

Ryszard Poprawski  
Włodzimierz Salejda

# Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki

## Część I

Zasady opracowania wyników pomiarów

*Wydanie V*



Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej  
Wrocław 2005

Recenzenci  
Ryszard CACH  
Ewa DĘBOWSKA  
Mirosław DROZDOWSKI

Redaktor serii  
Ludmiła LEWOWSKA

Skład komputerowy  
Marek J. BATTEK

Opracowanie redakcyjne  
Maria IZBICKA

Projekt okładki  
Ewa POPRAWSKA

© Copyright by Ryszard Poprawski & Włodzimierz Salejda, Wrocław 1996

OFICyna WYDAWNICZA POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ  
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

**ISBN 83-7085-924-0**

Drukarnia Oficyny Wydawniczej Politechniki Wrocławskiej. Zam. nr 1114/2005.

## Spis treści

Spis ważniejszych oznaczeń . . . . .	5
Przedmowa . . . . .	6
Wstęp . . . . .	7
1. Pomiary wielkości fizycznych . . . . .	9
Przykłady pomiarów prostych . . . . .	10
Przykłady pomiarów złożonych . . . . .	11
2. Obliczanie niepewności pomiarów . . . . .	12
2.1. Pojęcia podstawowe . . . . .	12
2.2. Statystyczna analiza wyników i niepewność pomiarów . . . . .	17
2.2.1. Średnia arytmetyczna, wariancja i odchylenie standardowe (z próby) . . . . .	17
2.2.2. Współczynnik korelacji (z próby) . . . . .	20
2.2.3. Histogramy . . . . .	23
2.2.4. Gęstość rozkładu prawdopodobieństwa . . . . .	25
2.2.5. Wykres normalny . . . . .	27
2.2.6. Wartość średnia i wariancja . . . . .	29
2.2.7. Dystrybucja rozkładu prawdopodobieństwa . . . . .	29
2.2.8. Standaryzowany rozkład normalny . . . . .	30
2.2.9. Obliczanie prawdopodobieństw $P((\mu - k\sigma, \mu + k\sigma))$ dla rozkładu normalnego . . . . .	34
2.2.10. Gęstość dwuwymiarowego rozkładu prawdopodobieństwa . . . . .	35
2.2.11. Współczynniki korelacji oraz macierz kowariancji i korelacji . . . . .	35
2.2.12. Centralne twierdzenie graniczne . . . . .	37
2.2.13. Rozkład dwumianowy i rozkład Poissona . . . . .	38
2.2.14. Przybliżanie rozkładu dwumianowego i rozkładu Poissona rozkładem normalnym . . . . .	41
2.3. Opracowanie wyników oraz niepewności pomiarów prostych . . . . .	42
2.3.1. Obliczanie niepewności w przypadku małej liczby pomiarów za pomocą długości przedziałów ufności . . . . .	43
2.3.2. Określanie niepewności na podstawie klasy przyrządów . . . . .	44
2.3.3. Niepewności pomiarów mierników cyfrowych . . . . .	45
2.4. Zaokrąglanie i zapis wyników pomiarów oraz ich niepewności . . . . .	46
2.4.1. Zaokrąglanie wartości niepewności pomiaru . . . . .	47
2.4.2. Zaokrąglanie wyników pomiarów . . . . .	47
2.4.3. Zapisywanie wyników pomiarów oraz ich niepewności . . . . .	48
2.5. Odrzucanie wyników pomiarów . . . . .	49
2.6. Obliczanie niepewności w przypadku pomiarów złożonych . . . . .	50
2.6.1. Nieskorelowane wielkości wejściowe . . . . .	52

2.6.2. Skorelowane wielkości wejściowe .....	55
2.6.2.1. Obliczanie niepewności metodą różniczki zupełnej .....	58
3. Graficzne opracowanie wyników pomiarów .....	65
3.1. Rysowanie wykresów .....	65
3.1.1. Rysowanie wykresów we współrzędnych biegunowych .....	68
3.2. Odczytywanie wartości wielkości fizycznych z wykresów .....	69
3.2.1. Wyznaczanie „nachylenia wykresu” .....	71
3.3. Linearyzacja zależności między wielkościami fizycznymi .....	73
4. Metody regresji .....	77
4.1. Regresja nieliniowa .....	82
5. Komputerowe opracowanie wyników .....	84
6. Zasady wykonywania ćwiczeń i opracowywania sprawozdań .....	87
6.1. Wskazówki praktyczne dotyczące wykonywania ćwiczeń .....	87
6.2. Sprawozdanie .....	88
7. Dodatek .....	90
7.1. Definicje jednostek podstawowych układu SI .....	90
7.2. Przedrostki stosowane do oznaczania wielokrotności jednostek .....	93
7.3. Tabele .....	94
Literatura uzupełniająca .....	113

## Spis ważniejszych oznaczeń

$X, X_i, Y$	– wielkości fizyczne,
$x, x_p, y$	– wartości wielkości fizycznych,
$x_0, y_0$	– jednostki wielkości fizycznych,
$\mu_{rz}$	– wartość dokładna (prawdziwa, rzeczywista) wielkości fizycznej,
$s, s_x$	– odchylenie standardowe,
$\delta$	– błąd pomiaru,
$\bar{x}$	– średnia arytmetyczna,
$\bar{x}_\infty$	– średnia arytmetyczna z dużej liczby pomiarów,
$\delta_{p^\infty}$	– błąd przypadkowy,
$\Delta$	– błąd systematyczny,
$n$	– liczba pomiarów,
$s_x$	– odchylenie standardowe średniej arytmetycznej,
$r_{xy}$	– współczynnik korelacji,
$f(x)$	– gęstość prawdopodobieństwa, funkcja rozkładu,
$P$	– prawdopodobieństwo,
$\sigma, \lambda$	– parametry rozkładu,
$\Phi(x)$	– gęstość standaryzowanego rozkładu normalnego,
$F(x)$	– dystrybuanta,
$\sigma_{xy}$	– kowariancja,
$B(m, p)$	– rozkład dwumianowy,
$P(\lambda)$	– rozkład Poissona,
$t(n, \alpha)$	– współczynnik Studenta,
$\alpha$	– poziom ufności,
$kl$	– klasa miernika,
$Z$	– zakres miernika,
$kl_d$	– klasa miernika cyfrowego,
$rozd_z$	– rozdzielczość miernika cyfrowego,
$u_y$	– złożona niepewność standardowa,
$\beta_i$	– współczynnik regresji,
$\delta_p$	– niepewność przypadkowa,
$\delta_w$	– niepewność względna,
$\delta_\%$	– niepewność względna wyrażona w procentach.

## PRZEDMOWA

Oddajemy do rąk czytelników kolejne wydanie podręcznika do ćwiczeń laboratoryjnych z fizyki. Podręcznik jest adresowany do studentów pierwszych dwóch lat studiów wyższych uczelni technicznych i składa się z czterech części noszących następujące tytuły:

1. Podstawy opracowania wyników pomiarów.
2. Mechanika i termodynamika.
3. Elektryczność i magnetyzm.
4. Optyka.

W części pierwszej przedstawiamy podstawowe zasady analizy niepewności pomiarów, metody opracowania i prezentacji wyników pomiarów oraz tablice wartości wielkości fizycznych. Pragniemy podkreślić, że metody analizy wyników pomiarów są zgodne z aktualnymi zaleceniami ISO (International Organization for Standardization) oraz Głównego Urzędu Miar.

Współautorem rozdziałów 2.2, 2.6 i 4 jest profesor dr hab. Witold Klonecki, były pracownik naukowo-dydaktyczny Instytutu Matematyki PWr.

W pozostałych częściach podręcznika zamieszczono opisy wraz z obszernymi wprowadzeniami do wszystkich ćwiczeń wykonywanych w Laboratorium Podstaw Fizyki PWr. Opis każdego ćwiczenia rozpoczyna się zwięzłym sformułowaniem najważniejszych zagadnień (w formie słów kluczowych), których znajomość jest warunkiem koniecznym przystąpienia do wykonywania danego ćwiczenia laboratoryjnego.

Mamy nadzieję, że podręcznik ten ułatwi studentom przygotowanie się do ćwiczeń laboratoryjnych z fizyki oraz opracowania wyników pomiarów bez konieczności sięgania do wielu innych książek.

W internetowej witrynie dydaktycznej Instytutu Fizyki PWr. pod adresem: <http://www.if.pwr.wroc.pl/dydaktyka/LPF> jest dostępne bezpłatnie poprzednie wydanie podręcznika.

Autorzy dziękują prof. dr. hab. Witoldowi Kloneckiemu za cenne uwagi i dyskusje oraz pani Alicji Szczygieł za wykonanie rysunków do wszystkich części podręcznika.

*Autorzy i redaktorzy podręcznika*

## WSTĘP

**Poznanie przez studentów podstawowych technik doświadczalnych, zdobycie umiejętności przeprowadzania eksperymentów i opracowywania wyników pomiarów oraz szacowania niepewności pomiarów – to najważniejsze cele ćwiczeń laboratoryjnych z fizyki.** Opanowanie tych zagadnień wymaga pewnego czasu oraz doświadczenia, które zdobywa się podczas wykonywania i opracowywania kolejnych ćwiczeń.

Zajęcia laboratoryjne z fizyki rozpoczynają się zebraniem organizacyjnym, na którym studenci po zapoznaniu się z regulaminem pracowni fizycznej, sprawami organizacyjnymi i porządkowymi, otrzymują harmonogram ćwiczeń na cały semestr.

**W ciągu tygodnia dzielącego zebranie organizacyjne od pierwszych zajęć student powinien zapoznać się z tematyką pierwszego wyznaczonego ćwiczenia, a także z podstawowymi metodami szacowania niepewności pomiarów.**

Oto lista zagadnień, z którymi należy się zapoznać przed przystąpieniem do pierwszego ćwiczenia, niezależnie od jego tematu:

- pomiary wielkości fizycznych (rozdział 1),
- podstawy obliczania niepewności pomiarów (rozdział 2),
- zasady wykonywania ćwiczeń i opracowywania sprawozdań (rozdział 6).

W opisach ćwiczeń zasugerowano sposoby opracowania wyników pomiarów oraz metodę obliczania ich niepewności. Podstawowe pojęcia oraz ich definicje zostały w tekście wyróżnione pogrubioną czcionką, w celu wyraźnego oddzielenia ich od przykładów i komentarzy.

**Przed przystąpieniem do kolejnego ćwiczenia należy zapoznać się z metodą obliczania niepewności oraz sposobem opracowania wyników przydatnym w danym ćwiczeniu.** Taki sposób postępowania zapewnia zgromadzenie podczas pomiarów danych niezbędnych do obliczeń oraz pozwala stopniowo (przy wykonywaniu i opracowywaniu rezultatów kolejnych ćwiczeń) zapoznawać się z metodyką opracowywania i prezentacji wyników pomiarów.

Omówimy krótko zawartość podręcznika. W rozdziale pierwszym wprowadzono podstawowe pojęcia dotyczące wielkości fizycznych oraz ich pomiarów. Obszerne przedstawienie zarówno przedmiotu jak i podstawowych zasad analizy niepewności pomiarów zamieszczone jest w rozdziale 2. Sposoby graficznego opracowywania wyników pomiarów oraz metody regresji liniowej oraz nieliniowej zawierają odpowiednio rozdziały 3 i 4. Oprogramowanie użytkowe pozwalające na szybkie i sprawne przeprowadzenie analizy niepewności pomiarów i sporządzenie wykresów przedstawiono w rozdziale 5. Zasady wykonywania pomiarów w Laboratorium Pod-

staw Fizyki oraz sporządzania sprawozdań omówiono w rozdziale 6. Dodatek zawiera definicje jednostek wielkości podstawowych w układzie SI, wartości stałych fundamentalnych, tablice stałych niezbędnych podczas opracowywania wyników pomiarów oraz tablice, w których podano własności fizyczne materiałów stanowiących przedmiot badań. Tablice mogą być przydatne do porównania uzyskanych wyników pomiarów z danymi wyznaczonymi w laboratoriach naukowych i przemysłowych.

Przytoczone w tekście przykłady stanowią ilustrację omawianych zagadnień, nie są jednak wynikami konkretnych pomiarów i w żadnym wypadku nie należy powoływać się na występujące w nich wartości liczbowe.



## 1. POMIARY WIELKOŚCI FIZYCZNYCH

Przedmiotem fizyki doświadczalnej są pomiary wielkości fizycznych oraz poszukiwanie i opis związków (praw fizycznych) między tymi wielkościami.

**Wielkością fizyczną nazywamy taką właściwość obiektu, substancji lub zjawiska, którą można porównać ilościowo z podobnymi właściwościami lub cechami innego obiektu, substancji lub zjawiska.** Wielkości fizyczne są więc właściwościami lub cechami obiektów, substancji lub zjawisk, które można zmierzyć.

**Proces porównywania wielkości fizycznej z wielkością przyjętą za jednostkę nazywamy pomiarem.** Przykładami wielkości fizycznych, za pomocą których opisujemy właściwości obiektów, są: masa, gęstość, temperatura, wymiary geometryczne, natomiast wielkościami charakteryzującymi zjawiska są: prędkość, przyspieszenie, siła, szybkość zmian temperatury lub efekty cieplne, np. ciepło parowania, ciepło właściwe itp.

Aby móc dokonać pomiaru danej wielkości fizycznej, należy określić jednostkę tej wielkości. Jednostki definiowane są za pomocą wzorca lub przez sprecyzowanie sposobu ich pomiaru. W celu uniknięcia dowolności w wyborze jednostek, a więc umożliwienia porównywania wyników pomiarów, definicje jednostek fizycznych zostały określone w umowach międzynarodowych. W większości krajów, w tym również w Polsce, obowiązują jednostki układu międzynarodowego – SI (System International). Definicje jednostek układu SI, zatwierdzone przez międzynarodową konferencję w 1991 roku, są zawarte w dodatku znajdującym się w końcowej części podręcznika.

**Istnieje określona liczba wielkości fizycznych, których jednostki są zdefiniowane. Wielkości takie nazywamy podstawowymi** (w układzie SI jest ich siedem). Pozostałe wielkości można wyrazić za pomocą związków (zazwyczaj praw fizycznych) między wielkościami podstawowymi. **Wielkości fizyczne, które można wyrazić za pomocą wielkości podstawowych nazywamy wielkościami pochodnymi.** Jednostki podstawowe można wybierać i definiować w różny sposób. Za jednostki podstawowe przyjmuje się jednostki takich wielkości fizycznych, które dzięki odpowiednim przyrządom i technice pomiarowej można możliwie precyzyjnie zmierzyć, a ich wzorce możliwie prosto i dokładnie odtworzyć. Należy zwrócić uwagę, że żadna wielkość fizyczna nie może być zmierzona z dokładnością większą od dokładności z jaką zdefiniowany jest aktualny wzorzec. W miarę rozwoju techniki pomiarowej rośnie również precyzja pomiarów. Wtedy, gdy jesteśmy w stanie mierzyć jakąś wielkość z precyzją większą od dokładności z jaką określony jest

wzorec, zachodzi potrzeba zmiany wzorca (przykładem jest wprowadzona niedawno zmiana definicji metra).

Wynik dowolnego pomiaru  $x$  jest wartością mianowaną, którą podajemy w następującej postaci:

$$x = r_X J_X, \quad (1.1)$$

gdzie:  $J_X$  – jednostka wielkości fizycznej  $X$  (zazwyczaj jej symbol), a  $r_X$  – liczba rzeczywista określająca liczbę jednostek. Jak widzimy z postaci zapisu (1.1), podanie wartości wielkości fizycznej w postaci tylko liczby nie ma sensu (o ile nie jest to wielkość bezwymiarowa); np. stwierdzenie, że odległość między dwoma punktami wynosi 1,54 nic nie znaczy.

W przypadku podawania wartości wielkości obarczonej niepewnością  $\delta_X$  wynik pomiaru zapisujemy w postaci

$$x = (r_X \pm \delta_X) J_X. \quad (1.2)$$

Niepewność pomiaru  $\delta_X$  jest miarą rozrzutu wyników pomiarów wielkości fizycznej  $X$ .

Wyznaczanie wartości wielkości fizycznej może składać się z kilku etapów, z których najważniejszymi są **pomiary proste, obliczanie oceny wartości wielkości wyznaczanych** na podstawie wyników pomiarów prostych oraz **analiza dokładności uzyskanej oceny**.

**Pomiary wielkości fizycznych, których wartości wyznaczamy bezpośrednio za pomocą odpowiednich przyrządów będziemy nazywali pomiarami prostymi (bezpośrednimi), a wielkości tak wyznaczone wielkościami prostymi.** Do takich wielkości zaliczane są **wielkości podstawowe** (patrz podrozdział 7.1 zamieszczony w dodatku), których **miarę polega na porównaniu z wartością przyjętą za jednostkę**, np. czas, odległość, kąt, natężenie prądu lub masa.

Istnieją wielkości, których wartości odczytujemy bezpośrednio ze skali przyrządu mierzącego inną wielkość fizyczną. Dzięki prostej zależności funkcyjnej przyrząd może być wyskalowany w jednostkach innej wielkości fizycznej niż wielkość mierzona bezpośrednio. Wielkości takie będziemy również nazywali wielkościami prostymi, mimo że sam pomiar jest  **pomiarem pośrednim**.

W przypadku pomiarów prostych nie ma potrzeby obliczania wartości mierzonych, gdyż odczytujemy je bezpośrednio ze skali przyrządu pomiarowego.

### Przykłady pomiarów prostych

1. Pomiar napięcia elektrycznego za pomocą woltomierza polega na pomiarze natężenia prądu płynącego przez znaną rezystancję. Korzystając z prawa Ohma możemy amperomierz wyskalować w jednostkach napięcia i przyrząd nazwać woltomierzem.

2. Termometr cieczowy jest urządzeniem wykorzystującym liniowy związek między przyrostem objętości cieczy a przyrostem temperatury. Wielkością mierzoną jest przyrost objętości cieczy, naniesiona zaś na nim skala jest skalą temperatur.

3. Pomiar natężenia oświetlenia za pomocą luksomierza polega na pomiarze natężenia prądu generowanego przez fotoogniwo, amperomierz mierzący ten prąd jest wyskalowany w luksach.

**Pomiar złożony** polega na wykonaniu (najczęściej równoczesnym) kilku pomiarów prostych. Korzystając z zależności między wielkościami wyznaczonymi bezpośrednio obliczamy wartość wielkości fizycznej, którą będziemy nazywali złożoną, a taki sposób wyznaczania wielkości fizycznej pomiarem złożonym.

### Przykłady pomiarów złożonych

1. Pomiar oporu elektrycznego polega zwykle na pomiarze natężenia prądu oraz napięcia na badanej rezystancji. Wartość oporu obliczamy korzystając z prawa Ohma. Zwróćmy uwagę na to, że jeżeli opór zmierzmy za pomocą omomierza, to będzie on traktowany jako pomiar prosty. Gdy wartość oporu wyznaczamy na podstawie pomiarów napięcia i natężenia prądu, będzie to pomiar złożony.

2. W celu wyznaczenia ciepła właściwego ciała należy wyznaczyć jego masę oraz określić przyrost temperatury spowodowany dostarczeniem określonej ilości ciepła. W tym celu należy zważyć badane ciało, zmierzyć jego temperaturę początkową i końcową oraz określić dostarczone ciepło. Jeżeli energia jest dostarczana za pomocą grzejnika elektrycznego, to należy zmierzyć napięcie, natężenie prądu oraz czas przepływu prądu przez grzejnik, a ponadto należy znać (lub wyznaczyć) pojemność cieplną grzejnika, czyli ilość ciepła potrzebną do ogrzania grzejnika o jeden stopień.

Z przytoczonych przykładów wynika, że pomiary złożone mogą być bardzo skomplikowane i wymagać wielu pomiarów prostych i często dodatkowo znajomości stałych materiałowych lub stałych fizycznych.

Wartości  $x$  wielkości fizycznej  $X$  są wyznaczane doświadczalnie (mówimy są mierzone). Wartość dokładna (rzeczywista, prawdziwa), którą oznaczymy przez  $\mu_{rz}$  nie jest znana.

Rodzi się pytanie, jak obliczyć wartość wielkości zmierzonej, która będzie dobrym oszacowaniem wartości dokładnej  $\mu_{rz}$  oraz jak oszacować dokładność pomiarów na podstawie skończonej serii pomiarów nazywanej także próbą? Zagadnienia te stanowią przedmiot analizy niepewności pomiarów nazywanej do niedawna rachunkiem błędów.

Analiza niepewności pomiarów wymaga stosowania odpowiednich pojęć, które zostaną przedstawione w rozdziale 2. Pojęcia te wprowadzimy zgodnie z zaleceniami organizacji międzynarodowych sformułowanymi w przewodniku *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement* [1] oraz wytycznymi Głównego Urzędu Miar [2] (patrz również opracowania i podręczniki [3–7, 9]).

## 2. OBLICZANIE NIEPEWNOŚCI POMIARÓW

Wynik nawet najstaranniej wykonanego pomiaru lub obserwacji obarczony jest niepewnością odzwierciedlającą niedokładność wartości wielkości zmierzonej. Analiza niepewności pomiarów jest bardzo istotnym etapem każdego eksperymentu zarówno w fazie jego projektowania, wykonywania jak i opracowywania uzyskanych wyników. W tym rozdziale przedstawimy podstawowe pojęcia związane z analizą niepewności pomiarów oraz przedstawimy najczęściej stosowane metody określania tych niepewności.

### 2.1. Pojęcia podstawowe

W roku 1995 uzgodniono nowe międzynarodowe normy [1–4, 6, 7] dotyczące terminologii i zasad wyznaczania niepewności pomiarowych, których statut prawny jest taki sam, jak uregulowań dotyczących SI.

**Wynikiem pomiaru** nazywamy wartość  $x$  przypisaną wielkości fizycznej  $X$  uzyskaną drogą pomiaru.

**Niepewność pomiaru** jest miarą (związaną z wynikiem pomiaru) charakteryzującą rozrzut wyników pomiarów. Pod tym pojęciem rozumiemy miarę niedokładności, z jaką zmierzono daną wielkość fizyczną. Innymi słowy, niepewność pomiaru oznacza ilościową miarę naszej niepewności lub wątpliwości co do wartości wyniku pomiaru danej wielkości fizycznej.

Niepewność pomiaru ma wiele przyczyn. Do najważniejszych zaliczamy [6, 7]:

- a) Niepełną definicję wielkości mierzonej (określenie danej wielkości fizycznej jest tymczasowe w tym sensie, że może ulec zmianie wraz z rozwojem nauki).
- b) Niedokładną realizację tej definicji (przyrząd, miernik, wzorzec nie jest idealną realizacją definicji wielkości fizycznej, np. temperaturę określamy jako część temperatury punktu potrójnego wody, ale nie istnieje idealnie czysta woda, pozbawiona jakichkolwiek domieszek; podobnie wzorzec czasu jest ściśle związany z prędkością światła, więc udokładnienie pomiaru prędkości światła wpłynie zapewne na wzorzec czasu).
- c) Niereprezentatywność serii wyników pomiarów (np. zbyt mała liczba pomiarów).
- d) Niedokładną znajomość czynników zewnętrznych (np. wpływu otoczenia na przebieg pomiarów) lub ich niedokładny pomiar.

- e) Błędy popełniane przez obserwatora podczas odczytów wskazań przyrządów analogowych.
- f) Skończoną zdolność rozdzielczą stosowanych w pomiarach przyrządów.
- g) Niedokładność stosowanych wzorców i materiałów odniesienia.
- h) Niedokładne wartości stałych lub parametrów pochodzących z innych źródeł.
- i) Przybliżenia i założenia upraszczające przyjęte w pomiarach lub procedurze pomiarowej.
- j) Zmiany kolejnych wyników pomiarów wielkości mierzonej w pozornie identycznych warunkach.

Miarą niepewności może być np. odchylenie standardowe (patrz rozdział 2.2), połowa przedziału ufności odpowiadającego określonej poziomowi ufności (patrz rozdział 2.3.1) lub niepewność wynikająca z klasy przyrządu pomiarowego (patrz rozdział 2.3.2). Niepewność pomiarów zawiera na ogół wiele składników. Niektóre z nich wyznaczamy na podstawie statystycznej analizy wyników serii pomiarów (patrz rozdział 2.2), inne obliczamy korzystając z dodatkowych informacji oraz doświadczenia nabytego przez osobę wykonującą eksperymenty.

Zakładamy, że wynik pomiaru stanowi najlepsze w danych warunkach eksperymentalnych oszacowanie wartości wielkości mierzonej, a wszystkie składniki niepewności pomiaru wnoszą swój udział do rozrzutu uzyskanych wyników pomiarów.

**Niepewnością standardową** nazywamy niepewność wyrażoną poprzez odchylenie standardowe  $s$  (patrz rozdz. 2.2).

**Błędem pomiaru** nazywamy różnicę  $\delta$  między wynikiem pomiaru  $x$  a wartością rzeczywistą  $\mu_{rz}$  wielkości mierzonej:

$$\delta = x - \mu_{rz}. \quad (2.1)$$

Z uwagi na to, że wartość rzeczywista  $\mu_{rz}$  nie jest znana dokładnie zamiast niej stosuje się jej ocenę uzyskaną na podstawie wyników pomiarów. Zakładamy przy tym [8], że wartość prawdziwa  $\mu_{rz}$  istnieje i pozostaje stała podczas pomiarów, a wynik pomiaru stanowi jedynie oszacowanie mierzonej wartości, której prawdziwa wartość pozostaje nieznana. W przypadku skończonej serii pomiarów prostych za ocenę wartości rzeczywistej przyjmuje się średnią arytmetyczną  $\bar{x}$  (patrz rozdz. 2.2).

**Błędem przypadkowym**  $\delta_{p\infty}$  nazywamy różnicę między wynikiem pomiaru  $x$  a wartością średnią z dużej liczby pomiarów oznaczoną symbolem  $\bar{x}_{\infty}$

$$\delta_{p\infty} = x - \bar{x}_{\infty}$$

**Niepewnością przypadkową** nazywamy różnicę między wynikiem pomiaru  $x$  a wartością średnią  $\bar{x}$  z serii pomiarów (próby)

$$\delta_p = x - \bar{x}$$

Powtarzając wielokrotnie pomiar wielkości fizycznej uzyskujemy różne wyniki. Jeżeli wyniki pomiarów obciążone są tylko błędami przypadkowymi, to rozkładają się one wokół wartości rzeczywistej  $\mu_{rz}$ , a ich rozrzut charakteryzuje dokładność pomiaru.

**Niepewności przypadkowe mogą wynikać z własności badanego obiektu.** Przypuśćmy, że mierzymy wielokrotnie średnicę drutu. Średnica ta może być różna w różnych miejscach, a ponadto przekrój drutu może nie być kołowy.

**Niepewności przypadkowe mogą być cechą przyrządu pomiarowego, być wynikiem wpływu losowo zmieniających się czynników zewnętrznych na działanie przyrządu pomiarowego lub zachowanie się obiektu mierzonego.** Niepewności przypadkowe mogą być również powodowane przez eksperymentatora, np. przez różnice w docisku śruby mikrometrycznej, ustawienie śruby pod pewnym kątem do osi drutu w przykładzie omawianym wcześniej.

**Niepewności przypadkowe odgrywają bardzo istotną rolę w pomiarach subiektywnych,** to jest w pomiarach, podczas których „czujnikiem” jest eksperymentator. Przykładami takich pomiarów są pomiary czasu za pomocą stopera, w których wynik jest uzależniony od czasu reakcji eksperymentatora, pomiary optyczne, w których należy stwierdzić jednakowe oświetlenie dwóch sąsiadujących ze sobą obszarów (pomiary efektu Faradaya, pomiary sacharymetrem lub fotometrem), ostrość obrazu (pomiary ogniskowych soczewek oraz pomiary mikroskopowe), ostrości plamki na ekranie oscyloskopu (pomiar stosunku  $e/m$  elektronu), jednakową barwę, zanik prądu w metodach mostkowych i kompensacyjnych.

**Niepewności przypadkowych nie można uniknąć,** można je jednak oszacować wykorzystując metody statystyki matematycznej.

**Błędem systematycznym** nazywamy różnicę między średnią  $\bar{x}_\infty$  z nieskończonej serii pomiarów wykonanych w warunkach powtarzalności a wartością rzeczywistą  $\mu_{rz}$  wielkości mierzonej

$$\Delta = \bar{x}_\infty - \mu_{rz}. \quad (2.4)$$

Błędy systematyczne wynikają ze złej jakości lub rozregulowania przyrządów pomiarowych, niewłaściwej metody pomiaru lub wpływu czynników zewnętrznych na wyniki pomiarów. Przykładem może być pomiar długości za pomocą metalowej linijki lub taśmy mierniczej, na którą naniesiono skalę w temperaturze znacznie odbiegającej od temperatury, w której odbywa się pomiar (linijka zmienia swoją długość pod wpływem zmian temperatury). Innym przykładem błędu systematycznego jest zaniedbanie siły wyporu działającej na ciało w powietrzu podczas ważenia. Błędy systematyczne, spowodowane określoną przyczyną, mają ten sam znak.

**Eliminacja błędów systematycznych** jest bardzo trudna i wymaga starannej analizy warunków pomiaru oraz doboru odpowiednich przyrządów pomiarowych. Błędy systematyczne możemy zmniejszyć wprowadzając (jeżeli jest to możliwe) odpowiednie poprawki.

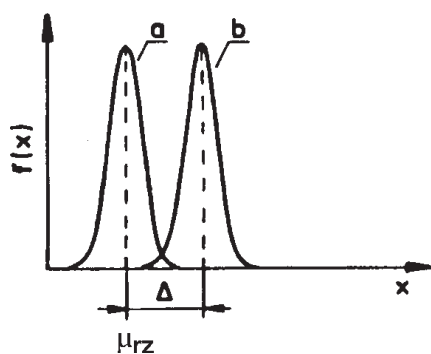
Przykładem niech będzie pomiar czasu zawodników biegnących na 100 m. Niech precyzyjny stoper elektroniczny będzie uruchamiany za pomocą czujnika akustycznego umieszczonego na linii mety. Czujnik reaguje na wystrzał startera, który stoi obok linii startu. Zatrzymanie stopera odbywa się za pomocą fotokomórki. Czas potrzebny na to aby dźwięk dotarł do mety wynosi około 0,3 s. Czas zmierzony przez taki układ pomiarowy będzie więc zaniżony.

W poprawnie zaprojektowanym układzie pomiarowym czujnik akustyczny powinien być umieszczony obok linii startu. Czas przejścia impulsu elektrycznego (rozchodzącego się z prędkością światła) od linii startu do mety jest do zaniedbania. Gdybyśmy jednak mierzyli prędkość cząstki poruszającej się z prędkością zbliżoną do prędkości światła, to zaniedbanie czasu przejścia sygnału elektrycznego byłoby błędem dyskwalifikującym uzyskany wynik.

Błędy pomiaru  $\delta$ , błędy przypadkowe  $\delta_{p\infty}$  oraz błędy systematyczne  $\Delta$  spełniają następującą relację:

$$\delta = x - \mu_{rz} = x - \bar{x}_{\infty} + \bar{x}_{\infty} - \mu_{rz} = \delta_{p\infty} + \Delta \quad (2.5)$$

Z relacji  $x = \mu_{rz} + \Delta + \delta_{p\infty}$  wynika, że rezultaty pomiarów obarczonych błędem systematycznym  $\Delta$  rozkładają się wokół wartości przesuniętej o  $\Delta$  względem wartości rzeczywistej. Krzywa *a* na rys. 2.1 przedstawia gęstość prawdopodobieństwa (patrz rozdziały 2.2.3 i 2.2.4) wyników pomiarów obarczonych tylko błędami (niepewnościami) przypadkowymi. Funkcja ta osiąga maksimum dla wartości  $x = \mu_{rz}$ . Krzywa *b* przedstawia funkcję rozkładu wyników obarczonych błędem systematycznym  $\Delta$  oraz niepewnościami przypadkowymi.



Rys. 2.1. Krzywe rozkładu wyników pomiarów: a – obarczonych tylko niepewnościami przypadkowymi, b – niepewnościami przypadkowymi oraz błędem systematycznym  $\Delta$ ,  $\mu_{rz}$  – rzeczywista wartość wielkości mierzonej

W praktyce laboratoryjnej spotykamy czasami **błędy grube**, które powstają zazwyczaj wskutek pomyłki eksperymentatora. Poniżej omówimy kilka przykładów błędów grubych.

### Przykłady

Mierząc średnicę drutu śrubą mikrometryczną uzyskano wynik 2,34 mm, a zanotowano 2,34 m; podczas pomiaru wielkości złożonej korzystano z kilku mierników i zamiast wskazań amperomierza zanotowano odczyt ze stopera (takie pomyłki też się zdarzają). Błędy grube mogą być spowodowane również zastosowaniem nieodpowiedniej metody pomiarowej. Wyobraźmy sobie pomiar średnicy nitki wykonaną



nej z wełny za pomocą śruby mikrometrycznej. Przyrząd pomiarowy, którym dysponujemy, jest bardzo dokładny, odczyt jest prawidłowy, a uzyskane wyniki są bezwartościowe!

Zabawną ilustracją błędu grubego jest „Ballada o północy” pióra Andrzeja Waligórskiego, którą zamieszczamy dzięki życzliwości i za zgodą żony autora.

## ***Ballada o północy***

***Andrzej Waligórski***

*Pradawnym czasom hołd i cześć,  
Tyle w nich krzepkiej mocy!  
Miał porwać dziewczkę Dreptak–kneź  
W godzinę po północy.  
Więc ubrał się w żelazny złom  
I siadł w kozackie czółno  
I na zegarek spojrzął on,  
A ten wskazywał północ!  
Zepchnęli łódź na rwący prąd  
Kneziowi dwa wasale  
I oto kneź opuścił ląd  
I puścił się na fale.  
I dzielnie z nurtem walczył chwyt,  
Aż dnem o piasek szurnął,  
i spojrzął znów na cyferblat,  
A tam znów była północ...  
Lecz oto zarżał w krzakach koń  
Ukryty tam przemysłnie –  
Kneź skoczył, chwycił cugle w dłoń  
I cwałem jak nie pryśnie!*

*I pędził tak przez dłuższy czas,  
Bo drogę miał okólną,  
A kiedy wreszcie z konia zlaźł  
Zegar wskazywał północ...  
Gdy zaś u zamku stanął bram,  
By porwać swą dzierlatkę,  
Nie zastał wcale panny tam,  
Tylko niedużą kartkę:  
**„Przemarzałam i chce mi się jeść,  
Znajdź sobie inną durną  
Panie spóźnialski! Buźka, cześć!”**  
Kneź spojrzął – znowu północ.  
Zaryczał Dreptak niczym lew  
Lub jak armatni wystrzał  
I pomknął tam, gdzie widniał sklep  
Starego zegarmistrza.  
I wszedł i stanął chrobry mąż  
I pośród łez wyjąkał:  
– **Dlaczego u mnie północ wciąż?**  
– **Bo to – rzekł mistrz – jest kompas...***

Jeśli przytrafi się popełnić błędy grube, zazwyczaj łatwo jest je zauważyć. Uwzględnienie wyniku pomiaru obarczonego błędem grubym prowadzi do absurdalnych, a przez to łatwo zauważalnych wyników. **Rezultaty pomiarów obarczonych błędami grubymi należy odrzucić, a pomiary powtórzyć.**

Jak już wspomniano, głównymi celami analizy niepewności pomiarów są: określenie najlepszej w danych warunkach eksperymentalnych oceny wartości rzeczywistej oraz obliczenie niepewności pomiarów. Zadania te realizujemy:

- Za pomocą statystycznej analizy serii wyników pomiarów; ten sposób nosi w literaturze źródłowej [1–4, 6, 7, 9–14] nazwę oceny niepewności metodą A.



