $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{-2x+3}{6x-12} = -\infty$.

<u>Funkcja homograficzna</u> posiada w punkcie zerowania się mianownika różne granice prawo – i lewostronną. Jedna wynosi plus nieskończoność, a druga minus nieskończoność. Asymptota pionowa funkcji homograficznej przechodzi przez współrzędną, dla której zeruje się mianownik.

26) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x+3}{6x-12} = \lim_{x\to\infty} (\dfrac{2}{6} + \dfrac{7}{6x-12}) = \dfrac{1}{3}$.

27) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{2x+3}{6x-12} = \dfrac{1}{3}$.

<u>Funkcja homograficzna</u> (jako przypadek funkcji wymiernej niewłaściwej, która w liczniku i mianowniku posiada wielomian tego samego stopnia) posiada w plus nieskończoności i minus nieskończoności taką samą granicę, równą ułamkowi współczynników przy x (współczynników przy największej potędze). Wartość tej granicy wyznacza asymptotę poziomą funkcji.

28) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x-50}{6x^4-12x} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{x^3(2+\frac{3}{x^2}-\frac{50}{x^3})}{x^4(6-\frac{12}{x^3})} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{2}{6x} = 0$.

29) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+3x-50}{6x^4-12x} = \lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^3(2+\frac{3}{x^2}-\frac{50}{x^3})}{x^4(6-\frac{12}{x^3})} = \lim_{x\to-\infty}\dfrac{2}{6x} = 0$.

<u>Funkcja wymierna właściwa</u> posiada w plus nieskończoności i minus nieskończoności taką samą granicę równą 0. Wartość tej granicy wyznacza asymptotę poziomą funkcji.

30) $l\ im_{x\to\infty}\dfrac{8x^4+2x^3-6x^2+3}{2x^2+x-1} = \lim_{x\to\infty}(4x^2-x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{-0.5x+2.5}{2x^2+x-1}) =$

$= \lim_{x\to\infty}(4x^2-x-\dfrac{1}{2}) = \lim_{x\to\infty}4x^2 = \infty$.

31) $l\ im_{x\to-\infty}\dfrac{8x^4+2x^3-6x^2+3}{2x^2+x-1} = \lim_{x\to-\infty}(4x^2-x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{-0.5x+2.5}{2x^2+x-1}) =$

$= \lim_{x\to-\infty}(4x^2-x-\dfrac{1}{2}) = \lim_{x\to-\infty}4x^2 = \infty$.

<u>Funkcja wymierna niewłaściwa</u> posiada w plus nieskończoności i minus nieskończoności taką samą granicę jak jednomian powstały w wyniku podzielenia składnika z największą potęgą z licznika przez składnik z największą potęgą z mianownika.

<u>Granice funkcji logarytmicznych i wykładniczych:</u>

32) $\lim_{x\to0^+}\log_a x = -\infty$ dla a > 1.

33) $\lim\limits_{x\to\infty}\log_a x = \infty$ dla a > 1.

34) $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_a x = \infty$ dla 0 < a < 1.

35) $\lim\limits_{x\to\infty}\log_a x = -\infty$ dla 0 < a < 1.

36) $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$ dla a > 1.

37) $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \infty$ dla a > 1.

38) $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \infty$ dla 0 < a < 1.

39) $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = 0$ dla 0 < a < 1.

Granice funkcji trygonometrycznych:

40) $\lim\limits_{x\to 0}\sin(x) = 0$.

41) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin(x)$ nie istnieje.

42) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sin(x)$ nie istnieje.

Funkcja sinus nie ma granicy w ± ∞*, ponieważ okresowo przyjmuje te same wartości z przedziału [-1,1].*

43) $\lim\limits_{x \to 0} \cos(x) = 1$.

44) $\lim\limits_{x \to \infty} \cos(x)$ nie istnieje.

45) $\lim\limits_{x \to -\infty} \cos(x)$ nie istnieje.

***Funkcja cosinus nie ma granicy w ± ∞**, ponieważ okresowo przyjmuje te same wartości z przedziału [-1,1].*

46) $\lim\limits_{x \to 0} tg(x) = 0$.

47) $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^{+}} tg(x) = -\infty$.

48) $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^{-}} tg(x) = +\infty$.

49) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^{+}} tg(x) = -\infty$.

50) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^{-}} tg(x) = +\infty$.

51) $\lim\limits_{x \to \infty} tg(x)$ nie istnieje.

52) $\lim\limits_{x \to -\infty} tg(x)$ nie istnieje.

Funkcja tangens nie ma granicy w *± ∞, ponieważ okresowo przyjmuje te same wartości z przedziału (-∞,∞).*

53) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} ctg(x) = 0$.

54) $\lim\limits_{x \to 0^+} ctg(x) = \infty$.

55) $\lim\limits_{x \to 0^-} ctg(x) = -\infty$.

56) $\lim\limits_{x \to \pi^+} ctg(x) = \infty$.

57) $\lim\limits_{x \to \pi^-} ctg(x) = -\infty$.

58) $\lim\limits_{x \to \infty} ctg(x)$ nie istnieje.

59) $\lim\limits_{x \to -\infty} ctg(x)$ nie istnieje.

Funkcja cotangens nie ma granicy w *± ∞, ponieważ okresowo przyjmuje te same wartości z przedziału (-∞,∞).*

3.3 Pojęcie ciągłości funkcji

Ciągłość funkcji jest pojęciem bardzo istotnym w analizie matematycznej. Pojęcie „funkcja ciągła” **nie** sprowadza się tylko do intuicyjnego rozumienia funkcji ciągłej jako funkcji, której wykres można narysować bez odrywania ręki (aczkolwiek w przypadku funkcji elementarnych jest w takim myśleniu trochę racji). Np. funkcja *f(x)=1/x* nie jest ciągła dla *x* = 0 i rzeczywiście dla współrzędnej *x* = 0 na wykresie funkcji występuje „uskok”.

Definicja 3.19

Funkcję f określoną w otoczeniu punktu x_0 nazywamy ***ciągłą w punkcie*** x_0, jeżeli granica funkcji w punkcie x_0 równa jest wartości funkcji w tym punkcie, tzn.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \ .$$

Funkcję f nazywamy ***ciągłą prawostronnie w punkcie*** x_0, jeżeli:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \,. \tag{3.9}$$

Funkcję f nazywamy ***ciągłą lewostronnie w punkcie*** x_0, jeżeli:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) \,. \tag{3.10}$$

Jeżeli w punkcie x_0 zachodzi jednocześnie (3.9) oraz (3.10), to mówimy o ciągłości obustronnej (lub po prostu o ciągłości) funkcji f w punkcie x_0.

Przykłady ciągłości funkcji:

1) Funkcja wykładnicza $f(x) = e^x$ jest ciągła dla każdego rzeczywistego punktu *x*.
2) Funkcja niewymierna $f(x) = \sqrt{x}$ jest ciągła prawostronnie w punkcie $x = 0$.
3) Funkcja niewymierna $f(x) = \sqrt{-x}$ jest ciągła lewostronnie w punkcie $x = 0$.

4) Funkcja wymierna $f(x) = \dfrac{2x-5}{x+2}$ nie ma wartości dla x = -2, więc nie jest ciągła w tym punkcie.

Uwaga

Korzystając z def. Cauchy'ego granicy funkcji można stwierdzić, iż funkcja f jest ciągła w punkcie x_0, jeżeli dla każdej dowolnie małej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba rzeczywista $\delta > 0$, że z nierówności $0 < |x - x_0| < \delta$ wynika $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Powyższa uwaga zawiera w sobie informacje, iż w przypadku ciągłości funkcji f w punkcie x_0 dla dowolnie małego otoczenia argumentów punktu x_0 można znaleźć dowolnie małe otoczenie wartości $f(x_0)$.

Definicja 3.20

Funkcję nazywamy ***ciągłą w przedziale otwartym***, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego przedziału.

Definicja 3.21

Funkcję nazywamy ***ciągłą w przedziale domkniętym*** [*a;b*], jeżeli jest ciągła w każdym punkcie wewnętrznym tego przedziału oraz prawostronnie ciągła w punkcie *a* i lewostronnie ciągła w punkcie *b*.

Przykład: funkcja niewymierna $f(x) = \sqrt{x}$ jest *ciągła w przedziale otwartym* (0;2) i jest *ciągła w przedziale domkniętym* [1;2].

Wszystkie funkcje elementarne są ciągłe wewnątrz swoich dziedzin.

Intuicyjnie ciągłość funkcji można kojarzyć z faktem, iż pojedynczy fragment wykresu funkcji da się narysować bez odrywania ręki (bez przerywania).

Własności funkcji ciągłych:

1) Suma funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.
2) Różnica funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.
3) Iloczyn funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.
4) Iloraz funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą z wyjątkiem miejsc zerowych mianownika.
5) Funkcja odwrotna do funkcji ciągłej jest funkcją ciągłą.
6) Funkcja złożona z funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.

Tw. 3.7 - twierdzenie Weierstrassa

Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $[a;b]$, to jest ograniczona i osiąga w tym przedziale swój kres górny M i kres dolny m, tzn. istnieją punkty $s, t \in [a;b]$ takie, iż $f(s) = m$ i $f(t) = M$.

Intuicyjnie tw. Weierstrassa można kojarzyć z faktem, iż rysując fragment wykresu funkcji ciągłej w domkniętym przedziale argumentów nie należy rozpatrywać wartości funkcji w $\pm$ nieskończoności. Twierdzenie Weierstrassa jest bardzo ważne i zawiera w sobie następującą własność funkcji ciągłych: jeżeli zbiór argumentów $[a;b]$ funkcji ciągłej jest domknięty, to również zbiór wartości jest przedziałem domkniętym.

Kolejna własność funkcji ciągłych nosi nazwę ***własności Darboux***:

Tw. 3.8 - twierdzenie Darboux

Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $[a;b]$ oraz $f(a) \neq f(b)$, to dla każdej liczby S o własności: $S \in [f(a), f(b)]$ lub $S \in [f(b), f(a)]$ istnieje argument $s \in [a;b]$, dla którego $S = f(s)$.

Tw. Darboux zawiera w sobie następującą własność funkcji ciągłych: jeżeli zbiór argumentów [*a;b*] funkcji ciągłej jest domknięty, to również zbiór wartości jest przedziałem domkniętym.

Wniosek
Jeżeli na końcach przedziału określoności funkcji ciągłej [a;b] wartości są przeciwnych znaków, czyli f(a) $\cdot$ f(*b*) < 0, *to istnieje w tym przedziale miejsce zerowe funkcji, czyli punkt s* $\in$ [*a;b*], dla którego *f(s)* = 0.

Powyższy wniosek jest często wykorzystywany w **algorytmach szukania miejsca zerowego funkcji**, na przykład:

$$f(x) = x^3 + x^2 - x + 1,$$

$$f(-1) = 2, f(-2) = -1,$$

funkcja f posiada miejsce zerowe leżące w przedziale (-2;-1).

Przedział (-2,-1) można podzielić na dwa podprzedziały (-2;-1.5) oraz (-1.5;-1).
Wtedy:

$$f(-1.5) > 0$$

i przedział poszukiwań miejsca zerowego można zawęzić do (-2;-1.5). Sprawdzając wartość funkcji w punkcie środkowym tego przedziału *x* = -1.75 znowu można zmniejszyć przedział do (-2;-1.75) lub (-1.75;-1.5). I tak dalej aż do osiągnięcia żądanej dokładności wyznaczenia miejsca zerowego funkcji. Naszkicowana metoda nosi nazwę „złotego środka”.

Omówione pojęcia „**granicy funkcji**” i „**ciągłości funkcji**” są kluczowe w dalszym badaniu kolejnych własności funkcji.

3.4 Zadania

Oblicz granicę funkcji i sprawdź ciągłość funkcji:

1) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$

2) $\lim_{x\to -1^-}\dfrac{x^3}{x+1}$

3) $\lim_{x\to 2^+}\dfrac{x}{\sqrt{x-2}}$

4) $\lim_{x\to 0}|x|$

5) $\lim_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{x+3}-1}{x^2-1}$

6) $\lim_{x\to \infty}\dfrac{-9}{x^2}$

7) $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{8}{x^3}$.

8) $\lim_{x\to +\infty}(1+\dfrac{1}{2x})^{6x}$

9) $\lim_{x\to +\infty}(1+\dfrac{1}{9x})^{x}$

10)* $\lim_{x\to 0^+}(1+2\sin(x))^{\frac{1}{\sin(x)}}$

11) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{2x}$

12) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(5x)}{x}$

13) $\lim_{x\to 0}\dfrac{6x}{\sin(4x)}$

14) $\lim_{x\to -4^+}\dfrac{\sqrt{x+4}}{x}$

15) $\lim_{x\to\infty}(-12x^7+5x^2-x+8)$

16) $\lim_{x\to 1^-}\dfrac{-x+3}{x-1}$

17) $\lim_{x\to 1^+}\dfrac{-x+3}{x-1}$

18) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{-x+3}{x-1}$

19) $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{-x+3}{x-1}$

20) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{-2x^3+3x-50}{16x^4-12x}$

21) $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{x^3+3x-50}{x^4-12x}$

22) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-8x^5+2x^3-6x^2+3}{12x^2+x-1}$

23) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{18x^4+2x^3-6x^2+3}{-2x^2+x-1}$

24) $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_2 x$

25) $\lim\limits_{x\to\infty}\log_{10} x$

26) $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_{0.5} x$

27) $\lim\limits_{x\to\infty}\log_{0.25} x$

28) $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x$

29) $\lim\limits_{x\to\infty} 2^x$

30) $\lim\limits_{x\to -\infty}(\dfrac{1}{2})^x$

31) $\lim\limits_{x\to\infty}(0.9)^x$

32) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \sin(x)$

33) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \cos(x)$

34) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} tg(x)$

35) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} ctg(x)$

Odpowiedzi

1) 6; **2)** ∞; **3)** ∞; **4)** 0; **5)** $-\infty$; **6)** 0; **7)** 0; **8)** e^3; **9)** $\sqrt[9]{e}$; **10)** e^2; **11)** ½; **12)** 5; **13)** 1.5; **14)** 0; **15)** $-\infty$; **16)** $-\infty$; **17)** ∞; **18)** -1; **19)** -1; **20)** 0; **21)** 0; **22)** $-\infty$; **23)** $-\infty$; **24)** $-\infty$; **25)** ∞; **26)** ∞; **27)** $-\infty$; **28)** 0; **29)** ∞; **30)** ∞; **31)** 0; **32)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$; **33)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; **34)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$; **35)** 1.

