给定数据集

$$D = \left\{\left(\overrightarrow{x_1}, y_1\right), \left(\overrightarrow{x_2}, y_2\right), \ldots, \left(\overrightarrow{x_m}, y_m\right)\right\}, y_i \in \{-1, +1\}$$

划分超平面：

$$\overrightarrow{w}^T \overrightarrow{x} + b = 0 \tag{6.1}$$

正确分类的划分超平面的约束：

$$\begin{cases} \overrightarrow{w}^T \overrightarrow{x} + b \geqslant +1, & y_i = +1; \\ \overrightarrow{w}^T \overrightarrow{x} + b \leqslant -1, & y_i = -1 \end{cases} \tag{6.3}$$

异类支持向量的“间隔”margin：

$$\gamma = \frac{2}{\|\overrightarrow{w}\|} \tag{6.4}$$

要使间隔最大：

$$\max_{\overrightarrow{w}, b} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{w}\right\|^2 \tag{6.5}$$

$$s.t.\ y_i\left(\overrightarrow{w}\overrightarrow{x}_i + b\right) \geq 1,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

等价于(SVM基本型）：

$$\min_{\overrightarrow{w}, b} \frac{1}{2}\|\overrightarrow{w}\|^2 \tag{6.6}$$

$$s.t.\ y_i\left(\overrightarrow{w}^T\overrightarrow{x} + b\right) \geqslant 1,\ i = 1, 2, .., m$$

解得超平面模型：

$$f(x) = \overrightarrow{w}^T \overrightarrow{x} + b \tag{6.7}$$

SVM基本型的拉格朗日对偶问题：

$$SVM \equiv \min_{\overrightarrow{w}, b}(\max_{\alpha > 0}\ Ł\left(\overrightarrow{w}, b, \overrightarrow{\alpha}\right)$$

$$Ł\left(\overrightarrow{w}, b, \overrightarrow{\alpha}\right) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{w}\|^2 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\left(1 - y_i\left(\overrightarrow{w}^T\overrightarrow{x} + b\right)\right) \tag{6.8}$$

求偏导：

$$\overrightarrow{w} = \sum \alpha_i y_i x_i \tag{6.9}$$

$$0 = \sum \alpha_i y_i \tag{6.10}$$

代入6.8得到对偶问题：

$$\max_{\vec{\alpha}} \sum \alpha_i - \frac{1}{2} \sum \sum \alpha_i \alpha_j \, y_i y_j \, x_i^T x_j \tag{6.11}$$

$$s.t. \ \sum \alpha_i y_i = 0,$$
$$\alpha_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, \ldots, m$$

原样本空间非线性可分，于是将样本映射到高维空间，高维特征空间中的划分超平面模型：

$$f(\vec{x}) = \vec{w}^{\,T} \phi(\vec{x}) + b \tag{6.19}$$

特征空间中SVM基本型：

$$\min_{\vec{w}, b} = \frac{1}{2} \|\vec{w}\|^2 \tag{6.20}$$

$$s.t. \ y_i f(\vec{x}) = y_i \left( \vec{w}^T \phi(\vec{x}) + b \right) \geqslant 1, \ i = 1, 2, \ldots, m$$

其对偶问题为：

$$\max_{\vec{\alpha}} \sum \alpha_i - \frac{1}{2} \sum \sum a_i a_j \, y_i y_j \, \phi\left(\vec{x_i}\right)^T \phi\left(\vec{x_j}\right) \tag{6.21}$$

$$s.t. \ \sum a_i y_i = 0,$$
$$\alpha_i \ \geqslant 0, i = 1, 2, \ldots, m$$

定义核函数，其计算在低维空间$\mathcal{X}$：

$$\kappa\left(\vec{x_i}, \vec{x_j}\right) = \phi\left(\vec{x_i}\right)^T \phi\left(\vec{x_j}\right)$$

于是，式（6.21）可写为：

$$\max_{\vec{\alpha}} = \sum \alpha_i - \frac{1}{2} \sum \sum \alpha_i \alpha_j \, y_i y_j \, \kappa(\vec{x_i}, \vec{x_j}) \tag{6.23}$$

$$s.t. \ \sum \alpha_j y_j = 0,$$
$$\alpha_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, \ldots, m$$

求解后即可得到模型（支持向量展式）：

$$f(\vec{x}) = \vec{w}^{\,T} \phi(\vec{x}) + b$$

$$= \sum \alpha_i \, y_i \, \phi\left(\vec{x_i}\right)^T \phi\left(\vec{x_j}\right) + b$$

$$= \sum \alpha_i \, y_i \, \kappa\left(\vec{x_i}, \vec{x_j}\right) + b \tag{6.24}$$

常用核函数的选择：

$$\text{线性核：} \kappa\left(\vec{x}_i, \vec{x}_j\right) = \vec{x}_i \vec{x}_j$$

$$\text{多项式核：} \kappa\left(\vec{x}_i, \vec{x}_j\right) = \left(\vec{x}_i \vec{x}_j\right)^d, d \geqslant 1$$

$$\text{高斯核 / } RBF\text{核：} exp\left(-\frac{\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|^2}{2\sigma^2}\right), \ \sigma > 0$$