- Wykorzystując dodatkowe niestatystyczne informacje np. wielkość działki elementarnej przyrządu lub klasę przyrządu; ten sposób nosi w literaturze przedmiotu [1–4, 6–9]) nazwę oceny niepewności metodą B.

Statystyczne szacowanie niepewności pomiarów oparte jest na metodach rachunku prawdopodobieństwa oraz statystyki matematycznej [5]. Ten sposób szacowania jest powszechnie wykorzystywany w laboratorium studenckim dlatego zostanie omówiony w dalszej części podręcznika.

W drugiej metodzie wykorzystuje się wszelkie dostępne informacje o czynnikach wpływających na niepewności pomiarów np. dane z poprzednich pomiarów, posiadane doświadczenie, znajomość zjawisk towarzyszących pomiarowi, własności przyrządów pomiarowych i badanych materiałów lub obiektów, informacje podane przez producenta itd. Ten sposób szacowania niepewności jest trudniejszy i wymaga znacznego doświadczenia, z tego względu nie jest stosowany w laboratorium studenckim. Zainteresowanym niestatystycznymi metodami szacowania niepewności pomiarów polecamy pozycje [1–8]) podane w spisie literatury.

## 2.2. Statystyczna analiza wyników i niepewność pomiarów

Obecnie udzielimy odpowiedzi na postawione wcześniej pytania: Jak wyznaczyć wartość wielkości zmierzonej, która jest dobrym oszacowaniem wartości dokładnej  $\mu_{rz}$ ? Jak oszacować dokładność pomiarów na podstawie skończonej serii pomiarów?

W statystycznej metodzie oceny niepewności pomiarowych zakłada się, że mierzona wielkość  $X$  jest zmienną losową, a wyniki  $\{x_1, \dots, x_n\}$  jej  $n$ -krotnego pomiaru traktuje się jako  $n$ -elementową, skończoną próbę (skończoną serię) z nieskończonej serii pomiarów, którą tworzą wszystkie możliwe do otrzymania wyniki pomiarów. Do tak zdefiniowanej skończonej próby stosuje się metody rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej [1–5]. Przyjęcie takiego założenia oznacza, że wielkość fizyczna  $X$  przyjmuje każdą ze zmierzonych wartości  $\{x_1, \dots, x_n\}$  z prawdopodobieństwami odpowiednio  $p_1, \dots, p_n$ .

Przypadek, gdy wielkość fizyczna  $X$  ma ciągły zbiór wartości jest nieco trudniejszy i będzie omówiony w rozdziałach 2.2.3–2.2.11.

### 2.2.1. Średnia arytmetyczna, wariancja i odchylenie standardowe z próby

Przypuśćmy, że  $n$ -krotnie powtórzyliśmy pewien pomiar (w jednakowych stabilnych warunkach) i otrzymaliśmy serię rezultatów, które oznaczmy symbolami  $x_1, \dots, x_n$  i nazwiemy próbą. Będziemy zajmować się tylko takimi pomiarami, których wyniki nie są identyczne. Ich nieidentyczność może mieć wielorakie przyczyny – niedoskonałość przyrządu pomiarowego, losowo zmieniające się czynniki zewnętrzne

działające na przyrząd, niestabilność układu (inne przyczyny są wymienione w poprzednim rozdziale). Podczas pomiarów, w których „czujnikiem” jest eksperymentator, jedną z przyczyn otrzymania różnych wyników może być zmienny czas reakcji lub subiektywne odczucie eksperymentatora. Podane tutaj przyczyny uzasadniają przyjęcie przez nas założenia o tym, że mierzona wielkość fizyczna jest zmienną losową.

Wielkość rozrzutu wyników pomiarów wokół rzeczywistej wartości mierzonej zależy od sposobu ich wykonania. Im dokładniejszy jest przyrząd pomiarowy i im więcej czynników wpływających na wyniki pomiaru będzie kontrolować eksperymentator, tym mniej będą się one różnić między sobą.

Do opisu zbioru wyników pomiarów używa się następujących charakterystyk liczbowych (zwanych także wskaźnikami):

- średniej arytmetycznej

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (2.6)$$

wokół której leżą wyniki pojedynczych pomiarów,

- wariancji (dokładniej – wariancji z próby)

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2] = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad (2.7)$$

która jest miarą (jedną z wielu) niepewności pomiaru (rozrzutu) pojedynczych pomiarów wokół średniej arytmetycznej  $\bar{x}$ ,

- odchylenia standardowego pojedynczego pomiaru (dokładniej odchylenia standardowego pojedynczego pomiaru z próby)

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (2.8)$$

Poza wymienionymi tutaj wskaźnikami używa się jeszcze wiele innych, np. medianę, kwartyle, skośność i kurtozę (zostały one przedstawione w podręczniku [5]).

Miarami niepewności średniej arytmetycznej  $\bar{x}$  są następujące ilorazy:

$$s_{\bar{x}}^2 = \frac{s_x^2}{n} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (2.9)$$

oraz

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (2.10)$$

Liczbę  $s_x^2$  nazywamy wariancją (z próby), a liczbę  $s_{\bar{x}}$  odchyleniem standardowym (z próby) średniej arytmetycznej  $\bar{x}$ .

Aby obliczyć podane wskaźniki charakteryzujące wyniki pomiarów, posługujemy się kalkulatorami lub komputerem. Prawie wszystkie kalkulatory obliczają sumy  $\sum x_i$  i sumy kwadratów  $\sum x_i^2$ , a mając te wielkości, możemy obliczyć wariancję  $s_x^2$  w prosty sposób z następującego wzoru:

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \left[ \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{n} \right]. \quad (2.11)$$

### Przykład 1

Zmierzono 10 razy średnicę drutu. Wyniki pomiarów zestawione są w drugiej kolumnie tabeli 2.1. Należy obliczyć średnią arytmetyczną  $\bar{x}$ , wariancję  $s_x^2$ , odchylenie standardowe  $s_x$  oraz odchylenie standardowe  $s_{\bar{x}}$  średniej arytmetycznej  $\bar{x}$ . Jeśli dysponujemy kalkulatorem obliczamy najpierw sumę  $1,78 + 1,82 + \dots + 1,78 = 17,99$  oraz sumę kwadratów  $1,78^2 + 1,82^2 + \dots + 1,78^2 = 32,3657$  (patrz tabela 2.1). Średnią arytmetyczną obliczamy według wzoru (2.6)

$$\bar{x} = \frac{17,99 \text{ mm}}{10} = 1,799 \text{ mm},$$

Tabela 2.1

$i$	$x_i$ [mm]	$x_i^2$ [mm <sup>2</sup> ]
1	1,78	3,1684
2	1,82	3,3124
3	1,80	3,2400
4	1,81	3,2761
5	1,79	3,2041
6	1,79	3,2041
7	1,81	3,2761
8	1,80	3,2400
9	1,81	3,2761
10	1,78	3,1684
	17,99	32,3657

wariancję według wzoru (2.11)

$$s_x^2 = \frac{1}{9} \left[ 32,3657 \text{ mm}^2 - \frac{(17,99 \text{ mm})^2}{10} \right] = 1,878 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^2.$$

Odchylenie standardowe (oznaczone liczbą  $s_x$ ) jest równe pierwiastkowi kwadratowemu z wariancji:

$$s_x = \sqrt{1,878 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^2}$$

a odchylenie standardowe  $s_{\bar{x}}$  średniej  $\bar{x}$  jest równe odchyleniu standardowemu  $s_x$  podzielonemu przez  $\sqrt{10}$

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{10}} = \frac{1,370 \cdot 10^{-2} \text{ mm}}{\sqrt{10}} = 0,433 \cdot 10^{-2} \text{ mm}.$$

### 2.2.2. Współczynnik korelacji (z próby)

Jeśli równocześnie mierzymy dwie wielkości fizyczne  $X$  i  $Y$ , to wyniki pomiarów zapisujemy w postaci par  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ . Do opisu takiej próby używa się, poza średnimi arytmetycznymi  $\bar{x}$  i  $\bar{y}$ , wariancjami  $s_x^2$  i  $s_y^2$  oraz odchyleniami standardowymi  $s_x$  i  $s_y$  obu mierzonych wielkości z osobna, wskaźnika określonego wzorem

$$r_{x,y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}. \quad (2.12)$$

Jeśli wprowadzimy oznaczenie

$$s_{x,y} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}), \quad (2.13)$$

to otrzymujemy bardziej zwartą postać tego wzoru

$$r_{x,y} = \frac{s_{x,y}}{s_x s_y}. \quad (2.14)$$

Aby obliczyć wyrażenie  $s_{x,y}$  występujące w liczniku, należy skorzystać ze wzoru

$$s_{x,y} = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{n \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n} \right). \quad (2.15)$$

W celu obliczenia  $s_x$  i  $s_y$  należy posłużyć się wzorem (2.11).

Współczynnik korelacji (lub – korelacja z próby), charakteryzuje liniową zależność pomiędzy wynikami dwu równocześnie wykonanych pomiarów. Zauważmy, że  $r_{x,y} = r_{y,x}$  oraz że  $r_{x,x} = 1$ . Można też udowodnić, że wartości tego współczynnika zawarte są w przedziale  $[-1, +1]$ . Jeśli przyjmuje on wartość 1, to wszystkie punkty  $(x_i, y_i)$  leżą na prostej tworzącej kąt ostry z osią  $OX$ , a jeśli  $-1$ , to kąt rozwarty. Małe wartości wskazują na to, że nie ma związku pomiędzy mierzonymi wielkościami.

Jeśli wykonujemy równocześnie więcej niż dwa pomiary, to możemy obliczyć współczynniki korelacji dla każdej pary.

### Przykład 2

W tabeli 2.2 podane są wyniki pięciokrotnych równoczesnych pomiarów napięcia  $V$  [V] i natężenia prądu  $I$  [mA] oraz kąta  $\varphi$  [rad].

Tabela 2.2

$i$	$V$ [V]	$I$ [mA]	$\varphi$ [rad]
1	5,0	1,6	1,045
2	4,9	1,4	1,043
3	5,0	1,7	1,046
4	4,9	1,5	1,042
5	4,8	1,6	1,045

Możemy obliczyć 3 współczynniki korelacji:  $r_{V,I}$ ,  $r_{V,\varphi}$  oraz  $r_{I,\varphi}$ .

Znaczne uproszczenie w rachunkach uzyskujemy, gdy wyniki obliczeń pomocniczych zapiszemy w odpowiedniej tabeli – dla pierwszego jak w tabeli 2.3.

Na podstawie wzorów (2.8) i (2.15) otrzymujemy

$$s_V^2 = \frac{1}{4} \left[ 121,06 - \frac{24,6^2}{5} \right] = 0,0070 \text{ V}^2$$

$$s_I^2 = \frac{1}{4} \left[ 12,22 - \frac{7,8^2}{5} \right] = 0,0130 \text{ mA}^2$$

Tabela 2.3

$V$	$I$	$V^2$	$I^2$	$VI$
5,0	1,6	25,00	2,56	8,00
4,9	1,4	24,01	1,96	6,80
5,0	1,7	25,00	2,89	8,50
4,9	1,5	24,01	2,25	7,35
4,8	1,6	23,04	2,56	7,68
24,6	7,8	121,06	12,22	38,39

oraz

$$s_{V,I} = \frac{1}{4} \left[ 38,39 - \frac{24,6 \cdot 7,8}{5} \right] = 0,0035 \text{ V} \cdot \text{mA}.$$

Po podstawieniu obliczonych wielkości do wzoru (2.14), znajdujemy

$$r_{V,I} = \frac{s_{V,I}}{s_V s_I} = \frac{0,0035 \text{ V} \cdot \text{mA}}{0,0837 \text{ V} \cdot 0,1140 \text{ mA}} = 0,3669.$$

Podobnie obliczamy pozostałe dwa współczynniki korelacji  $r_{V,\phi} = 0,3273$  oraz  $r_{I,\phi} = 0,8540$ . Zapisane w postaci macierzy

$$\begin{bmatrix} r_{V,V} & r_{V,I} & r_{V,\phi} \\ r_{I,V} & r_{I,I} & r_{I,\phi} \\ r_{\phi,V} & r_{\phi,I} & r_{\phi,\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,37 & 0,33 \\ 0,37 & 1 & 0,85 \\ 0,33 & 0,85 & 1 \end{bmatrix}$$

tworzą one tzw. macierz korelacji (z próby).

Wszystkie omówione tutaj wielkości – średnia arytmetyczna, wariancja, odchylenie standardowe i korelacja (z próby) mają pewną ważną własność, mianowicie, stabilizują<sup>1</sup> się wokół pewnych liczb, gdy liczba wykonanych pomiarów, na podstawie których je obliczono, rośnie. W tabeli 2.4 podano średnie arytmetyczne, odchy-

Tabela 2.4

$n$	10	20	100	200
$\bar{x}$	3,7138	3,7149	3,7173	3,7173
$s_x (\times 10^{-5})$	10,084	10,791	9,167	8,953
$s_{\bar{x}} (\times 10^{-5})$	3,189	2,413	0,917	0,633

<sup>1</sup>Użyte tutaj stwierdzenie *stabilizują się* należy rozumieć w sensie zmierzają do, dążą do.

lenia standardowe oraz odchylenia standardowe średniej dla  $n = 10, 20, 100$  i  $200$  pomiarów tej samej wielkości fizycznej wykonanych w stabilnych warunkach. Zwiększenie liczby pomiarów powinno tylko nieznacznie zmienić wartość średniej arytmetycznej  $\bar{x}$  i odchylenia standardowego  $s_x$  obliczonych na podstawie  $n = 200$  pomiarów. Natomiast odchylenie standardowe średniej  $s_{\bar{x}}$  będzie zbliżać się do zera wraz ze wzrostem wielkości próby.

### 2.2.3. Histogramy

Jeśli wyników pomiarów w próbie wielkości  $X$  jest wiele, wygodnie jest je pogrupować. W tym celu wyznaczamy najpierw najmniejszą  $x_{\min}$  oraz największą  $x_{\max}$  wartość zmierzoną, które określają przedział  $\langle x_{\min}, x_{\max} \rangle$ , w którym leżą wszystkie pozostałe wyniki pomiarów. Następnie dzielimy przedział  $\langle x_{\min}, x_{\max} \rangle$  na  $k > 1$  podprzedziałów (zazwyczaj o jednakowej długości) i znajdujemy liczby pomiarów należących do poszczególnych podprzedziałów. Liczbę  $k$  dobiera się tak, aby w każdym przedziale zawierało się kilkanaście pomiarów. Uzyskane wyniki przyjęto przedstawiać w tabeli (patrz tabela 2.5).

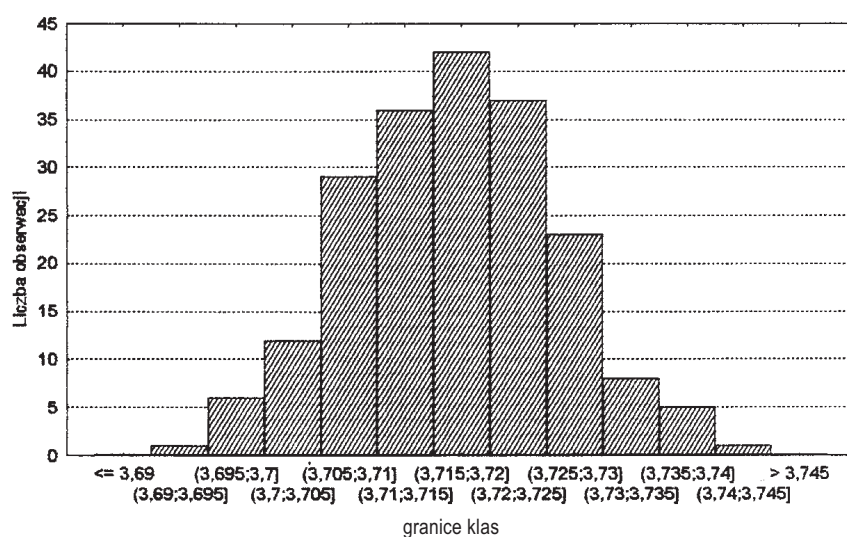
#### Przykład 3

W jednakowych warunkach zmierzono 200 razy czas opadania ciężarka, przy ustalonym momencie bezwładności, krzyża Oberbecka. Uzyskane wyniki pomiarów (przedstawione w całości w tabelach 20 i 21) pogrupowane w  $k = 11$  klasach (podprzedziałach) przedstawione są w tabeli 2.5. Liczby zawarte w trzeciej kolumnie, nazywane zaobserwowanymi częstościami tworzą tzw. szereg rozdzielczy, a w czwartej kolumnie – skumulowany szereg rozdzielczy.

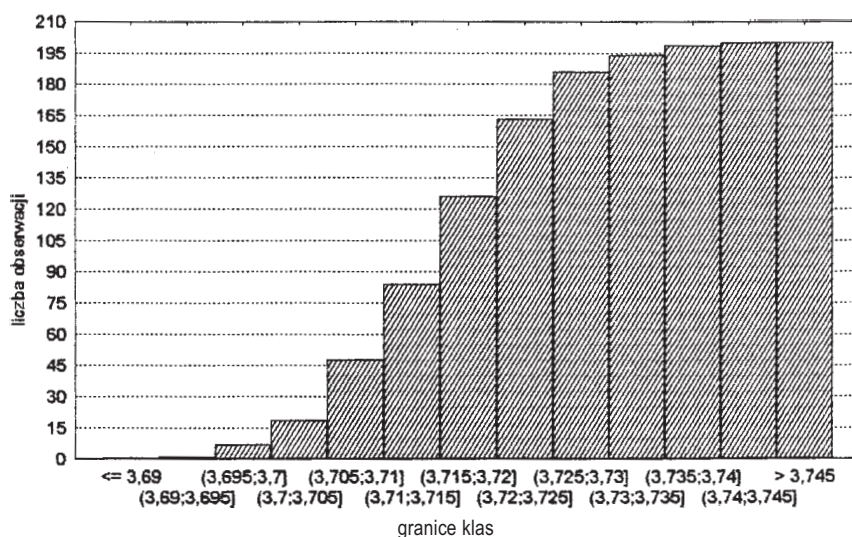
Tabela 2.5

	Górne granice klas	Częstości zaobserwowane	Częstości skumulowane
1	3,695	1	1
2	3,700	6	7
3	3,705	12	19
4	3,710	29	48
5	3,715	36	84
6	3,720	42	128
7	3,725	37	163
8	3,730	23	186
9	3,735	8	194
10	3,740	5	199
11	$+\infty$	1	200

Zazwyczaj częstości te przedstawia się graficznie w postaci histogramów (zwanych histogramami empirycznymi). Histogram częstości zaobserwowanych skonstruowany jest w ten sposób, że nad każdym przedziałem wykreślamy prostokąt o wysokości równej liczbie zawartych w nim obserwacji. Histogram częstości skumulowanych różni się od poprzedniego tylko tym, że wysokości prostokątów są równe skumulowanym częstościom. Rysunek 2.2 przedstawia histogram, a rys. 2.3 skumulowany histogram danych z tabeli 2.5.



Rys. 2.2. Histogram danych zawartych w tabeli 2.5



Rys. 2.3. Skumulowany histogram danych zawartych w tabeli 2.5



#### 2.2.4. Gęstość rozkładu prawdopodobieństwa

Histogramy mają podobną własność jak średnie arytmetyczne i wariancje z próby. Stabilizują się, jeśli liczba pomiarów wzrasta<sup>2</sup>. Ponadto, jeśli liczba różnych pod względem wartości pomiarów rośnie, to możemy zwiększać liczbę przedziałów, na które dzielimy przedział zawierający wszystkie obserwacje, a w konsekwencji otrzymywać coraz gładszy histogram. Funkcję, do której zbliża się histogram zaobserwowanych częstości (unormowany tak, aby suma pól wszystkich prostokątów była równa 1), nazywamy gęstością prawdopodobieństwa. Gęstością może być każda funkcja  $f(x)$  określona na zbiorze liczb rzeczywistych  $R$ , która spełnia następujące dwa warunki:

1.  $f(x) \geq 0$  dla wszystkich  $x \in R$ .

2. 
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1. \quad (2.16)$$

Jeśli wynik pomiaru mierzonej wielkości podlega rozkładowi o gęstości  $f(x)$ , to prawdopodobieństwo tego, że będzie on zawarty w przedziale  $(a, b)$  wyraża się całką

$$P((a, b)) = \int_a^b f(x) dx. \quad (2.17)$$

Geometrycznie prawdopodobieństwo  $P((a, b))$  przedstawia pole obszaru nad przedziałem  $(a, b)$  pod wykresem funkcji  $f(x)$ .

Jeśli  $x$  reprezentuje wynik pomiaru jaki uzyska eksperymentator, gdy wykona pomiar, to zamiast symbolu  $P((a, b))$ , oznaczającego prawdopodobieństwo, że znajdzie się on w przedziale  $(a, b)$ , będziemy pisać  $P(a < x < b)$ . Wzór (2.17) przyjmuje wówczas postać

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x') dx'. \quad (2.18)$$

Interpretacja częstościowa prawdopodobieństwa  $P(a < x < b)$  jest następująca: Jeśli wyniki pomiaru mierzonej wielkości podlegają rozkładowi o gęstości  $f(x)$  i jeśli wykonamy serię  $n$  niezależnych pomiarów, to oczekujemy, że w przybliżeniu  $P(a < X < b) \cdot 100\%$  wyników pomiarów wpadnie do przedziału  $(a, b)$ . Liczbę  $nP(a < X < b)$  nazywamy oczekiwaną liczbą obserwacji w przedziale  $(a, b)$  w próbie o liczebności  $n$ .

---

<sup>2</sup>Ponownie użyty zwrot *stabilizują się* oznacza, że przy wzroście liczby  $n$  pomiarów dążą one do granicznej funkcji zwanej gęstością prawdopodobieństwa.

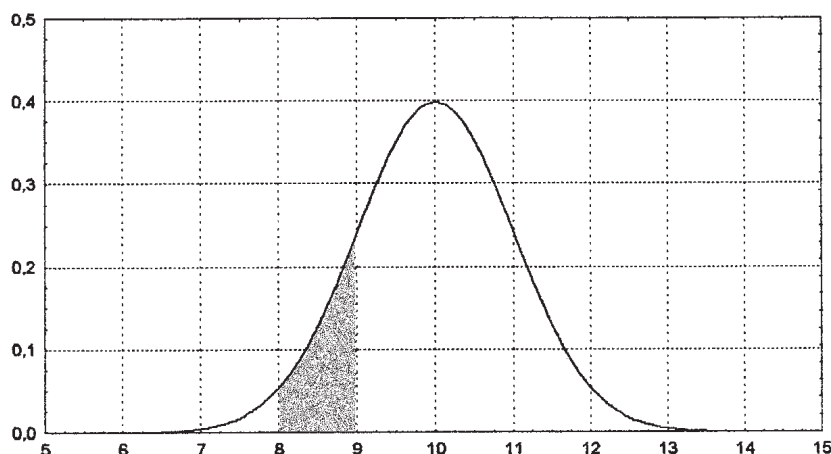
W bardzo wielu sytuacjach, jako gęstość prawdopodobieństwa można przyjąć funkcję Gaussa (zależną od dwóch parametrów  $\mu \in R$  i  $\sigma \in R^+$ ) określoną dla wszystkich liczb rzeczywistych  $x$  wzorem

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}. \quad (2.19)$$

Można pokazać, że spełnia ona warunki (2.16) dla podanych wartości parametrów  $\mu$  i  $\sigma$ . Maksimum, wynoszące  $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ , osiąga w punkcie  $x = \mu$ ; jest symetryczna względem prostej  $x = \mu$ , tzn.

$$f(\mu - \Delta x) = f(\mu + \Delta x) \quad (2.20)$$

dla wszystkich  $\Delta x > 0$ . Jeśli gęstość prawdopodobieństwa ma postać (2.19), to mówimy o rozkładzie normalnym. Oznacza się go symbolem  $N(\mu, \sigma^2)$ . Rysunek 2.4 przedstawia wykres gęstości prawdopodobieństwa rozkładu normalnego  $N(10, 1)$ . Zakreślone pole przedstawia prawdopodobieństwo pojawienia się wyniku obserwacji w przedziale (8,9).

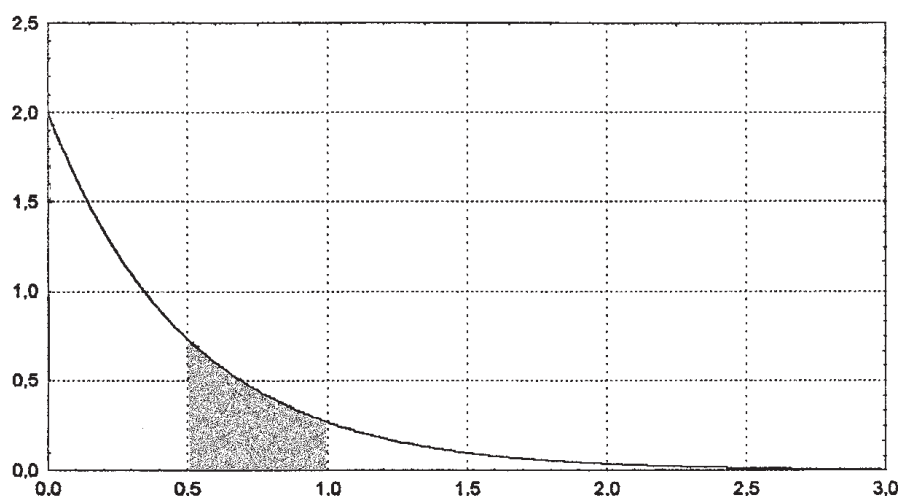


Rys. 2.4. Gęstość rozkładu normalnego  $N(10, 1)$

Często odpowiednim rozkładem prawdopodobieństwa jest też rozkład o gęstości postaci

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x), & \text{gdy } x > 0, \\ 0, & \text{gdy } x \leq 0, \end{cases} \quad (2.21)$$

gdzie  $\lambda > 0$  jest parametrem rozkładu. Rozkład ten nazywamy rozkładem wykładniczym i oznaczamy go symbolem  $E(\lambda)$ . Rysunek 2.5 przedstawia wykres gęstości prawdopodobieństwa rozkładu wykładniczego  $E(2)$ . Zakreślone pole przedstawia prawdopodobieństwo pojawienia się obserwacji w przedziale (0,5, 1).



Rys. 2.5. Gęstość rozkładu wykładniczego  $E(2)$

### 2.2.5. Wykres normalny

Rozkład normalny jest często bardzo dogodnym opisem wyników pomiarów. W związku z tym opracowano wiele metod, które wskazują, czy założenie o normalności możemy przyjąć. Jedną z nich jest metoda graficzna, polegająca na skonstruowaniu tzw. wykresu normalnego. Tworzą go punkty o współrzędnych

$$\left( x_{(i)}, \Phi^{-1}\left(\frac{3i-1}{3n+1}\right) \right), \quad (2.22)$$

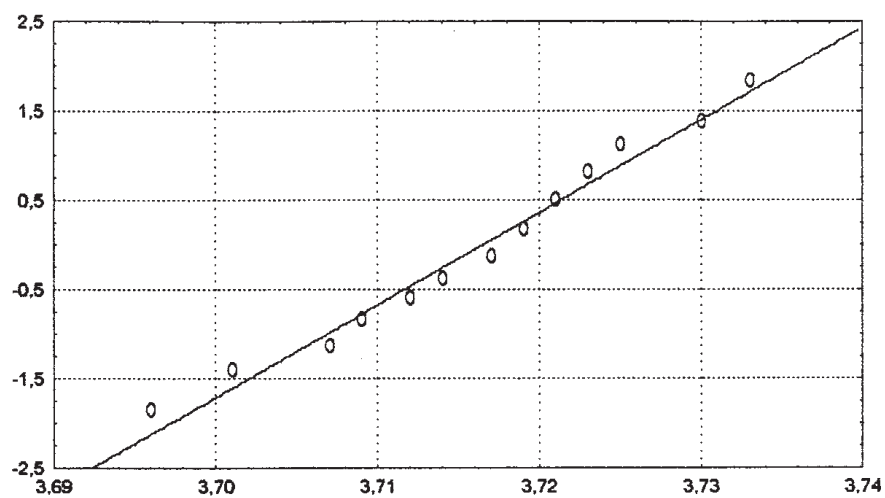
gdzie  $n$  jest wielkością próby, a  $x_{(i)}$  jest  $i$ -tą co do wielkości obserwacją w próbie. Symbol  $\Phi^{-1}$  oznacza funkcję odwrotną względem funkcji

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{1}{2}t^2\right\} dt, \quad x \in R. \quad (2.23)$$

Jeśli naniesione punkty nie układają się wzdłuż prostej, to przyjęcie założenia o normalności rozkładu nie jest wskazane.

#### Przykład 4

Na rysunku 2.6 podano wykres normalny punktów o współrzędnych (2.22) dla 20 pierwszych wyników pomiarów czasu opadania ciężarka krzyża Oberbecka zamieszczonych w tabelach 20 i 21. Wypisano je, po uporządkowaniu według wielkości, w drugiej kolumnie w tabeli 2.6. Ponieważ otrzymane punkty układają się wzdłuż prostej, założenie o normalności nie powinno budzić w tym przypadku wątpliwości.



Rys. 2.6. Wykres normalny pomiarów  $x_{(i)}$  zamieszczonych w tabeli 2.6

Tabela 2.6

$i$	$x_{(i)}$	$\Phi^{-1}\left(\frac{3i-1}{61}\right)$
1	3,696	-1,841
2	3,701	-1,392
3	3,707	-1,121
4	3,709	-0,914
5	3,709	-0,740
6	3,712	-0,587
7	3,714	-0,446
8	3,714	-0,313
9	3,717	-0,186
10	3,717	-0,062
11	3,719	0,062
12	3,719	0,186
13	3,719	0,313
14	3,721	0,446
15	3,721	0,587
16	3,723	0,740
17	3,723	0,914
18	3,725	1,121
19	3,730	1,392
20	3,733	1,841

Warto pamiętać o tym, że rozkład normalny stanowi tylko przybliżenie rozkładów, jakim podlegają wyniki pomiarów. Trudno na przykład wyobrazić sobie, aby wynik pomiaru odległości był ujemny, gdy tymczasem konsekwencją każdego rozkładu normalnego jest dodatnie prawdopodobieństwo pojawienia się wyniku pomiaru z przedziału  $(-\infty, 0)$ . Prawdopodobieństwo to jest jednakże zazwyczaj tak małe, że można je zignorować.

### 2.2.6. Wartość średnia i wariancja

Jeśli unormowany histogram pomiarów stabilizuje się wokół gęstości prawdopodobieństwa  $f(x)$ , to:

- średnia arytmetyczna  $\bar{x}$  tych pomiarów stabilizuje się wokół liczby określonej przez całkę

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x' f(x') dx', \quad (2.24)$$

zwaną wartością średnią,

- wariancja (z próby)  $s^2$  stabilizuje się wokół liczby określonej przez całkę

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x' - \mu)^2 f(x') dx', \quad (2.25)$$

zwaną wariancją,

- odchylenie standardowe (z próby)  $s$  stabilizuje się wokół pierwiastka kwadratowego z wariancji  $\sigma$ , zwanego odchyleniem standardowym.  
Zakładamy, że obie całki (2.24) i (2.25) istnieją.

Za ocenę wartości średniej  $\mu$  możemy więc przyjąć średnią arytmetyczną  $\bar{x}$ , za ocenę wariancji  $\sigma^2$ , wariancję (z próby)  $s^2$ , a za ocenę odchylenia standardowego  $\sigma$ , odchylenie standardowe (z próby)  $s$ . Im większa będzie liczba pomiarów, tym dokładniejsze będą te oceny. Wynika to z podanych własności wartości średniej i wariancji.

Jeśli obliczymy całki (2.24) i (2.25) dla gęstości rozkładu normalnego  $N(\mu, \sigma^2)$ , to okaże się, że wartością średnią tego rozkładu jest parametr  $\mu$ , a wariancją parametr  $\sigma^2$  (tłumaczy to użyte oznaczenia). Natomiast wartość średnia i wariancja w rozkładzie wykładniczym  $E(\lambda)$  są odpowiednio równe  $\mu = 1/\lambda$  i  $\sigma^2 = 1/\lambda^2$ .

### 2.2.7. Dystrybuanta rozkładu prawdopodobieństwa

Jeśli założymy, że wynik pomiaru mierzonej wielkości podlega rozkładowi normalnemu, możemy obliczyć wielkości przydatne do charakteryzowania niepewności otrzymanego wyniku pomiaru. Potrzebne będą do tego pewne nowe pojęcia i wzory, z którymi się teraz zapoznamy.

Funkcję rzeczywistą określoną dla każdego  $x \in R$  wzorem

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt, \quad (2.26)$$

gdzie  $f(x)$  jest gęstością prawdopodobieństwa, nazywamy dystrybuantą. Z własności (2.16) gęstości prawdopodobieństwa wynika, że

1.  $0 \leq F(x) \leq 1$ .
  2.  $F(x)$  jest funkcją niemalejącą.
  3.  $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$ .
- (2.27)

Wartością dystrybuanty  $F(x)$  w punkcie  $x \in R$  jest prawdopodobieństwo otrzymania wyniku pomiaru należącego do przedziału  $(-\infty, x)$ . Prawdopodobieństwo, że wynik pomiaru  $x$  znajdzie się w przedziale  $(a, b)$ , możemy za pomocą dystrybuanty zapisać w następującej postaci

$$P(a < x < b) = F(b) - F(a). \quad (2.28)$$

Jeśli histogram zaobserwowanych częstości stabilizuje się po unormowaniu wokół gęstości prawdopodobieństwa  $f(x)$ , to histogram skumulowanych częstości stabilizuje się wokół dystrybuanty  $F(x)$  określonej wzorem (2.26).

Dystrybuanta rozkładu normalnego  $N(\mu, \sigma^2)$  wyraża się wzorem

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(t-\mu)^2\right\}dt, \quad (2.29)$$

a dystrybuanta rozkładu wykładniczego wzorem

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \leq 0, \\ 1 - \exp(-\lambda x), & \text{gdy } x > 0. \end{cases} \quad (2.30)$$

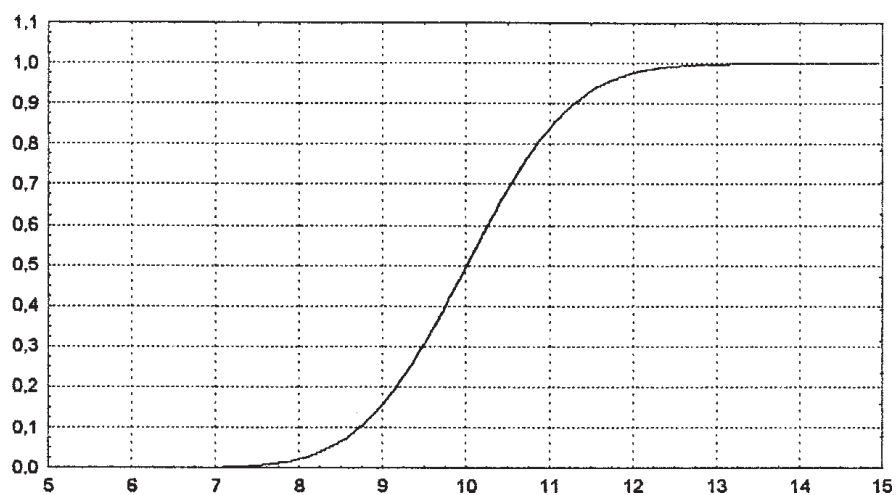
Wykres dystrybuanty rozkładu normalnego  $N(10, 1)$  przedstawiono na rys. 2.7, a rozkładu wykładniczego  $E(2)$  na rys. 2.8.