Rozdział 4. Pochodna funkcji jednej zmiennej

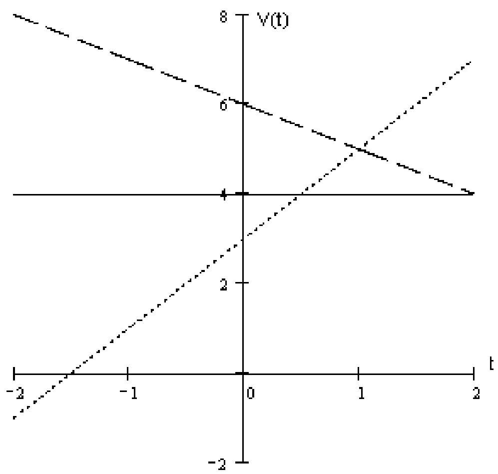
4.1. Pojęcie ilorazu różnicowego

W rozdziale 3.1 przedstawiono sytuację Boba i sposób przewidywania jego *dołka finansowego*. W rozdziale 4 zostanie szczegółowo omówiony matematyczny aparat, dzięki któremu możliwe jest zbadanie dowolnych funkcji i wyznaczenie ważnych punktów na wykresie funkcji (np. takich jak finansowy dołek Boba).

Funkcja, jej matematyczny zapis (wzór funkcji) i graficzne przedstawienie (wykres funkcji), zbiór argumentów i możliwych wartości (dziedzina i przeciwdziedzina funkcji) mogą opisywać różne zjawiska i procesy: prędkość lub drogę poruszania się obiektu w czasie, ilość opadów deszczu w każdym dniu, liczbę wyprodukowanych komputerów czy stan studentów na zajęciach w danym dniu. Tutaj czas czy dzień to argument funkcji, a ich wartości to prędkość czy stan opadów.

Jeżeli np. prędkość obiektu jest stała (czyli przyspieszenie równe zeru), to można ten fakt przedstawić za pomocą funkcji stałej $y = ax+b = b$ (czyli współczynnik kierunkowy $a = 0$ odpowiada za przyspieszenie). Jeżeli prędkość obiektu rośnie o pewną wielkość w jednostce czasu (czyli przyspieszenie dodatnie), to można ten fakt `przedstawić za pomocą rosnącej funkcji liniowej $y = ax+b$ (czyli współczynnik kierunkowy $a > 0$ odpowiada dodatniemu przyspieszeniu). Jeżeli natomiast prędkość obiektu maleje o stałą wielkość w jednostce czasu (czyli przyspieszenie ujemne), to można ten fakt przedstawić za pomocą malejącej funkcji liniowej $y = ax+b$ (czyli współczynnik kierunkowy $a < 0$ odpowiada ujemnemu przyspieszeniu- opóźnieniu) – rys. 4.1.

Wzory funkcji możemy znaleźć w każdej dziedzinie nauki. Na przykład algorytmy wymagają wykonania pewnej liczby działań w celu otrzymania wyniku. Liczba operacji a_n w zależności od n danych może wynosić np. $5n+7$ (mówimy wtedy o liniowej złożoności algorytmu), dla innego algorytmu $a_n = 3n^2$ (złożoność kwadratowa), $a_n = log(n)$ (złożoność logarytmiczna) lub $a_n = 2^n$ (złożoność wykładnicza).



Rys. 4.1. Trzy funkcje liniowe prezentujące zmianę prędkości w czasie: prędkość *v(t) = 2t+3* [*m/s*] rośnie (ze stałym przyspieszeniem 2 m/s^2), prędkość maleje *f(t) = -t+6* [*m/s*] ze stałym opóźnieniem -1 m/s^2 lub prędkość nie zmienia się i wynosi 4 *m/s*.

Wzór funkcji jest matematycznym zapisem danej funkcji za pomocą ogólnie rozumianych symboli. Dzięki wzorowi funkcji możemy obliczyć wartości dla pewnego argumentu (np. temperatura w chwili t_0, prędkość $v(t_0) = 5t_0$ czy złożoność obliczeniowa $a_n = n^2$). Innym sposobem zobrazowania funkcji jest sposób graficzny, czyli wykres funkcji w odpowiednim układzie współrzędnych. Graficzny opis danego zjawiska (temperatury, prędkości, przyspieszenia…), czyli wykonanie dokładnego wykresu funkcji, jest bardzo ważne przy badaniu własności danego zjawiska. Czy temperatura organizmu człowieka stale rośnie, czy też osiąga w pewnej chwili wartość największą, a potem gorączka spada? Czy przyspieszenie zmienia się, czy też ruch obiektu jest jednostajnie przyspieszony lub opóźniony? Czy frekwencja studentów na zajęciach jest wysoka (stała lub rosnąca przed sesją)? Odpowiedzi na takie pytania można znaleźć na podstawie zbadania własności danej funkcji i jej wykresu.

Jakie informacje o funkcji mogą być istotne?

1) Dla jakich argumentów funkcja jest rosnąca, malejąca lub stała?
2) Czy funkcja posiada wartość największą (maksimum) bądź najmniejszą (minimum, np. finansowy dołek Boba z rozdziału 3.1) w całej dziedzinie lub w określonych przedziałach argumentu?

3) Jaki jest kształt wykresu funkcji?

W rozdziale tym zobaczymy, jak znaleźć odpowiedzi na te pytania. Pierwsi doszli do tej wiedzy **Newton i Leibniz** (niezależnie od siebie) pod koniec wieku XVII.

Pojawiło się już pojęcie „przyspieszenie”. Jest to wielkość, która ma za zadanie pokazać zmianę prędkości z $v(t_1)$ w czasie t_1 do $v(t_2)$ w czasie t_2:

$$a = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}. \tag{4.1}$$

Innymi słowy przyspieszenie (4.1) jest stosunkiem przyrostu prędkości $\Delta v(t) = v(t_2) - v(t_1)$ do przyrostu czasu $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$a = \frac{\Delta v(t)}{\Delta t}. \tag{4.2}$$

Można sobie wyobrazić iloraz (4.2) dla dowolnej funkcji jako stosunek przyrostu (różnicy) wartości funkcji do przyrostu (różnicy) argumentów. W ten sposób wprowadziliśmy pojęcie „***iloraz różnicowy***”.

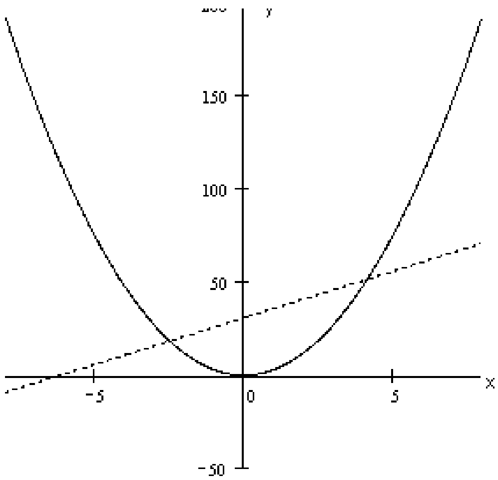
Definicja 4.1

Ilorazem różnicowym funkcji f w punktach x_1 oraz $x_2 \in D$ nazywamy ułamek

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Uwaga

Warto zauważyć, iż w przypadku każdej funkcji liniowej (rys. 4.1) iloraz różnicowy w dwóch dowolnych punktach równy jest współczynnikowi kierunkowemu funkcji liniowej (czyli tangensowi kąta nachylenia wykresu funkcji do dodatniego kierunku osi *OX*). Fakt ten będzie miał swoje konsekwencje w przypadku każdej innej funkcji. A mianowicie przez dwa dowolne punkty krzywej można przeprowadzić prostą, zwaną sieczną (rys. 4.2). Wówczas iloraz różnicowy funkcji w dwóch dowolnych punktach równy jest *__tangensowi kąta nachylenia siecznej wykresu funkcji do dodatniego kierunku osi OX__*.



Rys. 4.2. Przykład siecznej $y = 5x+31$ dla paraboli $f(x) = 3x^2$.

Jaki jest związek ilorazu różnicowego z monotonicznością funkcji?

1) Dla funkcji **rosnącej** zachodzi: jeżeli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) < f(x_2)$. Wówczas iloraz różnicowy jest liczbą **dodatnią**.

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$$

2) Dla funkcji **malejącej** zachodzi: jeżeli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) > f(x_2)$. Wówczas iloraz różnicowy jest liczbą **ujemną**.

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < 0$$

3) Dla funkcji **stałej** zachodzi: jeżeli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) = f(x_2)$. Wówczas iloraz różnicowy jest równy **zero**.

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = 0$$

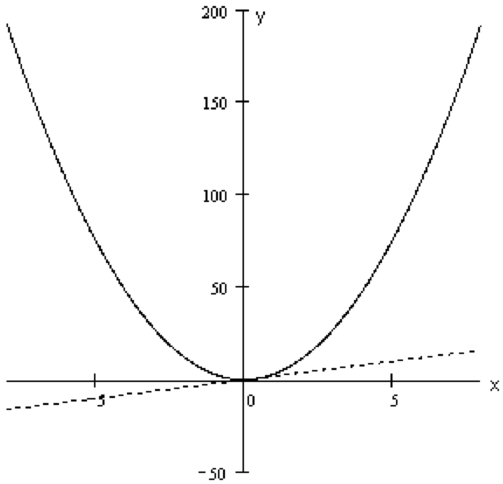
W przypadku dowolnej funkcji liniowej (ściślej- afinicznej) wiemy już, w jaki sposób powiązać iloraz różnicowy z monotonicznością funkcji:

1) wykres liniowej funkcji rosnącej jest nachylony do dodatniego kierunku osi *OX* pod kątem $\alpha \in (0, \pi/2)$ i $tg(\alpha) > 0$;

2) wykres liniowej funkcji malejącej jest nachylony do dodatniego kierunku osi *OX* pod kątem $\alpha \in (\pi/2, \pi)$ i $tg(\alpha) < 0$;

3) wykres funkcji stałej jest nachylony do dodatniego kierunku osi *OX* pod kątem $\alpha = 0$ (lub inaczej patrząc $\alpha = \pi$) i $tg(\alpha) = 0$.

Dowolna funkcja może posiadać styczną w pewnym punkcie (rys. 4.3). Jak znaleźć współczynnik kierunkowy stycznej? Dla wszystkich innych funkcji niż liniowe należy znaleźć tangens nachylenia siecznej wykresu przy jak najmniejszej odległości między argumentami x_2 oraz x_1, czyli dla $|x_2 - x_1| \to 0$. Wtedy sieczna stanie się styczną w danym punkcie wykresu $x = x_2 = x_1$. W tym celu rozpatrzony zostanie iloraz różnicowy przy warunku $x_2 \to x_1$, czyli $x_2 = x_1 + h$ dla $h \to 0$. Właśnie przy takich warunkach sieczna krzywej staje się styczną do krzywej.



Rys. 4.3. Przykład stycznej $y = 2x - ⅓$ do paraboli $f(x) = 3x^2$ w punkcie (⅓, ⅓).

4.2. Definicja i własności pochodnej funkcji

Warunek $x_2 = x_1$ spowoduje, iż w mianowniku ilorazu różnicowego pojawi się zero. Taka sytuacja oczywiście nie może zaistnieć. Ale znając pojęcie „granicy funkcji w punkcie” możliwe jest obliczenie granicy ilorazu różnicowego dla $x_2 \to x_1$. Taka granica (jeżeli istnieje) ilorazu różnicowego jest z definicji określona jako pochodna dowolnej funkcji *f* w punkcie $x_0 \in D$. Pochodna funkcji *f* w punkcie $x_0 \in D$ jest oznaczona jako $f'(x_0)$.

Definicja 4.2

Pochodną funkcji f w punkcie $x_0 \in D$ nazywamy granicę ilorazu różnicowego w punktach $x_1 = x_0$ oraz $x_2 = x_0 + h$ dla $h \to 0$:

$$f'(x_0) = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} .$$

Granica ta przedstawia symbol nieoznaczony ***0/0*** i wymaga obliczeń dla każdego rodzaju funkcji elementarnej.

Interpretacja geometryczna wartości pochodnej funkcji w punkcie jest następująca (4.3): pochodna funkcji f w punkcie x_0 równa jest tangensowi kąta α, jaki tworzy styczna do wykresu funkcji w punkcie x_0 z dodatnim kierunkiem osi *OX*.

$$f'(x_0) = tg(\alpha) \tag{4.3}$$

Znając współrzędne punktu (x_0, $f(x_0)$) oraz współczynnik kierunkowy stycznej $f'(x_0)$ można wyznaczyć równanie stycznej do wykresu funkcji *f* w punkcie (x_0, $f(x_0)$).

<u>Przykłady obliczenia pochodnej z definicji</u>:

1) Funkcja stała $f(x) = c$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \frac{0}{h} = 0\,.$$

Wynik ten, czyli wartość ilorazu różnicowego dla funkcji stałej, został osiągnięty wcześniej.

Przykład: *f(x)* = 3, *f'(x)* = 0, *f'(7)* = 0.

2) Funkcja liniowa $f(x) = ax+b$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a(x_0+h)+b-(ax_0+b)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{ah}{h} = a\,.$$

Wynik ten, czyli wartość ilorazu różnicowego dla funkcji liniowej jako współczynnik kierunkowy, został także osiągnięty wcześniej.

Przykład: *f(x)* = *x*, *f'(x)* = 1, *f'(7)* = 1.

3) Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2+bx+c$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a(x_0+h)^2+b(x_0+h)+c-(ax_0{}^2+bx_0+c)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{2ax_0h+ah^2+bh}{h} = \lim_{h\to 0}(2ax_0+b+ah) = 2ax_0+b.$$

Składnik liniowy $bx+c$ rozpatrzony został wyżej. Pokazaliśmy natomiast, że dla funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2$ pochodna $f'(x) = 2ax$.

Przykład: $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, $f'(7) = 14$.

Przykład wyznaczenia stycznej do wykresu

Znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie $x_0 = 7$.

Rozwiązanie: szukamy stycznej $y = ax+b$.

