untitled

___debug

2018 年 3 月 24 日

最大公约数，最小公倍数

$$\operatorname{lcm}(S) = \prod_{T \subset S} \gcd(T)^{(-1)^{|T|+1}}$$

$$\gcd(\operatorname{Fib}(a), \operatorname{Fib}(b)) = \operatorname{Fib}(\gcd(a, b))$$

$$\gcd(x^a - 1, x^b - 1) = x^{\gcd(a,b)} - 1$$

BZOJ 4833

已知

$$f(n) = 2f(n-1) + f(n-2)$$

$$f(0) = 0, f(1) = 1$$

$$g(n) = \text{lcm}(f(1), f(2), ..., f(n))$$

求

$$\sum_{i=1}^{n} g(i) \times i \pmod p$$

$n \leq 10^6$, p **为质数**

$$\gcd(f(i), f(j)) = f(\gcd(i, j))$$

$$g(n) = \prod_{T \subset 2^{[n]}} f(\gcd_{i \in T}(i))^{(-1)^{|T|+1}}$$

$$f(n) = \prod_{d|n} h(d)$$

$$\begin{aligned} g(n) &= \prod_{T \subset 2^{[n]}} \left(\prod_{d | \gcd_{i \in T}(i)} h(d) \right)^{(-1)^{|T|+1}} \\ &= \prod_{d=1}^{n} h(d)^{\sum_{T \subset 2^{[\lfloor n/d \rfloor]}} (-1)^{|T|+1}} \\ &= \prod_{d=1}^{n} h(d) \end{aligned}$$

HDU 5780

求

$$\sum_{1 \le a,b \le n} \gcd(x^a - 1, x^b - 1)$$

$x, n \le 100000$, 300 组数据

$$
\begin{aligned}
ans &= \sum_{1\le a,b\le n} (x^{\gcd(a,b)} - 1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (x^k - 1) \sum_{1\le a,b\le n} [\gcd(a,b) = k] \\
&= \sum_{k=1}^{n} (x^k - 1) \left(2 \sum_{i=1}^{\lfloor n/k \rfloor} \varphi(i) - 1 \right)
\end{aligned}
$$

整除分块.

费马小定理, 欧拉定理, 扩展欧拉定理

若 p 是一个质数, 且 a 不是 p 的倍数

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

若 a, p 互质

$$a^{\varphi(p)} \equiv 1 \pmod p$$

一般情况

$$a^m \equiv a^{\min\{m, (m \bmod \varphi(n)) + \varphi(n)\}} \pmod p$$

BZOJ 3884

求

$$2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{\cdots}}}}}}}} \pmod p$$

$p \leq 10^7$, 1000 组数据

$$ans(p) = 2^{ans(\varphi(p))+\varphi(p)} \pmod p$$

递归次数 $O(\log p)$.

中国剩余定理

求一元模线性方程组 $x \equiv a_i \pmod{p_i}$ 的一个通解, p_i 两两互质.

设

$$P = \prod p_i$$

$$P_i = \frac{P}{p_i}$$

$$t_i = P_i^{-1} \bmod p_i$$

构造通解

$$x \equiv \sum a_i t_i P_i \pmod{P}$$

BZOJ 1129

给一个序列 s (可能有重复元素), 求 s 的字典序排名, 对 m 取模.

$n \leq 3 \times 10^5$, m 不一定为质数

对每一位考虑贡献, 例如第 1 位的贡献就是

$$\frac{(n-1)!}{\prod_i cnt(i)!}\left(\sum_{i<s_1} cnt(i)\right)$$

可以用 BIT 维护后面的 $\left(\sum_{i<s_1} cnt(i)\right)$.

由于 m 不是质数, 首先 CRT, 转化为模 p^k, 其中 p 为质数.
此时可以用一个数对 (x,y) 将每个数表示为 xp^y, 其中 y 极大.

筛法

- 埃拉托斯特尼筛法: 枚举倍数
- 欧拉筛法: 枚举最小质因子及其次数

uria

求有多少组正整数对 (a,b) 满足

1. $a+b \le n$
2. $a+b \mid ab$

$n \le 10^{14}$

令 $d = \gcd(a, b)$, 不妨设 $a = a'd, b = b'd$, 则 $a' + b' \mid d$.
又因为 $(a' + b')d \le n$, 所以 $a' + b' \le \sqrt{n}$.
不妨枚举 $t = a' + b'$, 则其对答案的贡献为 $\lfloor \frac{n}{t^2} \rfloor \varphi(t)$.