### 2.2.8. Standaryzowany rozkład normalny

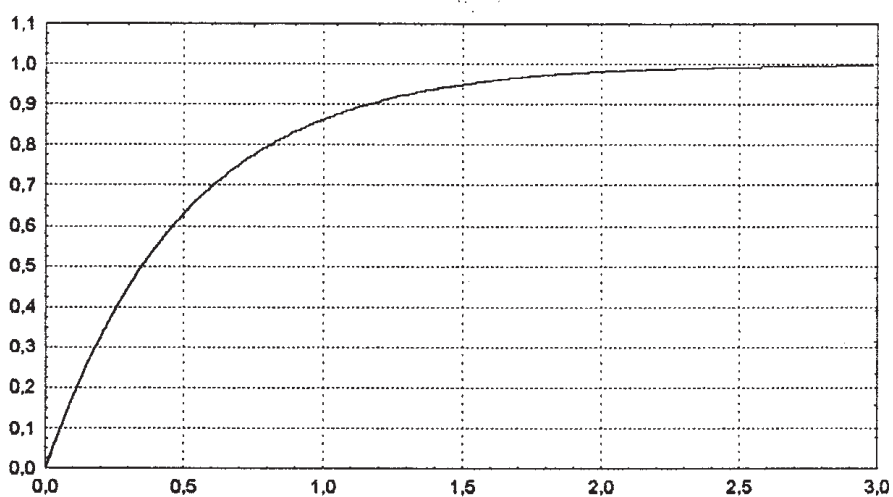
Rozkład normalny z parametrem  $\mu = 0$  oraz parametrem  $\sigma = 1$ , czyli rozkład  $N(0, 1)$ , nazywamy standaryzowanym rozkładem normalnym. Gęstość standaryzowanego rozkładu normalnego (oznaczana symbolem  $\phi(x)$ ) ma postać

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}x^2\right\} \quad (2.31)$$

a dystrybuanta (oznaczana symbolem  $\Phi(x)$ ) postać



Rys. 2.7. Dystrybuanta rozkładu normalnego  $N(10, 1)$



Rys. 2.8. Dystrybuanta rozkładu wykładniczego  $E(2)$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{1}{2}t^2\right\} dt \quad (2.32)$$

Z symetrii wynika, że  $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$ , a stąd

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x). \quad (2.33)$$

Jeśli wyniki  $x$  pomiaru  $X$  podlegają rozkładowi normalnemu  $N(\mu, \sigma^2)$ , to unormowane wyniki pomiaru

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad (2.34)$$

podlegają rozkładowi normalnemu  $N(0,1)$ .

Jeśli  $F(x)$  jest dystrybuantą dowolnego rozkładu normalnego  $N(\mu, \sigma^2)$ , to łatwo pokazać, że

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right). \quad (2.35)$$

Jeśli dysponujemy algorytmem obliczającym wartości dystrybuanty standaryzowanego rozkładu normalnego lub tablicami jej wartości, to korzystając ze wzoru (2.35) możemy w prosty sposób obliczyć wartości dystrybuanty dowolnego rozkładu normalnego. Wartości dystrybuanty standaryzowanego rozkładu normalnego podane są w tabeli 2 dodatku.

#### **Przykład 5** (cd. przykładu 3)

W przykładzie 3 został skonstruowany histogram i skumulowany histogram 200 wyników pomiarów pogrupowanych w 11 klasach (tabela 2.5). Otrzymany histogram (rys. 2.2) sugeruje, że wyniki pomiarów mogą podlegać rozkładowi normalnemu. Aby znaleźć najlepiej dopasowaną do niego gęstość rozkładu normalnego, za ocenę wartości średniej  $\mu$  przyjmujemy średnią arytmetyczną  $\bar{x} = 3,717$  (dokładniejsza wartość  $\bar{x} = 3,717395$ ), a za ocenę odchylenia standardowego  $\sigma$  – odchylenie standardowe (z próby)  $s = 0,009111$ . Wykres gęstości normalnej z takimi parametrami został nałożony na histogram, a wykres dystrybuanty, też z takimi parametrami, na skumulowany histogram (patrz rys. 2.9 i rys. 2.10).

Aby przekonać się, jak dobrze rozkład normalny z wartością średnią  $\bar{x} = 3,717$  i odchyleniem standardowym  $s = 0,009111$  pasuje do wyników pomiarów, powinno się też obliczyć odpowiednie oczekiwane częstości dla każdej z 11 dobranych klas. Oczekiwaną liczbę obserwacji w dowolnym przedziale  $(a, b]$  obliczamy według wzoru

$$200P((a, b)) = 200 \left[ \Phi\left(\frac{b - 3,717}{0,009111}\right) - \Phi\left(\frac{a - 3,717}{0,009111}\right) \right].$$

Na przykład, jeśli  $a = 3,720$  oraz  $b = 3,725$ , to

$$\begin{aligned} 200 \left[ \Phi\left(\frac{3,725 - 3,717}{0,009111}\right) - \Phi\left(\frac{3,720 - 3,717}{0,009111}\right) \right] &= 200[\Phi(0,835) - \Phi(0,26)] \\ &= 200[0,798 - 0,613] = 200 \cdot 0,186 = 37,105 \end{aligned}$$

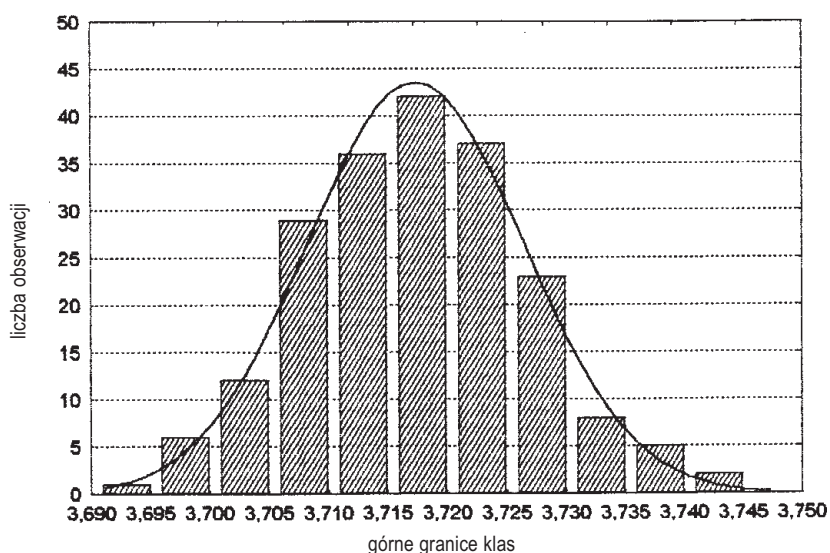


jest oczekiwaną liczbą pomiarów w przedziale (3,720, 3,725]. Oczekiwane częstości i oczekiwane skumulowane częstości zapisano w dwóch ostatnich kolumnach w tabeli 2.7.

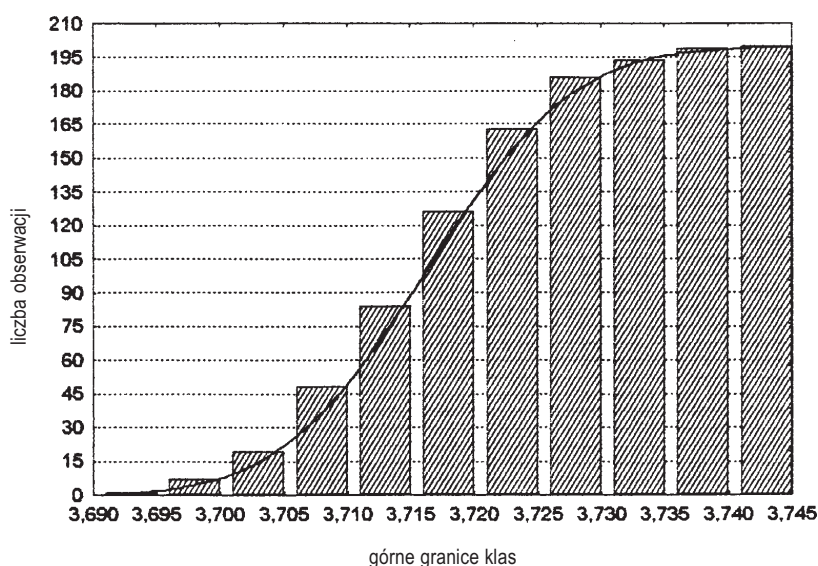
Zarówno wykres normalny przedstawiony na rys. 2.6 jak i tabela 2.7 wskazują na to, że wyniki pomiarów czasu opadania ciężarka krzyża Oberbecka podlegają rozkładowi normalnemu.

Tabela 2.7

	Górna granica klasy	Częstość zaobserwowana	Częstość skumulowana zaobserwowana	Częstość oczekiwana	Częstość skumulowana oczekiwana
1	3,695	1	1	1,40	1,40
2	3,700	6	7	4,23	5,62
3	3,705	12	19	11,75	17,37
4	3,710	29	48	24,33	41,70
5	3,715	36	84	37,57	79,27
6	3,720	42	126	43,24	122,51
7	3,725	37	163	37,11	159,61
8	3,730	23	186	23,74	183,35
9	3,735	8	194	11,32	194,67
10	3,740	5	199	4,02	198,69
11	$+\infty$	1	200	1,31	200,00



Rys. 2.9. Histogram danych z tabeli 2.5 wraz z gęstością dopasowania rozkładu normalnego



Rys. 2.10. Skumulowany histogram danych z tabeli 2.5 wraz z dystrybucją dopasowanego rozkładu normalnego

### 2.2.9. Obliczanie prawdopodobieństw $P(\mu - k\sigma, \mu + k\sigma)$ dla rozkładu normalnego

Jeśli w eksperymencie wyniki pomiarów podlegają rozkładowi normalnemu  $N(\mu, \sigma^2)$ , to prawdopodobieństwo tego, że pojedynczy wynik pomiaru  $X$  znajdzie się w przedziale  $(\mu - k\sigma, \mu + k\sigma)$ , gdzie  $k > 0$ , obliczamy korzystając ze wzorów (2.33) i (2.35), w następujący sposób:

$$\begin{aligned} P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) &= F(\mu + k\sigma) - F(\mu - k\sigma) \\ &= \Phi\left(\frac{\mu + k\sigma - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - k\sigma - \mu}{\sigma}\right) = 2\Phi(k) - 1. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Z (2.36) i z tabeli 2 przedstawionej w dodatku otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} P((\mu - \sigma, \mu + \sigma)) &= 0,6827, \\ P((\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)) &= 0,9545, \\ P((\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)) &= 0,9973. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Ze wzorów tych wynika, że w przypadku, gdy wynik pomiaru  $X$  podlega rozkładowi normalnemu  $N(\mu, \sigma^2)$ , to z prawdopodobieństwem w przybliżeniu równym 0,68 znajdzie się on w przedziale  $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ , z prawdopodobieństwem 0,95 w przedziale  $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$  oraz z prawdopodobieństwem 0,997 w przedziale  $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ . A zatem, jeśli  $n$ -krotnie powtarzamy pomiar, którego wynik podlega pewnemu

rozkładowi normalnemu, i jeśli  $n$  jest duże, to możemy oczekiwać, że w przybliżeniu 68% pomiarów znajdzie się w przedziale  $(\bar{x} - s_x, \bar{x} + s_x)$ , 95 % w przedziale  $(\bar{x} - 2s_x, \bar{x} + 2s_x)$  oraz 99,7% w przedziale  $(\bar{x} - 3s_x, \bar{x} + 3s_x)$ .

### Przykład 6

Jeśli wyniki pomiarów czasu opadania ciężarka, przy ustalonym momencie bezwładności, krzyża Oberbecka podlegają rozkładowi normalnemu, to procent pomiarów w przedziałach  $(\bar{x} - s, \bar{x} + s) = (3,7083; 3,7265)$ ,  $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s) = (3,6992; 3,7356)$  oraz  $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s) = (3,6901; 3,7447)$  powinien być w przybliżeniu odpowiednio równy wyżej podanym procentom (2.37). Z tabeli 21 odczytujemy, że wynoszą one odpowiednio 66,5%, 95% oraz 100%. Są więc bardzo bliskie wielkościom oczekiwanym.

### 2.2.10. Gęstość dwuwymiarowego rozkładu prawdopodobieństwa

Dla dwuwymiarowych wyników pomiarów (wprowadzonych w podrozdziale 2.2.2; wtedy to dokonujemy jednoczesnego pomiaru wielkości  $X$  i  $Y$ ) należy konstruować dwuwymiarowy histogram. Jeśli liczba  $n$  pomiarów w serii będzie wzrastać, to również taki dwuwymiarowy histogram będzie się stabilizować wokół pewnej dwuwymiarowej funkcji. Funkcję tę nazywamy gęstością prawdopodobieństwa i oznaczmy symbolem  $f(x,y)$ . Jest ona określona dla wszystkich  $(x,y) \in R^2$  i ma następujące własności

1.  $f(x,y) \geq 0$ .

2. 
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy dx = 1.$$
 (2.38)

Jeśli zachodzi relacja  $f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$ , gdzie  $g(x)$  jest gęstością prawdopodobieństwa wielkości  $X$ , a  $h(y)$  gęstości prawdopodobieństwa wielkości  $Y$ , to mówimy, że wielkości  $X$  i  $Y$  są niezależne.

### 2.2.11. Współczynniki korelacji oraz macierz kowariancji i korelacji

Współczynnik korelacji  $r_{x,y}$  również stabilizuje się wokół pewnej liczby, zwanej korelacją. Jeśli dwuwymiarowy histogram stabilizuje się wokół gęstości  $f(x,y)$ , to współczynnik korelacji  $r_{x,y}$  stabilizuje się wokół liczby

$$\rho_{x,y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (2.39)$$

gdzie wyrażenie w liczniku, nazywane kowariancją, określone jest wzorem

$$\sigma_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y) f(x,y) dy dx, \quad (2.40)$$

Współczynnik korelacji przyjmuje wartość z przedziału  $[-1, +1]$ , jest niezmienny względem przekształceń liniowych oraz  $\rho_{x,y} = \rho_{y,x}$ , gdyż  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ . Wartości  $+1$  i  $-1$  przyjmuje wtedy i tylko, gdy  $Y = aX + \beta$ ,  $a \neq 0$ . Wartość  $+1$ , gdy  $a > 0$ , oraz  $-1$ , gdy  $a < 0$ . Jeśli  $X = Y$ , to  $\sigma_{xy} = \sigma_{xx} = \sigma_x^2$  oraz  $\rho_{x,x} = 1$ .

Jeśli współczynnik  $\rho_{x,y}$  jest równy zero, to mówimy, że wielkości  $X$  i  $Y$  są nieskorelowane. Zauważmy, że niezależne wielkości  $X$  i  $Y$  są nieskorelowane. Istotnie, jeśli  $f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$ , to  $\sigma_{xy} = 0$  i wtedy korelacja  $\rho_{x,y} = 0$ .

Parametry  $\sigma_x^2$ ,  $\sigma_y^2$ ,  $\sigma_{xy}$  oraz  $\sigma_{yx}$  zapisujemy w postaci macierzy

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

którą nazywamy macierzą kowariancji, a parametry  $\rho_{x,x}$ ,  $\rho_{y,y}$ ,  $\rho_{x,y}$  oraz  $\rho_{y,x}$  w postaci macierzy

$$\begin{bmatrix} \rho_{x,x} & \rho_{x,y} \\ \rho_{y,x} & \rho_{y,y} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

lub postaci

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_{x,y} \\ \rho_{y,x} & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.43)$$

gdyż  $\rho_{x,x} = \rho_{y,y} = 1$ . Tę macierz nazywamy macierzą korelacji.

Jeśli równocześnie mierzymy  $N$  wielkości  $X_1, X_2, \dots, X_N$ , to możemy określić  $N(N-1)$  kowariancji oraz tyle samo współczynników korelacji, bo tyle jest różnych par  $(X_i, X_j)$ ,  $i \neq j$ . Macierz kowariancji i macierz korelacji będą wtedy macierzami symetrycznymi o wymiarach  $N \times N$ , np. macierz korelacji będzie miała postać

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_{X_1, X_2} & \dots & \rho_{X_1, X_N} \\ \rho_{X_2, X_1} & 1 & \dots & \rho_{X_2, X_N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{X_N, X_1} & \rho_{X_N, X_2} & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$

gdzie  $\rho_{X_i, X_j} = \rho_{X_j, X_i}$ . Macierz korelacji z próby jest oceną macierzy korelacji.

Wprowadzone tutaj pojęcia – prawdopodobieństwo, gęstość prawdopodobieństwa, wartość średnia, wariancja i korelacja odnoszą się do wyniku reprezentującego pomiar określonej wielkości fizycznej. Są to pojęcia abstrakcyjne, podobnie jak np. punkt i odległość w geometrii. Są one bardzo pożyteczne, pomimo że nigdy nie będziemy znać ich dokładnych wartości. Możemy je tylko oceniać na podstawie serii powtarzanych pomiarów lub zakładać, że mają taką lub inną postać lub wartość.

Oceny będą tym dokładniejsze, im większa będzie próba, na podstawie której zostaną obliczone.

### 2.2.12. Centralne twierdzenie graniczne

Jeśli  $\bar{x}$  jest średnią arytmetyczną wyników  $n$  niezależnych powtarzanych pomiarów podlegających dowolnemu rozkładowi  $f(x)$  o wartości średniej  $\mu$  i wariancji  $\sigma^2$  (o ile całka (2.25) jest skończona), to jej wartość średnia jest równa  $\mu$ , a wariancja jest równa  $\sigma^2/n$ . Dodatni pierwiastek kwadratowy z wariancji, czyli  $\sigma/\sqrt{n}$ , nosi nazwę odchylenia standardowego średniej  $\bar{x}$ . Wariancja z próby (2.9) i odchylenie standardowe średniej arytmetycznej (2.10) są odpowiednio ocenami wariancji i odchylenia standardowego średniej  $\bar{x}$ .

Dowodzi się, że jeśli  $x_1, x_2, \dots, x_n$  są pomiarami podlegającymi rozkładowi normalnemu  $N(\mu, \sigma^2)$ , to ich średnia arytmetyczna  $\bar{X}$  też podlega rozkładowi normalnemu  $N(\mu, \sigma^2/n)$ . Własność tę wykorzystano we wzorach (2.9) i (2.10).

Centralne twierdzenie graniczne orzeka, że jeśli wyniki niezależnych powtarzanych pomiarów podlegają dowolnemu rozkładowi o gęstości prawdopodobieństwa  $f(x)$ , wartości średniej  $\mu$  i wariancji  $\sigma^2$ , to ich średnia arytmetyczna będzie też miała, jednakże tylko w przybliżeniu, rozkład normalny  $N(\mu, \sigma^2/n)$ . Im większa będzie seria pomiarów, tym przybliżenie rozkładu średniej rozkładem normalnym będzie lepsze. Jak widzimy centralne twierdzenie graniczne jest matematycznym uzasadnieniem wzorów (2.9) i (2.10), na których oparta jest statystyczna analiza niepewności pomiarowych.

I tak na przykład, jeśli wyniki niezależnych powtarzanych pomiarów podlegają rozkładowi wykładniczemu  $E(\lambda)$ , to z centralnego twierdzenia granicznego wynika, że ich średnia arytmetyczna ma – gdy  $n$  jest duże – w przybliżeniu rozkład normalny  $N(\mu, \sigma^2/n)$ , gdzie  $\mu = 1/\lambda$  oraz  $\sigma^2 = 1/\lambda^2$ .

Jak wynika z centralnego twierdzenia granicznego, średnia arytmetyczna  $n$  niezależnych powtarzanych pomiarów o dowolnym rozkładzie  $f(x)$ , wartości średniej  $\mu$  i wariancji  $\sigma^2$  ma dla dużych  $n$  w przybliżeniu rozkład normalny  $N(\mu, \sigma^2/n)$ , więc

$$\begin{aligned} P\left(\mu - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} < \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) &\approx 0,6827 \\ P\left(\mu - 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} < \mu + 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) &\approx 0,9545 \\ P\left(\mu - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} < \mu + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) &\approx 0,9973. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Tym samym im większe jest  $n$ , tym dokładniejsze są przybliżenia.

### 2.2.13. Rozkład dwumianowy i rozkład Poissona

Rozkład prawdopodobieństwa, w którym dodatnie prawdopodobieństwo przypisane jest tylko liczbom naturalnym  $0, 1, 2, \dots, m$  i dla liczby  $0 \leq k \leq m$  wyraża się wzorem

$$p(k) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}, \quad (2.46)$$

gdzie  $m \geq 1$  i  $0 < p < 1$ , nazywamy rozkładem dwumianowym (lub rozkładem Bernoulliego) i oznaczamy symbolem  $B(m, p)$ . Rozkład ten jest dobrze określony, ponieważ

$$\sum_{k=0}^m p(k) = 1. \quad (2.47)$$

Jeśli  $m$  razy powtarzamy eksperyment, w którym może zajść jeden z dwu możliwych wyników, powiedzmy sukces z prawdopodobieństwem  $p$  albo porażka z prawdopodobieństwem  $1 - p$ , to prawdopodobieństwo tego, że pojawi się  $k$  sukcesów wyraża się wzorem (2.46).

Można łatwo udowodnić, że jeśli  $m$  jest duże, a  $p$  małe, to prawdopodobieństwo  $p(k)$  jest w przybliżeniu równe  $e^{-\lambda} \lambda^k / k!$ , gdzie  $\lambda = mp$ , czyli że

$$p(k) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} = q(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}. \quad (2.48)$$

Tabela 2.8 oraz rys. 2.11 pozwalają porównać prawdopodobieństwa  $p(k)$  i  $q(k)$  przy  $m = 20, p = 0,2$  oraz  $\lambda = 4$ . Pokazują one, że przybliżenie jest dobre, nawet gdy  $m$  nie jest zbyt duże, a  $p$  zbyt małe.

Ponieważ zachodzi równość

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q(k) = 1 \quad (2.49)$$

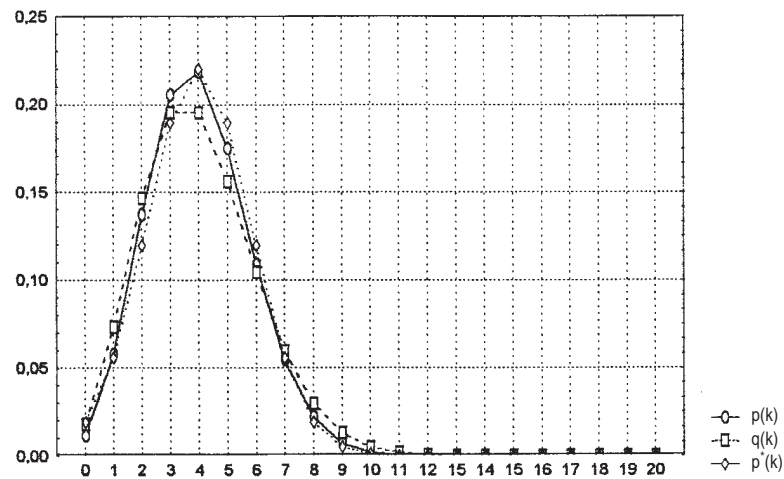
więc można określić graniczny rozkład prawdopodobieństwa, który każdej liczbie naturalnej przypisuje dodatnie prawdopodobieństwo – liczbie  $k$  prawdopodobieństwo  $q(k)$ . Tak zdefiniowany rozkład nazywamy rozkładem Poissona i oznaczamy symbolem  $P(\lambda)$ . Rozkład Poissona ma liczne zastosowania w praktyce.

Jeśli wielokrotnie (np.  $n$  razy) będziemy obserwować zjawisko, które podlega rozkładowi dwumianowemu albo rozkładowi Poissona i obliczymy średnią liczbę sukcesów, to będzie się ona stabilizować wokół pewnych liczb, gdy  $n$  będzie wzrastać. Dla rozkładu dwumianowego  $B(m, p)$  jest ona określona wzorem

$$\sum_{k=0}^m kp(k) = mp, \quad (2.50)$$

Tabela 2.8

	$p(k)$	$p^*(k)$	$q(k)$	$q^*(k)$
0	0,01153	0,01926	0,01832	0,02783
1	0,05765	0,05593	0,07326	0,06659
2	0,13691	0,11974	0,14653	0,12098
3	0,20536	0,18906	0,19537	0,17467
4	0,21820	0,22015	0,19537	0,19741
5	0,17456	0,18906	0,15629	0,17467
6	0,10910	0,11974	0,10420	0,12098
7	0,05455	0,05593	0,05954	0,06559
8	0,02216	0,01926	0,02977	0,02783
9	0,00739	0,00489	0,01323	0,00924
10	0,00203	0,00091	0,00529	0,00240
11	0,00046	0,00013	0,00192	0,00049
12	0,00009	0,00001	0,00064	0,00008
13	0,00001	0,00000	0,00020	0,00001
14	0,00000	0,00000	0,00006	0,00000
15	0,00000	0,00000	0,00002	0,00000
16	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
17	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
18	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
19	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
20	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Rys. 2.11. Wykresy prawdopodobieństwa  $\{p(k)\}$ ,  $\{q(k)\}$  oraz  $\{p^*(k)\}$  zamieszczonych w tabeli 2.8

a dla rozkładu Poissona  $P(\lambda)$  wzorem

$$\sum_{k=0}^m kq(k) = \lambda. \quad (2.51)$$

Liczbę  $mp$  nazywamy wartością średnią rozkładu dwumianowego  $B(m, p)$ , a liczbę  $\lambda$  wartością średnią rozkładu Poissona  $P(\lambda)$ .

### Przykład 7

W tabeli 2.9 podano liczbę impulsów zarejestrowanych przez licznik Geigera-Müllera w  $n = 208$  jednakowych przedziałach czasu. Liczba  $O_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, 18$  podaje liczbę jednostek czasu, w którym zaobserwowano  $k$  impulsów. Liczba  $E_k^{(1)}$  przedstawia oczekiwaną liczbę jednostek czasu, w których rejestrowanych jest  $k$  impulsów obliczonych przy założeniu, że podlega ona rozkładowi Poissona. Aby ją obliczyć, należy najpierw oszacować wartość średnią  $\lambda$  rozkładu Poissona według wzoru

$$\frac{1}{208} \sum_{k=0}^{18} kO_k = 10,322.$$

Tabela 2.9

$k$	$O_k$	$E_k^{(1)}$	$E_k^{(2)}$
0	0	0,01	0,23
1	1	0,07	0,40
2	1	0,36	0,92
3	2	1,25	1,96
4	5	3,24	3,77
5	6	6,68	6,60
6	14	11,49	10,48
7	14	16,95	15,14
8	16	21,87	19,85
9	23	25,08	23,65
10	30	25,89	25,60
11	24	24,30	25,16
12	23	20,90	22,47
13	12	16,59	18,23
14	9	12,23	13,43
15	12	8,42	8,99
16	8	5,43	5,46
17	3	3,30	3,02
18	5	3,93	2,65



Wówczas

$$E_k^{(1)} = 208e^{-10,322} \frac{10,322^k}{k!}.$$

Zauważmy, że liczby obserwowane  $O_k$  tylko nieznacznie różnią się od oczekiwanych  $E_k^{(1)}$ . Potwierdza to, że zaproponowany rozkład został trafnie dobrany.

#### 2.2.14. Przybliżanie rozkładu dwumianowego i rozkładu Poissona rozkładem normalnym

Z centralnego twierdzenia granicznego wynika, że jeśli  $m$  jest duże oraz  $p$  małe, to prawdopodobieństwa w rozkładzie dwumianowym  $B(m, p)$  możemy aproksymować odpowiednimi prawdopodobieństwami obliczonymi na podstawie rozkładu normalnego:

$$p(k) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} \approx p^\bullet(k) = \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{k-0,5}^{k+0,5} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\} dx. \quad (2.52)$$

gdzie za  $\mu$  należy wstawić  $mp$ , a za  $\sigma$  wyrażenie  $\sqrt{mp(1-p)}$ .

Również, jeśli  $\lambda$  jest duże, to prawdopodobieństwa w rozkładzie Poissona  $P(\lambda)$  możemy aproksymować za pomocą rozkładu normalnego  $N(\lambda, \lambda)$ :

$$q(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \approx q^\bullet(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \int_{k-0,5}^{k+0,5} \exp\left\{-\frac{1}{2\lambda}(x-\lambda)^2\right\} dx. \quad (2.53)$$

Tabela 2.8 zawiera prawdopodobieństwa rozkładu dwumianowego  $B(20, 0,2)$  i rozkładu Poissona  $P(4)$  wraz z ich przybliżeniami obliczonymi według wzorów (2.52) i (2.53).

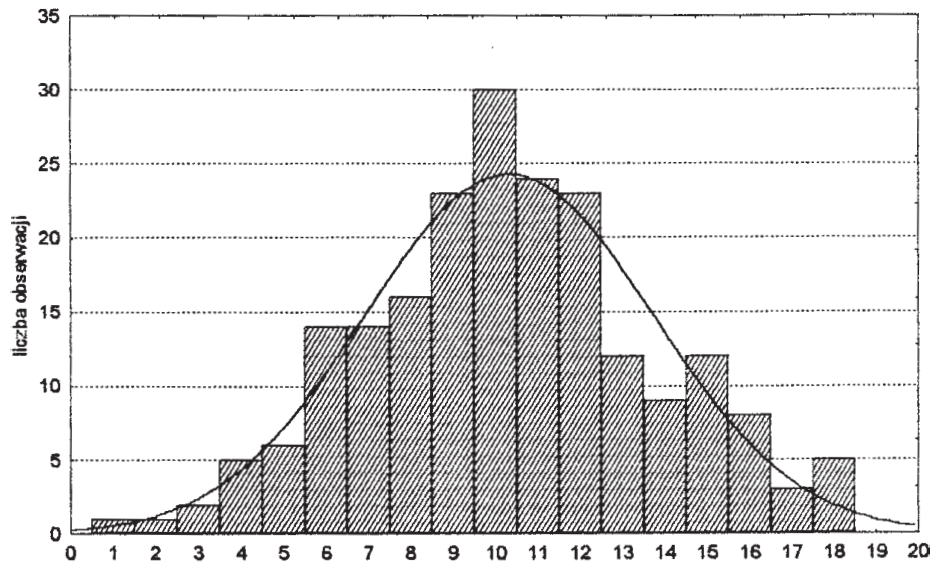
#### Przykład 8 (cd. przykładu 7)

Ponieważ oceniona wartość średnia jest duża, można więc oczekiwać, że rozkład normalny  $N(10,322, 10,322)$  powinien dobrze aproksymować rozkład Poissona  $P(10,322)$ . Faktycznie, jeśli obliczymy oczekiwane częstości (podane w tab. 2.9) według wzoru

$$E_k^{(2)} = 208 \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \int_{k-0,5}^{k+0,5} \exp\left\{-\frac{1}{2\lambda}(x-\lambda)^2\right\} dx, \quad (2.54)$$

gdzie za  $\lambda$  wstawiamy 10,322, zaobserwujemy dużą zgodność. Pokazują to też wykresy na rys. 2.12\*.

\*) Ponieważ suma pól prostokątów tworzących histogram jest równa 208, gęstość pomnożono przez 208.



Rys. 2.12. Histogram częstości  $O_k$  zapisanych w tabeli 2.9 oraz wykres gęstości rozkładu normalnego  $N(10,322, 10,322)$

### 2.3. Opracowanie wyników oraz niepewności pomiarów prostych

Dysponując wynikami  $x_1, x_2, \dots, x_n$  pomiarów wielkości fizycznej  $X$  (jeśli pomiary nie są obciążone błędami systematycznymi), obliczamy średnią arytmetyczną  $\bar{x}$ , która stanowi oszacowanie wartości rzeczywistej  $\mu_{rz}$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (2.55)$$

Jako niepewność oceny  $\bar{x}$  wielkości  $\mu_{rz}$  przyjmujemy odchylenie standardowe średniej arytmetycznej

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad (2.56)$$

które – przypominamy – nosi nazwę niepewności standardowej.

Wynik obliczeń zapisujemy w postaci:

$$x = \bar{x} \pm s_{\bar{x}} \quad (2.57)$$

Ponownie przypomnijmy, że wynik pomiaru jest wielkością mianowaną, dlatego obok wartości liczbowej należy podać jednostkę.

Wygodne jest wprowadzenie niepewności względnej

$$\delta_w = \frac{s_{\bar{x}}}{\bar{x}}, \quad (2.58)$$

która jest wielkością bezwymiarową podawaną najczęściej w procentach:

$$\delta_{\%} = \frac{s_{\bar{x}}}{\bar{x}} \cdot 100\%. \quad (2.59)$$

### 2.3.1. Obliczanie niepewności w przypadku małej liczby pomiarów za pomocą długości przedziałów ufności

Jeśli seria złożona jest z niewielkiej liczby pomiarów, prawdopodobieństwo, że przedziały  $(\bar{x} - ks_{\bar{x}}, \bar{x} + ks_{\bar{x}})$ , gdzie  $k=1, 2, 3$ , obejmą wartość rzeczywistą  $\mu_{rz}$  jest mniejsze niż dla dużej liczby pomiarów (patrz podrozdział 2.2.9). Aby otrzymać takie same prawdopodobieństwa dla małej liczby pomiarów, jak dla dużej, należy  $s_{\bar{x}}$  pomnożyć przez pewien współczynnik  $t(n, p)$ , zależny od liczby pomiarów  $n$  iżądanego prawdopodobieństwa  $p$ . Tak skonstruowany przedział

$$(\bar{x} - t(n, p)s_{\bar{x}}, \bar{x} + t(n, p)s_{\bar{x}}),$$

nazywany przedziałem ufności, obejmuje wartość rzeczywistą  $\mu_{rz}$  z zadaniem prawdopodobieństwem  $p$ . Prawdopodobieństwo  $p$  z jakim przedział ufności obejmuje  $\mu_{rz}$  nosi nazwę poziomu ufności.

Kilka wartości współczynników  $t(n, p)$  dla małych  $n$  oraz trzech prawdopodobieństw  $p$  podano w tabeli 2.10. Obszerniejszy zestaw współczynników  $t(n, p)$  podano w tabeli 1 (Dodatek). W ćwiczeniach laboratoryjnych korzystamy najczęściej z dwóch poziomów ufności:  $p = 0,6827$  oraz  $p = 0,9973$ .