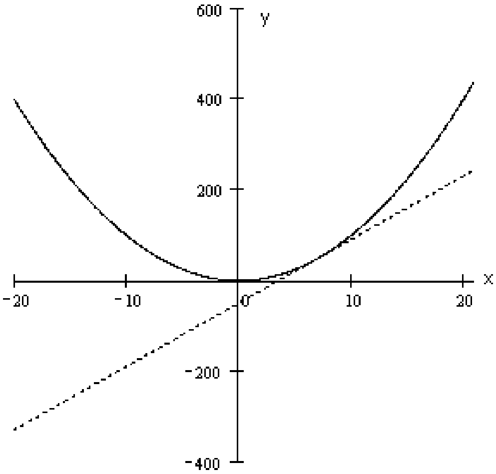
$$f'(x) = 2x\,,\ a = f'(x_0) = f'(7) = 14\,,\ f(x_0) = f(7) = 49\,.$$

Mając współrzędne punktu $(x_0, f(x_0)) = (7, 49)$ oraz współczynnik kierunkowy stycznej $a = f'(x_0) = 14$ korzystamy z równania prostej w postaci:

$$y - f(x_0) = a(x - x_0)\,,$$

$$y - 49 = 14(x - 7)\,,$$

$$y = 14x - 49\,.$$



Rys. 4.4. Fragment paraboli $y = x^2$ i styczna w punkcie $x_0 = 7$.

Uwaga

Wzór $f'(x_0)$ na pochodną funkcji f w punkcie $x_0 \in D$ wyznacza wzór na funkcję pochodną $f'(x)$. **Dziedzina funkcji pochodnej f' jest zbiorem tych argumentów funkcji f, dla których istnieje pochodna.**

<u>Własności pochodnej:</u>

1) Pochodna funkcji pomnożonej przez liczbę $s(x) = c \cdot f(x)$.

$$s'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{s(x_0 + h) - s(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c \cdot f(x_0 + h) - c \cdot f(x_0)}{h} =$$
$$= c \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = c \cdot f'(x_0).$$

(c·f)'(x) = c· f'(x)	**(4.4)**

Przykład (4.4): *f(x) = 6x*, *f'(x) = 6*.

2) Pochodna ***sumy*** dwóch funkcji $s(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

$$s'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{s(x_0 + h) - s(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) + g(x_0 + h) - [f(x_0) + g(x_0)]}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = f'(x_0) + g'(x_0).$$

(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)	**(4.5)**

Przykład (4.5): $f(x) = 5x^2+6x-3$, $f'(x) = 10x+6$.

3) Pochodna ***różnicy*** funkcji $s(x) = (f - g)(x) = f(x) - g(x)$.

$$s'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{s(x_0+h)-s(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-g(x_0+h)-[f(x_0)-g(x_0)]}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = f'(x_0)-g'(x_0).$$

(f – g)'(x) = f'(x) – g'(x)	**(4.6)**

Przykład (4.6): $f(x) = 2x-8x^2$, $f'(x) = 2-16x$.

4) Pochodna ***iloczynu*** dwóch funkcji $s(x) = (f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$.

$$s'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{s(x_0+h)-s(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h)-f(x_0)\cdot g(x_0+h)+f(x_0)\cdot g(x_0+h)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot g(x_0+h) + \lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\cdot f(x_0) =$$
$$= f'(x_0)\cdot g(x_0) + g'(x_0)\cdot f(x_0).$$

(f·g)'(x) = f'(x)·g(x) + g'(x)·f(x)	**(4.7)**

Przykłady (4.7):

a. $s(x) = ax^3 = ax^2\cdot x$. Wówczas: $s'(x) = (ax^2\cdot x)' = 2ax\cdot x + ax^2\cdot 1 = 3ax^2$;

b. $s(x) = ax^4 = ax^2\cdot x^2$. Wówczas: $s'(x) = (ax^2\cdot x^2)' = 2ax\cdot x^2 + ax^2\cdot 2x = 4ax^3$.

Na podstawie wzoru na pochodną iloczynu funkcji można uzasadnić wzór na pochodną funkcji pomnożonej przez liczbę:

$$s(x) = c\cdot f(x) \rightarrow s'(x) = 0\cdot f(x)+c\cdot f'(x) = c\cdot f'(x)$$

5) Pochodna ***ilorazu*** funkcji $s(x) = (f/g)(x) = f(x)/g(x)$ dla $g(x) \neq 0$.

$$s'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{s(x_0+h)-s(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g(x_0+h)}{g(x_0+h)\cdot g(x_0)}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x_0+h)\cdot g(x_0)}\cdot\frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g(x_0+h)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x_0+h)\cdot g(x_0)}\cdot\frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g(x_0+h)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x_0+h)\cdot g(x_0)}\cdot[g(x_0)\cdot\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f(x_0)\cdot\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}]=$$

$$=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-g'(x_0)\cdot f(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

$$\textbf{(f/g)'(x) = } [\frac{f(x)}{g(x)}]'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{g^2(x)} \qquad \textbf{(4.8)}$$

Przykłady (4.8):

a) $s(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$,

$$s'(x)=\frac{0\cdot x-1\cdot 1}{x^2}=\frac{-1}{x^2}=-(x^{-2});$$

b) $s(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2}$,

$$s'(x)=\frac{0\cdot x^2-2x\cdot 1}{(x^2)^2}=\frac{-2x}{x^4}=\frac{-2}{x^3}=-2(x^{-3});$$

c) $s(x)=\frac{-2}{x^3}=-2(x^{-3})$,

$$s'(x)=\frac{0\cdot x^3-3x^2\cdot(-2)}{(x^3)^2}=\frac{6x^2}{x^6}=\frac{6}{x^4}=6(x^{-4});$$

d) $s(x)=\frac{2x+5}{3x-8}$,

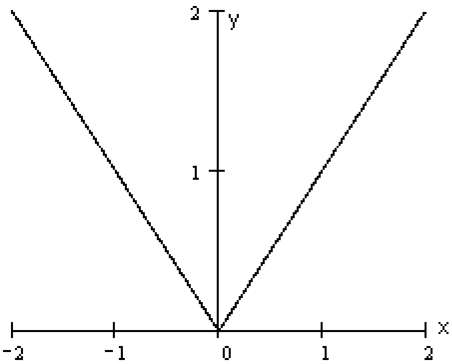
$$s'(x)=\frac{2\cdot(3x-8)-3\cdot(2x+5)}{(3x-8)^2}=\frac{-31}{(3x-8)^2};$$

e) $s(x) = \dfrac{-2x+5}{x^2+3x-8}$,

$$s'(x) = \frac{-2\cdot(x^2+3x-8)-(2x+3)\cdot(-2x+5)}{(x^2+3x-8)^2} = \frac{2x^2-10x+1}{(x^2+3x-8)^2}.$$

Omawiając w rozdziale 3 pojęcie „granicy funkcji w punkcie” rozpatrywane były granice lewostronne i prawostronne. Stwierdziliśmy, iż granica obustronna w danym punkcie istnieje, jeżeli granica lewostronna równa się prawostronnej. Oczywiście ta sama zasada obowiązuje dla granicy ilorazu różnicowego, czyli pochodnej. Jeżeli w jakimś punkcie x_0 granice lewostronna i prawostronna ilorazu różnicowego będą różniły się, to wtedy pochodna w punkcie x_0 nie istnieje.

Przykład braku pochodnej: $f(x) = |x|$ dla $x_0 = 0$.



Rys. 4.5. Wykres funkcji $f(x) = |x|$.

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{|x_0+h|-|x_0|}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h} = \frac{h}{h} = 1 \ ,$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{|x_0+h|-|x_0|}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h} = \frac{-h}{h} = -1 \ .$$

Inny wynik granicy lewostronnej (pochodnej lewostronnej) i granicy prawostronnej (pochodnej prawostronnej) oznacza brak pochodnej funkcji „wartość bezwzględna” w punkcie x_0. Wykres funkcji $f(x) = |x|$ posiada „ostrze” w punkcie $x_0 = 0$ (rys. 4.5) i w związku z tym istnieje nieskończenie wiele stycznych do krzywej w tym punkcie. W każdym innym punkcie niż $x_0 = 0$ pochodna istnieje.

Wniosek z powyższego przykładu jest następujący:

Ciągłość funkcji w punkcie nie zapewnia istnienia pochodnej.

Można jednak stwierdzić:

Jeżeli istnieje pochodna w danym punkcie, to funkcja jest ciągła w punkcie.

Jeżeli funkcja posiada pochodną w punkcie to mówimy, że jest ***różniczkowalna w punkcie***. Jeżeli funkcja posiada pochodną w każdym punkcie pewnego przedziału (np. swojej dziedziny) to mówimy, że jest ***różniczkowalna w przedziale*** (np. w całej dziedzinie). Czyli:

Z różniczkowalności funkcji wynika jej ciągłość.

Zadania

1) Oblicz z definicji wartość pochodnej funkcji $f(x)$ w punkcie x_0:

a) $f(x) = 3x+7$, $x_0 = 1$;

b) $f(x) = 4x^2+5x-6$, $x_0 = -9$;

c) $f(x) = 7$, $x_0 = -1$.

2) Wyznacz pochodną funkcji:

a) $s(x) = \frac{-21}{x^2}$,

b) $s(x) = \frac{3x+11}{4x-x^2}$,

c) $s(x) = \dfrac{-2x^2 + 8x}{-4x + x^2}$,

d) $s(x) = \dfrac{6x + 50}{x - 8x^2}$,

e) $s(x) = \dfrac{-2x^2 + 15}{7x^2 + x - 1}$.

4.3. Wyznaczanie pochodnej z definicji

W rozdziale 4.2 pokazano własności pochodnej funkcji oraz obliczono pochodne przykładowych funkcji wielomianowych i wymiernych. Zobaczmy jak z definicji znaleźć pochodne innych funkcji elementarnych.

1) Pochodna funkcji postaci $f(x) = x^n$ dla $n \in \mathbf{N}$.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^n - {x_0}^n}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{{x_0}^n + n \cdot {x_0}^{n-1} \cdot h + \binom{n}{2} {x_0}^{n-2} \cdot h^2 + \ldots + n \cdot x_0 \cdot h^{n-1} + h^n - {x_0}^n}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (n \cdot {x_0}^{n-1} + \binom{n}{2} {x_0}^{n-2} \cdot h + \ldots n \cdot x_0 \cdot h^{n-2} + h^{n-1}) = n \cdot {x_0}^{n-1}.$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \qquad \textbf{(4.9)}$$

Przykłady (4.9):

a) $f(x) = x^7$,

$f'(x) = 7x^6$;

b) $f(x) = 5x^4+6x^3-7x+9$,

$f'(x) = 20x^3+18x^2-7$;

c) $s(x)=\dfrac{2x^5-x^4}{x^8+3}$,

$s'(x)=\dfrac{(10x^4-4x^3)(x^8+3)-8x^7(2x^5-x^4)}{(x^8+3)^2}$ (uporządkuj licznik).

2) Pochodna funkcji $f(x) = \sqrt{x}$

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x_0+h-x_0}{h(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \textbf{(4.10)}$$

Przykłady (4.10):

a) $f(x)=6\sqrt{x}$,

$f'(x)=\dfrac{3}{\sqrt{x}}$;

b) $f(x)=x^{\frac{3}{2}}=x\sqrt{x}$,

$f'(x)=1\cdot\sqrt{x}+x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}\sqrt{x}=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$;

c) $s(x)=x^{\frac{-1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$,

$$s'(x) = \frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{-1}{2x\sqrt{x}} \quad .$$

3) Pochodna funkcji $f(x)$ **=** $\frac{1}{x}$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x_0+h}-\frac{1}{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{x_0-(x_0+h)}{(x_0+h)\cdot x_0}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h\cdot(x_0+h)\cdot x_0} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x_0+h)\cdot x_0} = \frac{-1}{{x_0}^2}.$$

$$(\frac{1}{x})' = \frac{-1}{x^2} \qquad \textbf{(4.11)}$$

Przykłady (4.11):

a) $f(x) = \frac{-6}{x}$,

$f'(x) = \frac{6}{x^2}$;

b) $f(x) = (\frac{1}{x} + 3x)(4x^2 - 5x + 8)$ - jaka to funkcja wymierna?

$f'(x) = (3 - \frac{1}{x^2})(4x^2 - 5x + 8) + (\frac{1}{x} + 3x)(8x - 5)$ - uporządkuj;

c) $s(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$,

$s'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x} - 2}{2x^2}$.