积性函数

令 $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$,

- $\epsilon(n) = [n = 1]$
- $1(n) = 1$
- $\mathrm{Id}(n) = n$
- $\mu(n) = [\max(e_1, e_2, \ldots, e_k) \leq 1](-1)^k$
- $\varphi(n) = n \prod_{d|n}(1 - \frac{1}{d})$
- $\mathrm{d}(n) = \sum_{d|n} 1$
- $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$
- $\lambda(n) = (-1)^k$
- ...

狄利克雷卷积

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$$

- $\mu * 1 = \epsilon$ (莫比乌斯反演)
- $\mathrm{Id} = \varphi * 1 \implies \varphi = \mu * \mathrm{Id}$
- $\mathrm{d} = 1 * 1 \implies 1 = \mu * \mathrm{d}$
- $\sigma = \mathrm{Id} * 1 \implies \mathrm{Id} = \mu * \sigma$
- $\sigma = \varphi * \mathrm{d}$
- $\mathrm{d}(ij) = \sum_{p|i} \sum_{q|j} [\gcd(p, q) = 1]$
- $\sigma(ij) = \sum_{p|i} \sum_{q|j} [\gcd(p, q) = 1] \frac{i}{p} q$
- $\sum_{i=1}^{n} \mu^2(i) = \sum_{i \geq 1} \mu(i) \lfloor \frac{n}{i^2} \rfloor$

来看几道积性函数基础题.

来看几道积性函数基础题.

再来看难一些的题.

div

求

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{d|i} f(\frac{i}{d})\sigma(d)$$

其中

$$f(n) = \sum_{\substack{i^2+j^2=n \\ \gcd(i,j)=1}} i$$

$n \leq 10^{10}$

杜教筛的思想: $f * g$ 的前缀和可以转化为两个前缀和, 于是如果 f, g 的前缀和都容易求出, 那么最终的结果也容易求出:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\sum_{d|i} f(\frac{i}{d})\sigma(d)\\ =&\sum_{k=1}^{n} f(k)\sum_{k|i}\sigma(\frac{i}{k})\\ =&\sum_{k=1}^{n} f(k)D(\lfloor\frac{n}{k}\rfloor)\end{aligned}$$

于是问题变为求 σ 的前缀和 D, 和 f 的前缀和 F. D 很好求:

$$D(n)=\sum_{i\geq 1} i\lfloor\frac{n}{i}\rfloor$$

整除分块即可.

F 没那么好求. 设 $G(n)=\sum_{1\le i^2+j^2\le n} i$, 则

$$G(n)=\sum_{i\ge 1} i\lfloor\sqrt{n-i^2}\rfloor$$

$$G(n)=\sum_{i\ge 1} F(\frac{n}{d^2})d$$

$$F(n)=G(n)-\sum_{i>1} F(\frac{n}{d^2})d$$

预处理前 $n^{2/3}$ 项, 时间复杂度 $O(n^{2/3})$.

求有多少组正整数对 (a, b) 满足

1. $a, b \leq n$
2. $\operatorname{lcm}(a, b) > n$

$n \leq 10^{10}$

首先补集转化, 即求

$$
\begin{aligned}
&\sum_{1\le t\le n}\sum_{1\le i,j\le n}[\gcd(i,j)=t][ij\le nt]\\
=&\sum_{1\le t\le n}\sum_{1\le i,j\le\lfloor n/t\rfloor}[\gcd(i,j)=1][ij\le\lfloor n/t\rfloor]
\end{aligned}
$$

由于 t 可以整除分块, 不妨设

$$f(k) = \sum_{1 \le i,j \le k} [\gcd(i,j) = 1][ij \le k]$$

不妨设 $i < j$, 然后 1 到 $\sqrt{k}$ 枚举 i: (注意 $i = j = 1$ 的情况)

$$\begin{aligned} f(k) &= 2\left(\sum_{i=1}^{\sqrt{k}}\left(-\varphi(i) + \sum_{j=1}^{\lfloor k/i \rfloor}[\gcd(i,j) = 1]\right)\right) + 1 \\ &= 2\left(\sum_{i=1}^{\sqrt{k}}\left(-\varphi(i) + \sum_{d \mid i}\mu(d)\left\lfloor \frac{k}{id} \right\rfloor\right)\right) + 1 \end{aligned}$$

考虑每个 d 的贡献就可以 $O(\sqrt{k}\log k)$ 计算 $f(k)$ 了.
时间复杂度 $O(n^{3/4}\log n)$.