Współczynniki  $t(n, p)$  są kwantylami rozkładu Studenta (pseudonim W.S. Gosset'a (1876–1937)). Teoria przedziałów ufności została stworzona przez polskiego uczonego T. Sławę-Neymana (1894–1981) w latach trzydziestych dwudziestego wieku i należy do ważnych osiągnięć nauki światowej.

Tabela 2.10. Wartości współczynników Studenta dla trzech poziomów ufności  $p$

$n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	41
$p = 0,6827$	1,837	1,321	1,197	1,142	1,111	1,091	1,077	1,067	1,059	1,024	1,013
$p = 0,9545$	13,968	4,527	3,307	2,869	2,649	2,517	2,429	2,366	2,320	2,126	2,064
$p = 0,9973$	235,777	19,206	9,219	6,620	5,507	4,904	4,530	4,277	4,094	3,400	3,199

Jak już wiemy, jako miarę niepewność średniej arytmetycznej  $\bar{x}$  można przyjąć jej odchylenie standardowe, czyli  $s_{\bar{x}}$ . Inną miarą niepewności średniej arytmetycznej, którą używa się, gdy seria pomiarów jest nieduża, jest połowa przedziału ufności, czyli wielkość  $t(n,p)s_{\bar{x}}$ . Podając niepewność średniej arytmetycznej należy zaznaczyć, w jaki sposób została ona obliczona, a w przypadku, gdy wyraża się ją przez połowę przedziału ufności, jaki poziom ufności  $p$  został przyjęty. Następny przykład pokazuje jak określić niepewność średniej arytmetycznej w przypadku krótkiej serii pomiarów oporu za pomocą mostka.

### Przykład 9

Czterokrotnie powtórzono pomiar pewnego oporu  $R$ , uzyskując następujące wyniki (w  $\Omega$ ):  $x_1 = 72,3$ ,  $x_2 = 71,9$ ,  $x_3 = 72,0$ ,  $x_4 = 71,8$ . Należy oszacować mierzony opór  $R$  za pomocą średniej arytmetycznej  $\bar{x}$  i podać niepewność tej oceny wyrażoną przez połowę przedziału ufności  $t(n,p)s_{\bar{x}}$  przyjmując poziom ufności  $p = 0,6827$ . Korzystając ze wzorów (2.6) i (2.10) otrzymujemy  $\bar{x} = 72 \Omega$  oraz  $s_{\bar{x}} = 0,108 \Omega$ , a z tabeli 2.10 odczytujemy  $t(4, 0,6827) = 1,197$ .

W takim razie połowa przedziału ufności wynosi

$$t(4, 0,6187)s_{\bar{x}} = 1,197 \cdot 0,108 \Omega = 1,293 \Omega.$$

Poszukiwaną niepewnością oceny  $\bar{x} = 78 \Omega$  mierzonego oporu  $R$ , odpowiadającą poziomowi ufności  $p = 0,6827$ , jest wielkość  $1,293 \Omega$ .

### 2.3.2. Określanie niepewności na podstawie klasy przyrządów

W przypadku pomiarów, których celem jest wyznaczenie zależności między dwoma lub większą liczbą wielkości fizycznych często brak jest czasu na to, by dla każdego punktu pomiarowego wykonać odpowiednio dużą liczbę pomiarów umożliwiającą obliczenie wartości średniej oraz niepewności pomiaru poszczególnych wielkości. Podobna sytuacja ma miejsce w przypadku pomiarów wykonywanych w warunkach dynamicznych (zmieniających się w czasie prowadzenia doświadczeń), np. pomiary zależności oporu metalu lub półprzewodnika od temperatury. Często wskazania mierników powtarzają się i wykonywanie serii pomiarowej jest niemożliwe. W takich przypadkach korzystamy z pojęcia klasy przyrządu pomiarowego oznaczanej symbolem  $kl$ .

**Klasa przyrządu pomiarowego  $kl$  jest to – wyrażona w procentach – wartość bezwzględna ze stosunku maksymalnego dopuszczalnego na danym zakresie pomiarowym błędu pomiaru  $\Delta x_{\max}$  do zakresu pomiarowego  $Z$ :**

$$kl = \left| \frac{\Delta x_{\max}}{Z} \right| 100\%. \quad (2.60)$$

Aby obliczyć maksymalną niepewność (błąd) bezwzględną pomiaru wykonanego za pomocą miernika o znanej klasie, należy skorzystać z równania

$$\Delta x_{\max} = \pm kI \frac{Z}{100}. \quad (2.61)$$

Klasa miernika jest podawana obok jego skali (dotyczy większości mierników analogowych) lub w instrukcji obsługi.

Na niepewność pomiaru obliczoną na podstawie klasy miernika składają się zarówno niepewności systematyczne jak i niepewności przypadkowe. Należy podkreślić, że klasa miernika jest podana dla warunków pomiaru określonych w instrukcji obsługi, np. dla danego zakresu temperatur lub wilgotności, pionowego lub poziomego ustawienia miernika, określonego oporu doprowadzeń itp.

**Korzystając z mierników analogowych o zmiennych zakresach należy dobrać zakres pomiarowy tak, aby wskazówka znajdowała się (o ile jest to możliwe) powyżej 2/3 skali.** Zakresy pomiarowe mierników analogowych są tak dobrane, aby spełnienie tego zalecenia było możliwe.

Aby uzasadnić przedstawione wyżej zalecenie, przypuśćmy, że mierzymy prąd o natężeniu  $I = 5 \text{ mA}$  za pomocą miliamperomierza klasy 0,5 na zakresie 100 mA. Maksymalna niepewność pomiaru obliczona na podstawie klasy miernika

$$\Delta I_{\max} = \frac{0,5 \cdot 100 \text{ mA}}{100} = 0,5 \text{ mA},$$

a maksymalna niepewność względna  $\delta_{\% \max} = 10\%$ . Jeżeli pomiar wykonamy na zakresie 10 mA, to  $\Delta I_{\max} = 0,05 \text{ mA}$  a  $\delta_{\% \max} = 1\%$ .

**Korzystając z mierników elektrycznych należy oprócz wyników pomiarów, zanotować zakresy, na których wykonano pomiary oraz klasę miernika.** Bez tych danych nie będziemy w stanie oszacować niepewności pomiarów!

### 2.3.3. Niepewności pomiarów mierników cyfrowych

**Niepewność pomiaru wykonanego miernikiem cyfrowym składa się z niepewności** przetwarzania układów analogowych miernika (np. nieliniowości wzmacniacza) oraz niepewności dyskretyzacji. Aby wyjaśnić pojęcie niepewności dyskretyzacji, zwróćmy uwagę na to, że korzystając z mierników analogowych (wskazówkowych) jesteśmy w stanie odczytać wynik z większą dokładnością niż dokładność działek elementarnych (możemy stwierdzić, że wskazówka znajduje się w położeniu odpowiadającym np. 15,5 działek skali). Odczytując wynik z wyświetlacza miernika cyfrowego nie mamy takiej możliwości, ponieważ istnieje pewien zakres sygnałów wejściowych, dla których wskazania wyświetlacza są takie same. Niepewność wynikająca z dyskretności miernika nazywamy niepewnością dyskretyzacji lub rozdzielczością miernika oznaczana dalej za pomocą symbolu *rozd.*

Niepewność przetwarzania mierników cyfrowych podawana jest w procentach wartości mierzonej  $x$  i nazywana często klasą miernika. Klasę miernika cyfrowego będziemy oznaczać przez  $kl_d$  (w celu odróżnienia od klasy miernika analogowego). Niepewność pomiaru miernika cyfrowego obliczamy korzystając ze wzoru

$$\Delta x_{\max} = \frac{kl_d}{100} x + rozdz. \quad (2.62)$$

Należy zaznaczyć, że rozdzielczość miernika cyfrowego zależy od zakresu pomiarowego.

Dodajmy, że odchylenie standardowe  $u$  miernika cyfrowego, wynikające z dyskretyzacji wynosi

$$u = \frac{rozdz}{\sqrt{12}}. \quad (2.63)$$

#### Przykład 10

Mierząc napięcie za pomocą woltomierza cyfrowego klasy 0,05 odczytano z wyświetlacza wynik  $U = 225,3$  V. Obliczyć maksymalną niepewność  $\Delta U_{\max}$  pomiaru napięcia. Rozdzielczość miernika  $rozdz = 0,1$  V. Korzystając z wzoru (2.62) otrzymujemy

$$\Delta U_{\max} = \frac{0,05}{100} 225,3 \text{ V} + 0,1 \text{ V} = (0,11265 + 0,1) \approx 0,22 \text{ V}.$$

Klasa mierników cyfrowych jest podawana w instrukcji obsługi (w laboratorium studenckim jest podana w instrukcji roboczej do danego stanowiska).

## 2.4. Zaokrąglanie i zapis wyników pomiarów oraz ich niepewności

**Wynik pomiaru powinien informować o wartości wielkości zmierzonej, jednostkach w jakich jest ta wielkość podana oraz dokładności z jaką została wyznaczona. Bez tych informacji wynik jest bezwartościowy!**

Obliczając wartość średnią  $\bar{x}$  oraz eksperymentalne odchylenie standardowe (2.10) średniej arytmetycznej  $s$  otrzymujemy zwykle liczby wielocyfrowe (zwłaszcza gdy korzystamy z pomocy kalkulatora lub komputera). Można zapytać, czy podawanie wszystkich cyfr jest sensowne?

Przypomnijmy, że odchylenie standardowe  $s$  określa przedział wartości wielkości mierzonej, w którym wartość rzeczywista znajduje się z prawdopodobieństwem 68,2%, natomiast w przedziale trzykrotnie większym wartość rzeczywista znajduje się prawie na pewno (patrz podrozdziały 2.2.9 i 2.2.12). Dochodzimy do wniosku,

że sens fizyczny mają najwyżej dwie pierwsze cyfry znaczące niepewności pomiaru. Podawanie wartości zmierzonej z dokładnością większą niż dokładność niepewności jest pozbawione sensu.

#### 2.4.1. Zaokrąglanie wartości niepewności pomiaru

Podczas zaokrąglania wartości niepewności pomiarów stosujemy następujące zasady:

1. Niepewności zaokrąglamy zawsze w górę.
2. Wstępnie niepewności zaokrąglamy do jednej cyfry znaczącej.
3. Jeżeli wstępne zaokrąglenie wartości niepewności powoduje wzrost jej wartości o więcej niż 10%, to niepewność zaokrąglamy z dokładnością do dwóch cyfr znaczących.

Sposób zaokrąglania niepewności przedstawimy na przykładach.

##### Przykład 11

W wyniku obliczeń eksperymentalnego odchylenia standardowego średniej arytmetycznej uzyskano wynik  $s = 0,0185421$ . Zaokrąglając ten wynik z dokładnością do jednej cyfry znaczącej otrzymujemy  $s \approx 0,02$ . Względna zmiana wartości niepewności wynosi  $(0,020 - 0,0185)/0,0185 = 0,08$ , a więc mniej niż 10%. Zaokrąglenie jest dobre, niepewność zapisujemy jako  $s = \pm 0,02$ .

##### Przykład 12

Wartość niepewności  $s$  uzyskana z obliczeń wynosi 254,495. Zaokrąglając wynik do pełnej liczby setek otrzymamy  $s = 300$ . Względna zmiana wartości niepewności jest równa  $(300 - 254)/254 = 0,18$ , czyli więcej niż 10%. Zgodnie z podanymi powyżej zasadami musimy zaokrąglenie przeprowadzić dla cyfry dziesiątek, pozostawiając cyfrę setek bez zmian. W ten sposób zaokrąglona poprawnie wartość niepewności  $s = \pm 260$ .

#### 2.4.2. Zaokrąglanie wyników pomiarów

Na wstępie podajemy podstawową dla procesu zaokrąglania wyników pomiarów regułę:

**Ogólną zasadą obowiązującą podczas zaokrąglania wyników pomiarów jest podawanie tych wyników z dokładnością do miejsca, na którym występuje ostatnia znacząca cyfra niepewności pomiaru.**

Przypuśćmy, że obliczając średnią arytmetyczną wielkości, której niepewność rozpatrywaliśmy w przykładzie pierwszym, uzyskano wynik  $\bar{x} = 1,245467$ . Niepewność pomiaru była równa 0,02. Wynik zaokrąglamy z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku i uwzględniając niepewność, zapisujemy  $\bar{x} = 1,25 \pm 0,02$ .



Założmy, że w przykładzie 12 uzyskano najbardziej wiarygodną wartość wielkości mierzonej  $\bar{x} = 14521,985$ , niepewność po zaokrągleniu była równa 260, wynik pomiaru wraz z niepewnością zapisujemy jako  $\bar{x} = 14520 \pm 260$ . Jest to jednak trochę mylący zapis, o czym będzie mowa na wstępie następnego podrozdziału.

**Uwaga!** Podawanie zbędnych cyfr zarówno w wynikach pomiarów, jak i wartościach niepewności nie świadczy o skrupulatności obliczającego, lecz o niezrozumieniu podstaw analizy niepewności pomiarów!

### 2.4.3. Zapisywanie wyników pomiarów oraz ich niepewności

Zalecane są cztery sposoby zapisu wyników pomiarów oraz ich niepewności. Sposoby te przedstawimy na przykładach. Przypuśćmy, że opracowując wyniki pomiarów uzyskaliśmy  $\bar{x} = 14520$  z odchyleniem standardowym 260, dla innego pomiaru  $\bar{z} = 12,02248$ , a złożona niepewność standardowa (patrz rozdział 2.6) tej oceny  $u = 0,00025$ .

1.  $\bar{x} = 14520$  z odchyleniem standardowym średniej 260,  
 $\bar{z} = 12,02248$  ze złożoną niepewnością standardową 0,00025.
2.  $\bar{x} = 14520(260)$ , gdzie liczba w nawiasie oznacza odchylenie standardowe średniej,  
 $\bar{z} = 12,02248(25)$ , gdzie liczba w nawiasie oznacza złożoną niepewność standardową.
3.  $\bar{x} = 14520(260)$ , gdzie liczba w nawiasie oznacza odchylenie standardowe średniej,  
 $\bar{z} = 12,02248(0,00025)$ , gdzie liczba w nawiasie oznacza złożoną niepewność standardową.
4.  $\bar{x} = 14520 \pm 260$ , gdzie liczba po znaku  $\pm$  oznacza odchylenie standardowe średniej,  
 $\bar{z} = 12,02248 \pm 0,00025$  gdzie liczba po znaku  $\pm$  oznacza złożoną niepewność standardową.

Jak widać, we wszystkich sposobach zapisu wyników istotne jest określenie rodzaju niepewności pomiaru. W laboratorium studenckim, ze względu na tradycję polecamy czwarty sposób.

Należy zwrócić uwagę na pierwszy przykład wyniku zapisany czwartym sposobem. Wynik pomiaru  $x = 14520 \pm 260$  może sugerować, że zero jest cyfrą dokładną, a tak nie jest. Lepiej jest zapisać ten wynik w postaci wykładniczej  $x = (14,52 \pm 0,26) \cdot 10^3$ , korzystając tylko z cyfr uważanych za wiarygodne (znaczące). Często wygodnie jest podawać wynik dobierając odpowiednie jednostki. Jeżeli omawiany wynik byłby odległością wyrażoną w metrach, to zamiast pisać  $x = (14,52 \pm 0,26) \cdot 10^3$  m, możemy podać jego wartość w kilometrach  $x = (14,52 \pm 0,26)$  km.



## 2.5. Odrzucanie wyników pomiarów

*Czytanie tego rozdziału polecamy tylko zainteresowanym; można go traktować jako dodatek i opuścić podczas pierwszego czytania.*

Może się zdarzyć, że większość wyników pomiarów leży w pobliżu wartości średniej, a jeden lub kilka (niewiele w stosunku do liczby pomiarów w serii) znacznie odbiega od tej wartości. Przykład – mierząc różnicę temperatur uzyskaliśmy następujące wyniki: 3,5; 3,9; 3,9; 3,4; 1,8 K. Rezultatem znacznie odbiegającym od pozostałych („złym wynikiem”) jest 1,8 K.

Pojawia się następujący dylemat. Uwzględniając „zły” wynik „popsujemy” wartość średniej arytmetycznej  $\bar{x}$  wielkości mierzonej, natomiast eksperymentalne odchylenie standardowe (2.10) średniej arytmetycznej  $s$  będzie zawyżone (uwzględnienie „złego” pomiaru będzie miało decydujący wpływ na wartość wyznaczonej niepewności). Z drugiej jednak strony, chcemy być uczciwi (chcemy uniknąć zarzutu o „naciąganiu” wyników pomiarów). W takim przypadku najprościej byłoby wielokrotnie powtórzyć pomiary i sprawdzić, czy „zły” wynik powtarza się co pewien czas (występuje z pewnym prawdopodobieństwem), czy też nie. Po wykonaniu długiej serii pomiarów uwzględnienie „złego” wyniku (nawet jeśli jest on naprawdę zły) ma minimalny wpływ na wynik końcowy i dylemat przestaje istnieć. Inaczej wygląda sytuacja, gdy brakuje nam czasu na uzupełnienie pomiarów lub gdy „zły” wynik zauważyliśmy po wyjściu z laboratorium. W takiej sytuacji **decyzja należy do nas**.

**Aby rozstrzygnąć problem powinniśmy obliczyć średnią arytmetyczną z serii pomiarów oraz odchylenie standardowe a następnie sprawdzić** (korzystając z wykresu funkcji Gaussa lub tabeli 2, zamieszczonej w dodatku), **jakie jest prawdopodobieństwo wystąpienia wyniku obarczonego tak dużym odchyleniem od średniej**.

Wartość średniej arytmetycznej przytoczonej na wstępie serii pomiarów jest równa 3,4 K a  $s = 0,8$ . Wynik 1,8 K jest odległy od średniej arytmetycznej o prawie  $2s$ . Prawdopodobieństwo wystąpienia wyniku różniącego się od wartości średniej o więcej niż  $2\sigma \equiv 2s$  wynosi około 5% (patrz rys. 2.4 lub tabela 2). **Jeżeli wyniki serii pomiarowej podlegają rozkładowi normalnemu, to średnio jeden na dwadzieścia wyników pomiarów powinien różnić się od wartości średniej o więcej niż  $2\sigma$ . W serii złożonej z sześciu pomiarów tylko  $k = 1/3$  wyników powinna spełniać wymieniony wyżej warunek** (5% z 6 pomiarów to 0,3, czyli około 1/3 pomiaru). Z przytoczonych rozważań wynika, że prawdopodobieństwo uzyskania tak złego wyniku (1,8 K) jest bardzo małe, dlatego też wynik ten wykluczamy. **Kryterium odrzucenia stanowi nierówność  $k < 1/2$  (mniej niż 1/2 wyniku) – kryterium Chauveneta** (czytaj szowane).

Aby sformułować kryterium Chauveneta, przypuśćmy, że wykonaliśmy serię  $n$  pomiarów pewnej wielkości  $X$ , uzyskując wyniki  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Korzystając ze wszy-

stkich wyników, obliczamy średnią arytmetyczną  $\bar{x}$  (2.55) oraz wartość odchylenia standardowego  $s$  (wzór (2.10) lub (2.56)). Jeżeli jeden z wyników znacznie różni się od pozostałych, nazwiemy go wynikiem „podejrzany” i oznaczmy przez  $x_{pod}$ . Obliczamy „współczynnik podejrzenia”

$$w_{pod} = \frac{|\bar{x} - x_{pod}|}{s}. \quad (2.64)$$

Współczynnik ten jest liczbą określającą ile razy niepewność podejrzanego wyniku jest większa od odchylenia standardowego obliczonego dla danej serii pomiarowej, czyli o ile odchylen standardowych  $s$  podejrzaný wynik  $x_{pod}$  różni się od wartości  $\bar{x}$ .

Korzystając z tabeli 2 zamieszczonej w dodatku, określamy prawdopodobieństwo  $P$  tego, że wynik będzie się różnił od wartości  $\bar{x}$  o więcej niż  $w_{pod}s$  odchylen standardowych ( $\bar{x}$  traktujemy jako wartość rzeczywistą, a  $s$  jako odchylenie standardowe  $\sigma$ ). Mnożąc prawdopodobieństwo  $P$  przez liczbę pomiarów  $n$ , otrzymamy spodziewaną liczbę  $k$  pomiarów „gorszych” od podejrzanego

$$k = Pn. \quad (2.65)$$

**Jeżeli obliczona w ten sposób wartość  $k$  jest mniejsze od 1/2, to podejrzaný wynik  $x_{pod}$ , zgodnie z kryterium Chauveneta, zostaje odrzucony.**

Dalsze opracowanie danych polega na obliczeniu wartości średniej arytmetycznej oraz odchylenia standardowego średniej arytmetycznej, na podstawie rezultatów, z których odrzuciliśmy wynik „zły” (nieprawdopodobny). Ponieważ liczba wyników zmniejszyła się do pięciu, podczas szacowania niepewności średniej kwadratowej należałoby skorzystać ze współczynników Studenta.

Przedstawiony sposób postępowania można powtórzyć w odniesieniu do kolejnego podejrzanego wyniku. Warto jednak ostrzec przed nadużywaniem tej procedury i zwrócić uwagę na to, że „złe” wyniki pomiarów doprowadziły do wielu fundamentalnych odkryć.

## 2.6. Obliczanie niepewności pomiarów złożonych

Omówione w rozdziale 2.2 sposoby statystycznego obliczania niepewności dotyczyły pomiarów prostych, w trakcie których wartości wielkości mierzonych były odczytywane bezpośrednio ze skali przyrządów pomiarowych. W większości przypadków wielkość fizyczna  $Y$  nie jest mierzona bezpośrednio, lecz wymaga zmierzenia wielkości fizycznych  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , z którymi powiązana jest określoną relacją

$$Y = g(X_1, X_2, \dots, X_n). \quad (2.66)$$

Wielkości  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  będziemy nazywali **wielkościami wejściowymi**, a  $Y$  **wielkością wyjściową**.

Zależność funkcyjna określona wyrażeniem (2.66) jest w praktyce laboratorium studenckiego przedstawiona w postaci przejrzystego wzoru matematycznego.

Założmy, że wielkość  $X_i$  zmierzaliśmy  $n_i$  razy, a symbol  $x_{i,k}$  oznacza  $k$ -ty wynik jej pomiaru. Wielkość  $Y$  (poprawnie – wartość średnią wielkości  $Y$ ) można ocenić na wiele sposobów. Tutaj zaprezentujemy dwa z nich.

Pierwszy z nich polega na przyjęciu za ocenę  $Y$  wartości

$$y = g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n), \quad (2.67)$$

gdzie  $\bar{x}_i$  jest średnią arytmetyczną wyników pomiarów  $i$ -tej wielkości fizycznej  $X_i$ , tzn.

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} x_{i,k}.$$

Drugi sposób, który możemy zastosować, gdy  $n_1 = n_2 = \dots = n_n = n$ , polega na przyjęciu za ocenę  $Y$  wartości

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \quad (2.68)$$

gdzie

$$y_i = g(x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{n,i}).$$

### Przykład 13

Przypuśćmy, że mamy ocenić pole przekroju drutu na podstawie pomiarów jego średnicy. Średnicę drutu – wielkość wejściową – oznaczmy przez  $D$ , a pole przekroju drutu – wielkość wyjściową – przez  $P$ . Wielkości  $D$  i  $P$  są funkcjonalnie związane relacją

$$P = \frac{1}{4} \pi D^2.$$

Przypuśćmy, że  $d_1, d_2, \dots, d_n$  oznaczają wyniki pomiarów średnicy, a  $\bar{d}$  ich średnią arytmetyczną, tzn.

$$\bar{d} = \frac{d_1 + d_2 + \dots + d_n}{n}.$$

Jeśli zastosujemy pierwszy sposób oparty na wzorze (2.67), to oceną pola przekroju drutu jest

$$\frac{\pi}{4} (\bar{d})^2,$$

a jeśli drugi, oparty na wzorze (2.68), to

$$\frac{\pi}{4} \left( \frac{d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2}{n} \right).$$

#### Przykład 14

Przypuśćmy, że zadaniem pomiarowym jest ocena objętości próbki pewnego materiału w kształcie prostopadłościanu. Jeśli  $A$ ,  $B$  i  $C$  reprezentują odpowiednio wyniki pomiarów długości, szerokości i wysokości prostopadłościanu, to

$$V = ABC. \quad (2.69)$$

Jeśli  $\bar{a}$  oznacza średnią arytmetyczną pomiarów długości  $a_1, \dots, a_n$ ,  $\bar{b}$  średnią arytmetyczną pomiarów szerokości  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , a  $\bar{c}$  średnią arytmetyczną pomiarów wysokości  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , to oceną objętości prostopadłościanu według wzoru (2.67) jest iloczyn  $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ , a według wzoru (2.68) wielkość

$$\frac{1}{n} (a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2 + \dots + a_n b_n c_n).$$

Niepewność oceny wielkości wyjściowej  $Y$  nazywamy **niepewnością złożoną** i oznaczamy symbolem  $u_y$ . Sposób jej obliczania zależy od tego, czy wielkości wejściowe  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  będziemy traktować jako wielkości nieskorelowane, czy jako skorelowane.

#### 2.6.1. Nieskorelowane wielkości wejściowe

Jeśli wielkości  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  są nieskorelowane, to niepewność złożoną  $u_y$  ceny (2.67) wielkości  $Y$  wyznacza się na podstawie wzoru

$$u_{\bar{y}} = \sqrt{\left( \frac{\partial g}{\partial x_1} \right)^2 (\bar{s}_1)^2 + \left( \frac{\partial g}{\partial x_2} \right)^2 (\bar{s}_2)^2 + \dots + \left( \frac{\partial g}{\partial x_n} \right)^2 (\bar{s}_n)^2}, \quad (2.70)$$

gdzie  $\bar{s}_i = s_{\bar{x}_i}$  i  $\frac{\partial g}{\partial x_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) oznaczają odpowiednio odchylenie standardowe średniej  $\bar{x}_i$  (patrz rozdziały 2.2.1 i 2.3) i wartość pochodnej cząstkowej funkcji (2.66) w punkcie  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ .

Posługując się symbolem sumy wzór (2.70) możemy zapisać w bardziej zwartej postaci

$$u_{\bar{y}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)^2 (\bar{s}_i)^2}. \quad (2.71)$$

W przypadku, gdy między wielkością wyjściową  $Y$  a wielkościami wejściowymi zachodzi zależność liniowa

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n, \quad (2.72)$$

gdzie  $a_1, a_2, \dots, a_n$  są znanymi współczynnikami, to ocena wielkości  $Y$  zgodnie z wzorem (2.67) przyjmuje postać

$$y = a_1 \bar{x}_1 + a_2 \bar{x}_2 + \dots + a_n \bar{x}_n. \quad (2.73)$$

Ocena wielkości  $Y$  oparta na wzorze (2.68) ma w tym przypadku taką samą postać, ponieważ

$$y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_1 x_{i,1} + a_2 x_{i,2} + \dots + a_n x_{i,n}) = a_1 \bar{x}_1 + a_2 \bar{x}_2 + \dots + a_n \bar{x}_n$$

Jeśli wielkość wyjściowa zależy liniowo od wielkości wejściowych (patrz (2.72)), to  $\partial g / \partial x_i = a_i$  i niepewność złożona (2.70) oceny (2.73) przyjmuje postać

$$u_y = \sqrt{(a_1)^2 (\bar{s}_1)^2 + (a_2)^2 (\bar{s}_2)^2 + \dots + (a_n)^2 (\bar{s}_n)^2}. \quad (2.74)$$

Jeśli zależność między wielkością wyjściową i wielkościami wejściowymi wyraża relacja

$$Y = c(X_1)^{a_1} (X_2)^{a_2} \dots (X_n)^{a_n}, \quad (2.75)$$

tzn. wielkość wyjściowa jest iloczynem potęg wielkości wejściowych, gdzie  $c > 0$ , a  $a_1, a_2, \dots, a_n$  są znanymi liczbami (różnymi od zera), to niepewność złożona oceny wielkości  $Y$  (obliczona według wzoru (2.70), przy założeniu, że  $x_i > 0$ )

$$y = c(x_1)^{a_1} (x_2)^{a_2} \dots (x_n)^{a_n}$$

wyraża się wzorem

$$u_y = y \sqrt{\left( \frac{a_1}{\bar{x}_1} \right)^2 (\bar{s}_1)^2 + \left( \frac{a_2}{\bar{x}_2} \right)^2 (\bar{s}_2)^2 + \dots + \left( \frac{a_n}{\bar{x}_n} \right)^2 (\bar{s}_n)^2}. \quad (2.76)$$

Aby otrzymać (2.76) należy obliczyć pochodne cząstkowe funkcji

$$y = g(x_1, x_2, \dots, x_n) = c(x_1)^{a_1} (x_2)^{a_2} \dots (x_n)^{a_n}$$

w punkcie  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  i wstawić do wzoru (2.71). Najłatwiej obliczyć pochodną stosując metodę pochodnej logarytmicznej, tzn. obliczyć pochodne cząstkowe funkcji

$$\ln y = \ln c + a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2 + \dots + a_n \ln x_n.$$

Ponieważ

$$\frac{\partial(\ln y)}{\partial x_i} = \frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{a_i}{x_i},$$

to pochodne cząstkowe funkcji  $g$  obliczone w punkcie  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  są następującej postaci

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = y \frac{a_i}{\bar{x}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Po podstawieniu do (2.70) otrzymujemy wzór (2.76).

#### Przykład 15 (cd. przykładu 13)

Ponieważ w rozpatrywanym przypadku  $n = 1$ , przeto niepewność złożona (2.70) oceny  $\pi(\bar{d})^2/4$  wyraża się wzorem

$$u_P = \frac{\pi}{2} \bar{d} s_{\bar{d}},$$

gdzie

$$s_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2}.$$

Jeśli wykonano 10 pomiarów średnicy, a wyniki byłyby takie jak w drugiej kolumnie tabeli 2.11, to ocena pola przekroju drutu wynosiłaby  $(\pi/4)(1,799 \text{ mm})^2 = 2,542 \text{ mm}^2$ , a złożona niepewność standardowa  $(\pi/2)1,799 \text{ mm} \cdot 0,433 \cdot 10^{-3} \text{ mm} = 1,223 \cdot 10^{-2} \text{ mm}^2$ .

#### Przykład 16 (cd. przykładu 14)

Ponieważ w tym przypadku zależność funkcyjna (2.69) jest postaci (2.75), to złożoną niepewność standardową  $u_V$  oceny objętości  $V$  obliczamy według wzoru (2.76) i otrzymujemy

$$u_V = \bar{a} \bar{b} \bar{c} \sqrt{\left(\frac{1}{\bar{a}}\right)^2 (s_{\bar{a}})^2 + \left(\frac{1}{\bar{b}}\right)^2 (s_{\bar{b}})^2 + \left(\frac{1}{\bar{c}}\right)^2 (s_{\bar{c}})^2}, \quad (2.77)$$

gdzie  $s_{\bar{a}}$ ,  $s_{\bar{b}}$  oraz  $s_{\bar{c}}$  oznaczają odpowiednio odchylenia standardowe średnich  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  i  $\bar{c}$ .

W tabeli 2.11 zawarte są wyniki dziesięciokrotnych pomiarów boków próbki materiału.

Na podstawie tych pomiarów należy ocenić objętość tej próbki i podać, przyjmując, że średnie arytmetyczne  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  i  $\bar{c}$  są nieskorelowane, niepewność złożoną uzy-

Tabela 2.11

Nr pomiaru	$a$ [mm]	$b$ [mm]	$c$ [mm]
1	70,1	79,8	100,2
2	70,2	80,1	100,9
3	69,8	80,3	100,3
4	70,4	79,7	99,7
5	70,2	80,2	100,4
6	69,8	80,1	99,8
7	70,3	80,3	100,1
8	70,2	79,9	99,9
9	69,9	80,0	99,8
10	70,0	80,1	100,1
Suma	700,8	800,5	1001,2
Średnia arytmetyczna	$\bar{a} = 70,09$	$\bar{b} = 80,05$	$\bar{c} = 100,12$
Odchylenie standardowe	$s_a \cong 0,208$	$s_b \cong 0,201$	$s_c \cong 0,358$
Odchylenie standardowe średniej	$\bar{s}_a = 0,066$	$\bar{s}_b = 0,064$	$\bar{s}_c = 0,113$

skanej oceny. Założenie to jest w pełni uzasadnione, gdy pomiary długości, szerokości i wysokości próbki wykonano niezależnie od siebie. Ocena objętości próbki wynosi

$$\bar{a} \bar{b} \bar{c} = 70,09 \text{ mm} \cdot 80,05 \text{ mm} \cdot 100,12 \text{ mm} = 561743,7345 \text{ mm}^3.$$

Złożoną niepewność standardową  $u$  obliczamy według wzoru (2.77). Podstawiając odpowiednie liczby podane w tabeli otrzymujemy  $u_V = 938,9826 \text{ mm}^3$ . Uzyskany wynik możemy zapisać w postaci  $561743,7345 \pm 938,9826 \text{ mm}^3$ , lub po zaokrągleniu, w postaci  $V = (562000 \pm 1000) \text{ mm}^3 = (562 \pm 1) \cdot 10^3 \text{ mm}^3 = (562 \pm 1) \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$ , który określa wyznaczoną doświadczalnie ocenę objętości  $V$  i jej dokładności.

### 2.6.2. Skorelowane wielkości wejściowe

Jeśli  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  są skorelowane i jeśli  $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m$ , to złożoną niepewność standardową  $u_y$  oceny (2.67) wielkości wyjściowej  $Y$  wyznaczamy ze wzoru

$$u_y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)^2 (\bar{s}_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \bar{s}_i \bar{s}_j r_{i,j}}, \quad (2.78)$$

gdzie  $\bar{s}_i$  oraz  $\frac{\partial g}{\partial x_i}$  oznaczają to samo co we wzorze (2.70), a

$$r_{i,j} = \frac{\sum_{k=1}^m (x_{i,k} - \bar{x}_i)(x_{j,k} - \bar{x}_j)}{\sqrt{\sum_{k=1}^m (x_{i,k} - \bar{x}_i)^2} \sqrt{\sum_{k=1}^m (x_{j,k} - \bar{x}_j)^2}}. \quad (2.79)$$

Czytelników zainteresowanych uzasadnieniem wzorów (2.70) i (2.78) określających złożone niepewności standardowe odsyłamy do rozdziału 13 podręcznika [5] oraz do opracowania [1].

### Przykład 17

Opór  $R$ , reaktancja  $X$  i zawada  $Z$  pewnego obwodu elektrycznego prądu zmiennego wyrażają się poprzez amplitudy napięcia  $V$  i natężenia  $I$  prądu zmiennego oraz przesunięcie fazowe  $\phi$  ( $\phi$ ,  $V$  i  $I$  są wielkościami wejściowymi, a wielkościami wyjściowymi są:  $R$ ,  $X$  i  $Z$ ) prawami Ohma postaci:

$$R = \frac{V}{I} \cos \phi, \quad X = \frac{V}{I} \sin \phi, \quad Z = \frac{V}{I}.$$

Należy oszacować opór  $R$ , reaktancję  $X$  oraz zawadę  $Z$  na podstawie pięciokrotnego równoczesnego pomiaru napięcia  $V$ , natężenia  $I$  oraz przesunięcia fazowego  $\phi$ . Wyniki pomiarów są zebrane w tabeli 2.12.