4) Pochodna funkcji $f(x) = sin(x)$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin(\frac{x_0+h-x_0}{2})\cdot\cos(\frac{x_0+h+x_0}{2})}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\cos(\frac{2x_0+h}{2}) =$$

$$= 1\cdot\cos\frac{2x_0}{2} = \cos(x_0).$$

$$\boxed{sin'(x) = cos(x) \qquad \textbf{(4.12)}}$$

Przykłady (4.12):

a*)* *f(x)= 5sin(x)* ,

f'(x)= 5cos(x);

b) *f(x)= 5x*^{4}*sin(x)*,

f'(x)=20x^3*sin(x)+ 5x*^{4}*cos(x)*;

c) $s(x) = \dfrac{x}{\sin(x)}$,

$$s'(x) = \frac{1\cdot\sin(x) - x\cdot\cos(x)}{\sin^2(x)} = \frac{1 - x\cdot ctg(x)}{\sin(x)} \quad .$$

5) Pochodna funkcji $f(x) = cos(x)$

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x_0+h)-\cos(x_0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin(\frac{x_0+h-x_0}{2})\cdot\sin(\frac{x_0+h+x_0}{2})}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\sin(\frac{2x_0+h}{2})=$$

$$=-1\cdot\sin\frac{2x_0}{2}=-\sin(x_0).$$

cos'(x) = - sin(x)	**(4.13)**

Przykłady (4.13):

a) *f(x) = 7cos(x)* ,

f'(x) = -7sin(x);

b) *f(x) =* x^2*cos(x)*,

f'(x) = 2xcos(x)- x^2*sin(x)*;

c) $s(x)=\dfrac{1}{\cos(x)}$,

$$s'(x)=\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}=\frac{tg(x)}{\cos(x)}\ .$$

6) Pochodna funkcji *f(x) = tg(x)*

$$f(x)=tg(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)},$$

$$f'(x)=\frac{\cos(x)\cdot\cos(x)-\sin(x)\cdot(-\sin(x))}{\cos^2(x)}=\frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\cos^2(x)}=\frac{1}{\cos^2(x)}=1+tg^2(x)\cdot$$

$$tg'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + tg^2(x) \qquad \textbf{(4.14)}$$

7) Pochodna funkcji *f(x) = ctg(x)*

$$f(x) = ctg(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)},$$

$$f'(x) = \frac{-\sin(x)\cdot\sin(x) - \cos(x)\cdot\cos(x)}{\sin^2(x)} = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \frac{-1}{\sin^2(x)} = -1 - ctg^2(x)\cdot$$

$$ctg'(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)} = -1 - ctg^2(x) \qquad \textbf{(4.15)}$$

8) Pochodna funkcji *f(x) = ln(x)* dla *x*>0

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x_0+h) - \ln(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(\frac{x_0+h}{x_0})}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(1+\frac{h}{x_0}) = \lim_{h\to 0}\ln(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}} = \lim_{h\to 0}\ln[(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{x_0}{h}}]^{\frac{1}{x_0}} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{x_0}\ln(e) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{x_0}\cdot 1 = \frac{1}{x_0}.$$

$$\ln'(x) = 1/x \qquad \textbf{(4.16)}$$

Przykłady (4.16):

a) *f(x) = 7ln(x)* ,

f'(x) = 7/x;

b) *f(x) = x·ln(x)*,

f'(x) = 1·ln(x)+ x·(1/x) = ln(x)+1;

c) $s(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$,

$$s'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{\ln^2(x)} = \frac{-1}{x \cdot \ln^2(x)} \; .$$

9) Pochodna funkcji $f(x) = log_a(x)$ dla x > 0 oraz (a > 0 i $a \neq$ 1)

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a(x_0 + h) - \log_a(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\log_a(\frac{x_0 + h}{x_0})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_a(1 + \frac{h}{x_0}) = \lim_{h \to 0} \log_a(1 + \frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \log_a[(1 + \frac{h}{x_0})^{\frac{x_0}{h}}]^{\frac{1}{x_0}} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{x_0} \log_a(e) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{x_0} \cdot \frac{\ln(e)}{\ln(a)} = \frac{1}{x_0 \cdot \ln(a)}.$$

$$log_a'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)} \qquad \textbf{(4.17)}$$

Przykłady (4.17):

a) *f(x) = 7log₂(x)* ,

f'(x) = 7/(xln2);

b) *f(x) = x·log(x)*,

f'(x) = 1·log(x)+ x·1/(xln10) = log(x)+1/ln10;

c) $s(x) = \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}(x)}$,

$$s'(x)=\frac{-\dfrac{1}{x\cdot\ln\frac{1}{2}}}{\log_{\frac{1}{2}}{}^{2}(x)}=\frac{\dfrac{-1}{\ln(2)^{-1}}}{x\cdot\log_{\frac{1}{2}}{}^{2}(x)}=\frac{\dfrac{-1}{-\ln(2)}}{x\cdot\log_{\frac{1}{2}}{}^{2}(x)}=\frac{1}{\ln(2)\cdot x\cdot\log_{\frac{1}{2}}{}^{2}(x)}\ .$$

10) Pochodna funkcji $f(x) = e^x$

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x_0}(e^h-1)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}e^{x_0}\,\frac{[(1+h)^{\frac{1}{h}}]^h-1}{h}=\lim_{h\to 0}e^{x_0}\,\frac{1+h-1}{h}=e^{x_0}.$$

$$(e^x)' = e^x \qquad \textbf{(4.18)}$$

Funkcja *f(x)* = *c*$\cdot$*e*^{x} dla dowolnej liczby rzeczywistej *c* jest jedyną funkcją, dla której pochodna jest równa samej funkcji.

Przykłady (4.18):

a) $f(x) = -2e^x$,

$f'(x) = -2e^x$;

b) $f(x) = x\cdot e^x$,

$f'(x) = 1\cdot e^x + x\cdot e^x = (1+x)e^x$;

c) $s(x)=e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$,

$$s'(x)=\frac{-e^x}{(e^x)^2}=\frac{-1}{e^x}=-e^{-x}\ .$$

Dla pozostałych funkcji elementarnych podamy pochodne bez wyprowadzenia:

$$(x^c)' = c \cdot x^{c-1} \qquad \textbf{(4.19)}$$

dla dowolnej liczby rzeczywistej *c* oraz dziedziny uzależnionej od liczby *c*

Przykłady (4.19):

a) $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$,

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

b) $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$,

$$f'(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2};$$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$,

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

$$(a^x)' = a^x \cdot ln(a) \quad \text{dla dowolnej liczby rzeczywistej } a>0 \qquad \textbf{(4.20)}$$

Przykłady (4.20):

a) $f(x) = 2^x$,

$$f'(x) = 2^x \ln(2);$$

b) $f(x) = 10^{-x} = \frac{1}{10^x}$,

$$f'(x) = \frac{-10^x \cdot \ln(10)}{(10^x)^2} = \frac{-\ln(10)}{10^x} = -10^{-x}\ln(10);$$

c) $f(x) = 3 \cdot 2^{-x} = 3 \cdot (\frac{1}{2})^x$,

$$f'(x) = 3 \cdot (\frac{1}{2})^x \ln\frac{1}{2} = 3 \cdot 2^{-x} \ln(2^{-1}) = -3 \cdot \ln(2) \cdot 2^{-x}.$$

$$arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$arctg'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$arcctg'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

Zadania

Wyznacz dziedzinę oraz pochodną funkcji:

a) $f(x) = -5x^6+6x^9-x$,

b) $s(x) = \frac{x^5 - x^4}{x^8 - 8}$,

c) $f(x) = -6x^5\sqrt{x}$,

d) $f(x) = 2x^{-8}\sqrt{x}$,

e) $s(x) = \frac{1-x}{-3x^2\sqrt{x}}$,

f) $f(x) = \frac{-6x+7}{x+9}\sin(x)$,

g) $f(x) = (\frac{1}{x} + x^3\cos(x))(-x\ln(x)+8)$,

h) $f(x) = \frac{1+\ln(x)}{3x^2-2} + 33x^4\cos(x)$,

i)* $s(x) = \frac{-1}{x} ctg(x) + 3e^x \sqrt{x}$,

j) *f(x) = -15x²sin(x),*

k)* $s(x) = \frac{-3x^2}{2\sin(x) + 3\cos(x)}$,

l) $s(x) = \frac{1 - 3x^2}{2x - 4\cos(x)}$,

m) *f(x) = 3x⁴· ln(x),*

n)* $s(x) = \frac{11x - 5x^2}{3\sin(x) + 4\ln(x)}$,

o) *f(x) = -7xlog₅(x)* ,

p)* $s(x) = \frac{3\sin(x) + 1}{x^2 - \log_{\frac{1}{2}}(x)}$,

q) *f(x) = -3x⁵· eˣ,*

r) $f(x) = \frac{6 + x}{x^{-3} + 2^x}$,

s) $f(x) = -3x^2 \cdot 2^{-x}$.

4.4. Obliczanie pochodnej funkcji elementarnych

W celu poprawnego wyznaczania funkcji pochodnej należy określić pochodną funkcji złożonej:

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \qquad (4.21)$$

Wzór (4.21) oznacza, iż pochodna funkcji zewnętrznej o argumencie *g(x)* przemnożona jest przez pochodną funkcji wewnętrznej o argumencie x.

Przykłady (4.21):

a) $f(x) = \sin(2x)$,

$f'(x) = 2\cos(2x)$;

b) $f(x) = e^{3x}$,

$f'(x) = 3e^{3x}$;

c) $f(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$,

$$f'(x) = e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot \left(\frac{-x^2}{2}\right)' = e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot (-x) = -xe^{\frac{-x^2}{2}};$$

d) $f(x) = \ln(\cos 5x)$,

$$f'(x) = \frac{1}{\cos(5x)} \cdot (-5\sin(5x)) = -5tg(5x);$$

e) $f(x) = \ln|\, g(x)|$ dla dowolnej funkcji $g(x) \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$ dla dowolnej funkcji $g(x) \neq 0$;

f) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}};$$

g) $f(x) = \sqrt{g(x)}$ dla dowolnej funkcji $g(x) \geq 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$ dla dowolnej funkcji $g(x) > 0$;

h) $f(x) = \dfrac{1}{\sin(2x)}$,

$$f'(x) = \frac{-1}{\sin^2(2x)} \cdot 2\cos(2x) = \frac{-2\cos(2x)}{\sin^2(2x)} = \frac{-2ctg(2x)}{\sin(2x)} = \frac{-2}{tg(2x)\cdot\sin(2x)};$$

i) $f(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ dla dowolnej funkcji $g(x) \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{-1}{g^2(x)} \cdot g'(x) = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$$ dla dowolnej funkcji $g(x) \neq 0$;

j) $f(x) = \sqrt{\ln(2x) + tg(2x)}$,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln(2x)+tg(2x)}} \cdot \left(\frac{2}{2x} + \frac{2}{\cos^2(2x)}\right) = \frac{1}{\sqrt{\ln(2x)+tg(2x)}} \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{\cos^2(2x)}\right) .$$

O dziedzinie funkcji pochodnej można powiedzieć, iż czasami jest taka sama jak dziedzina funkcji wyjściowej (np. dla wielomianów czy funkcji wymiernych), a czasami dziedzina funkcji pochodnej jest podzbiorem dziedziny funkcji wyjściowej (np. u funkcji wymiernej $f(x) = \sqrt{x}$). Spowodowane jest to faktem, iż do dziedziny funkcji mogą należeć argumenty, dla których nie istnieje pochodna (np. funkcja wymierna $f(x) = \sqrt{x}$ nie ma pochodnej w punkcie $x_0 = 0$, ponieważ nie istnieje granica ilorazu różnicowego w punkcie $x_0 = 0$).

Pochodne wyższego rzędu

Jeżeli wyznaczona została funkcja pochodna, to obliczenie pochodnej dla funkcji pochodnej oznacza wyznaczenie drugiej pochodnej funkcji (pochodnej rzędu 2):

$$(f'(x))' = f''(x) \quad \textbf{(4.22)}$$

Przykłady wyznaczenia drugiej pochodnej (4.22):

a) *f(x) = cos(9x)*,

f'(x) = -9sin(9x),

f''(x) = -81cos(9x);

b) *f(x) =* $2e^{-x}$,

f'(x) = $-2e^{-x}$,

f''(x) = $2e^{-x}$;

c) $f(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$,

$$f'(x) = e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot (\frac{-x^2}{2})' = e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot (-x) = -xe^{\frac{-x^2}{2}} ,$$

$$f''(x) = -e^{\frac{-x^2}{2}} + (-x)\cdot(-x)e^{\frac{-x^2}{2}} = (x^2-1)e^{\frac{-x^2}{2}} ;$$

d) *f(x) = ln(sin3x)*,

$$f'(x) = \frac{1}{\sin(3x)} \cdot (3\cos(3x)) = 3ctg(3x) ,$$

$$f''(x) = \frac{-3}{\sin^2(3x)} \cdot 3 = \frac{-9}{\sin^2(3x)} ;$$

e) *f(x) = ln(*x^2*) = 2ln(x)*,

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x} ,$$

$$f''(x) = \frac{-2}{x^2} ;$$

f) $f(x)=\sin^2(3x)$,

$$f'(x)=2\sin(3x)\cdot 3\cos(3x)=6\sin(3x)\cdot\cos(3x),$$

$$f''(x)=6(3\cos(3x)\cdot\cos(3x)-3\sin(3x)\cdot\sin(3x))=18(\cos^2(3x)-\sin^2(3x));$$

g) $f(x)=\sqrt{tg(2x)}$,

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{tg(2x)}}\cdot\frac{2}{\cos^2(2x)}=\frac{1}{\sqrt{tg(2x)}}\cdot\frac{1}{\cos^2(2x)}=\frac{1}{\cos(2x)\sqrt{\sin(2x)\cos(2x)}}$$

$$f''(x)=\frac{-1}{\cos^2(2x)\sin(2x)\cos(2x)}\cdot(-2\sin(2x)\sqrt{\sin(2x)\cos(2x)}+\cos(2x)\cdot\frac{2\cos^2(2x)-2\sin^2(2x)}{2\sqrt{\sin(2x)\cos(2x)}})=$$

$$=\frac{-1}{\cos^3(2x)\sin(2x)}\cdot(-2\sin(2x)\sqrt{\sin(2x)\cos(2x)}+\sqrt{\cos(2x)}\cdot\frac{\cos^2(2x)-\sin^2(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}})=$$

$$=\frac{\sqrt{\cos(2x)}}{\cos^3(2x)\sin(2x)}\cdot(2\sin(2x)\sqrt{\sin(2x)}-\frac{\cos^2(2x)-\sin^2(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}});$$

h) $f(x)=\dfrac{1}{3x+2}$,

$$f'(x)=\frac{-3}{(3x+2)^2},$$

$$f''(x)=\frac{3\cdot 3\cdot 2(3x+2)}{(3x+2)^4}=\frac{18}{(3x+2)^3};$$

i) $f(x)=\dfrac{2x-5}{4x+1}$,

$$f'(x)=\frac{2(4x+1)-4(2x-5)}{(4x+1)^2}=\frac{22}{(4x+1)^2},$$

$$f''(x)=\frac{-22\cdot 4\cdot 2(4x+1)}{(4x+1)^4}=\frac{-176}{(4x+1)^3}.$$

j) $f(x)=ctg^3(6x)$,

$$f'(x) = 3ctg^2(6x) \cdot \frac{-6}{\sin^2(6x)} = \frac{-18\cos^2(6x)}{\sin^4(6x)},$$

$$f''(x) = \frac{-18 \cdot 2\cos(6x) \cdot (-6\sin(6x)) \cdot \sin^4(6x) + 18\cos^2(6x) \cdot 4\sin^3(6x) \cdot 6\cos(6x)}{\sin^8(6x)} =$$

$$= \frac{216\cos(6x)\sin^2(6x) + 432\cos^3(6x)}{\sin^5(6x)} = \frac{216\cos(6x) \cdot [\sin^2(6x) + 2\cos^2(6x)]}{\sin^5(6x)} =$$

$$= \frac{216\cos(6x) \cdot [\sin^2(6x) + \cos^2(6x) + \cos^2(6x)]}{\sin^5(6x)} = \frac{216\cos(6x) \cdot (1 + \cos^2(6x))}{\sin^5(6x)}.$$

k) $f(x) = \ln(x+1)$,

$$f'(x) = \frac{1}{x+1},$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}.$$

Analogicznie pochodna rzędu 3 jest pochodną wyznaczoną dla drugiej pochodnej:

$$(f''(x))' = f'''(x)$$

Pochodna rzędu *n* jest pochodną wyznaczoną dla (*n-1*) pochodnej:

$$(f^{(n-1)}(x))' = f^{(n)}(x)$$

W kolejnych podrozdziałach najwięcej obliczeń dotyczyć będzie pierwszej i drugiej pochodnej.