性质 1:

$$f(k) - f(k-1) = 2^{\mathrm{c}(k)}$$

其中 $\mathrm{c}(k)$ 为 k 的质因子个数.

证明:
考虑在 $f(k)$ 中有的 (i, j) 而在 $f(k-1)$ 中没有的, 一定满足 $ij = k$ 且 $\gcd(i, j) = 1$. 容易看出这样的 (i, j) 的对数就是 $2^{\mathrm{c}(k)}$.

$\mathrm{c}(x)$ 是一个积性函数, 可以线性筛. 借鉴杜教筛的思想, 预处理前 $n^{2/3}$ 项即可, 时间复杂度 $O(n^{2/3} \log n)$.

性质 2:

$$f(k)=\sum_{i=1}^{k}\left\lfloor\frac{k}{i}\right\rfloor-\sum_{t=2}^{\sqrt{k}}f\left(\frac{k}{t^2}\right)$$

证明:

- 将所有 $ij\le k$ 的考虑进来: $\sum_{i=1}^{k}\lfloor k/i\rfloor$
- 再枚举 $t=\gcd(i,j)$, 减去贡献: $\sum_{t=2}^{\sqrt{k}}f(k/t^2)$

借鉴杜教筛的思想, 递归计算即可, 时间复杂度 $O(n^{2/3})$.

定义

在 n 个元素中取出 k 个的方案数:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$$

将 n 个元素分为 k 个环的方案数:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$$

将 n 个元素分为 k 个集合的方案数:

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = k\begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{j=0}^{k}\binom{n-k-1+j}{j}$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{j=0}^{n-1}\binom{j}{k-1}$$

$$\binom{n}{k} \equiv \binom{\lfloor n/p \rfloor}{\lfloor k/p \rfloor}\binom{n \bmod p}{k \bmod p} \pmod{p}$$

AGC018 E

已知平面上三块不相交的从左上到右下排列的三块矩形区域 A, B, C, 求分别从这三个区域中挑一个点构成的路径的个数, 只能向右或向上走.

坐标范围 $\leq 10^6$

英文阅读.

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} b_i \implies b_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} a_i$$

$$a_k = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} b_i \implies b_k = \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} a_i$$

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ n \atop k \right\} x^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \left\{ n \atop k \right\} x^{\overline{k}}$$

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \left[n \atop k \right] x^k$$

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left[n \atop k \right] x^k$$

$$\left\{ n \atop j \right\} = \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} k^n$$

BZOJ 2159

给定一棵 n 个点的树和一个常数 k, 对于每个 i, 求

$$S(i) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{dist}(i, j)^k$$

$n \leq 50000, k \leq 150$

$$
\begin{aligned}
S(i) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=0}^{k}\left\{{k \atop l}\right\}\mathrm{dist}(i,j)^{\underline{l}} \\
&= \sum_{l=0}^{k}\left\{{k \atop l}\right\}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{dist}(i,j)^{\underline{l}} \\
&= \sum_{l=0}^{k}\left\{{k \atop l}\right\}l!\sum_{j=1}^{n}\binom{\mathrm{dist}(i,j)}{l}
\end{aligned}
$$

利用组合数的递推式, 可以 $O(k)$ 将 $\mathrm{dist}(i,j)$ 加 1. 然后就可以 DP 了. 时间复杂度 $O(nk)$.

BZOJ 4555

求

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\left\{ {i \atop j} \right\} 2^j j! \pmod{998244353}$$

$n \le 10^5$

直接斯特林反演

$$\sum_{j=0}^{i} 2^j j! \sum_{k=0}^{j} \frac{(-1)^{j-k}}{(j-k)!} \frac{\sum_{i=0}^{n} k^i}{k!}$$

FFT 即可.