Ponieważ pomiary wielkości wejściowych wykonuje się równocześnie, to powinno się je traktować jako wielkości skorelowane i niepewności wielkości wyjścio-

Tabela 2.12

$k$ -numer pomiaru	$V$ [V]	$I$ [mA]	$\phi$ [rad]
1	5,007	19,663	1,0456
2	4,994	19,639	1,0438
3	5,005	19,640	1,0468
4	4,990	19,685	1,0428
5	4,999	19,678	1,0433
Średnia arytmetyczna	$\bar{V} = 4,9990$	$\bar{I} = 19,6610$	$\bar{\phi} = 1,04446$
Odchylenie standardowe średniej	$s_{\bar{V}} = 0,0032$	$s_{\bar{I}} = 0,0095$	$s_{\bar{\phi}} = 0,00075$
Współczynnik korelacji	$r_{\bar{V}, \bar{I}} = -0,36$	$r_{\bar{V}, \bar{\phi}} = 0,86$	$r_{\bar{I}, \bar{\phi}} = -0,65$



wych obliczać według wzoru (2.78). W związku z tym należy obliczyć, oprócz średnich arytmetycznych i odchyłeń standardowych średnich, także współczynniki korelacji według wzoru (2.79). Wszystkie te wielkości zostały zamieszczone także w tabeli 2.12.

W drugiej kolumnie tabeli 2.13 zamieszczono oceny oporu  $R$ , reaktancji  $X$  i zawady  $Z$ , a w trzeciej – odpowiadające im standardowe niepewności złożone  $u_R$ ,  $u_X$  i  $u_Z$  obliczone według wzoru (2.78).

Tabela 2.13

Zależność między oceną wielkości wyjściowej $y_i$ a ocenami wielkości wejściowych $\bar{V}$ , $\bar{I}$ , $\bar{\phi}$	Ocena $y_i$ obliczona na podstawie wyników pomiarów [ $\Omega$ ]	Standardowa niepewność złożona $u_{y_i}$ obliczona na podstawie wyników pomiarów
$y_1 = R = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} \cos \bar{\phi}$	$y_1 = R = 127,732$	$u_R = 0,071 \Omega$ $u_R/R = 6,0 \cdot 10^{-4}$
$y_2 = X = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} \sin \bar{\phi}$	$y_2 = X = 219,847$	$u_X = 0,295 \Omega$ $u_X/X = 13,0 \cdot 10^{-4}$
$y_3 = Z = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$	$y_3 = Z = 254,260$	$u_Z = 0,236 \Omega$ $u_Z/Z = 9,0 \cdot 10^{-4}$

#### Przykład 18 (cd. przykładu 17)

Dla przykładu wyprowadzimy wzór na niepewności  $u_Z$ . Jeśli  $g(V, I) = \frac{V}{I}$ , to

$$\frac{\partial g}{\partial V} = \frac{1}{\bar{I}} = \bar{Z} \frac{1}{\bar{V}}, \quad \frac{\partial g}{\partial I} = -\frac{\bar{V}}{(\bar{I})^2} = -\bar{Z} \frac{1}{\bar{I}}.$$

Zatem, stosując wzór (2.78), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 u_Z &= Z \sqrt{\left(\frac{s_{\bar{V}}}{\bar{V}}\right)^2 + \left(\frac{s_{\bar{I}}}{\bar{I}}\right)^2 - 2\left(\frac{s_{\bar{V}}}{\bar{V}}\right)\left(\frac{s_{\bar{I}}}{\bar{I}}\right)r_{V,I}} \\
 &= 254,26 \sqrt{\left(\frac{0,0032}{4,9990}\right)^2 + \left(\frac{0,0095}{19,6610}\right)^2 - 2\frac{0,0032}{4,9990}\frac{0,0095}{19,6610}(-0,36)} \\
 &= 2,362 \cdot 10^{-1} \Omega,
 \end{aligned}$$

czyli złożona niepewność standardowa oceny zawady 254,26  $\Omega$  wynosi 0,236  $\Omega$ . W podobny sposób otrzymujemy dwie pozostałe niepewności  $u_V$ ,  $u_I$ .

Druga metoda oceny wielkości wyjściowych  $R$ ,  $X$  i  $Z$  wynikająca ze wzoru (2.68) sprowadza się do obliczenia  $R_i$ ,  $X_i$  oraz  $Z_i$  dla każdej trójki równoczesnych pomiarów  $V_i$ ,  $I_i$  oraz  $\phi_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , a następnie obliczenia średnich  $\bar{R}$ ,  $\bar{X}$  oraz  $\bar{Z}$ . Wyniki tych obliczeń zawarte są w tabeli 2.14.

Tabela 2.14

$k$ -numer pomiaru	$R = \frac{V}{I} \cos \phi$ [ $\Omega$ ]	$X = \frac{V}{I} \sin \phi$ [ $\Omega$ ]	$Z = \frac{V}{I}$ [ $\Omega$ ]
1	127,67	220,32	254,64
2	127,89	219,79	254,29
3	127,51	220,64	254,84
4	127,71	218,97	253,49
5	127,88	219,51	254,04
Średnia arytmetyczna	$\bar{R} = 127,732$	$\bar{X} = 219,847$	$\bar{Z} = 254,260$
Odchylenie standardowe średniej	$s_{\bar{R}} = 0,071$	$s_{\bar{X}} = 0,295$	$s_{\bar{Z}} = 0,236$

Wielkości  $R$ ,  $X$  i  $Z$  są skorelowane; ich współczynniki korelacji wynoszą:  $r_{y_1, y_2} = r_{R, X} = -0,588$ ,  $r_{y_1, y_3} = r_{R, Z} = -0,485$ ,  $r_{y_2, y_3} = r_{X, Z} = 0,993$ .

W tym przypadku obie metody dają po zaokrągleniu do 3 miejsca po przecinku te same oceny wielkości  $R$ ,  $X$  i  $Z$ . Również  $u_R \approx s_{\bar{R}}$ ,  $u_X \approx s_{\bar{X}}$  oraz  $u_Z \approx s_{\bar{Z}}$ .

Przedstawiony sposób obliczania niepewności może być uzasadniony w tych przypadkach, kiedy pomiary wykonuje się w grupach obejmujących wielkości  $V$ ,  $I$  oraz  $\phi$ . Nie można go zastosować, jeśli wykonuje się  $n_1$  pomiarów napięcia  $V$ ,  $n_2$  pomiarów natężenia  $I$  oraz  $n_3$  pomiarów fazy  $\phi$ , a  $n_1 \neq n_2 \neq n_3$ .

Przyjęcie dodatkowego założenia, że korelacje są równe zero, może prowadzić do innych wyników.

#### 2.6.2.1. Obliczanie niepewności metodą różniczki zupełnej

W tym rozdziale podamy jeszcze jeden wzór, według którego oblicza się niepewność złożoną.

**Można go stosować zarówno do skorelowanych jak i do nieskorelowanych wielkości wejściowych.**

Dlatego jest najczęściej stosowany w praktyce laboratorium studentskiego.

Oznaczmy odpowiednio przez  $x_1, x_2, \dots, x_n$  oceny wielkości wejściowych wielkości fizycznych  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , a przez  $u_1, u_2, \dots, u_n$  niepewności tych ocen. Jeśli  $Y = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , to niepewność  $u_y$  oceny  $y = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$  wielkości  $Y$ , możemy określić za pomocą wzoru

$$u_y = \left| \frac{\partial g}{\partial x_1} u_1 \right| + \left| \frac{\partial g}{\partial x_2} u_2 \right| + \dots + \left| \frac{\partial g}{\partial x_n} u_n \right|, \quad (2.80)$$

gdzie, jak poprzednio,  $\partial g / \partial x_i$  oznacza wartość pochodnej cząstkowej funkcji  $g$  w punkcie  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Aby uzasadnić ten wzór można powołać się na wzór na różniczkę zupełną funkcji  $g$ , który ma następującą postać

$$dy = \frac{\partial g}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_n} dx_n.$$

Traktując przyrosty  $dx_i$  jako niepewności oceny  $x_i$ , a przyrost  $dy$  jako niepewność oceny  $Y$  oraz przyjmujemy najmniej korzystny układ znaków (aby zmaksymalizować sumę po prawej stronie wzoru), to uzyskamy wzór (2.80).

Jeżeli obliczamy niepewność złożoną według wzoru (2.80), to mówimy, że obliczamy ją **metodą różniczki zupełnej**.

W przypadku gdy wielkość wyjściowa jest iloczynem potęg wielkości wejściowych (zachodzi (2.75)), niepewność oceny  $y = c(x_1)^{a_1}(x_2)^{a_2}\dots(x_n)^{a_n}$  obliczana metodą różniczki zupełnej przyjmuje postać

$$u_y = y \left( \left| a_1 \frac{u_1}{x_1} \right| + \left| a_2 \frac{u_2}{x_2} \right| + \dots + \left| a_n \frac{u_n}{x_n} \right| \right). \quad (2.81)$$

Jeśli wielkości wejściowe są nieskorelowane, a niepewnościami  $u_1, u_2, \dots, u_n$  – odchylenia standardowe  $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_n$ , to złożona niepewność standardowa (2.71) nie jest większa od złożonej niepewności (2.80), ponieważ zachodzi nierówność

$$u_y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \bar{s}_i \right)^2} \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial g}{\partial x_i} \bar{s}_i \right|.$$

Jeśli natomiast wielkości wejściowe są skorelowane, to niepewność (2.78) może być mniejsza lub większa od niepewności (2.80). Dodajmy, że ocena niepewności obliczona według wzorów (2.70) i (2.78) jest dokładniejsza od oceny niepewności obliczonej według wzoru (2.80).

Poniżej przedstawiamy kilka przykładowych obliczeń z wykorzystaniem wzorów (2.80) i (2.81).

**Przykład 19** (cd. przykładów 17 i 18)

Jeśli zamiast wzoru (2.77) posłużymy się wzorem (2.81), to niepewność oceny objętości próbki materiału wyraża się wzorem

$$u_V = \bar{a}\bar{b}\bar{c} \left( \frac{s_{\bar{a}}}{\bar{a}} + \frac{s_{\bar{b}}}{\bar{b}} + \frac{s_{\bar{c}}}{\bar{c}} \right).$$

Po podstawieniu wartości podanych w tabeli 2.11 otrzymujemy

$$u_V = 70,09 \cdot 80,05 \cdot 100,12 \left( \frac{0,066}{70,09} + \frac{0,064}{80,05} + \frac{0,113}{100,12} \right) = 1609,6804 \text{ m}^3.$$

Poprzedni wynik  $938,9826 \text{ m}^3$ , uzyskany za pomocą wzoru (2.70), jest bliższy odchyleniu standardowemu oceny objętości niż wynik  $1609,6804 \text{ m}^3$  uzyskany metodą różniczkki zupełnej.

**Przykład 20**

Przypuśćmy, że chcemy wyznaczyć złożoną niepewność (niepewność oceny) oporu zmierzonego za pomocą mostka Wheastone'a. Wartość oporu obliczamy korzystając z równania

$$R_x = R_n \frac{l_x}{l_z},$$

gdzie:  $R_n = (100 \pm 1) \Omega$  oznacza opór normalny, natomiast  $l_x = (450 \pm 2) \text{ mm}$  i  $l_z = (1000 \pm 5) \text{ mm}$  oznaczają długości ramion mostka (oporów liniowych) odpowiadających równowadze mostka. Przyjmując za wartości mierzonych wielkości fizycznych  $R_n = 100 \Omega$ ,  $l_x = 450 \text{ mm}$ ,  $l_z = 1000 \text{ mm}$  otrzymujemy  $R_x = 45 \Omega$ . Aby wyznaczyć niepewność (2.80) tej oceny obliczamy pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial R_x}{\partial R_n} = \frac{l_x}{l_z}, \quad \frac{\partial R_x}{\partial l_x} = \frac{R_n}{l_z}, \quad \frac{\partial R_x}{\partial l_z} = -\frac{R_n l_x}{l_z^2}.$$

Korzystając z (2.80) otrzymujemy

$$dR_x = \frac{l_x}{l_z} dR_n + \frac{R_n}{l_z} dl_x - \frac{R_n l_x}{l_z^2} dl_z.$$

Po zastąpieniu różniczkki wielkości prostych niepewnościami pomiarów oraz wprowadzeniu wartości bezwzględnych do składników sumy po prawej stronie ostatniego równania, otrzymamy na niepewność oceny oporu  $R_x = 45 \Omega$  wzór

$$u_{R_x} = \left| \frac{l_x}{l_z} u_{R_n} \right| + \left| \frac{R_n}{l_z} u_{l_x} \right| + \left| \frac{R_n l_x}{l_z^2} u_{l_z} \right|.$$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymamy  $u_{Rz} = (0,45 + 0,2 + 0,225) \Omega = 0,875 \Omega$ , gdzie za wartości niepewności przyjęto:  $u_{Rn} = 1 \Omega$ ,  $u_{lx} = 2 \text{ mm}$ ,  $u_{lz} = 5 \text{ mm}$ . Po zaokrągleniu wartość niepewności  $u_{Rz}$  jest równa  $1 \Omega$ .

Warto w tym miejscu zwrócić uwagę na to, że zapis składników sumy występujących w ostatnim wzorze umożliwia ocenę wkładu wnoszonego przez niepewności poszczególnych pomiarów prostych wielkości do niepewności pomiaru złożonego.

**Analiza wpływu poszczególnych czynników na dokładność pomiarów jest bardzo istotną częścią dyskusji uzyskanych wyników i wniosków z ćwiczenia.**

### Przykład 21

Wykonaliśmy pomiary zależności oporu od temperatury dla półprzewodnika. Naszym zadaniem jest narysowanie wykresu we współrzędnych ( $y = \ln R$ ,  $x = 1/T$ ). Przypuśćmy, że wyniki odpowiadające jednemu z punktów pomiarowych mają następujące wartości:  $R = (165 \pm 1) \Omega$ ,  $T = (300,4 \pm 0,5) \text{ K}$ ,  $u_R = 1 \Omega$ ,  $u_T = 0,5$ . Wielkości, które należy nanieść na wykres nie są wielkościami mierzonymi bezpośrednio, lecz funkcjami wielkości mierzonych. Niepewność z jaką została wyznaczona wartość  $y = \ln R$  obliczamy w bardzo prosty sposób (tym razem  $y$  jest funkcją tylko jednej zmiennej)

$$u_y = \frac{\partial y}{\partial R} dR = \frac{\partial}{\partial R} (\ln R) dR = \frac{u_R}{R}.$$

Podstawiając wartość niepewności  $u_R = 1 \Omega$  otrzymujemy  $u_y = u_R/R = 1/165$ . Warto zwrócić uwagę na to, że niepewność wyznaczenia  $u_R/R$  zależy od wartości  $R$  i maleje ze wzrostem  $R$  (nawet wtedy, gdy wszystkie wartości  $R$  zmierzone zostały tym samym miernikiem i na tym samym zakresie!).

Podobnie postępujemy szacując niepewność z jaką wyznaczono  $x = 1/T$

$$u_x = \frac{\partial x}{\partial T} dT = \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{1}{T} \right) dT = \frac{u_T}{T^2}.$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy  $u_x = u_T/T^2 \cong 6 \cdot 10^{-6}$ . Jak widzimy, ponownie wartość niepewności wielkości wyznaczanej zależy od wartości wielkości mierzonej.

### Przykład 22

W wielu przypadkach zachodzi potrzeba wyznaczenia niepewności wielkości będących różnicą wartości mierzonych, np. zmiany długości  $l_k - l_0$  lub temperatury  $T_k - T_0$ . Podobnie jak w poprzednim przykładzie, obliczamy różniczkę zupełną  $d(l_k - l_0) = d(l_k) - d(l_0)$ , zamiast różniczek podstawiamy wartości niepewności, bierzemy pod uwagę przypadek sumowania się wartości bezwzględnych niepewności. Po wykonaniu tych czynności otrzymujemy niepewność pomiaru przyrostu  $u_{l_k - l_0} = u_{l_k} + u_{l_0}$ .

Zwykle pomiaru długości początkowej i końcowej dokonujemy tym samym przyrządem, w związku z czym pomiary te obarczone są takimi samymi niepewnościami. Wtedy możemy przyjąć, że  $u_{l_k-l_0} = 2u_{l_k} = 2u_{l_0}$ . Uzyskany przez nas wynik (intuicyjnie oczywisty) okazuje się bardzo przydatny, gdy korzystamy ze skomplikowanych wzorów, w których występują różnice pewnych wielkości. Wynik ten pozwala znacznie zredukować liczbę zmiennych w wyrażeniu na niepewność pomiaru złożonego.

Prostym przykładem niech będzie obliczanie współczynnika rozszerzalności termicznej. Z definicji jest to stosunek względnego przyrostu długości do przyrostu temperatury

$$\alpha = \frac{l_k - l_0}{l_0(T_k - T_0)}.$$

W wyrażeniu na niepewność wyznaczenia współczynnika rozszerzalności termicznej występują cztery wielkości: długość początkowa i końcowa oraz temperatury – początkowa i końcowa. Jeżeli skorzystamy z poprzedniego przykładu, to będziemy mieli tylko niepewności pomiaru przyrostu długości oraz przyrostu temperatury i liczba zmiennych zredukuje się o połowę! Musimy jednak pamiętać, że niepewności wyznaczenia przyrostów są tym razem, dwukrotnie większe od niepewności pomiarów samych wartości.

### Przykład 23

Obliczanie niepewności względnej zilustrujemy na przykładzie wyznaczania momentu bezwładności  $J$  bryły sztywnej, który obliczamy z zależności

$$J = \frac{T^2 mgd}{4\pi^2},$$

gdzie:  $T$  – okres małych drgań bryły,  $m$  – jej masa,  $d$  – odległość środka masy bryły od punktu zawieszenia.

Przyjmijmy, że zmierzone wartości wynoszą:  $m = 0,5$  kg,  $d = 0,1$  m,  $T = 0,52$  s, a niepewności odpowiednich pomiarów:  $u_m = 0,001$  kg,  $u_d = 0,2$  mm,  $u_T = 0,005$  s;  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup> jest przyspieszeniem ziemskim, dla którego  $u_g = 0,01$  m/s<sup>2</sup>. Na podstawie wyników pomiarów obliczamy wartość momentu bezwładności

$$J = \frac{T^2 mgd}{4\pi^2} = 0,003363 \text{ kg m}^2,$$

a z (2.81), po uwzględnieniu jawnej postaci  $J$ , otrzymujemy niepewność względną

$$\begin{aligned} \frac{u_J}{J} &= \left| 2 \frac{u_T}{T} \right| + \left| \frac{u_m}{m} \right| + \left| \frac{u_g}{g} \right| + \left| \frac{u_d}{d} \right| \\ &= 0,0192 + 0,002 + 0,001 + 0,002 \cong 0,025 = 2,5\%, \end{aligned}$$

a stąd niepewność bezwzględna

$$u_J = \left( \frac{u_J}{J} \right) \cdot J = 0,003363 \cdot 0,025 \text{ kg m}^2 = 0,000084075 \text{ kg m}^2.$$

Ostatecznie, wartość momentu bezwładności

$$J = (0,00336 \pm 0,00009) \text{ kg m}^2 = (33,6 \pm 0,9) 10^{-4} \text{ kg m}^2.$$

#### Przykład 24

Oto jeszcze inny przykład bardzo efektywnego zastosowania (2.81). Współczynnik załamania światła  $n$  dla szkła wyznaczamy m.in. na podstawie zmierzonej wartości kąta łamiącego pryzmatu  $\alpha$  oraz kąta najmniejszego odchylenia  $\gamma$  posługując się następującym wzorem:

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)},$$

po zlogarytmowaniu którego otrzymujemy

$$\ln(n) = \ln\left(\sin\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right)\right) - \ln\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right).$$

Różniczka zupełna tej funkcji wynosi

$$d(\ln(n)) = \frac{d(n)}{n} = \frac{\cos\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right) \cdot \left(d\left(\frac{\alpha}{2}\right) + d\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right)} - \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot d\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Z ostatniej równości po zastąpieniu różniczek  $d\alpha$ ,  $d\gamma$  niepewnościami pomiarowymi  $u_\alpha$ ,  $u_\gamma$  otrzymujemy wzór na wartość niepewności względnej

$$\frac{u_n}{n} = \frac{1}{2} \left| \operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right| u_\alpha + \frac{1}{2} \left| \operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right) \right| u_\gamma,$$

a po pomnożeniu przez  $u_n$  – wzór na niepewność bezwzględną współczynnika załamania

$$u_n = \frac{u_n}{n} n = \left| \left( \frac{\cos\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} - \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right) \frac{u_\alpha}{2} + \left( \frac{\cos\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right) \frac{u_\gamma}{2} \right|.$$

Taką samą postać wyrażenia na  $u_n$  możemy otrzymać obliczając różniczkę zupełną współczynnika załamania  $n$ , traktując go jako funkcję zmiennych niezależnych  $\alpha$  i  $\gamma$  i stosując (2.80). Zainteresowanym proponujemy samodzielne sprawdzenie, że tak jest.

**Uwaga!** Jeżeli podczas obliczeń wartości niepewności złożonej bierzemy pod uwagę niepewności wynikające z klas mierników oraz niepewności wielkości wyznaczonych na podstawie serii pomiarów metodami statystycznymi (opisanymi w rozdziale 2.2), to warto pamiętać, że niepewności obliczone z klas mierników są maksymalnymi wartościami niepewności, tj. solidny producent zapewnia nas, że niepewność poprawnie wykonanego pomiaru wyprodukowanym przez niego miernikiem nie jest większa od obliczonej na podstawie klasy! W takim przypadku za niepewność pomiarów wielkości wyznaczonych na podstawie serii pomiarów należy przyjąć  $u_x = 3s_{\bar{x}}$ . Taki sposób postępowania zapewnia **jednakowy poziom ufności**.



### 3. GRAFICZNE OPRACOWANIE WYNIKÓW POMIARÓW

Celem pomiarów jest bardzo często potwierdzenie związku lub znalezienie zależności między wielkościami fizycznymi. Pomiar polega na wyznaczaniu wartości  $y$  wielkości  $Y$ , odpowiadających wartościom  $x$  wielkości  $X$ , które są zmieniane podczas doświadczenia.

Przykładem może być pomiar zależności natężenia prądu od częstotliwości w obwodzie zawierającym rezystancję, indukcyjność i pojemność elektryczną. Zadanie pomiarowe polega na wyznaczeniu zależności wielkości  $Y$  (natężenia prądu) od wielkości  $X$  (częstotliwości) przy ustalonym napięciu zasilającym badany układ.

Wyniki takich pomiarów są przedstawiane najczęściej w formie graficznej – wykresu ilustrującego badany związek, w naszym przypadku zależności natężenia prądu od częstotliwości. W następnym podrozdziale opisano zasady sporządzania wykresów w prostokątnym i biegunowym układzie współrzędnych.

#### 3.1. Rysowanie wykresów

Wykresy najczęściej rysujemy we współrzędnych kartezjańskich. Wykonujemy je ręcznie lub za pomocą komputera.

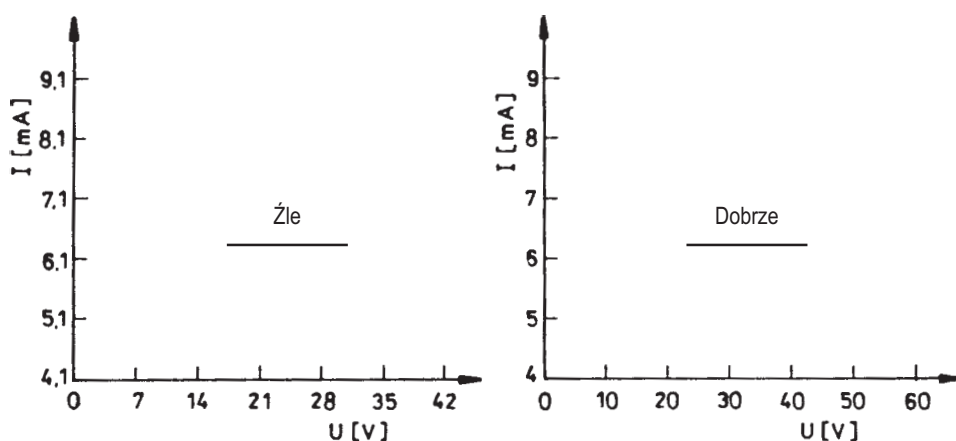
Wykresy sporządzane ręcznie rysujemy na papierze milimetrowym formatu A4 lub A5. Pierwszą czynnością, jaką musimy wykonać jest dobór odpowiednich skal na osiach  $y$  oraz  $x$ .

Dobierając skale wykresu kierujemy się następującymi zasadami:

1. Wykres powinien obejmować wszystkie (lub prawie wszystkie) punkty pomiarowe.
2. Skale muszą być tak dobrane, aby format wykresu był zbliżony do kwadratu lub formatu papieru milimetrowego.
3. Działki skali wykresu wybieramy tak, aby można było łatwo znaleźć wartości współrzędnych punktu (wartości wielkości mierzonych) – działki powinny mieć „okrągłe” wartości (np. 5, 10, 20, 25 mm, nie zaś 5,5; 10,6; 12 mm) i odpowiadać również „okrągłym” wartościom wielkości mierzonych, np. 1, 2, 4, 5, 10 jednostek. Należy unikać liczb 3 i 7 oraz ich wielokrotności.

4. Początek układu współrzędnych wybieramy tak, aby wartości najmniejsze leżały w pobliżu osi układu (wykres nie musi zaczynać się od zera!). Natomiast długość osi dobieramy tak, aby wartości maksymalne leżały w pobliżu ich końców. Równoczesne spełnienie wymagań stawianych w punktach 2–4 wymaga pewnej wprawy. **Osie układu muszą być opisane.** Obok osi należy podać nazwę wielkości lub powszechnie stosowany skrót oraz jednostki, np.  $I$  [mA],  $U$  [kV],  $l$  [mm],  $t$  [ms],  $T$  [K], natężenie światła [jednostki względne]. Działki główne (odpowiadające *okrągłym* wartościom) powinny być również opisane. Przykłady poprawnie i źle dobranych skal i opisanych osi wykresów przedstawiono na rys. 3.1.

Po przygotowaniu osi na wykres nanosimy **punkty pomiarowe**. Punkty te nie mogą być oznaczane kropkami, ponieważ podczas sporządzania wykresu większość z nich stanie się niewidoczna. Kropki służą tylko do oznaczania położenia punktów

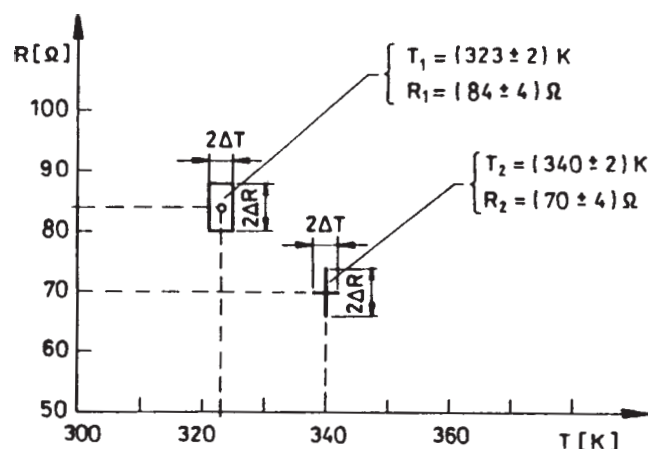


Rys. 3.1. Przykłady poprawnie i źle dobranych i opisanych osi wykresów

pomiarowych przed ich właściwym oznaczeniem. **Punkty pomiarowe zaznaczamy** kółkami, krzyżykami, trójkątami lub innymi **figurami geometrycznymi** tak, aby **środek figury znalazł się w miejscu o współrzędnych odpowiadających danemu punktowi**. Wielkość figur oznaczających punkty pomiarowe dobieramy tak, aby były dobrze widoczne (rys. 3.2). Zwróćmy uwagę na to, że **wynikiem eksperymentu są punkty pomiarowe**, nie zaś krzywa, za pomocą której te punkty połączono!

Jeśli zamieszczamy na jednym wykresie kilka zależności, to punkty pomiarowe odpowiadające poszczególnym zależnościom powinny różnić się wyraźnie, a ich opis (legendę) należy zamieścić pod wykresem lub na wolnej części wykresu (części wykresu, na której brak jest punktów pomiarowych).

**Na wykres, oprócz punktów pomiarowych, nanosimy niepewności pomiarów.** Niepewności zaznaczamy w postaci prostokąta niepewności, którego środek leży



Rys. 3.2. Oznaczanie niepewności pomiarów na wykresie

w punkcie pomiarowym, a boki są równe podwójnej wartości niepewności pomiaru. Zamiast prostokąta można nanieść krzyż, którego odcinki pionowy i poziomy mają długości odpowiadające wartościom niepewności pomiarów.

W przypadku dużej liczby punktów pomiarowych wystarczy zamieścić niepewności pomiarów dla kilku punktów rozłożonych równomiernie na wykresie (w początkowej, środkowej i końcowej części lub na początku i końcu przedziału, w którym niepewność ma stałą wartość). Jeżeli niepewności pomiarów są mniejsze od rozmiarów figur oznaczających punkty pomiarowe, to nie nanosimy ich na wykres, jednakże na wykresie lub pod nim powinna się znaleźć odpowiednia informacja.

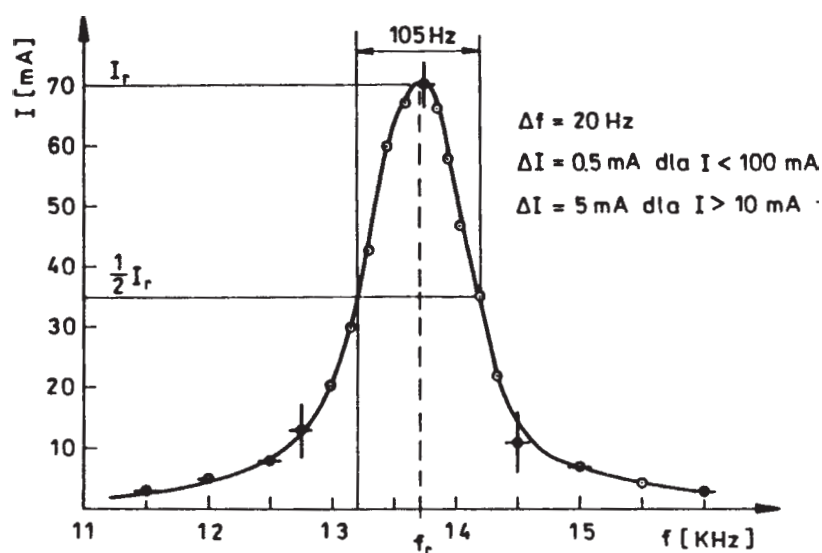
Rysując krzywą odzwierciedlającą badaną zależność, należy pamiętać, że większość zjawisk obserwowanych w przyrodzie jest opisywana funkcjami gładkimi (różniczkowalnymi), dlatego **łączenie punktów pomiarowych krzywą łamaną jest niedopuszczalne**. Krzywą rysujemy tak, aby przechodziła w pobliżu możliwie największej liczby punktów i aby *lokalnie* liczba punktów leżących po obu jej stronach była jednakowa. Jeżeli zależność między badanymi wielkościami jest liniowa, to **prostą** rysujemy za pomocą **przeźroczystej linijki**, gdy **zależność jest nieliniowa** korzystamy z **przeźroczystych krzywików**. Obecnie dostępne są krzywiki wykonane z elastycznych materiałów umożliwiające dopasowanie ich kształtu do rysowanego wykresu.

### Uwaga

Wykonując pomiary, których wyniki będziemy przedstawiali w formie wykresu, staramy się tak zmieniać wartości wielkości mierzonych, aby odległości między punktami były w przybliżeniu jednakowe. Zalecenie to jest słuszne, jeżeli badana zależność nie wykazuje osobliwości. Kiedy zależność wykazuje osobliwość (np. ostre

maksimum), z dala od niej punkty pomiarowe mogą leżeć rzadziej, natomiast w jej pobliżu punkty pomiarowe powinny być wyznaczone gęściej. Takie rozmieszczenie punktów pomiarowych pozwala dokładnie określić współrzędne osobliwości (np. współrzędne maksimum). Przykład poprawnie wykonanego wykresu zależności wykazującej maksimum przedstawiono na rys. 3.3.

Na wykresie mogą być zamieszczone dodatkowe informacje i oznaczenia potrzebne do dalszego opracowania wyników. Na rysunku 3.3 zaznaczono częstotliwość rezonansową, natężenie prądu przy tej częstotliwości oraz szerokość połówkową krzywej rezonansowej. Informacje te potrzebne są do wyznaczenia dobroci układu rezonansowego.



Rys. 3.3. Przykład poprawnie wykonanego wykresu

Niekiedy jest wskazane narysowanie najbardziej interesującej części wykresu w powiększeniu lub innej skali. Jeżeli na wykresie znajduje się wolne miejsce, możemy je wykorzystać na zamieszczenie tego fragmentu. Rysując ten fragment należy pamiętać o narysowaniu i opisaniu osi. Powiększona część nie może zasłaniać właściwego wykresu (stanowi tylko jego uzupełnienie – patrz rys. 3.4b).

### 3.1.1. Rysowanie wykresów we współrzędnych biegunowych

Wykresy, jak już wspomniano, najczęściej rysujemy we współrzędnych kartezjańskich. Niekiedy wskazane jest jednak narysowanie wykresu w innym układzie (np. układzie biegunowym).

Przykładami takich wykresów są charakterystyki kierunkowe żarówki lub źródła mikrofal – klistronu. Na takich wykresach najpierw wybieramy środek. Ze środka rysujemy promień pod kątem, dla którego wykonano pomiar. Długość promienia odpowiada wartości mierzonej. W sprzedaży są gotowe papiery z naniesioną podziałką kątową i równoodległymi współśrodkowymi okręgami, przeznaczone do rysowania wykresów we współrzędnych biegunowych.

Rysowanie wykresów we współrzędnych biegunowych sprawia niektórym studentom sporo kłopotów, dlatego przedstawimy przykład takiego wykresu.

### Przykład 25

Graficzne opracowanie wyników badania charakterystyki kierunkowej klistronu. Wyniki pomiarów przedstawiono poniżej.

$\alpha$ [°]	0,0	2,5	5,0	7,5	10,0	12,5	15,0	17,5
$I$ [mA]	20,5	19,5	15,2	9,7	4,8	1,9	0,9	0,5

(Dokładność pomiaru kąta  $\Delta\alpha = \pm 0,5^\circ$ , pomiary prądu wykonano za pomocą miliamperomierza klasy 1. Trzy pierwsze pomiary prądu zostały wykonane na zakresie 30 mA, dwa kolejne na zakresie 10 mA, a pozostałe na zakresie 3 mA).