Zadania

Wyznacz pierwszą i drugą pochodną funkcji:

a) $f(x) = -sin(-x)$,

b) $f(x) = 5x^2-2xe^{3x}$,

c) $f(x) = -x^2 e^{\frac{-x^2}{2}}$,

d) $f(x) = 13ln(-5x^2)$,

e) $f(x) = -3x\sqrt{-x^2+1}$,

f)* $f(x) = \dfrac{x-1}{-\sin(9x)}$,

g)* $f(x) = 2\sin(3x)\sqrt{-\ln(-2x)+5ctg(2x)}$.

4.5. Zastosowanie pierwszej i drugiej pochodnej

Pochodna funkcji pozwala zbadać wiele interesujących własności funkcji.

Granice funkcji typu „0/0" lub „∞/ ∞" – reguła de L'Hospitala

Dzięki znajomości pochodnej możemy obliczyć granice funkcji będące symbolami nieoznaczonymi. Mówi o tym **twierdzenie de L'Hospitala** (matematyk francuski drugiej połowy XVII wieku).

Tw. 4.1 - twierdzenie de L'Hospitala

Założenia:

1) funkcje f i g posiadają pochodne w sąsiedztwie punktu x_0;

2) $g'(x) \neq 0$ w sąsiedztwie punktu x_0;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ jest wyrażeniem nieoznaczonym typu $\dfrac{0}{0}$ lub $\dfrac{\infty}{\infty}$;

4) istnieje granica $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Teza: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Tw. de L'Hospitala można również zastosować (4.23) dla $x \to \pm\infty$ i granic typu $\dfrac{0}{0}$ lub $\dfrac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad \textbf{(4.23)}$$

Reguła de L'Hospitala jest prostym i eleganckim narzędziem wyznaczania granic będących symbolami nieoznaczonymi.

Przykłady zastosowania reguły de L'Hospitala:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1$ (z tą granicą Czytelnik już miał do czynienia),

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x}{1} = e^0 = 1$,

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{1}=\infty$,

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+x}=1$,

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\log(x)}{x^2-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x\cdot\ln(10)\cdot 2x}=\dfrac{1}{2\ln(10)}$,

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{\sin(x)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x\cdot\ln(2)}{\cos(x)}=\ln(2)$,

g) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sin(x+1)}{x^3+1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\cos(x+1)}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$,

h) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x+1}{3x-9}=\left[\dfrac{-\infty}{-\infty}\right]=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$,

i) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-1}{\sqrt{x}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x\cdot 2\sqrt{x})=0$.

Czasami istnieje konieczność obliczenia kolejnych pochodnych:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}=\infty\ ,$$

Czy regułę de L'Hospitala można wykorzystać do ***innych granic nieoznaczonych***?
Tak, lecz należy przekształcić funkcję, dla której liczona jest granica.

Jeżeli $\lim f(x)\cdot g(x) = \left[0\cdot\infty\right]$, to:

1) dla $g'(x) \neq 0$: $\lim \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \left[\frac{0}{0}\right]$ lub $\lim \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$;

2) dla $f'(x) \neq 0$: $\lim \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \left[\frac{0}{0}\right]$ lub $\lim \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Można więc wykorzystać regułę de L'Hospitala.

<u>Przykłady zastosowania reguły de L'Hospitala w przypadku granicy funkcji typu [0·∞]:</u>

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin(x)\cdot\frac{1}{x} = \left[0\cdot\infty\right] = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1$,

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} x\cdot e^{\frac{-1}{x}} = \left[0\cdot\infty\right] = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{-1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{x^2}e^{\frac{-1}{x}}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^-}(-e^{\frac{-1}{x}}) = -\infty$.

W przypadku granicy $\lim(f(x)-g(x))$ typu [∞ - ∞] należy przekształcić funkcję w następujący sposób:

$$f(x)-g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}} . \qquad \textbf{(4.24)}$$

W ten sposób (4.24) otrzymano granicę typu $\left[\frac{0}{0}\right]$.

<u>Przykład zastosowania reguły de L'Hospitala w przypadku granicy typu</u> [∞ - ∞]:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-x^2}{x^6}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{4x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2}=0.$$

Ekstremum funkcji

Pierwsza pochodna pozwoli na sprawdzenie, czy w pewnym przedziale określoności funkcji (tj. w podzbiorze dziedziny) istnieje wartość największa funkcji (**maksimum lokalne** funkcji - „górka" na wykresie) lub wartość najmniejsza funkcji (**minimum lokalne** funkcji - „dołek" na wykresie). Jeżeli wartość największa lub najmniejsza dotyczy całej dziedziny funkcji, to mówimy o ekstremum globalnym (odpowiednio **maksimum globalne** i **minimum globalne**). Przypomnijmy sobie związek ilorazu różnicowego z monotonicznością funkcji.

Uwaga

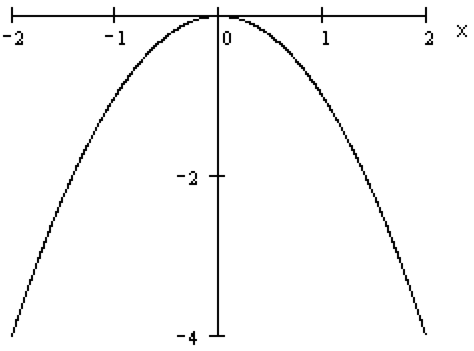
1) Dla funkcji **rosnącej** zachodzi: jeżeli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) < f(x_2)$. Wówczas iloraz różnicowy (również **pochodna**) jest liczbą **dodatnią**.

2) Dla funkcji **malejącej** zachodzi: jeżeli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) > f(x_2)$. Wówczas iloraz różnicowy (również **pochodna**) jest liczbą **ujemną**.

3) Dla funkcji **stałej** zachodzi: jeżeli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) = f(x_2)$. Wówczas iloraz różnicowy (również **pochodna**) jest równy **zero**.

Jak wyznaczyć maksimum lub minimum lokalne funkcji?

Załóżmy, iż dla pewnych argumentów $x < x_0$ funkcja f jest rosnąca, natomiast dla argumentów $x > x_0$ funkcja f jest malejąca. Wówczas w punkcie x_0 istnieje <u>*maksimum lokalne*</u>.



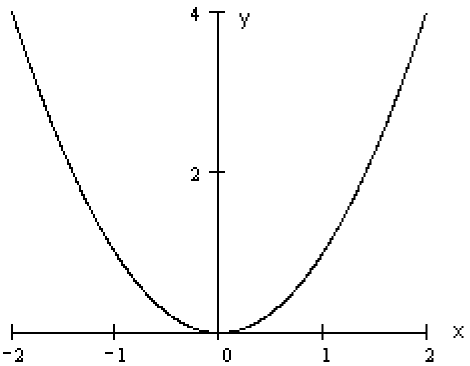
Rys. 4.6. Wykres funkcji $f(x) = -x^2$ z maksimum lokalnym (także globalnym) w punkcie $x_0 = 0$.

Oznacza to, iż na lewo do x_0 pochodna funkcji jest dodatnia, a na prawo do x_0 pochodna funkcji jest ujemna. Czyli w punkcie x_0 _pochodna funkcji jest równa zero_. Jest to zgodne z naszą wiedzą, że styczna w maksimum jest linią poziomą (funkcją stałą), a funkcja stała ma zerową pochodną.

Przykład wyznaczenia maksimum

Dla funkcji z rys. 4.6 pochodna $f'(x) = -2x$ jest równa zero tylko dla $x = 0$. Dla $x<0$: $f'(x)>0$ (funkcja rosnąca), natomiast dla $x > 0$: $f'(x) < 0$ (funkcja malejąca).

A co dzieje się w minimum lokalnym? Załóżmy, iż dla pewnych argumentów $x< x_0$ funkcja f jest malejąca, natomiast dla argumentów $x > x_0$ funkcja f jest rosnąca. Wówczas w punkcie x_0 istnieje _minimum lokalne_.



Rys. 4.7. Wykres funkcji $f(x) = x^2$ z minimum lokalnym (także globalnym) w punkcie $x_0 = 0$.

Oznacza to, iż na lewo do x_0 pochodna funkcji jest ujemna, a na prawo do x_0 pochodna funkcji jest dodatnia. Czyli w punkcie x_0 <u>*pochodna funkcji jest równa zero*</u>. Jest to zgodne z naszą wiedzą, że styczna w minimum jest linią poziomą (funkcją stałą), a funkcja stała ma zerową pochodną.

Przykład wyznaczenia minimum

Dla funkcji z rys. 4.7 pochodna $f'(x) = 2x$ jest równa zero tylko dla $x = 0$. Dla $x < 0$: $f'(x) < 0$ (funkcja malejąca), natomiast dla $x > 0$: $f'(x) > 0$ (funkcja rosnąca).

Twierdzenie 4.2

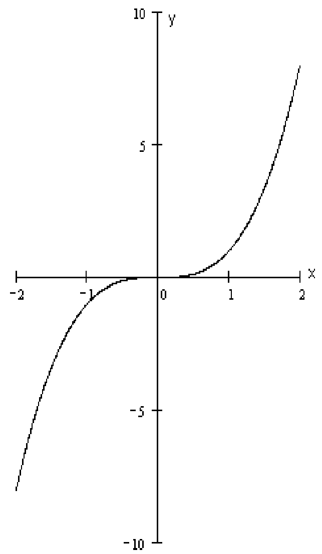
Funkcja f posiada ***ekstremum lokalne*** w x_0, jeżeli:

1) $f'(x_0) = 0$,

2) w punkcie x_0 funkcja zmienia się z rosnącej w malejącą (maksimum) lub z malejącej w rosnącą (minimum), czyli pochodne dla pewnych argumentów x_1 oraz x_2 takich, że $x_1 < x_0 < x_2$, są przeciwnych znaków: $f'(x_1) \cdot f'(x_2) < 0$.

Przykład braku ekstremum

Dlaczego nie wystarczy znaleźć miejsce zerowe pochodnej?



Rys. 4.8. Wykres funkcji $f(x) = x^3$ bez ekstremum.

Dla funkcji z rys. 4.8 pochodna $f'(x) = 3x^2$ jest równa zero dla $x = 0$, ale funkcja w tym punkcie nie zmienia monotoniczności (pozostaje rosnąca) i nie posiada minimum lub maksimum. Można mówić o punkcie przegięcia w $x = 0$, czyli zmianie kształtu z wypukłej na wklęsłą (lub inaczej z wypukłej ku górze na wypukłą ku dołowi).

Druga pochodna a wypukłość funkcji

Wypukłość funkcji w całej dziedzinie lub w poszczególnych przedziałach może być dwojakiego rodzaju:

1) ***wypukła ku dołowi*** (np. parabola $f(x) = x^2$), gdy druga pochodna $f''(x) > 0$ dla wszystkich argumentów z danego przedziału;
2) ***wypukła ku górze*** (np. parabola $f(x) = -x^2$), gdy druga pochodna $f''(x) < 0$ dla wszystkich argumentów z danego przedziału.

Definicja 4.3
Punkt przegięcia jest to punkt, w którym funkcja zmienia wypukłość (czyli punkt, w którym druga pochodna zmienia znak).

Jak zastosować drugą pochodną przy wyznaczaniu ekstremum?

Zamiast badać monotoniczność funkcji w okolicy miejsca zerowego pochodnej, często wygodniej i szybciej można wykorzystać drugą pochodną.

Twierdzenie 4.3
Założenie: $f'(x_0) = 0$.
Teza:
1) jeżeli $f''(x_0) > 0$, to w punkcie x_0 istnieje minimum lokalne;
2) jeżeli $f''(x_0) < 0$, to w punkcie x_0 istnieje maksimum lokalne.

Przykład zastosowania twierdzenia 4.3

Dla funkcji z rys. 4.6 pochodna $f'(x) = -2x$ jest równa zero tylko dla $x = 0$, natomiast $f''(x) = -2 < 0$. Istnieje więc maksimum lokalne funkcji $f(x) = -x^2$ w punkcie $x = 0$.

Dla funkcji z rys. 4.7 pochodna $f'(x) = 2x$ jest równa zero tylko dla $x = 0$, natomiast $f''(x) = 2 > 0$. Istnieje więc minimum lokalne funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie $x = 0$.

Twierdzenie 4.3 ***nie rozstrzyga*** przypadku, gdy $f'(x_0) = 0$ oraz $f''(x_0) = 0$. Wówczas w punkcie x_0 może istnieć zarówno ekstremum (np. funkcja $f(x) = x^4$ posiada minimum dla $x_0 = 0$), jak również punkt przegięcia (np. funkcja $f(x) = x^5$ posiada punkt przegięcia dla $x_0 = 0$). Zatem jeżeli pierwsza i druga pochodna zerują się dla pewnego x_0, to najbezpieczniej ustalić znak pochodnej w otoczeniu punktu x_0 i na podstawie monotoniczności funkcji w otoczeniu punktu x_0 rozstrzygnąć, czy mamy do czynienia z maksimum, minimum lub punktem przegięcia.

Wszystkie dotychczas omówione własności funkcji elementarnych oraz sposoby ich badania znajdą zastosowanie w kolejnym podrozdziale.

Zadania

Określ monotoniczność funkcji i znajdź ekstrema funkcji. Określ wypukłość funkcji i znajdź punkty przegięcia funkcji:

a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$,

b) $f(x) = \dfrac{-x^2 - x + 2}{x+1}$,

c) $f(x) = \dfrac{3x+2}{4x+1}$.

d) $f(x) = \dfrac{-3x^2 + 2}{4x-8} + x - 2$,

e) $f(x) = \dfrac{x+2}{5x+1-x^2} - 3x$,

f) $f(x) = \dfrac{x-2}{-x^2+1}$.

4.6. Badanie przebiegu zmienności funkcji

W celu dokładnego narysowania wykresu funkcji konieczne jest zbadanie własności funkcji wynikających z jej wzoru oraz z pierwszej i drugiej pochodnej. Do omówienia pozostała jeszcze bardzo ważna kwestia asymptot.