原题的价值

定义一个无向图的权值为所有节点的度数的 k 次方之和. 求所有 n 个点的简单无向图的权值之和, 对 998244353 取模.

$n \leq 10^9, k \leq 10^5$

考虑每个点的贡献，发现答案就是

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}i^k\right)2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n$$

转化为求

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}i^k$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}i^k =&\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\sum_{j=0}^{k}\left\{{k \atop j}\right\}i^{\underline{j}}\\
=&\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\sum_{j=0}^{k}\left\{{k \atop j}\right\}\binom{i}{j}j!\\
=&\sum_{j=0}^{k}\left\{{k \atop j}\right\}j!\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{j}\\
=&\sum_{j=0}^{k}\left\{{k \atop j}\right\}j!\binom{n}{j}\sum_{i=0}^{n}\binom{n-j}{i}\\
=&\sum_{j=0}^{k}\left\{{k \atop j}\right\}n^{\underline{j}}2^{n-j}
\end{aligned}
$$

利用斯特林反演, FFT 快速求第二类斯特林数即可.

LOJ 2327

两个人玩一个有限状态非对称组合游戏.
给出 m 个棋盘, 求所有 $2m$ 个子集的胜负结果.

看题解.

拉格朗日插值

给定 $n+1$ 个点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$，求一个 n 次函数穿过这些点.

$$\ell_k(x) = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

$$L(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \ell_k(x)$$

差分表

给定 $n+1$ 个点 $(0, y_0), (1, y_1), ..., (n, y_n)$，求一个 n 次函数穿过这些点.

$$\Delta_0 f(j) = f(j)$$

$$\Delta_k f(j) = \Delta_{k-1} f(j+1) - \Delta_{k-1} f(j)$$

可以证明

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k} \Delta_k f(0)$$

$\Delta_0 f(0), \Delta_1 f(0), ..., \Delta_n f(0)$ 被称作差分表的第一条对角线.

例如 $f(x)=2x^3+2x^2-4x+1$ 的差分表为

$$1, 1, 16, 60, 144, 513, ...$$

$$0, 16, 44, 84, 136, ...$$

$$16, 28, 40, 52, ...$$

$$12, 12, 12, ...$$

$$0, 0, ...$$

例如 $f(x)=2x^3+2x^2-4x+1$ 的差分表为

$$1,1,16,60$$

$$0,16,44$$

$$16,28$$

$$12$$

第一条对角线为

$$1,0,16,12$$

自然数幂和

给定 n, m, 求 $\sum_{k=0}^{m} k^n$, 对质数 p 取模.

$n \leq 1000, m \leq 10^9$

考虑 $f(x)=x^n$ 这一函数的差分表的第 0 条对角线 $c_0 \ldots c_n$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m} f(k) &= \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} c_j \binom{k}{j} \\ &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} c_j \binom{k}{j} \\ &= \sum_{j=0}^{n} c_j \binom{m+1}{j+1}\end{aligned}$$

由于模数为质数, 可以 $O(n^2)$ 计算.

由之前的做法可知 $\sum_{k=0}^{m} k^n$ 是一个关于 m 的 $n+1$ 次多项式. 直接拉格朗日插值即可.
取 $k = 0...n+1$ 时的函数值, 此时拉格朗日插值可优化为 $O(n)$. 要算出这些函数值, 线性筛一下也是 $O(n)$ 的.

给定 k, a, n, d, 求

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{a+id} \sum_{l=1}^{j} l^k \bmod 1234567891$$

$k \le 3000, a, n, d < 1234567891$

首先注意到 $\sum_{l=1}^{j} l^k$ 是一个关于 j 的 $k+1$ 次多项式.
然后注意到 $\sum_{j=1}^{a+id} \sum_{l=1}^{j} l^k$ 是一个关于 i 的 $k+2$ 次多项式.
所以答案就是一个关于 n 的 $k+3$ 次多项式.

先把 $\sum_{l=1}^{j} l^k$ 的差分表第一条对角线求出来, 然后 $O(k^2)$ 求出 $\sum_{j=1}^{a+id} \sum_{l=1}^{j} l^k$ 在 $i = 0, 1, ..., k+2$ 时的值. 最后再把 $\sum_{j=1}^{a+id} \sum_{l=1}^{j} l^k$ 的第一条对角线求出来, 直接算就可以了.