Wykresy zależności natężenia prądu od kierunku we współrzędnych biegunowych i kartezjańskich przedstawiono na rys. 3.4a i 3.4c. Porównując rysunki 3.4a i 3.4c dochodzimy do wniosku, że rys. 3.4a bardziej przemawia do naszej wyobraźni i lepiej ilustruje rozkład kątowy energii emitowanych mikrofal. Na rysunku 3.4b podano sposób nanoszenia niepewności pomiarów na wykresie we współrzędnych biegunowych. Należy jednak zwrócić uwagę, że format rysunku 3.4a znacznie odbiega od kwadratu, a punkty pomiarowe przy większych kątach zlewają się. Wykres przedstawiony na rys. 3.4c jest mniej pogładowy, natomiast informacje o rozkładzie kątowym są bardziej dokładne.

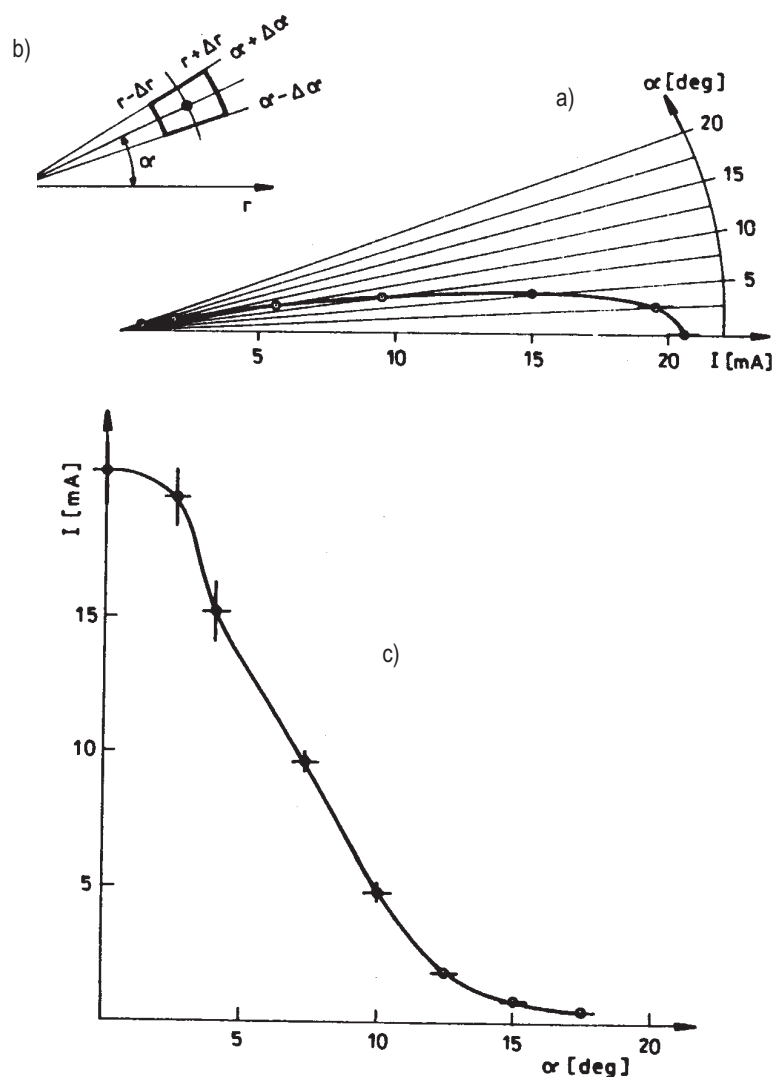
Wybór układu współrzędnych należy do opracowującego wyniki pomiarów. Wybierając układ współrzędnych, powinniśmy zwracać uwagę na pogładowość i przejrzystość wykresu.

## 3.2. Odczytywanie wartości wielkości fizycznych z wykresów

Często zachodzi konieczność odczytania z wykresu wartości pewnych wielkości fizycznych.

### Przykład 26

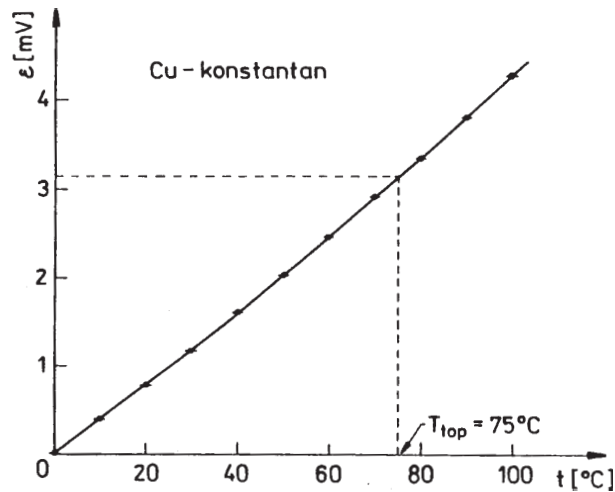
Wykonaliśmy pomiary zależności siły termoelektrycznej od temperatury dla termopary miedź–konstantan (rys. 3.5), następnie wyznaczyliśmy krzywą stygnięcia dla



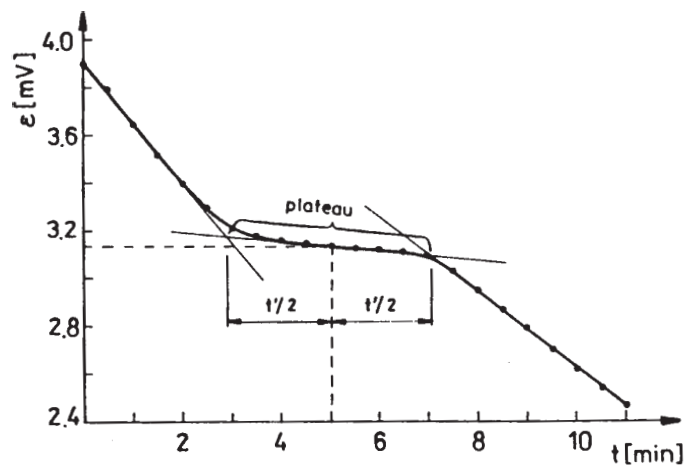
Rys. 3.4. Charakterystyka kierunkowa klustronu we współrzędnych biegunowych (a) oraz w układzie kartezjańskim (c). Rysunek (b) przedstawia sposób nanoszenia niepewności pomiarów we współrzędnych biegunowych

stopu Wooda. Krzywa stygnięcia (rys. 3.6) przedstawia zależność siły termoelektrycznej od czasu, wyznaczonej wtedy, gdy jedno ze spojeń termopary było umieszczone w stygnącym stopie (drugie spojenie znajdowało się w mieszaninie wody z lodem).

Naszym zadaniem jest wyznaczenie temperatury krzepnięcia stopu. Z krzywej stygnięcia wyznaczamy napięcie odpowiadające środkowi *plateau*, natomiast z wy-



Rys. 3.5. Zależność siły termoelektrycznej od temperatury dla termopary miedź–konstantan



Rys. 3.6. Krzywa stygnięcia stopu Wooda

kresu zależności siły termoelektrycznej od temperatury odczytujemy temperaturę krzepnięcia.

### 3.2.1. Wyznaczanie „nachylenia wykresu”

„Nachylenie krzywej” (tangens kąta nachylenia stycznej do krzywej) będącej wykresem zależności między wielkościami fizycznymi ma określony sens fizyczny, np. nachylenia zależności wydłużenia względnego ciała i zależności względnej zmiany

oporu od temperatury mają odpowiednio sens współczynnika rozszerzalności termicznej i temperaturowego współczynnika oporu.

Często powtarzanym przez studentów błędem jest pomiar kąta nachylenia stycznej do wykresu (w przypadku zależności liniowej nachylenia prostej) za pomocą kątomierza i wyznaczenie wartości tangensa kąta nachylenia. Argumentacja jest następująca: pochodna funkcji jest równa tangensowi kąta nachylenia stycznej do wykresu. Zwróćmy jednak uwagę na to, że długość działki jest dobierana arbitralnie. Jeżeli narysujemy dwa wykresy na podstawie tych samych danych dobierając różne działki, np. na osi  $x$ , to otrzymamy różne wartości nachylenia! Dodajmy, że na osiach są naniesione wartości wielkości fizycznych, a więc nachylenie jest wielkością mianowaną (w naszych przykładach  $1/K$ ).

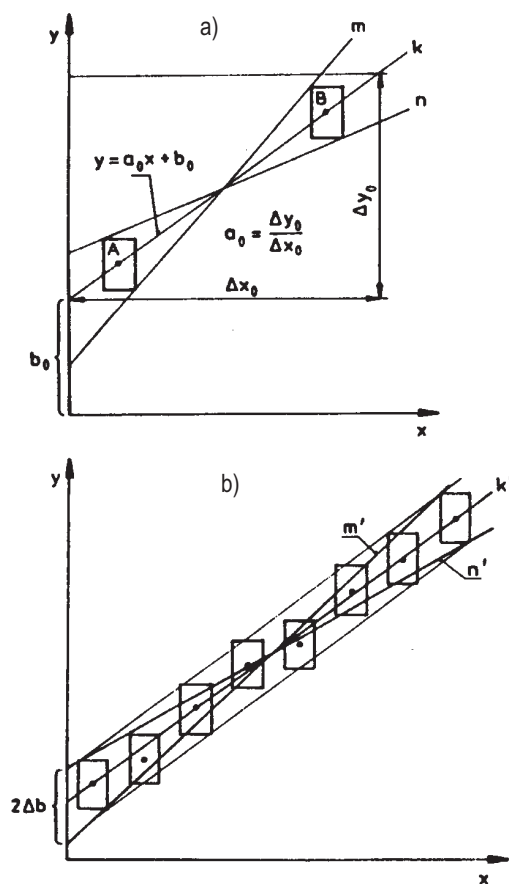
Aby wyznaczyć nachylenie stycznej do wykresu, należy z wykresu odczytać przyrost wielkości naniesionej na osi  $x$  oraz odpowiadający mu przyrost wielkości naniesionej na osi  $y$ . Obliczając stosunek tych przyrostów otrzymamy wartość tangensa nachylenia stycznej, czyli  $dy/dx$  (w przypadku zależności liniowej współczynnik kierunkowy  $a$  prostej  $y = ax + b$ ).

Warto zwrócić uwagę na sposób szacowania dokładności, z jaką wyznaczamy wartość współczynnika kierunkowego prostej (stycznej).

W geometrii euklidesowej zakłada się, że przez dwa punkty przechodzi tylko jedna prosta. W fizyce (i nie tylko) mamy do czynienia z punktami pomiarowymi, które są obciążone określonymi niepewnościami – „punkty” te są polami, których powierzchnia jest określona wartościami niepewności pomiarów. **Przez dwa punkty pomiarowe można przeprowadzić nieskończenie wiele prostych** (patrz również artykuł [8]). Trzy spośród możliwych prostych przedstawiono na rysunku 3.7a. Za współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez te punkty przyjmujemy wartość współczynnika wyznaczonego dla prostej oznaczonej przez  $k$ , natomiast proste  $m$  i  $n$  są skrajnymi prostymi mieszczącymi się w granicach niepewności pomiarowych. Przyjmujemy, że maksymalna wartość niepewności wyznaczenia współczynnika kierunkowego jest równa połowie różnicy między wartościami współczynników wyznaczonych dla prostych  $m$  i  $n$ .

Z rysunku 3.7b wynika, że wzrost liczby punktów pomiarowych oraz rozszerzenie zakresu pomiaru umożliwia bardziej precyzyjne wyznaczenie parametrów prostej. Na rysunku przedstawiono sposób szacowania niepewności, z jakim wyznaczona została wartość współczynnika kierunkowego prostej. Wartości współczynników  $a$  i  $b$  w równaniu prostej, opisującej zależność między dwoma wielkościami fizycznymi, można wyznaczyć korzystając z **regresji liniowej**, która zostanie omówiona w rozdziale 4. Metoda ta pozwala obliczać także niepewności, jakimi obciążone są wartości tych współczynników.





Rys. 3.7. Graficzne wyznaczanie współczynników  $a$  i  $b$  prostej oraz ich niepewności

### 3.3. Linearyzacja zależności między wielkościami fizycznymi

Kończąc omawianie graficznego opracowywania wyników pomiarów, warto poruszyć problem linearyzacji zależności między wielkościami fizycznymi, czyli takiego doboru skal na osiach wykresu lub wielkości nanoszonych na wykres, który pozwoli otrzymać zależność liniową.

*Tekst tego podrozdziału należy traktować jako poradnik, który może być przydatny przy rozwiązywaniu konkretnych problemów.*

#### Przykład 27

Zależność oporu półprzewodnika od temperatury jest opisana równaniem

$$R = R_o \exp\left(-\frac{\Delta E}{k_B T}\right).$$

Jest to zależność wykładnicza. Po zlogarytmowaniu jej obustronnie otrzymamy

$$\ln(R) = \ln R_o - \frac{\Delta E}{k_B T}.$$

Jeżeli sporządzimy wykres, na którym na osi  $OY$  odłożymy  $\ln(R)$ , natomiast na osi  $OX$  odłożymy  $1/T$ , to wykres ten będzie prostą, której współczynnik kierunkowy jest równy  $-\Delta E/k_B$ . Wyznaczenie wartości tego współczynnika umożliwia obliczenie energii aktywacji nośników ładunków  $\Delta E$ .

**W przyrodzie i technice bardzo często obserwujemy zależności wykładnicze.**

Oto kilka przykładów:

- zależność liczby rozpadów jąder promieniotwórczych od czasu,
- zależność natężenia promieniowania (natężenie światła lub fali sprężystej) od grubości absorbenta,
- zależność prędkości od czasu dla ciał poruszających się w ośrodku lepkiem, przy założeniu, że na ciało działa siła oporu ośrodka proporcjonalna do prędkości,
- zależność amplitudy drgań tłumionych od czasu,
- zależność temperatury ciała stygnącego od czasu,
- zależność natężenia prądu od czasu przy rozładowaniu kondensatora,
- prawa Moore’a opisujące rozwój technologii mikroelektronicznej [15].

Można postawić retoryczne pytanie: Coś chyba łączy te zależności?!

Sporządzając wykresy w skali półlogarytmicznej (na osi  $y$  nanosimy wartości logarytmu z badanej wielkości), możemy wyznaczyć wartości parametrów charakteryzujących wymienione zjawiska, np.: okres połowicznego rozpadu, grubość pochłaniania połowkowego lub współczynnik absorpcji, czas relaksacji lub logarytmiczny dekrement tłumienia. Do rysowania tego typu wykresów przydatny jest specjalny papier milimetrowy ze skalą półlogarytmiczną (korzystając z takiego papieru, nie musimy logarytmować wartości zmierzonych).

**Jeżeli związek między wielkościami ma charakter potęgowy, to zaleca się wykonać wykres w skali podwójnie logarytmicznej** (tzn. na obu osiach układu współrzędnych należy zastosować skalę logarytmiczną).

### Przykład 28

W niskich temperaturach ciepło właściwe ciał stałych zależy od temperatury bezwzględnej w następujący sposób:  $c_p = KT^\gamma$  ( $K = \text{const}$ ). Całkowita energia emitowana przez ciało czarne zależy od jego temperatury bezwzględnej

$$E = S\sigma_{SB}T^\alpha,$$

gdzie  $S$  jest tu powierzchnią ciała, natomiast  $\sigma_{SB}$  stałą Stefana–Boltzmanna. Logarytmując ostatnią zależność otrzymamy

$$\ln(E) = \ln(S\sigma_{SB}) + \alpha \ln T.$$

Sporządzając wykres zależności  $\ln(E)$  od  $\ln(T)$  możemy wyznaczyć współczynnik kierunkowy prostej, a więc wartość wykładnika  $\alpha$ , a także wartość  $\ln(\sigma_{SB}S)$  umożliwiającą wyznaczenie stałej Stefana–Boltzmanna  $\sigma_{SB}$ .

Podamy sposoby linearyzacji jeszcze kilku typów zależności, z którymi możemy spotykać się w laboratorium.

Zależność oświetlenia  $E$  od odległości  $r$  od punktowego źródła światła określona jest równaniem  $E = I/r^k$ . Rysując wykres zależności  $E(1/r^k)$  uzyskamy linię prostą. Analiza eksperymentalnie uzyskanych wyników pomiarów umożliwi nam określenie warunków, w których źródło światła można traktować jako punktowe (źródło światła będziemy uważać za punktowe w zakresie takich  $r$ ; dla których spełniona jest przedstawiona wyżej zależność). Zwróćmy uwagę na to, że zależność liniową można uzyskać, rysując wykres w skali podwójnie logarytmicznej. Taki wykres umożliwia wyznaczenie wartości wykładnika potęgowego  $k$ . Decyzja o wyborze skali należy do opracowywującego wyniki pomiarów i jest uzależniona od celu, jaki chciano osiągnąć.

Zależność przenikalności elektrycznej ferroelektryków (oraz przenikalności magnetycznej ferromagnetyków) od temperatury, w pewnym otoczeniu temperatury przemiany fazowej, jest opisana prawem Curie–Weissa  $\varepsilon = C/(T - T_C)$ , gdzie:  $C$  jest stałą Curie–Weissa,  $T$  – temperaturą, natomiast  $T_C$  – temperaturą Curie–Weissa. W tym przypadku najczęściej sporządza się wykres zależności odwrotności przenikalności elektrycznej  $1/\varepsilon$  jako funkcji temperatury  $T$ . Wykres taki umożliwia określenie zakresu stosowalności wspomnianego wyżej prawa, wyznaczenie stałej  $C$  oraz temperatury  $T_C$ .

Rozpatrzmy zależność oświetlenia powierzchni od kąta, jaki tworzy strumień światła z normalną do tej powierzchni. Oświetlenie jest proporcjonalne do cosinusa tego kąta,  $E \propto \cos \alpha$ . Jeżeli wykreślimy zależność  $\alpha = \arccos(E/E_0)$ , gdzie  $E$  oznacza natężenie oświetlenia powierzchni przy danym kącie padania, natomiast  $E_0$  – oświetlenie tej powierzchni dla kąta padania równego zeru, to otrzymamy zależność liniową.

Z prawa Malusa wynika, że natężenie światła po przejściu przez układ złożony z polaryzatora i analizatora jest dane równaniem  $I = I_0 \cos^2 \alpha$ , gdzie  $I_0$  jest natężeniem światła, gdy płaszczyzny przepuszczania polaryzatora i analizatora są równoległe, natomiast  $\alpha$  jest kątem jaki tworzą te płaszczyzny. Przekształcając powyższą zależność dostajemy  $\alpha = \arccos \sqrt{I/I_0}$ . Jeżeli wykreślimy zależność  $y = \arccos(x)$ , gdzie  $y = \alpha$ , natomiast  $x = I/I_0$ , to otrzymamy prostą (jeżeli wykresem tej zależności jest prosta, to znaczy, że potwierdziliśmy słuszność prawa Malusa).

Ostatnim przykładem linearyzacji jaki omówimy jest zależność występująca w ćwiczeniu dotyczącym liniowego efektu elektrooptycznego.

Zależność natężenia wiązki światła  $I$  (po przejściu przez układ optyczny) od napięcia  $U$  przykładanego do komórki Pockelsa jest opisana równaniem

$$I = I_0 \cos^2 \frac{k\pi U}{\lambda_0},$$

gdzie:  $k$  – stała,  $I_0$  – maksymalna wartość natężenia światła,  $\lambda_0$  – długość fali świetlnej. Aby wyrazić natężenie wiązki przechodzącej przez układ optyczny jako funkcję napięcia, równanie przekształcamy do postaci

$$\arccos \sqrt{\frac{I}{I_0}} = \frac{k\pi}{\lambda_0} U.$$

Sporządzając wykres zależności  $\arccos \sqrt{I/I_0}$  od napięcia  $U$  otrzymamy linię prostą, której tangens nachylenia wynosi  $k\pi/\lambda_0$ . Korzystając z tego wykresu możemy wyznaczyć *napięcie półfali*, to jest napięcie jakie należy przyłożyć do komórki Pockelsa, aby układ optyczny przeprowadzić ze stanu maksymalnego przepuszczania światła do całkowitego wygaszania.

Przytoczone wyżej przykłady ilustrują, w jaki sposób, korzystając z różnego typu zależności (nawet bardzo skomplikowanych), przy umiejętnym ich opracowaniu, można sprawnie wyznaczać wartości różnych wielkości fizycznych. Podane w przykładach pojęcia i zjawiska są opisane we wstępach do poszczególnych ćwiczeń.

## 4. METODY REGRESJI

W wielu przypadkach związek między wielkością wyjściową  $Y$  i wielkościami wejściowymi  $X_1, X_2, \dots, X_m$  fizycznymi jest dany zależnością funkcyjną

$$Y = g(X_1, X_2, \dots, X_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l), \quad (4.1)$$

którą znamy z dokładnością do parametrów  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$ .

Funkcja  $g(X_1, X_2, \dots, X_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l)$  może być funkcją zarówno liniową, jak i nieliniową względem parametrów  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$  (patrz przykłady podane na końcu tego rozdziału).

Współczynniki  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$  wyznaczamy, na podstawie danych doświadczalnych, za pomocą **metody regresji**.

Zajmiemy się najpierw oceną współczynników  $\beta_0, \beta_1$  i  $\sigma$  na podstawie serii niezależnie wykonanych w warunkach powtarzalności pomiarów  $(x_i, y_i)$ , gdzie  $i = 1, 2, \dots, n$ , wielkości fizycznych  $X$  oraz  $Y$  związanych ze sobą zależnością liniową

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon, \quad (4.2)$$

w której nieznanymi parametrami są współczynniki  $\beta_0$  i  $\beta_1$  ( $m = 1$ ); litera  $\varepsilon$  oznacza tutaj niemierzalną wielkość podlegającą rozkładowi normalnemu  $N(0, \sigma^2)$ , którego wariancja  $\sigma^2$  nie jest znana. Tak określony model nazywa się modelem regresji liniowej, a parametry  $\beta_0$  i  $\beta_1$  współczynnikami regresji. Prosta o równaniu  $y = \beta_0 + \beta_1 x$  nazywamy prostą regresji.

Aby ocenić współczynniki regresji  $\beta_0$  i  $\beta_1$  zastosujemy metodę najmniejszych kwadratów<sup>1</sup>. Polega ona na przyjęciu za ocenę parametrów wartości  $\beta_0 = b_0$  i  $\beta_1 = b_1$ , które minimalizują następującą sumę kwadratów (stąd nazwa – metoda najmniejszych kwadratów)

$$Q = Q(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2.$$

Jak wiadomo z analizy matematycznej, wartościami tymi będą rozwiązania układu równań

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta_0} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0,$$

<sup>1</sup>W tym podejściu zakładamy, że wartości  $x_1, x_2, \dots, x_n$  są zmierzone dokładnie [5].

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta_1} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) x_i = 0,$$

które wyrażają się wzorami

$$b_1 = \frac{s(x, y)}{s^2(x)}, \quad b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}, \quad (4.3)$$

gdzie

$$s(x, y) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}),$$

$$s^2(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Jeśli przyjmiemy, że wielkości  $x_1, x_2, \dots, x_n$  są określone z dużą dokładnością (w stosunku do dokładności  $y$ -ów), tak, że możemy uznać je za wielkości dokładne, to wariancje ocen  $b_0$  i  $b_1$  wyrażają się wzorami

$$s^2(b_0) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sigma^2, \quad s^2(b_1) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sigma^2. \quad (4.4)$$

Wariancję  $\sigma^2$  możemy ocenić na podstawie wzoru

$$s^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2. \quad (4.5)$$

Wielkość wyjściową  $Y$  (ściślej – jej wartość średnią) odnoszącą się do wielkości wejściowej  $X$  oceniamy na podstawie wzoru

$$y = b_0 + b_1 x. \quad (4.6)$$

Niepewność złożoną  $u_y$  (odchylenie standardowe) oceny  $y = b_0 + b_1 x$  wyraża się wzorem (patrz podręcznik [5])

$$u_y = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} s,$$

gdzie  $x$  jest liczbą nie mniejszą od najmniejszej wartości zmierzonej i jednocześnie nie większą od największej wartości zmierzonej.

W niektórych przypadkach należy przyjąć, że współczynnik  $\beta_0$  jest równy zeru, czyli że model regresji jest postaci

$$Y = \beta X + \varepsilon.$$

Wówczas oceną współczynnika  $\beta$ , wyznaczoną metodą najmniejszych kwadratów, jest

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Wariancja tej oceny (przy podobnych, jak poprzednio założeniach) wyraża się wzorem

$$s^2(b) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2},$$

a ocena wariancji  $\sigma^2$  wzorem

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - bx_i)^2.$$

Oceną  $Y$ , odnoszącą się do wielkości wejściowej  $X$ , jest

$$y = bx,$$

a jej niepewnością złożoną (patrz [5]) jest

$$u_y = \sqrt{\frac{x^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}} s.$$

O **regresji liniowej wielokrotnej** mówimy wtedy, gdy  $Y$  zależy liniowo od  $m > 1$  wielkości wejściowych  $X_1, X_2, \dots, X_m$ , tzn. gdy

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_m X_m + \varepsilon. \quad (4.7)$$

Liniowość należy tutaj rozumieć względem współczynników  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$  zwanych współczynnikami regresji. Można je również ocenić metodą najmniejszych kwadratów i wyznaczyć ich odchylenia standardowe. Obliczenia współczynników regresji i ich odchyłeń standardowych zawiera każdy pakiet programów do obliczeń statystycznych.

Pokażemy teraz jak wyznaczane są współczynniki regresji w przypadku, gdy (4.1) ma postać

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \varepsilon, \quad (4.8)$$

czyli, gdy  $Y$  jest funkcją kwadratową zmiennej  $X$ . Naszym zadaniem jest oszacowanie współczynników regresji  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$  na podstawie serii wyników  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Sposób postępowania w tym przypadku jest analogiczny do przedstawionego wyżej.

Minimalizacja sumy kwadratów

$$Q = Q(b_0, b_1, b_2) = \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_i - b_2 x_i^2)^2.$$

proceedzi do liniowego układu trzech równań:

$$nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^n x_i + b_2 \sum_{i=1}^n (x_i)^2 = \sum_{i=1}^n y_i \quad (4.9)$$

$$b_0 \sum_{i=1}^n x_i + b_1 \sum_{i=1}^n (x_i)^2 + b_2 \sum_{i=1}^n (x_i)^3 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (4.10)$$

$$b_0 \sum_{i=1}^n (x_i)^2 + b_1 \sum_{i=1}^n (x_i)^3 + b_2 \sum_{i=1}^n (x_i)^4 = \sum_{i=1}^n (x_i)^2 y_i. \quad (4.11)$$

Rozwiązanie tego układu równań można otrzymać analitycznie za pomocą odpowiednich formuł algebry liniowej albo numerycznie stosując programy z pakietów [16–29] wymienionych dalej w tym i następnym rozdziale.

Rozpatrzenie przypadku, gdy  $Y$  jest wielomianem  $m$ -tego ( $m \geq 3$ ) stopnia względem  $X$ , jest – w świetle tego co tutaj przedstawiliśmy – zadaniem dość prostym. Sprowadza się do rozwiązania układu równań liniowych  $(m+1) \times (m+1)$  względem  $(m+1)$  niewiadomych.

### Uwaga

U1. W przypadku aproksymacji wielomianem liczba punktów pomiarowych musi być większa od stopnia wielomianu. Na pytanie o ile winna być większa, czytelnik powinien odpowiedzieć samodzielnie. Wskazówka! Należy uważnie przeczytać podrozdział dotyczący regresji liniowej.

U2. Wiele programów użytkowych (arkusze kalkulacyjne, pakiety graficzne) ma możliwość aproksymacji danych za pomocą wielomianów (których stopień można ustalać) lub funkcji innego typu (np.  $\ln$ ,  $\exp$  itp). Podczas opracowywania wyników pomiarów zalecamy korzystanie z tego typu oprogramowania.



## Przykłady

### Przykład 29

Wykonano serię  $n$  pomiarów oporu przewodnika  $R(T_i)$  w temperaturach  $T_i$ , którego opór w temperaturze  $T_0$  jest znany i wynosi  $R_0$ . Należy wyznaczyć współczynnik temperaturowy oporu  $\alpha$ , korzystając z liniowego prawa

$$R(T_i) = R_0(1 + \alpha(T_i - T_0)).$$

### Przykład 30

Wyznaczono doświadczalnie wydłużenia względne  $\Delta l_i/l_0$  drutu o znanym polu przekroju poprzecznego  $S$  poddanego działaniu siły rozciągającej  $F_i$ , gdzie  $i = 1, 2, \dots, n$ . Należy wyznaczyć moduł Younga  $E$ . W obliczeniach korzystamy z prawa Hooke'a

$$\frac{\Delta l_i}{l_0} = \frac{F_i}{SE}.$$

### Przykład 31

Zmierzono opór elektryczny półprzewodnika  $R(T_i)$  w temperaturach  $T_i$ , gdzie  $i = 1, 2, \dots, n$ . Należy wyznaczyć wartość przerwy energetycznej  $\Delta E$  wiedząc, że zależność oporu od temperatury ma postać

$$R_i(T_i) = R_0 \exp\left(-\frac{\Delta E}{k_B T_i}\right),$$

gdzie  $k_B$  jest stałą Boltzmanna. Do obliczeń  $\Delta E$  wygodnie jest zlogarytmować za-

leżność  $R(T)$  i wykorzystać wzór  $\ln\left(\frac{R_i}{R_0}\right) = -\frac{\Delta E}{k_B T_i}$ , który określa **liniową** zależność

między  $\ln\left(\frac{R_i}{R_0}\right)$  oraz  $1/T_i$ . Rolę współczynnika kierunkowego  $a$  odgrywa tutaj czynnik  $\left(-\frac{\Delta E}{k_B}\right)$ .

### Przykład 32

W obwodzie elektrycznym prądu zmiennego, zawierającym opór  $R$ , indukcyjność  $L$  oraz pojemność elektryczną  $C$ , zmierzono natężenia skuteczne prądu  $I_i^{sk}$ , odpowiadające zmienianym wartościom napięć skutecznych  $U_i^{sk}$ , gdzie  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Należy wyznaczyć zawadę  $Z$  obwodu. W obliczeniach korzystamy z prawa Ohma dla prądu przemiennego:  $U_i^{sk} = Z I_i^{sk}$ .

### Przykład 33

Zmierzono emitancję  $E_i$  modelu ciała doskonale czarnego dla różnych wartości temperatury  $T_i$  tego ciała, gdzie  $i = 1, 2, \dots, n$ . Posługując się prawem Stefana–Boltzmannna  $E(T) = \sigma_{SB} T^\alpha$  należy wyznaczyć wartość współczynnika  $\sigma_{SB}$  (stała Stefana–Boltzmannna) oraz wykładnika  $\alpha$  występującego przy  $T$ . Obliczenia uproszczą się znacznie, jeśli zlogarytmujemy obie strony równania opisującego prawo Stefana–Boltzmannna. Wtedy  $\ln E = \ln \sigma + \alpha \ln T$ .

## 4.1. Regresja nieliniowa

Model (4.1), który jest nieliniowy względem parametrów, nazywamy modelem **regresji nieliniowej**. Takim przykładem jest model wykładniczy

$$Y = \beta_0 \exp(\beta_1 X) + \varepsilon. \quad (4.12)$$

Wszystkie symbole pojawiające się w tym wzorze oznaczają to samo co poprzednio. Jeśli dysponujemy serią  $n$  niezależnych pomiarów  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , (wykonanych w warunkach powtarzalności), to możemy nieznane współczynniki  $\beta_0$  i  $\beta_1$  również ocenić metodą najmniejszych kwadratów. Teraz ocenami  $\beta_0$  i  $\beta_1$  będą liczby, oznaczymy je przez  $b_0$  i  $b_1$ , które minimalizują funkcję

$$Q = Q(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 \exp(\beta_1 x_i))^2. \quad (4.13)$$

Jeśli obliczymy pochodne cząstkowe i przyrównamy je do zera, to otrzymamy nieliniowy układ równań

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 \exp(\beta_1 x_i)) = 0, \quad (4.14)$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 \exp(\beta_1 x_i)) x_i \exp(\beta_1 x_i) = 0. \quad (4.15)$$

Jak widzimy otrzymany układ równań nie ma prostego analitycznego rozwiązania. Tego typu układy rozwiązujemy metodami numerycznymi. Opracowano wiele metod komputerowych przybliżonego rozwiązywania takich układów równań. Przy-

kładowo pakiet *STATISTICA*<sup>2</sup> (opisany szczegółowo w podręcznikach [16–19]) zawiera procedury numeryczne oparte na metodzie Newtona (*Quasi-Newton Method*) i metodzie sympleksowej (*Simplex Procedure*). Zainteresowanych odsyłamy także do innych pakietów oprogramowania opisanych w podręcznikach i opracowaniach [20–29]. Dodajmy, że pakiety *STATISTICA* oraz większość wymienionych w następnym rozdziale umożliwiają dokonywanie analizy statystycznej wyników pomiarowych.

---

<sup>2</sup>Produkt firmy StatSoft Inc, USA; jest dostępny w pracowni multimedialnej Wydziału Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej mieszczącej się w sali 140 gmachu A-1. Szczegółowe informacje dotyczące tego oprogramowania można znaleźć w Internecie pod adresami <http://www.statsoft.com/>, <http://www.statsoft.pl/>.

## 5. KOMPUTEROWE OPRACOWANIE WYNIKÓW

Sprawozdanie z wykonanego ćwiczenia laboratoryjnego, obejmujące zagadnienia opisane w następnym rozdziale, może być sporządzone przy użyciu personalnego komputera z wykorzystaniem standardowego edytora tekstu, pakietu graficznego, arkusza kalkulacyjnego lub innego oprogramowania. Do tego celu polecamy programy pakietu *Microsoft Office* (edytor tekstu *Word* i arkusz kalkulacyjny *Excel*), procesory tekstu (np. *TEX*, *LATEX*, *LAMEX*) oraz pakiety graficzne *Grapher*, *Origin* lub inne. Bardzo pożyteczne są także następujące pakiety programów:

- *Matlab* [20–23] – adres w Internecie <http://www.mathworks.com>.
- *Mathematica* [24] – adres elektroniczny <http://www.wolfram.com>).
- *MathCad* [25, 26] – adresy internetowe: <http://www.mathcad.com>, <http://www.mathsoft.com>; ma wiele możliwości edytora tekstu oraz arkusza graficznego i kalkulacyjnego.
- *Derive* [27–29] – adres strony domowej <http://www.derive.com>.
- *Maple* – adres w Internecie <http://www.mapleapps.com>.

Za ich pomocą można dokonywać również statystycznej analizy wyników pomiarowych.

W witrynie dydaktycznej Instytutu Fizyki [30] pod adresem <http://www.if.pwr.wroc.pl/dydaktyka/LPF/programy/index.html> znajduje się kilka programów, którymi można posługiwać się bezpłatnie. Niżej podajemy listę tych programów wraz z krótkimi opisami.

- I. Program ***ŚREDNIA*** – jego autorem jest dr inż. J. Szatkowski (adres strony domowej w Internecie: <http://www.if.pwr.wroc.pl/~szatkowski>). Pozwala obliczać wartość średnią skończonej serii pomiarów (próby) (patrz wzory (2.6), (2.55)), niepewność standardową wartości średniej (patrz wzory (2.10), (2.56)) oraz niepewność standardową pojedynczego pomiaru (patrz wzór (2.8)). Jest przeznaczony do pracy w systemie operacyjnym MS Windows 95/NT i zgodnych z nimi.
- II. Program noszący nazwę ***srednia.pas*** (plik wykonawczy *srednia.exe*) – autorstwa dr. A. Kolarza. Jest zainstalowany także na komputerach w Laboratorium Podstaw Fizyki. Oblicza – po wprowadzeniu wyników pomiarów – wartości:
  - Średniej  $\bar{x}$  serii  $n$  pomiarów.
  - Odchylenia standardowego  $s_x$ .
  - Eksperymentalnego odchylenia standardowego  $s_{\bar{x}}$  średniej arytmetycznej.