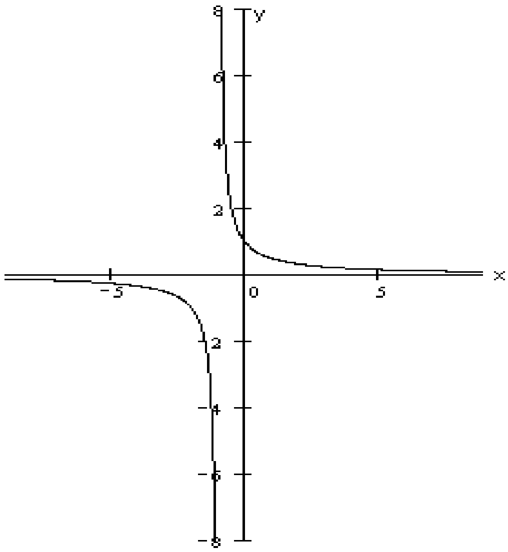
Uwaga
Asymptota jest to prosta, do której wykres funkcji zbliża się w nieskończoności, lecz jej nie osiąga.

Rozróżniamy asymptoty pionowe i ukośne.

Asymptoty pionowe przechodzą przez te wartości x_0, które *nie należą do dziedziny* funkcji, ale do dziedziny funkcji należy przedział (x_0, a) lub (b, x_0) dla pewnych a, b. Funkcja może posiadać asymptotę pionową obustronną lub jednostronną.

Przykład funkcji z **asymptotą pionową obustronną**: $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$,

$$D_f = (-\infty,-1) \cup (-1,\infty).$$



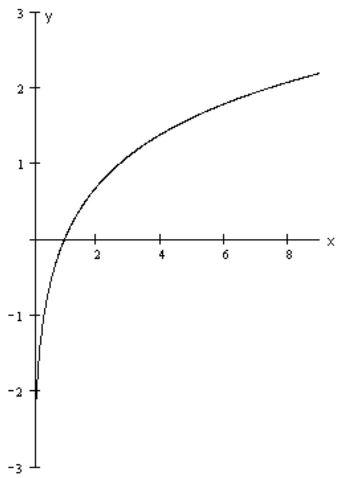
Rys. 4.9. Wykres funkcji $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ z pionową asymptotą obustronną przechodzącą przez punkt x_0 = = -1.

W przypadku obustronnej asymptoty pionowej wyznaczamy dwie granice dla $x \to x_0$:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{1+x} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$ (dla asymptoty prawostronnej),

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{1+x} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$ (dla asymptoty lewostronnej).

Przykład funkcji z **asymptotą pionową prawostronną**: $f(x)=\ln(x)$, D_f = (0,∞).

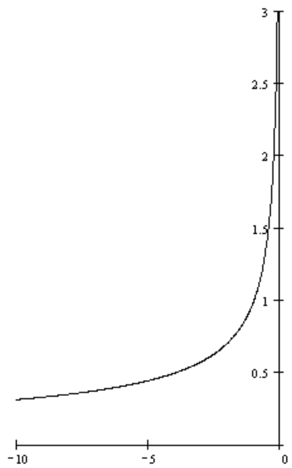


Rys. 4.10. Wykres funkcji $f(x) = \ln(x)$ z pionową asymptotą prawostronną przechodzącą przez punkt x_0 = 0.

W przypadku prawostronnej asymptoty pionowej wyznaczamy granicę dla $x \to x_0^{+}$:

$$\lim_{x \to x_0^{+}} f(x) = \lim_{x \to -0^{+}} \ln(x) = -\infty .$$

Przykład funkcji z **asymptotą pionową lewostronną**: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x}}$, D_f = (-∞,0).



Rys. 4.11. Wykres funkcji $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x}}$ z pionową asymptotą lewostronną przechodzącą przez punkt x_0 = 0.

W przypadku lewostronnej asymptoty pionowej wyznaczamy granicę dla $x \to x_0^-$:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to -0^-} \frac{1}{\sqrt{-x}} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = \infty .$$

<u>Asymptoty ukośne</u> są funkcjami afinicznymi, tj. ich wykresy są liniami prostymi, czyli mają postać *y* = *ax*+*b*. Jedną z możliwych asymptot ukośnych jest funkcja stała, czyli mamy wtedy do czynienia z **asymptotą poziomą**. W celu sprawdzenia, czy funkcja posiada asymptotę poziomą,
badamy dwie granice dla $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) ,$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) .$$

Jeżeli te dwie granice są taką samą liczbą, czyli:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = c ,$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = c ,$$

wówczas funkcja stała *y* = *c* jest szukaną ***asymptotą poziomą (obustronną)*** i innych asymptot ukośnych dana funkcja nie posiada (np. dla funkcji z rys. 4.9 asymptotą poziomą obustronną jest prosta *y* = 0). Jeżeli natomiast te dwie granice są inną liczbą, czyli

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = c_1 ,$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = c_2 ,$$

wówczas funkcja stała $y = c_1$ jest szukaną asymptotą poziomą prawostronną, a funkcja stała $y = c_2$ jest szukaną asymptotą poziomą lewostronną i innych asymptot ukośnych dana funkcja nie posiada (np. funkcja z rys. 4.11 ma ***asymptotę poziomą jednostronną*** *y* = 0).

W przypadku, gdy

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty$$

lub
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$$

należy sprawdzić, ***czy istnieje asymptota ukośna*** (obustronna lub jednostronna) postaci $y = ax+b$. Jak znaleźć współczynniki $a \neq 0$ oraz b (badamy osobno granice dla $x \to +\infty$ lub $x \to -\infty$)?

Z własności asymptoty można napisać równanie:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (ax+b)\,,$$

czyli

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - ax - b] = 0\,.$$

Dzieląc obustronnie przez $x \neq 0$ otrzymujemy:

$$\lim_{x\to\pm\infty} [\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}] = 0\,,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} [\frac{f(x)}{x} - a - 0] = 0\,,$$

$$\boxed{a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}\,.} \qquad \textbf{(4.25)}$$

Taki sam wzór (4.25) na współczynnik $a \neq 0$ można wyprowadzić tak:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (ax+b)\,,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{ax+b} = 1\,,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{ax+b}{x}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{f(x)}{x}}{a+\frac{b}{x}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{f(x)}{x}}{a+0} = 1\,.$$

Stąd:

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}\,.$$

Współczynnik b (4.26):

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}(ax+b),$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - ax). \qquad \textbf{(4.26)}$$

W przypadku a = ±∞ asymptota ukośna nie istnieje i nie obliczamy współczynnika b. W przypadku a ≠ ±∞ oraz b = ±∞ asymptota ukośna także nie istnieje.

Uwaga

Jeżeli sprawdziliśmy wcześniej, iż istnieje asymptota pozioma obustronna $y = c$, to nie wyznaczamy asymptoty ukośnej, ponieważ:

$$a = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{c}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - ax) = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = c.$$

Jeżeli sprawdziliśmy wcześniej, iż istnieje asymptota pozioma jednostronna $y = c_1$ lub $y = c_2$, to sprawdzamy istnienie asymptoty ukośnej tylko dla drugiej strony.

Przykład wyznaczania asymptoty ukośnej:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}.$$

Funkcja ta odpowiada finansom Boba z rozdziału 3.1.

Granice dla $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x} = \infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x} = -\infty.$$

Brak asymptoty poziomej, sprawdzamy istnienie asymptoty ukośnej $y = ax+b$:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1\,,$$

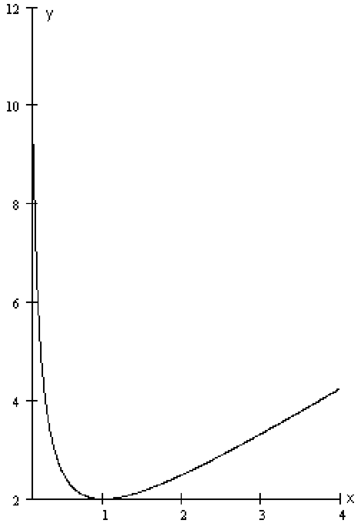
$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1\,,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty}(x + \frac{1}{x} - x) = 0\,,$$

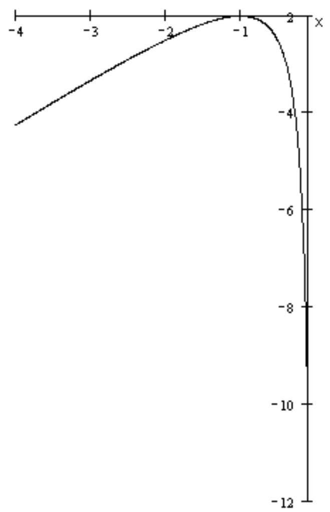
$$b = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - ax) = \lim_{x\to-\infty}(x + \frac{1}{x} - x) = 0\,.$$

Asymptota ukośna obustronna jest więc prostą o równaniu $y = x$.

Oznacza to, iż stan finansów naszego Boba z rozdziału 3.1, po przezwyciężeniu dołka finansowego, będzie miał się dobrze i będzie stale rósł.



Rys. 4.12. Wykres funkcji $f(x) = x + \frac{1}{x}$ dla $x > 0$ z asymptotą ukośną y = x (funkcja posiada także asymptotę pionową x = 0).



Rys. 4.13. Wykres funkcji $f(x) = x + \frac{1}{x}$ dla x < 0 z asymptotą ukośną y = x (funkcja posiada także asymptotę pionową *x* = 0).

Przykłady wyznaczania asymptot zostaną umieszczone poniżej przy badaniu przebiegu zmienności funkcji.

<u>Kolejność czynności przy badaniu funkcji jest następująca:</u>

1) Określamy własności funkcji na podstawie wzoru:

a) dziedzina funkcji,

b) zbiór wartości funkcji (pod warunkiem, iż można go znaleźć za pomocą elementarnych metod),

c) miejsca przecięcia wykresu z osiami układu współrzędnych (miejsca zerowe i punkt przecięcia z osią *OY*),

d) parzystość lub nieparzystość,

e) granice funkcji na końcach przedziałów określoności (dziedziny),

f) asymptoty.

2) Określamy własności funkcji na podstawie pierwszej i drugiej pochodnej:

a) przedziały monotoniczności,

b) ekstrema lokalne funkcji,

c) przedziały wypukłości,

d) punkty przegięcia funkcji.

Wszystkie zebrane informacje pozwolą narysować wykres funkcji.

Przykład 1: $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

1) Dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych (mianownik jest zawsze różny od zera):

D_f = **R .**

Wartościami funkcji są liczby z przedziału (0,1].

Brak miejsc zerowych (licznik nigdy nie będzie zerem).

Punkt przecięcia z osią *OY*: $x = 0$, $f(0) = 1$, czyli punkt o współrzędnych (0,1).

Funkcja parzysta: $f(-x) = \dfrac{1}{1+(-x)^2} = \dfrac{1}{1+x^2} = f(x)$.

Granice dla $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+x^2} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0 ,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+x^2} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0 .$$

Asymptot pionowych brak, ponieważ dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych.

Asymptota pozioma obustronna - prosta $y = 0$ (wyznaczona na podstawie granic dla $x \to \pm\infty$).

2) Badanie pochodnych:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} ,$$

$$f''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2(1+x^2)+8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} .$$

Pochodna $f'(x) < 0$ dla $x > 0$ (funkcja malejąca dla $x > 0$).

Pochodna $f'(x) > 0$ dla $x < 0$ (funkcja rosnąca dla $x < 0$).

Miejsce zerowe pochodnej: $x = 0$, $f'(0) = 0$. Dla $x = 0$ zeruje się pochodna i funkcja zmienia się z rosnącej w malejącą, istnieje więc maksimum w punkcie o współrzędnych (0,1). Dodatkowo wystąpienie maksimum potwierdza fakt, iż druga pochodna $f''(0) = -2 < 0$.

Miejsca zerowe drugiej pochodnej: $f''(x) = 0$ dla $x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ oraz $x = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$.

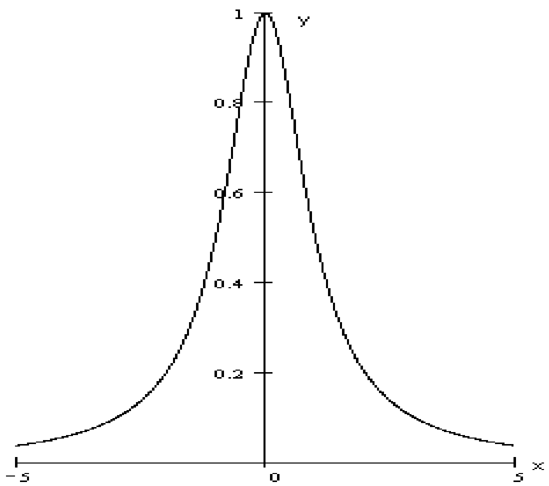
Wypukłość funkcji:

$f''(x) > 0$ dla $x \in (-\infty, \frac{-1}{\sqrt{3}})$ oraz $x \in (\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$ - funkcja w tych przedziałach jest wypukła ku dołowi;

$f''(x) < 0$ dla $x \in (\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ - funkcja w tym przedziale jest wypukła ku górze.

Istnieją więc punkty przegięcia o współrzędnych: $(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4})$ i $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4})$.

Wszystkie ustalenia odnośnie naszej funkcji pozwalają na wykonanie wykresu:



Rys. 4.14. Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

<u>Przykład 2</u>: $f(x)=\dfrac{2x-5}{3x-1}$

1) Dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych z wyjątkiem ⅓ : $D_f = \mathbf{R} \setminus \{⅓\}$.

Jedno miejsce zerowe: x = 2,5.

Punkt przecięcia z osią *OY*: x = 0, f(0) = 5, czyli punkt o współrzędnych (0,5).

Funkcja nie jest ani parzysta, ani nieparzysta:

$$f(-x)=\frac{2(-x)-5}{3(-x)-1}=\frac{-2x-5}{-3x-1}\neq f(x),$$

$$-f(-x)=-\frac{2(-x)-5}{3(-x)-1}=\frac{2x+5}{-3x-1}\neq f(x).$$

Granice dla $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-5}{3x-1}=\frac{2}{3},$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-5}{3x-1}=\frac{2}{3}.$$

Granice dla $x \to ⅓$:

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}^+} f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{3}^+}\frac{2x-5}{3x-1}=\left[\frac{\frac{-13}{3}}{0^+}\right]=-\infty,$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{3}^-}\frac{2x-5}{3x-1}=\left[\frac{\frac{-13}{3}}{0^-}\right]=+\infty.$$

Asymptota pionowa obustronna: x = ⅓.