微积分

假设大家都已经 (不一定系统地) 学过微积分了.

极限

Let $f(x)$ be defined on an open interval about c, except possibly at c itself. We say that the limit of $f(x)$ as x approaches c is the number L, and write

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

if, for every number $\epsilon > 0$, there exists a corresponding number $\delta > 0$ such that for all x,

$$0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

连续

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$$

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$$

导数

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{z\to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x}
\end{aligned}
$$

例子: 求 $(\sqrt{x})'$.

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{x})' &= \lim_{z \to x} \frac{\sqrt{z} - \sqrt{x}}{z - x} \\
&= \lim_{z \to x} \frac{\sqrt{z} - \sqrt{x}}{(\sqrt{z} - \sqrt{x})(\sqrt{z} + \sqrt{x})} \\
&= \lim_{z \to x} \frac{1}{\sqrt{z} + \sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

记号

$$f^{'}(x) = y^{'} = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)$$

$$f^{''}(x) = y^{''} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

解释:

$$dy = f^{'}(x)dx$$

运算法则

$$\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(uv) = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\frac{u}{v}) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

指数函数求导

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

三角函数求导

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\sin x) &= \cos x \\
\frac{d}{dx}(\cos x) &= -\sin x \\
\frac{d}{dx}(\tan x) &= -\frac{1}{\cos^2 x} = -\sec^2 x \\
\frac{d}{dx}(\sec x) &= \sec x \tan x
\end{aligned}
$$

提示:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

反函数求导

$$f^{-1}(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

例子: 求 $\frac{d}{dx}(\ln x)$.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\ln x) &= \frac{1}{e^{\ln x}} \\ &= \frac{1}{x}\end{aligned}$$

反三角函数求导

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\arcsin x) &= \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\frac{d}{dx}(\arccos x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\frac{d}{dx}(\arctan x) &= \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}
$$

x^n 求导

当 $x > 0$ 时，

$$x^n = e^{n \ln x}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x^n) &= \frac{d}{dx} e^{n \ln x} \\
&= e^{n \ln x} \frac{d}{dx}(n \ln x) \\
&= x^n \frac{n}{x} \\
&= n x^{n-1}
\end{aligned}$$

洛必达法则

当 $f(a), g(a)$ 都为 0 或 ∞ 时，有

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

例子：证明

$$\lim_{x \to 0^+} (1+x)^{1/x} = e$$

令 $f(x)=(1+x)^{1/x}$, 因为

$$\ln f(x)=\frac{1}{x}\ln(1+x)$$

所以

$$\lim_{x\to 0^+}\ln f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

于是

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x}=\lim_{x\to 0^+}e^{\ln f(x)}=e$$

牛顿迭代

任取一个 x_0

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

不一定收敛.

反导数

F 是 f 的反导数当且仅当 $F'(x) = f(x)$.
定理: 如果 F 是 f 的一个反导数, 那么所有 f 的反导数形如

$$F(x) + C$$

定积分

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

微积分基本定理

$$F^{'}(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

不定积分

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

换元积分法

$$\int f(u)\frac{du}{dx}\,dx = \int f(u)\,du$$

例子:

$$\int \sqrt{2x+1}\,dx$$

令 $u = 2x + 1$, 则

$$\frac{du}{dx} = 2$$
$$dx = \frac{du}{2}$$

于是

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{2x+1}\, dx &= \int \sqrt{u}\, dx \\
&= \int \sqrt{u} \frac{du}{2} \\
&= \frac{1}{2} \int \sqrt{u}\, du \\
&= \frac{u^{3/2}}{3} + C \\
&= \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C
\end{aligned}$$

例子:

$$\int \tan x \; dx$$

令 $u = \cos x$, 则

$$\begin{aligned}\int \tan x \; dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &= \int -\frac{1}{u} \; du \\ &= -\ln|u| + C \\ &= -\ln|\cos x| + C \\ &= \ln|\sec x| + C\end{aligned}$$

分部积分法

$$\int u\ dv = uv - \int v\ du$$

例子:

$$\int x \cos x\ dx$$

令 $u = x, dv = \cos x \ dx$, 则 $du = dx, v = \sin x$, 有

$$\begin{aligned} \int x \cos x \ dx &= x \sin x - \int \sin x \ dx \\ &= x \sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