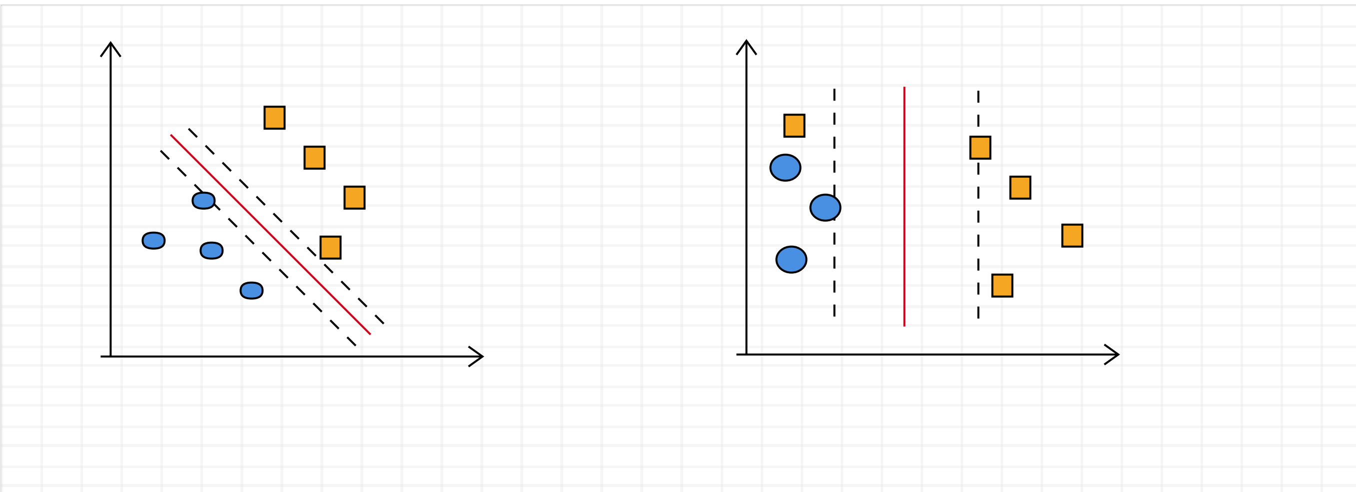
$$\text{拉普拉斯核：} exp\left(-\frac{\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|}{\sigma}\right), \ \sigma > 0$$

软间隔SVM，允许某些样本不满足约束$y_i\left(\vec{w}^T \vec{x}_i + b\right) \geqslant 1$，优化目标可写为：

$$\min_{\vec{w}, b} \frac{1}{2}\|\vec{w}\|^2 + C\sum \ell_{0/1}\left(y_i\left(\vec{w}\,\vec{x}_i + b\right) - 1\right) \tag{6.29}$$

$C > 0$是正则化常数，$\ell_{0/1}$是“0 / 1损失函数”：$\ell_{0/1}(z) = \begin{cases} 1, & if\ z < 0; \\ 0, & otherwise \end{cases}$

当C无穷大时，若要实现目标使最小化（间隔最大化），只有所有样本均满足约束，此时6.29等价于6.6；所以，若要允许一些样本不满足约束，C必须取有限值。C越大，对错误的惩罚越打，间隔越小越严格；C越小，间隔越宽松。如图：



损失函数的“替代损失”：

$$hinge\text{损失：} \ell_{hinge}(z) = max(0, 1 - z);$$
$$\text{指数损失：} \ell_{exp}(z) = exp(-z);$$
$$logistic\ loss: \ell_{log}(z) = log(1 + exp(-z))$$

若采用hinge损失，式（6.29）变为：

$$\min_{\vec{w},\, b} = \frac{1}{2}\|\vec{w}\|^2 + C\sum max\left(0,\ 1 - y_i\left(\vec{w}\,\vec{x_i} + b\right)\right) \tag{6.34}$$

将损失部分定义为“松弛变量(slack variables)” $\xi_i \geqslant 0$,
软间隔SVM可重写为：

$$\min_{\vec{w},\, b} = \frac{1}{2}\|\vec{w}\|^2 + C\sum\xi_i \tag{6.35}$$
$$s.t.\ y_i\left(\vec{w}^T\vec{x_i} + b\right) \geqslant 1 - \xi_i$$
$$\xi_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

每个样本都有一个对应的松弛变量$\xi_i$，用以表征该样本不满足约束的程度。
若样本被正确划分，即满足约束，那么该样本对应的$\xi_i = 0$，上式等于$SVM$基本型$(6.6)$

（6.35）的的拉格朗日函数：

$$Ł\left(\vec{w}, b, \vec{\alpha}, \vec{\xi}, \vec{\mu}\right) = \frac{1}{2}\|\vec{w}\|^2 + C\sum\xi_i + \sum\alpha_i\left(1 - \xi_i - y_i\left(\vec{w}^T\vec{x_i} + b\right)\right) + \sum\mu_i\,\xi_i \tag{6.36}$$

求偏导代入，得到（6.35）的对偶问题：

$$\max_{\vec{\alpha}}\ \sum\alpha_i - \frac{1}{2}\sum\sum\alpha_i\alpha_j\,y_iy_j\,\vec{x_i}^T\vec{x_j} \tag{6.40}$$
$$s.t.\ \sum\alpha_i\,y_i = 0,$$
$$0 \leqslant \alpha_i \leqslant C,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

与（6.11）唯一差别是约束不同