Asymptota pozioma obustronna - prosta *y* = 2/3 (wyznaczona na podstawie granic dla $x \to \pm\infty$).

2) Badanie pochodnych:

$$f'(x) = \frac{2(3x-1)-3(2x-5)}{(3x-1)^2} = \frac{13}{(3x-1)^2} \ ,$$

$$f''(x) = \frac{-13\cdot 2(3x-1)\cdot 3}{(3x-1)^4} = \frac{-78}{(3x-1)^3} \ .$$

Pochodna $f'(x) > 0$ dla wszystkich argumentów z dziedziny- funkcja stale rosnąca, brak ekstremum.

Miejsca zerowe pierwszej i drugiej pochodnej nie istnieją.

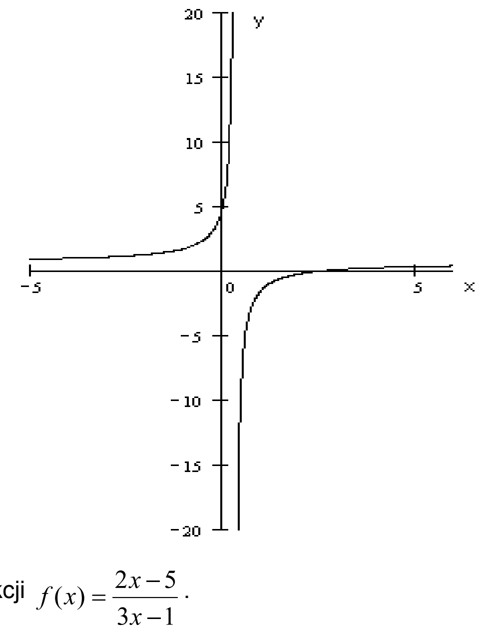
Wypukłość funkcji:

$f''(x) > 0$ dla $x \in (-\infty, \frac{1}{3})$ - funkcja w tym przedziale jest wypukła ku dołowi;

$f''(x) < 0$ dla $x \in (\frac{1}{3}, \infty)$ - funkcja w tym przedziale jest wypukła ku górze.

Brak punktów przegięcia.

Wszystkie ustalenia odnośnie naszej funkcji pozwalają na wykonanie wykresu:



Rys. 4.15. Wykres funkcji $f(x) = \frac{2x-5}{3x-1}$.

<u>Przykład 3</u>: $f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$

1) Dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych różnych od 1: D_f = **R** \ {1}.

Miejsca zerowe: *brak*.

Punkt przecięcia z osią *OY*: x = 0, f(0) = -1, czyli punkt o współrzędnych (0,-1).

Funkcja nie jest ani parzysta, ani nieparzysta:

$$f(-x)=\frac{e^{-x}}{-x-1}\neq f(x),$$

$$-f(-x)=\frac{-e^{-x}}{-x-1}\neq f(x).$$

Granice dla $x\to\pm\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1}=\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x-1}=\left[\frac{0}{-\infty}\right]=0.$$

Granice dla $x\to 1$:

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{e^x}{x-1}=\left[\frac{e}{0^+}\right]=\infty,$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{e^x}{x-1}=\left[\frac{e}{0^-}\right]=-\infty.$$

Asymptota pionowa obustronna: x = 1.

Asymptota pozioma lewostronna - prosta *y* = 0 (wyznaczona na podstawie granicy dla $x\to-\infty$).

Asymptota pozioma nie jest obustronna, sprawdzamy istnienie asymptoty ukośnej $y=ax+b$:

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},$$

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x(x-1)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}=\infty.$$

Asymptota ukośna nie istnieje.

2) Badanie pochodnych:

$$f'(x)=\frac{e^x(x-1)-e^x}{(x-1)^2}=\frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2},$$

$$f''(x)=\frac{[e^x(x-2)+e^x]\cdot(x-1)^2-e^x(x-2)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{e^x(x-1)^2-e^x\cdot 2(x-2)}{(x-1)^3}=$$

$$=\frac{e^x(x^2-2x+1-2x+4)}{(x-1)^3}=\frac{e^x(x^2-4x+5)}{(x-1)^3}.$$

Pochodna $f'(x) < 0$ dla $x < 2$ (funkcja malejąca dla $x < 2$).

Pochodna $f'(x) > 0$ dla $x > 2$ (funkcja rosnąca dla $x > 2$).

Miejsce zerowe pochodnej: $x = 2$, $f'(2) = 0$. Dla $x = 2$ zeruje się pochodna i funkcja zmienia się z malejącej w rosnącą, istnieje więc minimum lokalne w punkcie o współrzędnych $(2,e^2)$. Dodatkowo wystąpienie minimum lokalnego potwierdza fakt, iż druga pochodna $f''(2) = e^2 > 0$.

Miejsce zerowe drugiej pochodnej nie istnieje.

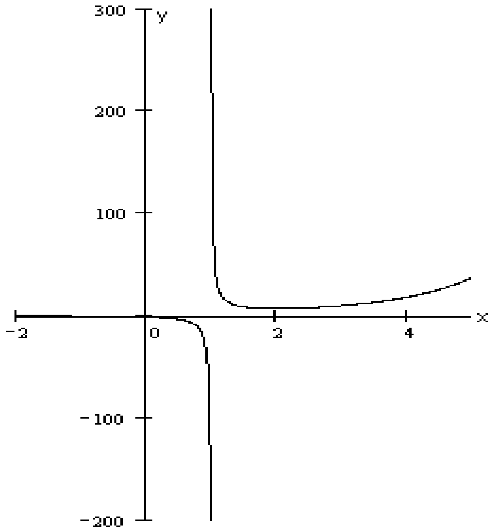
Wypukłość funkcji:

$f''(x) > 0$ dla $x\in(1,\infty)$ - funkcja w tym przedziale jest wypukła ku dołowi;

$f''(x) < 0$ dla $x\in(-\infty,1)$ - funkcja w tym przedziale jest wypukła ku górze.

Brak punktów przegięcia.

Wszystkie ustalenia odnośnie naszej funkcji pozwalają na wykonanie wykresu:



Rys. 4.16. Wykres funkcji $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$.

Przykład 4: $f(x) = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}$.

Jak dokładnie przeanalizować stan finansów Boba z rozdziału 3.1 i jak wyliczyć jego dołek finansowy?

1) Dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych różnych od 0: $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Miejsca zerowe: brak.

Punkt przecięcia z osią OY: brak.

Funkcja jest nieparzysta:

$$-f(-x) = -\frac{(-x)^2+1}{-x} = \frac{x^2+1}{x} = f(x).$$

Granice dla $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x} = \infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x} = -\infty.$$

Granice dla $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{x} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = \infty,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+1}{x} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty.$$

Asymptota pionowa obustronna: x = 0.

Brak asymptoty poziomej, sprawdzamy istnienie asymptoty ukośnej $y = ax+b$:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1,$$

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty}(x + \frac{1}{x} - x) = 0,$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - ax) = \lim_{x\to-\infty}(x + \frac{1}{x} - x) = 0.$$

Asymptota ukośna obustronna jest więc prostą o równaniu $y = x$.

2) Badanie pochodnych:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2},$$

$$f''(x) = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}.$$

Pochodna $f'(x) < 0$ dla $x \in (-1,1)$ (funkcja malejąca).

Pochodna $f'(x) > 0$ dla $x > 1$ lub $x < -1$ (funkcja rosnąca).

Pochodna posiada dwa miejsca zerowe.

Miejsce zerowe pochodnej: $x_1 = 1$, $f'(1) = 0$. Dla $x = 1$ zeruje się pochodna i funkcja zmienia się z malejącej w rosnącą, istnieje więc minimum lokalne w punkcie o współrzędnych (1,2). To jest właśnie dołek finansowy Boba. Dodatkowo wystąpienie minimum lokalnego potwierdza fakt, iż druga pochodna $f''(1) = 2 > 0$.

Miejsce zerowe pochodnej: $x_2 = -1$, $f'(-1) = 0$. Dla $x = -1$ zeruje się pochodna i funkcja zmienia się z rosnącej w malejącą, istnieje więc maksimum lokalne w punkcie o współrzędnych (-1,-2). Dodatkowo wystąpienie maksimum lokalnego potwierdza fakt, iż druga pochodna $f''(-1) = -2 < 0$.

Miejsce zerowe drugiej pochodnej nie istnieje.

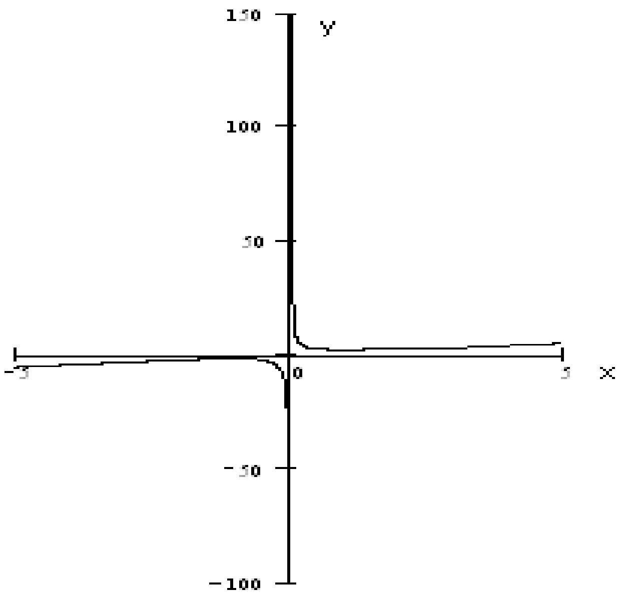
Wypukłość funkcji:

$f''(x) > 0$ dla $x \in (0, \infty)$ - funkcja w tym przedziale jest wypukła ku dołowi;

$f''(x) < 0$ dla $x \in (-\infty, 0)$ - funkcja w tym przedziale jest wypukła ku górze.

Brak punktów przegięcia.

Wszystkie ustalenia odnośnie naszej funkcji pozwalają na wykonanie wykresu, który w dwóch symetrycznych częściach znajduje się na rys. 4.12 i 4.13:



Rys. 4.17. Wykres funkcji $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ·

Zadania

Zbadaj przebieg zmienności następujących funkcji:

1) $f(x) = \frac{e^x}{x}$,

2) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$,

3) $f(x) = x \cdot e^{\frac{-1}{x}}$,

4) $f(x) = e^{\frac{-1}{2}x^2}$,

5) * $f(x) = x - arctg(x)$.

4.7. Inżynierskie zastosowania pochodnej

Przypomnijmy, iż interpretacja geometryczna wartości pochodnej funkcji w punkcie jest następująca: pochodna funkcji f w punkcie x_0 jest równa tangensowi kąta α, jaki tworzy styczna do wykresu funkcji w punkcie x_0 z dodatnim kierunkiem osi *OX*.

$$\boxed{f'(x_0) = tg(\alpha)}$$

Znając współrzędne punktu (x_0, $f(x_0)$) oraz współczynnik kierunkowy stycznej $f'(x_0)$ można wyznaczyć równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie (x_0, $f(x_0)$).

Przykład wyznaczenia stycznej do wykresu

Znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ w punkcie $x_0 = 2$.

Rozwiązanie: szukamy stycznej $y = ax+b$.

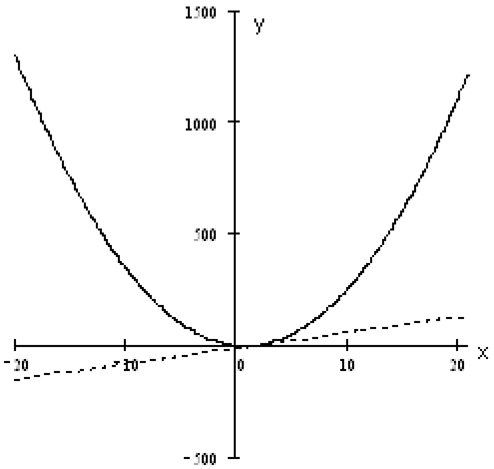
$$f'(x) = 6x - 5 \text{ , } a = f'(x_0) = f'(2) = 7 \text{ , } f(x_0) = f(2) = 3$$

Mając współrzędne punktu (x_0, $f(x_0)$) = (2, 3) oraz współczynnik kierunkowy stycznej $a = f'(x_0)$ = 7 korzystamy z równania prostej w postaci:

$$y - f(x_0) = a(x - x_0) \text{ ,}$$

$$y-3=7(x-2)\,,$$

$$y=7x-11\,.$$



Rys. 4.18. Parabola i styczna.

Pojęcie „stycznej do wykresu” jest istotne w wielu działach nauk technicznych.