- Numer wyniku pomiarowego dającego odchylenie maksymalne.
- Procentową wartość stosunku maksymalnego odchylenia do wartości średniej.

Chcąc skorzystać z programu należy uruchomić zintegrowane środowisko *Turbo Pascala* (wersja wyższa od 4. włącznie; zakładamy, że czytelnik potrafi posługiwać się *Turbo Pascalem*) albo zainicjować plik *srednia.exe* znajdujący się w katalogu *C:\LABOR*. Po uruchomieniu programu ukazuje się jego nazwa oraz informacja o autorze. Dalej postępujemy zgodnie z wyświetlaną instrukcją o następującej treści:

1. Po zapoznaniu się z tym opisem naciskamy *ENTER*.
2. W pierwszym kroku podajemy liczbę pomiarów  $n$  nie mniejszą niż 2 i naciskamy *ENTER*.
3. Zadajemy liczbę miejsc po przecinku, z którą będą obliczane wyniki i naciskamy *ENTER*.
4. Wprowadzamy z klawiatury kolejno  $n$  wartości liczbowych będących wynikami pomiarów; poszczególne dane akceptujemy naciskając każdorazowo *ENTER*; wprowadzona  $i$ -ta wartość ukazuje się na ekranie po symbolach  $x[i]= \dots$ .
5. Wyniki obliczeń są wyświetlane na ekranie. Składa się na nie: wartość średnia, odchylenie standardowe, eksperymentalne odchylenie standardowe wartości średniej, numer wyniku pomiarowego dającego odchylenie maksymalne, procentowa wartość stosunku maksymalnego odchylenia do wartości średniej.
6. Naciśnięcie *ENTER* powoduje pojawienie się graficznego obrazu ilustrującego rozrzut punktów pomiarowych wokół średniej. Powinno to ułatwić eliminację punktów pomiarowych obarczonych błędami grubymi.
7. Po zakończeniu obliczeń z pierwszą serią pomiarów, możemy kontynuować obliczenia wybierając opcję *T* (tak). Wtedy powtarzamy czynności opisane w punktach 2-7. Wybranie opcji *N* (nie)kończy funkcjonowanie programu.
8. Naciskając *ENTER* (patrz pkt. 1) ponownie uruchamiamy program.

III. Program **REGRESJA** – autorem jest dr inż. J. Szatkowski. Umożliwia dopasowanie metodą najmniejszych kwadratów prostej do danej serii pomiarów (patrz rozdział 4). Wyznacza współczynnik kierunkowy  $\beta_1$ , wyraz wolny  $\beta_0$  (patrz wzór (4.2)) oraz ich niepewności (patrz wzory (4.4) i (4.5)). Ponadto program rysuje wykresy. Umożliwia używanie skal: liniowej i logarytmicznej. Jest przeznaczony do pracy w systemie operacyjnym *MS Windows 95/NT* i zgodnych z nimi.

IV. Program **REGRESJA** – jego autorem jest dr A. Kolarz. Dopasowuje metodą najmniejszych kwadratów prostą do danej serii pomiarów (patrz rozdział 4). Wyznacza współczynnik kierunkowy  $\beta_1$ , wyraz wolny  $\beta_0$  (patrz wzór (4.2)) oraz ich niepewności (patrz wzory (4.4) i (4.5)). Pracuje pod kontrolą DOS. Jest dostępny dla użytkowników na komputerach Laboratorium Podstaw Fizyki. Aby z niego skorzystać, należy przejść do katalogu *C:\LABOR* i uruchomić plik *regresja.exe* (lub zintegrowane środowisko *Turbo Pascala* i wczytać plik *regresja.pas*). Tuż

po zainicjowaniu wyświetlany jest tytuł procedury i informacja o autorze. Naciśnięcie dowolnego klawisza spowoduje ukazanie się okna zawierającego instrukcję (tj. opis posługiwania się programem) o następującej treści:

1. Po zapoznaniu się z tym opisem naciskamy dowolny klawisz.
2. W pierwszym kroku podajemy liczbę pomiarów  $n$  nie mniejszą niż 3 i naciskamy *ENTER*.
3. Zadaujemy liczbę miejsc po przecinku (to jest liczbę miejsc, jaką będą zawierały wyniki obliczeń) i naciskamy ponownie *ENTER*.
4. Wprowadzamy z klawiatury kolejno  $n$  par wartości liczbowych reprezentujących pomiary  $(x_i, y_i)$ , które ukazują się u dołu ekranu. Dane akceptujemy naciskając każdorazowo *ENTER*. Wprowadzone wartości są wyświetlane u góry ekranu pod symbolami  $x[i]$  oraz  $y[i]$ .

#### **Uwaga**

**W przypadku podania dwóch wartości  $Y$  odpowiadających tej samej wartości  $X$ , program sygnalizuje błąd i żąda poprawienia danych.**

5. Wyniki obliczeń zostaną wyświetlone na ekranie. Są to obliczone wartości współczynnika kierunkowego prostej  $b_1$  (patrz wzór (4.3)) i wyrazu wolnego  $b_0$  (patrz wzór (4.3)) oraz wartości ich niepewności:  $s^2(b_0)$  (patrz wzór (4.4)) i  $s^2(b_1)$  (patrz wzór (4.4)).

6. Po zakończeniu obliczeń z pierwszą serią danych, możemy kontynuować obliczenia wybierając opcję T. Wtedy powtarzamy czynności opisane w punktach 2–5. Wybranie opcji N kończy funkcjonowanie programu.

7. Naciskając *ENTER* ponownie uruchamiamy program.

- V. Program **NIEPEWNOŚCI** – autorem jest dr J. Peisert (adres strony domowej w Internecie: <http://www.if.pwr.wroc.pl/~peisert>). Oblicza niepewności wielkości złożonych na podstawie niepewności wielkości wejściowych (patrz rozdział 2.6). Jest przeznaczony do pracy w systemie operacyjnym *MS Windows 95/NT* i zgodnych z nimi.
- VI. Program **A\_N** – jego autorem jest inż. G. Zyśko. Pozwala wyznaczać wszystkie wielkości, o których była mowa w rozdziale 2 w związku z pomiarami prostymi i złożonymi. Pracuje pod kontrolą systemów operacyjnych *MS Windows 95/NT* i zgodnych z nimi.

## 6. ZASADY WYKONYWANIA ĆWICZEŃ I OPRACOWYWANIA SPRAWOZDAŃ

Przed przystąpieniem do ćwiczenia należy zapoznać się z opisem danego ćwiczenia zamieszczonym w skrypcie. We wstępie do każdego ćwiczenia (lub grupy ćwiczeń) wymienione są podstawowe zagadnienia związane z jego tematyką. Większość z nich jest opisana we wprowadzeniu do ćwiczenia. Jeżeli jakieś pojęcie nie zostało opisane we wstępie, obok niego znajduje się odsyłacz do podręcznika z fizyki ogólnej, w którym można znaleźć jego wyjaśnienie. Studentów obowiązuje znajomość tych pojęć, znajomość zasady pomiaru, schematu układu pomiarowego oraz sposobu opracowania wyników pomiarów. Podczas każdego z ćwiczeń prowadzący może sprawdzać również podstawowe wiadomości dotyczące analizy niepewności pomiarów, a zwłaszcza znajomość metody obliczania niepewności pomiarowych przydatnej i polecanej do danego ćwiczenia.

### 6.1 Wskazówki praktyczne dotyczące wykonywania ćwiczeń

Pierwszą czynnością, którą należy wykonać po przyjeździe do laboratorium jest porównanie zestawu przyrządów pomiarowych znajdujących się na stanowisku z wykazem znajdującym się w instrukcji roboczej. Brakujące przyrządy lub próbki należy na czas pomiarów wypożyczyć (na rewers) od prowadzącego ćwiczenia.

Po skompletowaniu przyrządów i próbek należy zaproponować i uzgodnić z prowadzącym zajęcia zadania pomiarowe. Zadania te mogą być modyfikowane zależnie od przebiegu pomiarów.

Kolejną czynnością jest zestawienie układu pomiarowego lub wykonanie połączeń elektrycznych zgodnie ze schematem lub opisem zawartym w instrukcji roboczej.

Wykonując połączenia elektryczne korzystamy wyłącznie z przewodów znajdujących się na danym stanowisku. W razie braku przewodów należy zwrócić się do prowadzącego. Nie wolno zabierać przewodów z sąsiedniego stanowiska. Po wykonaniu połączeń elektrycznych należy zwrócić się do nauczyciela akademickiego z prośbą o sprawdzenie prawidłowości połączeń. **Układy elektryczne można włączyć do sieci tylko w obecności prowadzącego, po uprzednim ich sprawdzeniu.** Za ewentualne szkody wynikające z nieprzestrzegania tego zalecenia student ponosi pełną odpowiedzialność, także materialną!

Przed przystąpieniem do pomiarów należy zwrócić uwagę na wartości graniczne napięć, natężeń prądu lub temperatury. Przekroczenie wartości dopuszczalnych może spowodować uszkodzenie lub zniszczenie przyrządów pomiarowych, albo badanych próbek. Informacje dotyczące dopuszczalnych wartości napięć, prądów, temperatury zawarte są w instrukcji roboczej.

Przed przystąpieniem do właściwych pomiarów warto wykonać pomiary próbne, których celem jest dobranie odpowiednich zakresów przyrządów pomiarowych, sprawdzenie poprawności działania całego zestawu pomiarowego oraz poszczególnych przyrządów, zorientowanie się w wartościach ekstremalnych mierzonych wielkości, położenia ekstremów itd. Pomiary próbne umożliwią prawidłowe zaplanowanie pomiarów – liczby i ewentualnego rozmieszczenia punktów pomiarowych, konieczności zmian zakresów pomiarowych itp.

Protokół podpisany przez prowadzącego stanowi dowód wykonania pomiarów oraz podstawę do ich opracowania. Protokół należy załączyć do sprawozdania z wykonanego ćwiczenia. Zwracając się do prowadzącego o podpisanie protokołu, należy uzgodnić sposób opracowania wyników oraz obliczania ich niepewności.

#### **Uwaga**

1. Każdy student powinien przygotować oddzielny protokół, chyba że prowadzący postanowi inaczej.

2. Podczas pomiarów warto wykonać obliczenia próbne, obliczenia takie pozwolą zorientować się, czy uzyskane wyniki są sensowne, jakie stałe potrzebne są do obliczeń itd. W trakcie pomiarów warto również szkicować wykres w jednostkach wielkości mierzonych bezpośrednio. Szkic taki pozwala na odpowiedni dobór punktów pomiarowych oraz na zorientowanie się co do poprawności prowadzonych pomiarów.

## **6.2. Sprawozdanie**

Ćwiczenia w Laboratorium Podstaw Fizyki są wykonywane przeważnie w grupach dwuosobowych. Wyniki pomiarów mogą być opracowywane wspólnie, natomiast sprawozdanie każdy ze studentów wykonuje samodzielnie. Sprawozdanie może być napisane odręcznie lub za pomocą dowolnego edytora tekstu. **W sprawozdaniu nie należy umieszczać wstępu teoretycznego** (w szczególnie uzasadnionych przypadkach prowadzący może polecić opisanie pewnych zagadnień w formie załącznika do sprawozdania).

Każde sprawozdanie powinno zawierać niżej wymienione elementy.

**1. Nagłówek.** W nagłówku należy podać swoje dane: imię i nazwisko, wydział, kierunek i rok studiów, numer grupy, datę wykonania pomiarów, temat i numer ćwiczenia oraz nazwisko prowadzącego.



**2. Schemat układu pomiarowego, bieg promieni w przypadku ćwiczeń z optyki.**

**3. Wykaz zadań pomiarowych.**

**4. Tabele z wynikami pomiarów oraz obliczeń.** Do każdego sprawozdania należy dołączyć **protokół** z przeprowadzonych pomiarów **podpisany przez prowadzącego**.

**5. Wzory**, z których korzystano podczas obliczeń oraz **przykładowe obliczenia**. Jeżeli jakieś obliczenia są wykonywane wielokrotnie, to wystarczy jeden przykład. Dane zawarte w przykładowych obliczeniach muszą pochodzić z tabel zawartych w protokole z pomiarów, a ich wyniki powinny być zamieszczone w tabeli, o której mowa w punkcie 4.

**6. Wykresy.** W przypadku pomiarów, których celem jest zbadanie związków między wielkościami fizycznymi do sprawozdania należy dołączyć **wykresy** wykonane ręcznie na papierze milimetrowym lub za pomocą komputera.

**7. Dyskusja niepewności pomiarów.** W dyskusji niepewności pomiarów należy podać informacje o tym, w jaki sposób oszacowano niepewności wyników pomiarów wielkości wyznaczonych bezpośrednio (eksperymentalne odchylenie standardowe wartości średniej, błąd maksymalny, poziom ufności, oszacowanie na podstawie klasy przyrządu itd.).

W przypadku obliczania niepewności pomiarów złożonych metodą różniczki zupełnej lub pochodnej logarytmicznej w sprawozdaniu powinno znaleźć się wyrowadzenie wzoru, na podstawie którego obliczono niepewności. W pozostałych przypadkach wystarczy podanie wzorów, z których korzystamy oraz przykładowych obliczeń. Dane do tych obliczeń muszą pochodzić z protokołu.

Bardzo ważną częścią dyskusji niepewności pomiarów są wnioski dotyczące wkładu, jaki wnoszą niepewności pomiarów poszczególnych wielkości do niepewności wyniku końcowego.

**8. Wnioski.** We wnioskach z ćwiczenia należy podać wartości wielkości wyznaczanych oraz ich niepewności, porównanie uzyskanych wyników z wartościami tabelarycznymi lub wynikami uzyskanymi innymi metodami, uwagi dotyczące metody pomiarowej, wpływu czynników zewnętrznych na przebieg i wyniki pomiarów.

Jeżeli celem ćwiczenia było sprawdzenie jakiegoś prawa lub wyznaczenie zależności między wielkościami fizycznymi, to we wnioskach należy stwierdzić, czy uzyskane wyniki potwierdzają to prawo lub czy uzyskana zależność jest zgodna z oczekiwaną, jakie ograniczenia co do stosowalności sprawdzanego prawa lub badanej zależności wynikają z otrzymanych wyników.

## 7. DODATEK

### 7.1. Definicje jednostek podstawowych układu SI

Obecnie obowiązujące definicje jednostek wielkości podstawowych, uzupełniających oraz wybrane jednostki pochodne podajemy za U.S. Department of Commerce, National Institute of Standards and Technology (1993).

#### 1. Odległość

**METR – m**

**Metr jest to odległość, jaką przebywa światło w próżni w czasie  $1/299792458$  s**

Jednostką powierzchni w układzie SI jest  $m^2$ .

Jednostką objętości w układzie SI jest  $m^3$ .

#### 2. Czas

**SEKUNDA – s**

**Sekunda jest definiowana jako 9192631770 okresów promieniowania elektromagnetycznego emitowanego podczas przejścia elektronu między jednoznacznie określonymi poziomami energetycznymi atomu cezu 133**

Wzorzec czasu jest realizowany za pomocą zegara cezowego pracującego w ściśle określonych warunkach.

Liczbę okresów w jednostce czasu nazywa się częstotliwością. Jednostką częstotliwości w układzie SI jest herc (Hz). Jest to 1 okres na sekundę.

### 3. Masa

#### KILOGRAM – kg

**Wzorcem jednostki masy (kilograma) jest cylinder wykonany ze stopu platyny i irydu, przechowywany w Międzynarodowym Biurze Miar i Wag w pobliżu Paryża**

Jednostką siły w układzie SI jest niuton (N). Niuton jest siłą, która masie 1 kg nadaje przyspieszenie  $1 \text{ m/s}^2$ .  $1 \text{ N} = 1 \text{ kg m/s}^2$ .

Jednostką ciśnienia w układzie SI jest paskal (Pa).  $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ .

Jednostką pracy (energii) w układzie SI jest dżul (J).  $1 \text{ J} = 1 \text{ Nm}$ .

Jednostką mocy w układzie SI jest wat (W).  $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$ .

### 4. Temperatura

#### KELWIN – K

**Kelwin jest definiowany jako 1/273,16 część temperatury termodynamicznej punktu potrójnego wody**

### 5. Natężenie prądu

#### AMPER – A

**Amper jest zdefiniowany jako natężenie prądu płynącego w dwóch długich, równoległych przewodnikach, oddległych o 1 m, znajdujących się w próżni, powodującego powstanie siły oddziaływania magnetycznego między tymi przewodnikami wynoszącej  $2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$  na każdy metr ich długości**

Jednostką potencjału w układzie SI jest volt (V).  $1 \text{ V} = 1 \text{ W/A}$

Jednostką oporu w układzie SI jest ohm ( $\Omega$ ).  $1 \Omega = 1 \text{ V/A}$ .

### 6. Natężenie źródła światła

#### KANDELA – cd

**Natężenie promieniowania o częstotliwości  $540 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$ , emitowanego przez źródło jest równe jednej kandel, jeżeli moc 1/683 wata jest wypromieniowywana w kąt bryłowy równy jednemu steradianowi**

## **Jednostki uzupełniające**

### **7. Kąt płaski**

**RADIAN – rad**

**Radian jest to kąt płaski o wierzchołku umieszczonym w środku okręgu, którego ramiona wyznaczają na okręgu łuk o długości równej promieniowi tego okręgu**

### **8. Kąt bryłowy**

**STERADIAN – sr**

**Steradian jest to kąt sferyczny (bryłowy) o wierzchołku umieszczonym w środku sfery, wyznaczający na jej powierzchni wycinek, którego pole jest równe kwadratowi promienia tej sfery**

### **9. Ilość substancji**

**MOL – mol**

**Jeden mol jest to ilość substancji, w której liczba molekuł jest równa liczbie atomów zawartych w 0,012 kg węgla  $^{12}\text{C}$**

## 7.2. Przedrostki stosowane do oznaczania wielokrotności jednostek

(za: U.S. Department of Commerce, National Institute of Standards and Technology, 1993)

wielokrotność		przedrostek	symbol
1 000 000 000 000 000 000 000 000	= 10 <sup>24</sup>	yotta	Y
1 000 000 000 000 000 000 000 000	= 10 <sup>21</sup>	zetta	Z
1 000 000 000 000 000 000 000	= 10 <sup>18</sup>	exa	E
1 000 000 000 000 000 000	= 10 <sup>15</sup>	peta	P
1 000 000 000 000 000	= 10 <sup>12</sup>	tera	T
1 000 000 000	= 10 <sup>9</sup>	giga	G
1000 000	= 10 <sup>6</sup>	mega	M
1 000	= 10 <sup>3</sup>	kilo	k
100	= 10 <sup>2</sup>	hekto	h
10	= 10 <sup>1</sup>	deka	da
1	= 10 <sup>0</sup>		
0,1	= 10 <sup>-1</sup>	decy	d
0,01	= 10 <sup>-2</sup>	centy	c
0,001	= 10 <sup>-3</sup>	milli	m
0,000 001	= 10 <sup>-6</sup>	mikro	μ
0,000 000 001	= 10 <sup>-9</sup>	nano	n
0,000 000 000 001	= 10 <sup>-12</sup>	piko	p
0,000 000 000 000 001	= 10 <sup>-15</sup>	femto	f
0,000 000 000 000 000 001	= 10 <sup>-18</sup>	atto	a
0,000 000 000 000 000 000 001	= 10 <sup>-21</sup>	zepto	z
0,000 000 000 000 000 000 000 001	= 10 <sup>-24</sup>	yocto	y

### Uwagi:

1. W przypadku, gdy w języku polskim tradycyjnie stosowane są inne przedrostki niż używane w języku angielskim, podano ich polską wersję.
2. Jednostką wyjściową masy jest gram (jednostką podstawową jest kilogram!).

### 7.3. Tabele

Tabela 1. Wartości współczynników Studenta  $t(n, p)$ . W pierwszej kolumnie podano wartości  $n-1$ , a w następnych wartości współczynników  $t(n, p)$  dla wartości  $p$  z pierwszego wiersza.

$n-1$	$p = 0,6827$	$p = 0,95$	$p = 0,9545$	$p = 0,9973$
1	1,837	12,706	13,968	235,777
2	1,321	4,303	4,527	19,206
3	1,197	3,182	3,307	9,219
4	1,142	2,776	2,869	6,620
5	1,111	2,571	2,649	5,507
6	1,091	2,447	2,517	4,904
7	1,077	2,365	2,429	4,530
8	1,067	2,306	2,366	4,277
9	1,059	2,262	2,320	4,094
10	1,053	2,228	2,284	3,957
11	1,048	2,201	2,255	3,850
12	1,043	2,179	2,231	3,764
13	1,040	2,160	2,212	3,694
14	1,037	2,145	2,195	3,636
15	1,034	2,131	2,181	3,586
16	1,032	2,120	2,169	3,544
17	1,030	2,110	2,158	3,507
18	1,029	2,101	2,149	3,475
19	1,027	2,093	2,140	3,447
20	1,026	2,086	2,133	3,422
21	1,024	2,080	2,126	3,400
22	1,023	2,074	2,120	3,380
23	1,022	2,069	2,115	3,361
24	1,021	2,064	2,110	3,345
25	1,020	2,060	2,105	3,330
26	1,020	2,056	2,101	3,316
27	1,019	2,052	2,097	3,303
28	1,018	2,048	2,093	3,291
29	1,018	2,045	2,090	3,280
30	1,017	2,042	2,087	3,270
31	1,016	2,040	2,084	3,261
32	1,016	2,037	2,081	3,252
33	1,015	2,035	2,079	3,244
34	1,015	2,032	2,076	3,236

$n-1$	$p = 0,6827$	$p = 0,95$	$p = 0,9545$	$p = 0,9973$
35	1,015	2,030	2,074	3,229
36	1,014	2,028	2,072	3,222
37	1,014	2,026	2,070	3,216
38	1,013	2,024	2,068	3,210
39	1,013	2,023	2,066	3,204
40	1,013	2,021	2,064	3,199
41	1,012	2,020	2,063	3,194
42	1,012	2,018	2,061	3,189
43	1,012	2,017	2,060	3,184
44	1,012	2,015	2,058	3,180
45	1,011	2,014	2,057	3,176
46	1,011	2,013	2,056	3,172
47	1,011	2,012	2,055	3,168
48	1,011	2,011	2,053	3,164
49	1,010	2,010	2,052	3,160
50	1,010	2,009	2,051	3,157
60	1,008	2,000	2,043	3,130
70	1,007	1,994	2,036	3,111
80	1,006	1,990	2,032	3,096
90	1,006	1,987	2,028	3,085
100	1,005	1,984	2,025	3,077

Tabela 2. Tablica wartości funkcji

$$P(t) = P(\mu - t\sigma \leq x \leq \mu + t\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mu-t\sigma}^{\mu+t\sigma} \exp \frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2} dx,$$

gdzie:  $\mu$  jest wartością rzeczywistą wielkości  $X$ , natomiast  $\sigma$  odchyleniem standardowym. Wartość  $P(t)$  to prawdopodobieństwo otrzymania wyniku pomiaru o wartości  $x$  należącej do przedziału  $\langle \mu - t\sigma, \mu + t\sigma \rangle$ . W tabeli podano także wartości  $1 - P(t)$  określające prawdopodobieństwo otrzymania wyniku pomiaru leżącego poza przedziałem  $\langle \mu - t\sigma, \mu + t\sigma \rangle$ .

$t$	$P(t)$	$1 - P(t)$	$t$	$P(t)$	$1 - P(t)$	$t$	$P(t)$	$1 - P(t)$
0,00	0,0000	1,0000	0,50	0,3829	0,6171	1,00	0,6827	0,3173
0,02	0,0160	0,9840	0,52	0,3669	0,6031	1,05	0,7063	0,2937
0,04	0,0319	0,9681	0,54	0,4108	0,5892	1,10	0,7287	0,2713
0,06	0,0478	0,9522	0,56	0,4245	0,5755	1,15	0,7499	0,2501
0,08	0,0638	0,9362	0,58	0,4381	0,5619	1,20	0,7699	0,2301
0,10	0,0797	0,9203	0,60	0,4515	0,5485	1,25	0,7887	0,2113
0,12	0,0955	0,9045	0,62	0,4647	0,5343	1,30	0,8064	0,1936
0,14	0,1113	0,8887	0,64	0,4778	0,5222	1,35	0,8230	0,1770
0,16	0,1271	0,8729	0,66	0,4907	0,5093	1,40	0,8385	0,1615
0,18	0,1428	0,8572	0,68	0,5035	0,4965	1,45	0,8529	0,1471
0,20	0,1585	0,8415	0,70	0,5161	0,4839	1,50	0,8664	0,1336
0,22	0,1741	0,8259	0,72	0,5285	0,4715	1,55	0,8789	0,1211
0,24	0,1897	0,8103	0,74	0,5407	0,4593	1,60	0,8904	0,1096
0,26	0,2051	0,7949	0,76	0,5527	0,4473	1,65	0,9011	0,0989
0,28	0,2205	0,7795	0,78	0,5646	0,4354	1,70	0,9109	0,0891
0,30	0,2358	0,7642	0,80	0,5763	0,4237	1,80	0,9281	0,0719
0,32	0,2510	0,7490	0,82	0,5878	0,4122	1,90	0,9426	0,0574
0,34	0,2661	0,7339	0,84	0,5991	0,4009	2,00	0,9545	0,0455
0,36	0,2812	0,7188	0,86	0,6102	0,3898	2,20	0,9722	0,0278
0,38	0,2961	0,7039	0,88	0,6211	0,3789	2,40	0,9836	0,0164
0,40	0,3108	0,6892	0,90	0,6319	0,3681	2,60	0,9907	0,0093
0,42	0,3255	0,6745	0,92	0,6424	0,3576	2,80	0,9949	0,0051
0,44	0,3401	0,6599	0,94	0,6528	0,3472	3,00	0,9973	0,0027
0,46	0,3545	0,6455	0,96	0,6629	0,3371	4,00	0,99994	$6 \cdot 10^{-5}$
0,48	0,3688	0,6312	0,98	0,6729	0,3271	5,00	0,9999994	$6 \cdot 10^{-7}$



Tabela 3. Wybrane stałe fizyczne

Wielkość	Symbol	Wartość i jednostki	Względna niepewność standardowa
Prędkość światła w próżni	$c$	299792458 m/s	(dokładnie)
Przenikalność elektryczna próżni	$\epsilon_0$	$8,854187817 \dots \cdot 10^{-12}$ F/m	(dokładnie)
Przenikalność magnetyczna próżni	$\mu_0$	$12,566370614 \dots \cdot 10^{-7}$ H/m	(dokładnie)
Ładunek elementarny	$e$	$1,602176462(63) \cdot 10^{-19}$ C	$3,9 \cdot 10^{-8}$
Stała Plancka	$h$	$6,62606876(52) \cdot 10^{-34}$ J·s	$7,8 \cdot 10^{-8}$
Liczba Avogadra	$N_A$	$6,02214199(47) \cdot 10^{23}$ mol <sup>-1</sup>	$7,9 \cdot 10^{-8}$
Masa spoczynkowa elektronu	$m_e$	$9,10938188(72) \cdot 10^{-31}$ kg	$7,9 \cdot 10^{-8}$
Masa spoczynkowa protonu	$m_p$	$1,67262158(13) \cdot 10^{-27}$ kg	$7,9 \cdot 10^{-8}$
Masa spoczynkowa neutronu	$m_n$	$1,67492716(13) \cdot 10^{-27}$ kg	$7,9 \cdot 10^{-8}$
Stała Faradaya	$F$	96485,3415(39) C/mol	$4,0 \cdot 10^{-8}$
Stała Rydberga	$R_\infty$	$10973731,568549(83)$ m <sup>-1</sup>	$7,6 \cdot 10^{-12}$
Stała gazowa	$R$	8,314472(15) J/mol·K	$1,7 \cdot 10^{-6}$
Stała Boltzmanna	$k_B$	$1,3806503(24) \cdot 10^{23}$ J/K	$1,7 \cdot 10^{-6}$
Stała Stefana–Boltzmanna	$\sigma_{S-B}$	$5,670400(40) \cdot 10^{-8}$ W/m <sup>2</sup> ·K <sup>4</sup>	$7,0 \cdot 10^{-6}$
Stała grawitacji	$G$	$6,673(10) \cdot 10^{-11}$ m <sup>3</sup> /s <sup>3</sup> ·kg	$1,5 \cdot 10^{-3}$
Magneton Bohra	$\mu_B$	$927,400899(37) \cdot 10^{-26}$ J/T	$4,0 \cdot 10^{-8}$
Ładunek właściwy elektronu	$e/m_e$	$1,7588047 \cdot 10^{11}$ C/kg	
Stała Wiena	$C$	$2,8978 \cdot 10^{-3}$ K·m	
Temperatura punktu potrójnego wody	$T_{Tr}$	273,1600 K	

Wartości stałych fizycznych (z wyjątkiem trzech ostatnich wierszy) wyrównane metodą najmniejszych kwadratów – dane z 1998 roku zalecane do użytku przez CODATA (Committee on Data for Science and Technology of the International Council for Science). M. SUFFCZYŃSKI, P. JANISZEWSKI, *Postępy Fizyki*; tom 53, z. 1, s. 17–18, Warszawa 2002.

Tabela 4. Zależność parametru  $K$  od  $U$ : pomiar napięcia powierzchniowego cieczy stalagmometrem

$U$	$K$	$U$	$K$	$U$	$K$
	0,15900	5,1	0,25273	1,50	0,26560
5000	0,17200	5,0	0,25306	1,45	0,26560
250	0,19900	4,9	0,25340	1,40	0,26536
58,1	0,21500	4,8	0,25373	1,38	0,26528
24,6	0,22560	4,7	0,25407	1,36	0,26520
17,7	0,23050	4,6	0,25448	1,34	0,26510
13,0	0,23546	4,5	0,25472	1,32	0,26500
12,0	0,23702	4,4	0,25509	1,30	0,26490
11,5	0,23780	4,3	0,25545	1,28	0,26474
11,0	0,23875	4,2	0,25583	1,26	0,26460
10,5	0,23940	4,1	0,25620	1,24	0,26438
10,0	0,24035	4,0	0,25659	1,22	0,26418
9,5	0,24117	3,9	0,25697	1,20	0,26396
9,0	0,24195	3,8	0,25734	1,18	0,26372
8,5	0,24324	3,7	0,25772	1,16	0,26350
8,0	0,24440	3,6	0,25810	1,14	0,26324
7,8	0,24490	3,5	0,25848	1,12	0,26296
7,6	0,24538	3,4	0,25892	1,10	0,26264
7,4	0,24590	3,3	0,25937	1,08	0,26230
7,2	0,24640	3,2	0,25980	1,06	0,26190
7,0	0,25693	3,1	0,26024	1,04	0,26154
6,9	0,24720	3,0	0,26068	1,02	0,26115
6,8	0,24750	2,9	0,26110	1,00	0,26070
6,7	0,24777	2,8	0,26154	0,95	0,25960
6,6	0,24804	2,7	0,26198	0,90	0,25815
6,5	0,24836	2,6	0,26241	0,85	0,25645
6,4	0,24867	2,5	0,26286	0,80	0,25460
6,3	0,24897	2,4	0,26327	0,75	0,25255
6,2	0,24925	2,3	0,26370	0,70	0,25030
6,1	0,24952	2,2	0,26410	0,65	0,24770
6,0	0,24984	2,1	0,26450	0,626	0,24640
5,9	0,25015	2,0	0,26488	0,597	0,24450
5,8	0,25047	1,9	0,26518	0,570	0,24300
5,7	0,25078	1,8	0,26543	0,541	0,24300
5,6	0,25110	1,75	0,26553	0,512	0,24410

Aby wyznaczyć napięcie powierzchniowe cieczy na podstawie pomiarów wykonanych za pomocą stalagmometru, należy obliczyć wartość parametru  $U$ , następnie z tabeli odczytać wartość  $K$ . Wartości parametru  $U$  oraz napięcie powierzchniowe  $\sigma$  obliczamy ze wzorów:  $U = m/(\rho R^3)$ ,  $\sigma = mgK/R$ , gdzie:  $m$  – masa kropli,  $R$  – promień kropli,  $\rho$  – gęstość cieczy.