例子:

$$\int \ln x \, dx$$

令 $u = \ln x, dv = dx$, 则 $du = \frac{1}{x}, v = x$, 有

$$\begin{aligned}\int \ln x \, dx &= x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, dx \\ &= x \ln x - x + C\end{aligned}$$

其他基本积分技巧

- 三角函数积分
- 三角换元
- 部分分式展开
- …

例子：分析复杂度

$$\left(\sum_{i=1}^{\sqrt{n}} \sqrt{i} + \sqrt{\frac{n}{i}}\right) \log n$$

(为了方便，把 $\log$ 提出来了，反正是上界)
求导近似

$$\int \sqrt{x} + \sqrt{\frac{n}{x}}\, dx = \int \sqrt{x}\, dx + \int \sqrt{\frac{n}{x}}\, dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + 2\sqrt{nx}$$

带进去就是 $\frac{8n^{3/4}}{3}$. 时间复杂度 $O(n^{3/4} \log n)$.

如果预处理前 $k, (k > \sqrt{n})$ 项, 那么复杂度渐进上界为

$$k + \left(\sum_{i=1}^{\lfloor n/k \rfloor} \sqrt{\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor} \right) \log n$$

求导近似

$$\int \sqrt{\frac{n}{x}}\, dx = 2\sqrt{nx}$$

带入

$$k + \frac{2n}{\sqrt{k}} \log n$$

不管 $\log$ 和常数, 当 $k = n^{2/3}$ 时有最小值.
时间复杂度 $O(n^{2/3} \log n)$.

给你一个 n 维超立方体，第 i 个维度的长度为 r_i ，同时给你一个 n 维超平面 $x_1 + x_2 + ... + x_n = S$. 这个超平面把超立方体切成至多两部分，求原点所在的那一部分的面积.

设 $A_n(x)$ 为在 n 维空间里 $S = x$, 且长度没有限制的面积.
发现 $A_n(x)$ 是 $A_{n-1}(x_0)$ 在 $[0, x]$ 上的定积分, 显然

$$A_n(x) = \frac{x^n}{n!}$$

接下来考虑坐标的限制, 即 $\sum x_i \leq S$, 其中每个 $x_i \in [0, r_i]$ 。考虑容斥. 我们把没有限制的情况分别减去第 $1, 2, ..., n$ 个元素超过限制的情况, 再加上第 $1, 2$, 第 $1, 3$ 等元素同时超过限制的情况......
注意到 $N \times \max A_i$ 不会很大, 容斥可以用 DP 优化.

一阶线性微分方程

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

构造 $v(x)$ 满足

$$v\frac{dy}{dx}+Pvy=\frac{d}{dx}(vy)$$

则

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx}+P(x)y&=Q(x)\\
v(x)\frac{dy}{dx}+P(x)v(x)y&=v(x)Q(x)\\
\frac{d}{dx}(v(x)y)&=v(x)Q(x)\\
v(x)y&=\int v(x)Q(x)\,dx\\
y&=\frac{1}{v(x)}\int v(x)Q(x)\,dx
\end{aligned}$$

回来构造 $v(x)$:

$$
\begin{aligned}
v\frac{dy}{dx} + Pvy &= \frac{d}{dx}(vy) \\
v\frac{dy}{dx} + Pvy &= v\frac{dy}{dx} + y\frac{dv}{dx} \\
Pvy &= y\frac{dv}{dx} \\
\frac{dv}{dx} &= Pv \\
\frac{dv}{v} &= Pdx \\
\int \frac{dv}{v} &= \int P\ dx \\
\ln v &= \int P\ dx \\
v &= e^{\int P\ dx}
\end{aligned}
$$

辛普森积分

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$$

常用自适应辛普森.

BZOJ 1502 月下柠檬树

模板题.

多变量微积分

对某个变量 x_i 求偏导就是把其它的变量视为常数，然后求普通的导数.

拉格朗日乘数

找到 $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ 的极值点，满足 $g(x_1, x_2, ..., x_n) = 0.$

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

BZOJ 2876 骑行川藏

模板题.

单纯形

参考算法导论.

BZOJ 1061 志愿者招募

模板题.