Rozważyć należy również ***fizyczną interpretację pochodnej***. Na przykład **prędkość** v (4.27) poruszania się obiektu w czasie $t = t_2 - t_1$ można traktować jako pochodną względem czasu t przebytej drogi $s(t_2) - s(t_1)$:

$$v(t)=\lim_{t\to 0}\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}=\lim_{t\to 0}\frac{s(t_1+t)-s(t_1)}{t}=s'(t)\,. \qquad \textbf{(4.27)}$$

Z kolei **przyspieszenie** p (4.28) poruszającego się obiektu w czasie t można uważać za pochodną prędkości $v(t)$ względem czasu t:

$$p(t)=v'(t)=\lim_{t\to 0}\frac{v(t_2)-v(t_1)}{t_2-t_1}=\lim_{t\to 0}\frac{v(t_1+t)-v(t_1)}{t}\,. \qquad \textbf{(4.28)}$$

Oznacza to, iż przyspieszenie p poruszającego się obiektu w czasie t można uważać za drugą pochodną (4.29) przebytej drogi $s(t_2) - s(t_1)$ względem czasu t:

$$p(t) = v'(t) = s''(t)\,. \tag{4.29}$$

W czasie $t = t_2 - t_1$ mogą zmieniać się inne wielkości fizyczne, np. **temperatura ciała** (wówczas pochodna funkcji temperatury ciała T (4.30) w zależności od czasu t jest **szybkością zmiany temperatury** ciała w chwili t)

$$T'(t) = \lim_{t \to 0} \frac{T(t_2) - T(t_1)}{t_2 - t_1} = \lim_{t \to 0} \frac{T(t_1 + t) - T(t_1)}{t} \tag{4.30}$$

lub **ładunek elektryczny** (wtedy pochodna funkcji ładunku elektrycznego Q (4.31) w zależności od czasu t jest **natężeniem prądu** I w czasie t)

$$I(t) = Q'(t) = \lim_{t \to 0} \frac{Q(t_2) - Q(t_1)}{t_2 - t_1} = \lim_{t \to 0} \frac{Q(t_1 + t) - Q(t_1)}{t}\,. \tag{4.31}$$

W wielu obliczeniach inżynierskich korzystne jest (np. ze względu na czas obliczeń) zastąpienie skomplikowanej funkcji za pomocą wielomianu. Możemy posłużyć się następującym twierdzeniem:

Tw. 4.4 - twierdzenie Taylora

Jeżeli funkcja f jest klasy C^{n-1} w przedziale $[x_0, x]$ (tzn. wszystkie pochodne do rzędu $n-1$ włącznie są funkcjami ciągłymi w tym przedziale) i ma n – tą pochodną w przedziale (x_0, x), to istnieje taki punkt $c \in (x_0, x)$, że:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + .. + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n$$

Powyższy **wzór Taylora** w tw. 4.4 pozwala rozwinąć funkcję (spełniającą założenia tw. Taylora na prawo od punktu x_0) w sumę wielomianów. Ostatni składnik rozwinięcia funkcji f nazywa się **resztą Taylora**:

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n .$$

Dla $x_0 = 0$ otrzymamy **wzór Maclaurina** (4.32), czyli przybliżenie dowolnej funkcji spełniającej założenia tw. Taylora w otoczeniu punktu $x_0 = 0$. Mówimy o rozwinięciu funkcji f w **szereg Maclaurina**:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n . \qquad \textbf{(4.32)}$$

Przykład zastosowania wzoru Maclaurina (4.32) dla funkcji $f(x) = e^x$:

$f^{(n)}(x) = e^x$ dla każdego n,

$f^{(n)}(0) = e^0 = 1$,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} \cdot e^c .$$

Przybliżanie danej funkcji kończymy dla ustalonego n, pozwalającego uzyskać żądaną dokładność obliczeń. Na przykład n składników rozwinięcia Maclaurina funkcji e^x dla dowolnego naturalnego n przyjmie postać:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} . \qquad \textbf{(4.33)}$$

Stąd liczba Eulera *e* może zostać przybliżona (4.33) dla x = 1:

$$e^1 \approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}...+\frac{1}{(n-1)!}.$$

Przykład zastosowania wzoru Maclaurina (4.32) dla funkcji $f(x)=\ln(x+1)$ oraz *n* = 4:

$$f(0)=\ln(1)=0;$$

$$f'(x)=\frac{1}{x+1},\ f'(0)=1;$$

$$f''(x)=\frac{-1}{(x+1)^2},\ f''(0)=-1;$$

$$f'''(x)=\frac{2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{2}{(x+1)^3},\ f'''(0)=2;$$

$$\ln(x+1)\approx x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}. \qquad \textbf{(4.34)}$$

Dzięki rozwinięciu funkcji $f(x)=\ln(x+1)$ w szereg Maclaurina (4.34) można przybliżyć wartość funkcji dla bardzo małych x. Na przykład dla x = 0.01 otrzymamy przybliżenie:

$$ln(1{,}01)\approx 0.00995.$$

Przykład zastosowania wzoru Maclaurina (4.32) dla funkcji $f(x)=\sqrt{x+1}$ oraz *n* = 3:

$$f(0)=\sqrt{1}=1;$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}},\ f'(0)=\frac{1}{2};$$

$$f''(x) = \frac{-1}{4(x+1)\sqrt{x+1}}, \; f''(0) = \frac{-1}{4};$$

$$\sqrt{x+1} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}. \qquad \textbf{(4.35)}$$

Dzięki rozwinięciu funkcji $f(x) = \sqrt{x+1}$ w szereg Maclaurina (4.35) można przybliżyć wartość funkcji dla bardzo małych x. Na przykład dla x = 0.01 otrzymamy przybliżenie:

$$\sqrt{1.01} \approx 1.0049875.$$

Wyprowadź na podstawie wzoru Maclaurina (4.32) poniższe przybliżenia funkcji:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$arctgx \approx x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{2}.$$

Wzór dla funkcji *arc tg* może posłużyć do przybliżenia liczby π podstawiając x = 1:

$$arctg1 = \frac{\pi}{4} \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

$$\pi \approx 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \ldots$$

Dzięki wzorom Taylora (tw. 4.4) i Maclaurina (4.32) obliczenia na wielu funkcjach sprowadzają się do szybszych i efektywniejszych obliczeń na wielomianach.

Pochodna funkcji może znaleźć zastosowania w **zadaniach z treścią**, w których występuje pewna wielkość najmniejsza lub największa.

Przykład: jaki prostokąt o danym (ustalonym) obwodzie $2s$ ma największe pole P?

Rozwiązanie:

$$2a+2b = 2s,\ a+b = s,\ b = s-a;$$

$$P(a) = a \cdot b = a(s-a),$$

$$P'(a) = s-2a,$$

$$P'(a) = 0 \text{ dla } a = s/2,$$

$$b = s-a = s-s/2 = s/2,$$

$P''(a) = -2 < 0$ (istnieje więc maksimum funkcji P, czyli największe pole).

Boki a oraz b są takie same, szukany prostokąt o maksymalnym polu jest więc kwadratem.

W tego typu zadaniach z wielkością maksymalną lub minimalną należy ustalić wzór funkcji z jedną zmienną i obliczoną pochodną przyrównać do zera. Za pomocą drugiej pochodnej upewniamy się, czy mamy do czynienia z maksimum albo minimum funkcji.

Ćwiczenia

1) Znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = 2x^3 - x^2 + 1$ w punkcie $x_0 = 1$.

2) Rozwiń funkcję w szereg Maclaurina dla podanego n:

a) $f(x) = e^x$, $n = 7$;

b) $f(x) = \ln(x+1)$, $n = 5$;

c) $f(x) = \sin(x)$, $n = 4$;

d) $f(x) = \cos(x)$, $n = 6$.

4.8. Zadania

1) Oblicz z definicji wartość pochodnej funkcji *f(x)* w punkcie x_0:

- **a)** $f(x) = -3x+17$, $x_0 = 21$;
- **b)** $f(x) = -4x^2+x-16$, $x_0 = -2$;
- **c)** $f(x) = -57$, $x_0 = -3$.

2) Wyznacz dziedzinę funkcji oraz pochodną funkcji:

a) $s(x) = \frac{-2}{x^2} + 6x - 5$,

b) $s(x) = \frac{13x+11}{4x - x^2} - 7x^2 - 3$,

c) $s(x) = \frac{x^2 + x}{-4x + x^2} - \frac{5}{x}$,

d) $s(x) = \frac{6x^2 + 5x - 9}{3 - 2x + 8x^2} - 3x^2$,

e) $s(x) = \frac{-2x^2 + 15}{7x^2 + x + 1} - \frac{3x^2 - 5}{3x}$,

f) $f(x) = 5x^7$,

g) $f(x) = -5x^4+16x^3-x+19$,

h) $s(x) = \frac{-2x^5 - 5x^4}{2x^8 + 3}$,

i) $f(x) = -6x\sqrt{x}$,

j) $f(x) = x^5\sqrt{x}$,

k) $s(x) = \frac{1-x}{3x\sqrt{x}}$,

l) $f(x) = \frac{-6}{x}\sin(x)$,

m) $f(x) = (\frac{1}{x} + 3x\cos(x))(4x^2 - 5x\ln(x) + 8)$,

n) * $f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{x-2} + 3x^4\cos(x)$,

o) * $s(x) = \dfrac{1}{x} tg(x) + e^x\sqrt{x}$,

p) *f(x) = -5x^42^sin(x)*,

q) * $s(x) = \dfrac{3x^2}{\sin(x)-\cos(x)}$,

r) $s(x) = \dfrac{1-x}{\cos(x)}$,

s) *f(x) =* $x^3 \cdot \ln(x)$,

t) $s(x) = \dfrac{11-x^2}{\ln(x)}$,

u) *f(x) =* $-7\log_8(x)$,

v) * $s(x) = \dfrac{\sin(x)+1}{x-1-\log_{\frac{1}{2}}(x)}$,

x) *f(x) =* $3x^2 \cdot e^x$,

y) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2^x}$,

z) $f(x) = 3x \cdot 2^{-x} = \dfrac{3x}{2^x}$.

3) Wyznacz pierwszą i drugą pochodną funkcji:

a) *f(x) = -3sin(-2x)*,

b) *f(x) =* $5x - xe^{3x}$,

c) $f(x) = xe^{\frac{-x^2}{2}}$,

d) *f(x) =* $3\ln(5x^2)$,

e) $f(x) = 3x\sqrt{x^2+1}$,

f) $f(x) = \dfrac{3x-1}{3\sin(2x)}$,

g) * $f(x) = \sin(3x)\sqrt{-\ln(2x) + 5tg(2x)}$.

4) Określ monotoniczność funkcji i znajdź ekstrema funkcji. Określ wypukłość funkcji i znajdź punkty przegięcia funkcji. Wyznacz asymptoty:

a) $f(x) = x^2 - x - 2$,

b) $f(x) = \dfrac{-x^2 + 5x + 2}{3x + 1}$,

c) $f(x) = \dfrac{x + 2}{-4x + 1}$,

d) $f(x) = \dfrac{-3x^4 + 2}{4x^3 - 8x} - 2x + 1$,

e) $f(x) = \dfrac{-9x + 2}{-5x + 1} + x^2$,

f) $f(x) = \dfrac{x - 2}{-x + 1} + 2x - 3$.

5) Zbadaj przebieg zmienności następujących funkcji:

a) $f(x) = \dfrac{2e^x}{-x}$,

b) $f(x) = \dfrac{\ln(x + 1)}{x}$,

c) $f(x) = 3x \cdot e^{\frac{-1}{x}}$,

d) $f(x) = e^{-x^2}$,

e) * $f(x) = x - \ln(x)$.

6) Znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = -x^3 - 5x^2 - x + 1$ w punkcie $x_0 = 1$.

7) Rozwiń funkcję w szereg Maclaurina dla podanego *n*:

a) $f(x)=x\cdot e^x$, *n* = 5;

b) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$, *n* = 3;

c) $f(x)=\sin(2x)$, *n* = 4;

d) $f(x)=3\cos(2x)$, *n* = 5.

8) Oblicz granicę korzystając z reguły de L'Hospitala:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x)+\sin(x-1)}{x^5-\cos(x-1)}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{x(1-\cos x)}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x^3}$.

Odpowiedzi

1) a) –3; **b)** 17; **c)** 0.

2) a) *D* = **R** \ {0}; **b)** *D* = **R** \ {0,4}; **c)** *D* = **R** \ {0,4}; **d)** *D* = **R**; **e)** *D* = **R** \ {0}; **f)** *D* = **R**; **g)** *D* = **R**; **h)** *D* = **R**; **i)** *D* = [0,∞); **j)** *D* = [0,∞); **k)** *D* = (0,∞); **l)** *D* = **R** \ {0}, $f'(x)=\dfrac{-6x\cdot\cos(x)+6\sin(x)}{x^2}$; **m)** *D* = (0,∞); **n)** *D* = (0,∞) \ {2};

o) *D* = (0,∞) \ {½π+*k*π, *k*∈**N**}; **p)** *D* = **R**; **q)** *D* = **R** \ {¼π+*k*π, *k* ∈ **C**};

r) *D* = **R** \ {½π+*k*π, *k* ∈ **C**}, $s'(x)=\dfrac{-\cos(x)+(1-x)\sin(x)}{\cos^2(x)}$; **s)** *D* = (0,∞),

$f'(x) = x^2(1+3\ln(x))$; **t)** *D* = (0,∞) \ {1}; **u)** *D* = (0,∞); **v)** *D* = (0,∞) \ {1}; **x)** *D* = **R**,

$f'(x) = (6x+3x^2)e^x$; **y)** *D* = **R**; $f'(x)=\dfrac{-2x-2^x\ln 2}{(x^2+2^x)^2}$; **z)** *D* = **R**,

$$f'(x)=\frac{3\cdot 2^x-3x\cdot 2^x\cdot\ln 2}{(2^x)^2}=\frac{3-3\ln 2\cdot x}{2^x}.$$

3) a) *f'(x)* = *6cos(-2x)*, *f'(x)* = *12sin(-2x)*; **c)** $f'(x) = (1 - x^2)e^{\frac{-x^2}{2}}$,

$f''(x) = (-3x + x^3)e^{\frac{-x^2}{2}}$; **d)** $f'(x) = \frac{6}{x}$, $f''(x) = \frac{-6}{x^2}$;

f) $f'(x) = \frac{9\sin(2x) + 6(1-3x)\cos(2x)}{9\sin^2(2x)}$.

4) a) funkcja malejąca w przedziale (-∞,½), rosnąca w przedziale (½,∞), minimum (wierzchołek paraboli) w punkcie (½, -2.25), funkcja wypukła ku dołowi, brak punktów przegięcia, brak asymptot; **c)** funkcja rosnąca, brak ekstremum i punktów przegięcia, wypukła ku dołowi w przedziale (-∞,¼), wypukła ku górze w przedziale (¼,∞), asymptota pionowa *x* = ¼, asymptota pozioma *y* = -¼.

6) *y* = -14*x*+8.

7) a) $f^{(n)}(x) = (x+n)\cdot e^x$, $f^{(n)}(0) = n$, $f(x) \approx x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6}$;

b) $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$, $f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$, $f(x) \approx 1 - x + x^2$;

c) $f'(x) = 2\cos(2x)$, $f''(x) = -4\sin(2x)$, $f'''(x) = -8\cos(2x)$,

$f(x) \approx 2x - \frac{4}{3}x^3$;

d) $f'(x) = -6\sin(2x)$, $f''(x) = -12\cos(2x)$, $f'''(x) = 24\sin(2x)$,

$f^{(4)}(x) = 48\cos(2x)$, $f(x) \approx 3 - 6x^2 + 2x^4$.

8) a) 2/5; **b)** 2/3 (dopiero trzecie pochodne dają wynik); **c)** 1/3.