Tabela 5a. Własności fizyczne wody

Temp. K	Gęstość $\cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$	Ciepło właściwe $\cdot 10^3 \text{ J/kgK}$	Napięcie powierzchniowe $\cdot 10^{-2} \text{ N/m}$	Prężność pary $\cdot 10^3 \text{ Pa}$	Lepkość dynamiczna $\cdot 10^{-3} \text{ Ns/m}^2$	Lepkość kinematyczna $\text{m}^2/\text{s}$
273	0,9998	4,2219	7,564	0,6105	1,798	1,792
277	1,0000	4,2056	7,492	0,8134	1,567	1,567
288	0,9991	4,1855	7,349	1,7049	1,140	1,141
293	0,9982	4,1796	7,275	3,3378	1,005	1,007
298	0,9970	4,1754	7,197	3,1672	0,894	0,896
373	0,9584	4,2123	5,885	10,1325	0,284	—

Tabela 5b. Gęstość wody w przedziale temperatur od 0 °C do 10 °C

$t$ °C	Gęstość $\text{kg/m}^3$	$t$ °C	Gęstość $\text{kg/m}^3$	$t$ °C	Gęstość $\text{kg/m}^3$	$t$ °C	Gęstość $\text{kg/m}^3$
0	999,841	3,0	999,965	4,5	999,972	7,5	999,877
0,5	999,872	3,5	999,971	5,0	999,965	8,0	999,849
1,0	999,905	3,7	999,972	5,5	999,955	8,5	999,817
1,5	999,923	4,0	999,973	6,0	999,941	9,0	999,781
2,0	999,941	4,3	999,972	6,5	999,924	9,5	999,742
2,5	999,955	4,4	999,972	7,0	999,902	10,0	999,700

Tabela 6. Zależność gęstości pary wodnej nasyconej od temperatury

$t$ °C	$d$ $\text{g/m}^3$	$t$ °C	$d$ $\text{g/m}^3$	$t$ °C	$d$ $\text{g/m}^3$	$t$ °C	$d$ $\text{g/m}^3$
-10	2,1	8	8,3	26	24,4	65	161,1
-8	2,5	10	8,8	28	27,2	70	198,1
-6	3,0	12	10,7	30	30,3	75	241,8
-4	3,5	14	12,0	35	39,6	80	293,3
-2	4,1	16	13,6	40	51,6	85	353,4
0	4,8	18	15,4	45	65,4	90	423,5
2	5,6	20	17,3	50	83,0	95	504,5
4	6,4	22	19,4	55	104,3	100	597,7
6	7,3	24	21,8	60	130,2	110	826,0

Tabela 7. Opór właściwy oraz współczynniki temperaturowe oporu w temperaturze 293 K

Materiał	Opór właściwy $\cdot 10^{-6} \Omega m$	Współczynnik temperaturowy $K^{-1}$
aluminium	0,0278	$3,8 \cdot 10^{-3}$
konstantan	0,50	$5,0 \cdot 10^{-6}$
manganin	0,43	$4,0 \cdot 10^{-6}$
miedź	0,0175	$4,0 \cdot 10^{-3}$
nikielina	0,43	$2,3 \cdot 10^{-4}$
platyna	0,107	$3,9 \cdot 10^{-3}$
srebro	0,016	$3,8 \cdot 10^{-3}$
stal chromoniklowa	1,0	$2,5 \cdot 10^{-4}$
wolfram	0,055	$4,1 \cdot 10^{-3}$

Tabela 8. Gęstość ciał stałych

Materiał	Gęstość $\cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$	Materiał	Gęstość $\cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
aluminium	2,71	mosiądz	8,4–8,8
bakelit	1,3	ołów	11,34
beton	1,4	platyna	21,37
cyna	7,2	porcelana	2,2–2,5
drewno (dąb)	0,6–0,9	srebro	10,51
drewno (sosna)	0,3–0,6	stal	7,6–7,9
grafit	2,3	szkło ołowiowe	2,9–5,9
korek	0,22–0,26	szkło potasowe	2,6–2,8
kwarc (kryształ)	2,65	styropian	0,04
lód (273 K)	0,92	wolfram	19,1
miedź	8,9	żelazo	7,86
złoto	13,9	nikiel	8,90

Tabela 9. Współczynniki przewodnictwa cieplnego  $k$ 

Materiał	$k \text{ J/msK}$	Materiał	$k \text{ J/msK}$
miedź	384	guma	0,25
złoto	298	korek	0,04
aluminium	226	styropian	0,03
żelazo	88	woda	0,609
mosiądz	110	bakelit	2,2
szkło	0,6–1,0	bawełna	0,182
kwarc topiony	1,27	cegła	0,85
lód	0,6	powietrze 0 °C	0,024
drewno	0,1–0,3	hel 0 °C	0,144

Tabela 10a. Charakterystyka termopary miedź–konstantan (typ T)

$t$ °C	$E$ mV	$t$ °C	$E$ mV	$t$ °C	$E$ mV	$t$ °C	$E$ mV
		–90	–3,089	55	2,250	210	9,820
		–80	–2,788	60	2,476	220	10,360
–270	–6,258	–70	–2,475	65	2,607	230	10,905
–260	–6,232	–60	–2,152	70	2,908	240	11,456
–250	–6,181	–50	–1,819	75	3,131	250	12,011
–240	–6,105	–40	–1,475	80	3,357	260	12,572
–230	–6,007	–30	–1,121	85	3,584	270	13,137
–220	–5,889	–20	–0,757	90	3,813	280	13,707
–210	–5,753	–10	–0,383	90	4,044	290	14,281
–200	–5,603	0,0	0,000	100	4,277	300	14,860
–190	–5,439	5	0,195	110	4,749	310	15,443
–180	–5,261	10	0,391	120	5,227	320	16,030
–170	–5,069	15	0,589	130	5,712	330	16,621
–160	–4,869	20	0,789	140	6,204	340	17,217
–150	–4,648	25	0,992	150	6,702	350	17,816
–140	–4,419	30	1,196	160	7,207	360	18,420
–130	–4,177	35	1,403	170	7,718	370	19,027
–120	–3,923	40	1,611	180	8,235	380	19,638
–110	–3,656	45	1,822	190	8,757	390	20,252
–100	–3,378	50	2,035	200	9,286	400	20,910

Tabela 10b. Charakterystyka termopary żelazo–konstantan (typ J)

$t$ °C	$E$ mV	$t$ °C	$E$ mV	$t$ °C	$E$ mV	$t$ °C	$E$ mV
–40	–1,98	40	2,11	120	6,47	200	10,95
–20	–1,01	60	3,19	140	7,59	300	16,55
0	0,00	80	4,27	160	8,71	400	22,15
20	1,15	100	5,37	180	9,83	500	27,84

Tabela 10c. Charakterystyki najczęściej stosowanych termoelementów  
(zgodnie z PN-81/M-53854 (IEC 584))

Temp., °C	Napięcie termoelektryczne mV				
	Typ T Cu–CuNi	Typ J Fe–CuNi	Typ K Ni–NiAl	Typ S PtRh10–Pt	Typ B PtRh30–PtRh6
–200	–5,603	–7,890	–5,891	–	–
–100	–3,378	–4,632	–3,553	–	–
0	0	0	0	0	0
100	4,277	5,269	4,095	0,645	0,033
200	9,286	10,777	8,137	1,440	1,178
300	14,860	16,325	12,207	2,323	0,431
400	20,869	21,846	16,395	3,260	0,786
500		27,388	20,640	4,234	1,241
600		33,096	24,902	5,237	1,741
700		39,130	29,128	6,274	2,430
800		45,498	33,277	7,345	3,154
900			37,325	8,448	3,957
1000			41,269	9,585	4,833
1100			45,108	10,754	5,777
1200			48,828	11,947	6,783
1300			52,398	13,155	7,845
1400				14,368	8,952
1500				15,576	10,094
1600					11,257
1700					12,426

Tabela 11. Praca wyjścia elektronów z metali

Metal	Praca wyjścia, eV
srebro	4,70
bar	0,52
żelazo	4,71
potas	2,25
lit	2,49
ołów	4,05
platyna	5,55
wolfram	4,54

Tabela 12. Własności cieplne ciał stałych w temperaturze 20 °C oraz ciepła i temperatury topnienia

Material	Ciepło właściwe J/kgK	Ciepło topnienia J/kg · 10 <sup>3</sup>	Temperatura topnienia °C	Współczynnik rozszerzalności liniowej · 10 <sup>5</sup> K <sup>-1</sup>
aluminium	895,8	394	660	2,55
cyna	224,4	58	231,8	2,69
lód	2093,0	334	0,00	5,04
miedź	385,5	172	1083	1,68
ołów	127	23	327,4	2,94
szkło	800	–	800–1400	0,8–0,9
żelazo	447,9	270	1535	1,14
bismut	123,4	52,3	544,5	1,36

Tabela 13. Własności fizyczne gazów w warunkach normalnych ( $T = 273 \text{ K}$ ,  $p = 10^5 \text{ Pa}$ )

Gaz	Gęstość kg/m <sup>3</sup>	Współczynnik lepkości · 10 <sup>-3</sup> Ns/m <sup>2</sup>	Ciepło właściwe $c_p \cdot 10^3 \text{ J/(kgK)}$	Ciepło właściwe $c_v \cdot 10^3 \text{ J/(kgK)}$	$\kappa = \frac{c_p}{c_v}$
azot	1,25	0,0175	1,038	0,745	1,40
dwutlenek węgla	1,98	0,0145	0,846	0,653	1,30
hel	0,179	0,0196	5,240	3,161	1,66
powietrze	1,29	0,0181	1,009	0,270	1,40
tlen	1,47	0,0203	0,916	0,653	1,40
wodór	0,09	0,0088	14,269	10,132	1,41

Tabela 14. Własności sprężyste ciał stałych w temperaturze 20 °C

Materiał	Gęstość $\text{kg/m}^3 \cdot 10^3$	Moduł Younga $\text{N/m}^2 \cdot 10^{10}$	Moduł sztywności $\text{N/m}^2 \cdot 10^{10}$	Moduł ściśliwości $\text{N/m}^2 \cdot 10^{10}$	Współczynnik Poissona	Prędkość fali podłużnej m/s
bizmut	9,80	3,2	1,2	3,4	0,33	2200
cyna	7,30	4,7	1,8	1,8	0,33	2500
cynk	7,08	8,4	3,8	5,9	0,25	3700
durall	2,79	7,3	2,7	8,3	0,34	6450
glin	2,70	6,8	2,5	7,4	0,34	5104
guma	0,9	0,01	0,00016	–	0,46	30–70
lód	0,9168	0,5	0,29	–	–	3260
miedź	8,89	10,5	4,4	14,3	0,35	3560
mosiądz	8,44	10,5	4,3	10,0	0,35	3500
ołów	11,34	1,6	0,65	–	0,45	1227
stal	7,83	21,9	8,3	17,0	0,29	4990
wolfram	18,9	36,2	13,5	33,0	0,17	–
żelazo kute	7,85	21,7	8,3	17,0	0,28	5130

Tabela 15. Bezwzględne współczynniki załamania światła  $n$ , w temperaturze 293 K dla fali o długości  $\lambda = 589 \text{ nm}$ ,  $n_0$  – współczynnik załamania promienia zwyczajnego,  $n_e$  – promienia nadzwyczajnego

Materiał	$n$
powietrze	1,0003
szkło (crown lekki)	1,5153
balsam kanadyjski	1,515
szkło flint	1,6085
diamant	2,417
woda	1,3337
alkohol etylowy	1,3624
szpat islandzki	$n_0$ 1,6585
	$n_e$ 1,4864
kwarc	$n_0$ 1,5343
	$n_e$ 1,5533



Tabela 16. Długości fal najczęściej używanych linii widmowych

Pierwiastek	Długość fali nm	Barwa linii	Intensywność
wodór	397,01	fioletowa	słaba
	410,77	fioletowa	słaba
	434,05	fioletowa	średnia
	486,13	niebiesko-zielona	średnia
	656,28	czerwona	silna
hel	447,15	fioletowa	słaba
	471,31	niebieska	silna
	492,19	niebiesko-zielona	średnia
	501,57	zielona	średnia
	587,56	żółta	bardzo silna
	667,81	czerwona	średnia
	706,52	czerwona	średnia
rtęć	404,65	fioletowa	bardzo słaba
	407,78	fioletowa	słaba
	435,83	niebieska	średnia
	491,60	niebiesko-zielona	średnia
	546,07	zielona	silna
	576,96	żółta	bardzo silna (dublet)
	579,07	żółta	bardzo silna (dublet)
	623,41	czerwona	słaba
sód	588,99	żółta	bardzo silny
	589,59	żółta	dublet
laser He–Ne	632,8	czerwona	bardzo silna,
	1188,5	podczerwień	niebezpieczna
	1177,7	podczerwień	dla oczu
	1161,4	podczerwień	
laser rubinowy	694,3	czerwona	bardzo silna, niebezpieczna dla oczu
dioda laserowa	670±10	czerwona	bardzo silna, niebezpieczna dla oczu

Tabela 17. Układ okresowy pierwiastków

Nad symbolem pierwiastka podana jest liczba atomowa, a pod symbolem liczba masowa składu izotopowego występującego na powierzchni Ziemi. W nawiasach podano liczby masowe najbardziej stabilnego izotopu. Jednostkę masy atomowej przyjęto 1/12 masy atomowej węgla  $^{12}\text{C}$

Grupa 1	Grupa 2	Grupa 3	Grupa 4	Grupa 5
1 <b>H</b> 1.0079				
3 <b>Li</b> 6.94	4 <b>Be</b> 9.0218	5 <b>B</b> 10.81	6 <b>C</b> 12.011	7 <b>N</b> 14.0067
11 <b>Na</b> 22.9898	12 <b>Mg</b> 24.305	13 <b>Al</b> 26.98154	14 <b>Si</b> 28.0855	15 <b>P</b> 30.9738
19 <b>K</b> 39.0983	20 <b>Ca</b> 40.08	21 <b>Sc</b> 44.9559	22 <b>Ti</b> 47.9	23 <b>V</b> 50.942
29 <b>Cu</b> 63.546	30 <b>Zn</b> 65.38	31 <b>Ga</b> 69.735	32 <b>Ge</b> 72.59	33 <b>As</b> 74.922
37 <b>Rb</b> 85.467	38 <b>Sr</b> 87.62	39 <b>Y</b> 88.906	40 <b>Zr</b> 91.22	41 <b>Nb</b> 92.906
46 <b>Ag</b> 107.87	48 <b>Cd</b> 112.41	49 <b>In</b> 114.82	50 <b>Sn</b> 118.69	51 <b>Sb</b> 121.75
55 <b>Cs</b> 132.905	56 <b>Ba</b> 137.33	57 – 71 Lantanowce	72 <b>Hf</b> 178.49	73 <b>Ta</b> 180.947
79 <b>Au</b> 196.967	80 <b>Hg</b> 200.59	81 <b>Tl</b> 204.2	82 <b>Pb</b> 207.2	83 <b>Bi</b> 208.9804
87 <b>Fr</b> (223)	88 <b>Ra</b> 226.0254	89 – 103 Aktynowce	104 (260)	105 (260)

Lantanowce	570 <b>La</b> 138.91	58 <b>Ce</b> 140.12	59 <b>Pr</b> 140.91	60 <b>Nd</b> 144.24	61 <b>Pm</b> (145)	62 <b>Sm</b> 150.4
Aktynowce	89 <b>Ac</b> (227)	90 <b>Th</b> 232.04	91 <b>Pa</b> 231.04	92 <b>U</b> 231.04	93 <b>Np</b> 237.05	94 <b>Pu</b> (244)

Grupa 6		Grupa 7		Grupa 8			Grupa 0	
							2 He 4.0026	
8 O 15.9994		9 F 18.9984					10 Ne 20.17	
16 S 32.06		17 Cl 35.453					18 Ar 39.984	
24 Cr 51.996		25 Mn 54.938		26 Fe 55.847	27 Co 58.933	28 Ni 58.71	36 Kr 83.80	
34 Se 78.96		35 Br 79.904						
42 Mo 95.94		43 Tc 98.906		44 Ru 101.07	45 Rh 102.906	46 Pd 106.4	54 Xe 131.30	
52 Te 127.60		53 J 126.9045						
74 W 183.85		75 Re 186.21		76 Os 190.2	77 Ir 192.22	78 Pt 195.09	86 Rn (222)	
84 Po (209)		85 At (210)						
106 (263)								

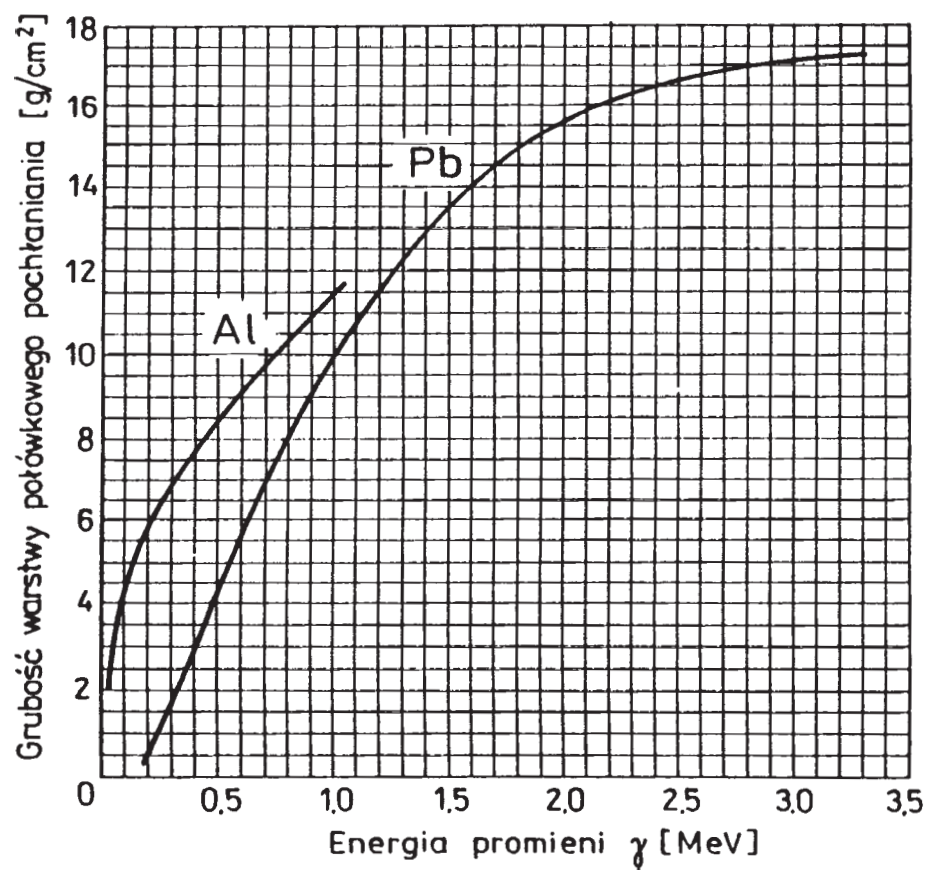
63 Eu 151.96	64 Gd 157.25	65 Tb 158.93	66 Dy 162.5	67 Ho 164.93	68 Er 167.26	69 Tm 168.93	70 Yt 173.04	71 Lu 174.97
95 Am (243)	96 Cm (247)	97 Bk (247)	98 Cf (251)	99 Es (254)	100 Fm (257)	101 Md (258)	102 Nb (259)	103 Lr (260)

Tabela 18. Liniowe współczynniki osłabiania promieniowania rentgenowskiego i gamma (w  $\text{cm}^{-1}$ )

$E_\gamma$ (MeV)	$\mu_{\text{Al}}$ $\rho = 2,7 \text{ g/cm}^3$	$\mu_{\text{Fe}}$ $\rho = 7,89 \text{ g/cm}^3$	$\mu_{\text{Pb}}$ $\rho = 11,3 \text{ g/cm}^3$	$\mu_{\text{NaJ}}$ $\rho = 3,67 \text{ g/cm}^3$
0,05	0,972	15,2	65,0	38,6
0,06	0,729	9,47	40,3	23,6
0,08	0,524	4,69	18,8	10,9
0,10	0,444	2,82	60,0	5,97
0,15	0,362	1,58	24,4	2,16
0,20	0,323	1,13	11,8	1,15
0,30	0,278	0,85	4,76	0,580
0,40	0,251	0,73	2,51	0,415
0,50	0,228	0,66	1,72	0,337
0,60	0,210	0,60	1,37	0,294
0,70	0,196	0,56	1,12	–
0,80	0,184	0,52	0,99	0,243
0,90	0,176	0,50	0,86	–
1,0	0,166	0,47	0,79	0,212
1,1	0,158	0,45	0,72	–
1,2	0,152	0,43	0,68	–
1,3	0,146	0,41	0,64	–
1,5	0,137	0,38	0,58	0,17
1,7	0,128	0,36	0,54	–
2,0	0,117	0,33	0,51	0,15
2,5	0,106	0,31	0,48	–
3,0	0,094	0,28	0,46	0,134

Tabela 19. Izotopy źródła promieniowania  $\gamma$ 

Izotop	Energia kwantów $\gamma$ MeV	Okres połowicznego zaniku $T_{1/2}$
$^{22}_{11}\text{Na}$	0,511 1,28	2,6 lat
$^{27}_{12}\text{Mg}$	0,79	9 miesięcy
$^{23}_{13}\text{Al}$	1,78	2,3 dni
$^{56}_{25}\text{Mn}$	0,84	2,6 godzin
$^{54}_{25}\text{Mn}$	0,845	313,5 dni
$^{60}_{27}\text{Co}$	1,173 1,332	5,26 lat
$^{65}_{30}\text{Zn}$	1,115	246 dni
$^{128}_{51}\text{Sb}$	0,687	2,7 lat
$^{128}_{53}\text{I}$	0,42	25 miesięcy
$^{133}_{56}\text{Ba}$	0,44 0,38 0,16 0,08	9,5 lat
$^{137}_{55}\text{Cs}$	0,66	30 lat
$^{204}_{81}\text{Tl}$	0,91	2,7 lat
$^{210}_{84}\text{Ra}$	0,8	138 dni
$^{240}_{90}\text{Th}$	0,085	120 dni
$^{233}_{90}\text{Th}$	0,09	24 miesiące



Rys. D.1. Zależność grubości pochłaniania połówkowego promieniowania  $\gamma$  od energii kwantów dla aluminium i ołowiu

Tabela 20. Czasy opadania ciężarka przy ustalonym momencie bezwładności krzyża Oberbecka

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3,719	3,738	3,709	3,705	3,702	3,730	3,714	3,705
2	3,725	3,730	3,708	3,712	3,727	3,737	3,717	3,718
3	3,721	3,719	3,709	3,699	3,726	3,723	3,729	3,715
4	3,709	3,714	3,721	3,722	3,710	3,710	3,710	3,707
5	3,709	3,731	3,711	3,726	3,729	3,721	3,716	3,725
6	3,701	3,714	3,715	3,715	3,702	3,695	3,724	3,712
7	3,717	3,731	3,698	3,724	3,700	3,723	3,742	3,721
8	3,721	3,727	3,725	3,726	3,718	3,717	3,717	3,707
9	3,723	3,709	3,722	3,714	3,719	3,700	3,725	3,726
10	3,696	3,713	3,714	3,722	3,710	3,711	3,715	3,721
11	3,733	3,726	3,719	3,708	3,723	3,719	3,727	3,717
12	3,714	3,715	3,734	3,729	3,721	3,717	3,711	3,714
13	3,714	3,710	3,720	3,707	3,717	3,729	3,714	3,720
14	3,719	3,718	3,720	3,708	3,709	3,707	3,723	3,729
15	3,712	3,704	3,716	3,720	3,722	3,719	3,722	3,722
16	3,723	3,718	3,700	3,708	3,718	3,737	3,708	3,708
17	3,707	3,722	3,728	3,718	3,714	3,724	3,717	3,709
18	3,730	3,722	3,739	3,723	3,711	3,711	3,728	3,718
19	3,717	3,708	3,717	3,714	3,724	3,702	3,719	3,720
20	3,719	3,732	3,725	3,722	3,727	3,708	3,723	3,710
21	3,716	3,740	3,712	3,712	3,718	3,714	3,714	3,713
22	3,723	3,708	3,714	3,734	3,727	3,712	3,725	3,712
23	3,719	3,707	3,719	3,702	3,702	3,730	3,704	3,703
24	3,707	3,718	3,716	3,731	3,715	3,704	3,714	3,717
25	3,728	3,731	3,721	3,720	3,718	3,711	3,722	3,730

$$\bar{x} = 3,717395$$

$$s^2 = 0,00008301$$

$$s = 0,00911120$$

Tabela 21. Uporządkowane według wielkości czasu opadania ciężarka krzyża Oberbecka zawarte w tabeli 20

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3,695	3,707	3,711	3,714	3,718	3,720	3,723	3,728
2	3,696	3,708	3,711	3,714	3,718	3,721	3,723	3,729
3	3,698	3,708	3,711	3,714	3,718	3,721	3,723	3,729
4	3,699	3,708	3,711	3,715	3,718	3,721	3,724	3,729
5	3,700	3,708	3,712	3,715	3,718	3,721	3,724	3,729
6	3,700	3,708	3,712	3,115	3,718	3,721	3,724	3,729
7	3,700	3,708	3,712	3,115	3,718	3,721	3,724	3,730
8	3,701	3,708	3,712	3,715	3,718	3,721	3,725	3,730
9	3,702	3,708	3,712	3,715	3,718	3,721	3,725	3,730
10	3,702	3,708	3,712	3,716	3,719	3,722	3,725	3,730
11	3,702	3,709	3,712	3,716	3,719	3,722	3,725	3,730
12	3,702	3,709	3,713	3,716	3,719	3,722	3,725	3,731
13	3,702	3,709	3,713	3,716	3,719	3,722	3,725	3,731
14	3,703	3,709	3,714	3,717	3,719	3,722	3,726	3,131
15	3,704	3,709	3,714	3,717	3,719	3,722	3,726	3,731
16	3,704	3,709	3,714	3,717	3,719	3,722	3,726	3,732
17	3,704	3,709	3,714	3,717	3,719	3,722	3,726	3,733
18	3,705	3,710	3,714	3,717	3,719	3,122	3,726	3,734
19	3,705	3,710	3,714	3,717	3,719	3,122	3,727	3,734
20	3,707	3,710	3,714	3,717	3,719	3,723	3,727	3,737
21	3,707	3,710	3,714	3,717	3,720	3,723	3,727	3,737
22	3,707	3,710	3,714	3,717	3,720	3,723	3,727	3,738
23	3,707	3,710	3,714	3,717	3,720	3,723	3,727	3,739
24	3,707	3,711	3,714	3,717	3,720	3,723	3,728	3,740
25	3,707	3,711	3,714	3,718	3,720	3,723	3,728	3,742



## Literatura uzupełniająca

- [1] *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, opracowanie wydane przez International Organization for Standardization (ISO), Genewa 1993.
- [2] *Wytyczne do obliczania i wyrażania niepewności pomiaru*, Główny Urząd Miar, Warszawa 1994.
- [3] *Essentials of expressing measurement uncertainty. The National Institute of Standards and technology (NIST). Reference on Constants, Units, and Uncertainty*, dokument elektroniczny dostępny w Internecie pod adresem: <http://physics.nist.gov/cuu/Uncertainty>.
- [4] B.N. TAYLOR, CH. E. KUYATT, *Guidelines for Evaluating and Expressing the Uncertainty of NIST Measurement Results*. NIST Technical Note 1297 (1994), dokument elektroniczny dostępny w Internecie pod adresem: <http://physics.nist.gov/Pubs/guidelines>.
- [5] W. KLONECKI, *Statystyka dla inżynierów*, PWN, Warszawa 1999.
- [6] H. SZYDŁOWSKI, *Międzynarodowe normy oceny niepewności pomiarów*, Postępy Fizyki, 51, z. 2, s. 92, Warszawa 2000.
- [7] A. ZIĘBA, *Natura niepewności pomiaru a jego nowa kodyfikacja*, Postępy Fizyki, 52, z. 5, s. 238, Warszawa 2001.
- [8] M.W. GUTOWSKI, *Prosta dostatecznie gruba*, Postępy Fizyki, 53, z. 4, s. 181, Warszawa 2002.
- [9] W. SALEJDA, R. POPRAWSKI, *Podstawy analizy niepewności pomiarowych w studenckim laboratorium podstaw fizyki*, Wrocław 2001; elektroniczny dokument dostępny w internetowej witrynie dydaktycznej Instytutu Fizyki PWr pod adresem: <http://www.if.pwr.wroc.pl/dydaktyka/LPF/index.html>.
- [10] J.R. TAYLOR, *Wstęp do analizy błęd pomiarowego*, PWN, Warszawa 1995.
- [11] H. SZYDŁOWSKI, *Pracownia fizyczna*, PWN, Warszawa 1994.
- [12] G.L. SQUIRES, *Praktyczna fizyka*, PWN, Warszawa 1992.
- [13] Praca zbiorowa pod red. H. Szydłowskiego, *Teoria pomiarów*, PWN, Warszawa 1981.
- [14] H. HÄNSEL, *Podstawy rachunku błędów*, WNT, Warszawa 1968.
- [15] W. SALEJDA, *Co wiedzieć powinien inżynier o fizycznej naturze informacji i procesach jej przetwarzania?*, opracowanie dostępne w postaci dokumentu elektronicznego na stronie domowej autora: <http://www.if.pwr.wroc.pl/~ssalejda>.
- [16] T. ZIELIŃSKI, *Jak pokochać statystykę, czyli STATISTICA do poduszki*, Statsoft, Kraków 1999.
- [17] P. KOBUS, R. PIETRZYKOWSKI, W. ZIELIŃSKI, *Statystyka z pakietem STATISTICA*, Wyd. Fundacja „Rozwój SGGW”, Warszawa 1998.

- [18] A. LUSZNIWICZ, T. SŁABY, *Statystyka z pakietem komputerowym STATISTICA PL. Teoria i zastosowania*, podręcznik zawiera CD, seria wydawnicza Academia Oeconomica, Wydawnictwo C.H. Beck, Warszawa 2001.
- [19] M. DOBOSZ, *Wspomagana komputerowo statystyczna analiza wyników badań*, Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa 2001.
- [20] B. MROZEK, Z. MROZEK, *MATLAB. Uniwersalne środowisko do obliczeń naukowo-technicznych*, Wyd. PLJ, Warszawa 1996.
- [21] B. MROZEK, Z. MROZEK, *MATLAB 5.X, SIMULINK 2.X: Poradnik użytkownika*, Wyd. PLJ, Warszawa 1998.
- [22] M. WCISLIK, *Wprowadzenie do systemu MATLAB*, Wyd. Politechniki Kieleckiej, Kielce 2000.
- [23] A. ZALEWSKI, R. CEGIELA, *MATLAB – obliczenia numeryczne i ich zastosowania*, NAKOM, Poznań 1998.
- [24] G. DRWAŁ i in., *MATHEMATICA 4*, Wyd. Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego, Gliwice 2000.
- [25] A. ZERO, *MATHCAC 7.0*, wyd. EXIT, Warszawa 1998.
- [26] K. JAKUBOWSKI, *MATHCAD 2000 PROFESSIONAL*, Wyd. EXIT, Warszawa 2000.
- [27] L. MAGIERA, *Komputerowy rachunek symboliczny w przykładach z fizyki. Część I. Mechanika*, Oficyna Wyd. PWr., Wrocław 1995; L. MAGIERA, *General Physics Problem Solving with CAS Derive*, Nova Science Publishers, Inc., Huntington, New York 2001.
- [28] A. MARLEWSKI, *Derive 3.0*, NAKOM, Poznań 1995.
- [29] J. POPENDA, A. ANDRUCH-SOBIŁO, *Matematyka na Derive*, Wyd. Politechniki Poznańskiej, Poznań 1997.
- [30] Witryna dydaktyczna Instytutu Fizyki PWr dostępna w Internecie pod adresem: <http://www.if.pwr.wroc.pl/dydaktyka>; na stronie <http://www.if.pwr.wroc.pl/dydaktyka/LPF/programy/index.html> znajduje się oprogramowanie dydaktyczne omówione w rozdziale piątym.

**Podstawowe pojęcia i zasady opracowania wyników pomiarów**  
(patrz rozdziały 2.2 i 2.3 podręcznika)

**Wynikiem pomiaru** nazywamy wartość  $x$  przypisaną wielkości fizycznej  $X$  uzyskaną drogą pomiaru.

**Niepewnością przypadkową** nazywamy różnicę między wynikiem pomiaru  $x$  a wartością średnią  $\bar{x}$  z serii pomiarów (próby).

Dysponując wynikami  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  serii pomiarów wielkości fizycznej  $X$  (jeżeli pomiary nie są obciążone błędami systematycznymi), obliczamy **średnią arytmetyczną**  $\bar{x}$ , która stanowi oszacowanie wartości rzeczywistej (dokładnej) wielkości fizycznej  $X$  za pomocą wzoru (2.6) (patrz również (2.55))

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Jako **niepewność oceny**  $\bar{x}$  przyjmujemy **odchylenie standardowe średniej arytmetycznej** (2.10) (patrz również (2.56))

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

które nosi nazwę **niepewności standardowej**.

Wielkość  $s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$  daną wzorem (2.8) nazywamy **odchyleniem standardowym** z próby, natomiast  $s_x^2$  nosi nazwę **wariancji** z próby (patrz wzór (2.7)).

**Zarówno wariancja jak i odchylenie standardowe są miarami niepewności pojedynczego wyniku pomiaru.**

Wartości niepewności pomiarów **zaokrąglamy zawsze w górę** (patrz rozdział 2.4.). Niepewności zaokrąglamy najpierw z dokładnością do jednej cyfry znaczącej. Jeżeli wstępne zaokrąglenie powoduje wzrost wartości niepewności o więcej niż 10%, zaokrąglamy ją z dokładnością do dwóch cyfr znaczących.

**Wyniki pomiarów zaokrąglamy z dokładnością do miejsca, na którym występuje ostatnia cyfra znacząca niepewności.**

Wyniki pomiarów (patrz rozdział 2.4.3.) zapisujemy w mianowanej postaci  $x = \bar{x} \pm s_{\bar{x}}$  wyjaśniając znaczenie liczby  $s_{\bar{x}}$  stojącej po znaku  $\pm$ . Zapisując wynik pomiaru należy podać jednostkę. Obowiązują jednostki z układu SI.

**Klasa przyrządu pomiarowego**  $kl = \left| \frac{\Delta x_{\max}}{Z} \right| \cdot 100\%$  jest to wyrażona w procentach wartość bezwzględna ze stosunku maksymalnego dopuszczalnego na danym

zakresie pomiarowym błędu pomiaru  $\Delta x_{\max}$  do zakresu pomiarowego  $Z$  (patrz rozdział 2.3.2.).

**Niepewność pomiaru wykonanego miernikiem cyfrowym składa się z niepewności przetwarzania układu analogowego oraz niepewności dyskretyzacji** (patrz rozdział 2.3.3.).

Jeżeli wielkość fizyczna nie jest mierzona bezpośrednio, lecz wymaga zmierzenia kilku wielkości fizycznych  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , z którymi jest powiązana zależnością (2.66)

$$Y = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

to taki **pomiar** nazywamy **złożonym**.

Wielkości  $X_1, X_2, \dots, X_n$  nazywamy **wielkościami wejściowymi**, natomiast  $Y$  nazywamy **wielkością wyjściową**.

Wartość wielkości  $Y$  można ocenić na wiele sposobów. Jednym z tych sposobów jest przyjęcie za ocenę wielkości  $Y$  wartości (2.67)

$$y = g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n),$$

gdzie:  $\bar{x}_i$  oznaczają średnie wartości wejściowych wielkości fizycznych mierzonych bezpośrednio. Za ocenę wartości wielkości  $Y$  można również przyjąć (2.68)

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m y_k \quad (*)$$

gdzie:  $y_k$  oznacza wartości wielkości wyjściowej  $Y$  obliczone na podstawie wyników pomiarów wielkości wejściowych uzyskanych w skończonej serii złożonej z  $k$  pomiarów.

Jeżeli **wielkości**  $X_1, X_2, \dots, X_n$  są **nieskorelowane**, to **złożoną niepewność standardową**  $u_y$  oceny (\*) wyznacza się na podstawie wzoru (2.71)

$$u_y = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)^2 (\bar{s}_1)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)^2 (\bar{s}_2)^2 + \dots + \left(\frac{\partial g}{\partial x_n}\right)^2 (\bar{s}_n)^2} \quad (**)$$

W przypadku, gdy wielkość wyjściowa jest iloczynem potęg wielkości wejściowych, to pochodne cząstkowe występujące w równaniu (\*\*) najłatwiej obliczyć stosując **metodę pochodnej logarytmicznej** (rozdział 2.6.1. i 2.6.2.1.).

Jeżeli **wielkości** wejściowe są **skorelowane** (patrz rozdział 2.6.2.), to złożoną niepewność standardową obliczamy korzystając z równania (2.78).

**Złożoną niepewność standardową wielkości** zarówno **skorelowanych** jak i **nieskorelowanych** można oszacować **metodą różniczki zupełnej** (2.80) (rozdział 2.6.2.1.)

$$u_y = \left| \frac{\partial g}{\partial x_1} u_1 \right| + \left| \frac{\partial g}{\partial x_2} u_2 \right| + \dots + \left| \frac{\partial g}{\partial x_n} u_n \right|.$$

W powyższym równaniu  $\partial g / \partial x_n$  oznacza pochodne cząstkowe funkcji  $g$  wielu zmiennych w punkcie  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , natomiast  $u_n$  jest niepewnością oceny wielkości fizycznej  $X_n$ .

W wielu przypadkach związek między wielkością wyjściową  $Y$  i wielkościami wejściowymi  $X_1, X_2, \dots, X_n$  jest dany zależnością  $Y = g(X_1, X_2, \dots, X_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l)$ , którą znamy z dokładnością do parametrów  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$ , które oceniamy **metodą regresji** (rozdział 4).