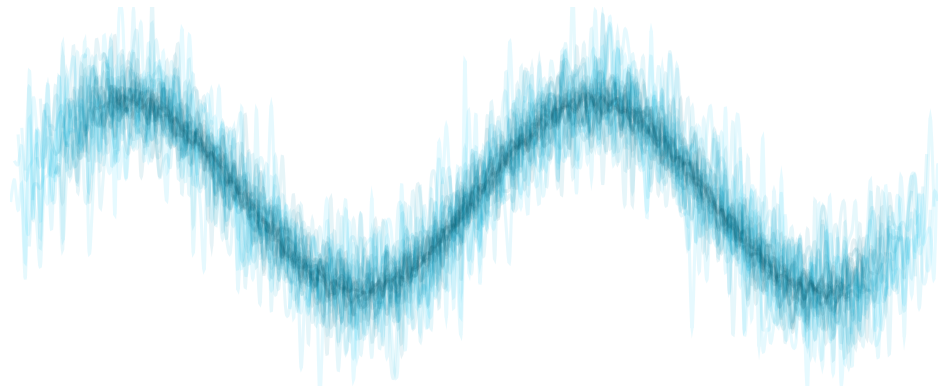


**Année universitaire
2024 - 2025**

Tronc Commun ETI/PSM – S7
Traitement des Signaux Aléatoires

**Chapitre 1 – Introduction : notions de physique et
outils mathématiques**



Marion Foare, Arthur Gautheron

Table des matières

Acronymes	2
Notations	2
1 Introduction	3
1.1 Classification morphologique	3
1.2 Classification énergétique	4
1.3 Classification phénoménologique	5
1.4 Objectifs du cours	10
2 Origines physique du bruit	10
3 Outils mathématiques : rappels de probabilités continues	12
3.1 Variable aléatoire continue	12
3.2 Densité de probabilité	12
3.3 Changement de variable	14
3.4 Loi conjointe	15
3.5 Caractéristiques statistiques d'une variable aléatoire	15
3.5.1 Espérance mathématique	15
3.5.2 Variance, écart-type	16
3.5.3 Moments d'ordre n	17
3.6 Lois usuelles	18
3.6.1 Processus Gaussien	18
3.6.2 Récapitulatif des lois continues usuelles	19

Acronymes

DDP	Densité de Probabilité	13
DSE	Densité Spectrale d'Énergie (spectre – DSE)	5
DSP	Densité Spectrale de Puissance	5

Notations

$\gamma_x(\tau)$	Autocorrélation du signal x	5
$f_X(x)$	Densité de probabilité d'une variable aléatoire X	13
$f_{X,Y}(x,y)$	Densité de probabilité jointe des variables aléatoires X et Y	15
$\Gamma_X(\nu)$	Densité spectrale du signal aléatoire $X(t)$	5
$\Gamma_{XY}(\nu)$	Densité spectrale d'interaction des signaux X et Y	5
$\sigma(X)$	Écart-type d'une variable aléatoire X	16
E_x	Énergie du signal x	4
$F_X(x)$	Fonction de répartition d'une variable aléatoire X	13
$F_{X,Y}(x,y)$	Fonction de répartition jointe des variables aléatoires X et Y	15
$\gamma_{xy}(\tau)$	Intercorrélation des signaux x et y	5
\bar{P}_x	Puissance moyenne du signal x	4
$V(X)$	Variance d'une variable aléatoire X	16

Le module de Traitement des Signaux Aléatoires s'appuie sur les fondamentaux en mathématiques et traitement du signal abordés en troisième et quatrième années à CPE. Toute ressemblance avec des contenus de cours des semestres en cours ou précédents n'est pas fortuite, et vise à faire un lien explicite entre ce polycopié et vos acquis.

1 Introduction

Un signal correspond à l'évolution d'une mesure physique observée en sortie d'un système. Il modélise donc une information à transmettre.

Dans ce cours, comme dans les précédents cours de traitement du signal à CPE, on s'intéressera principalement aux signaux évoluant au cours du temps, appelés **signaux temporels**.

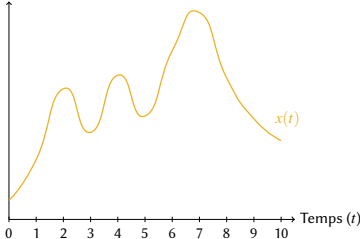
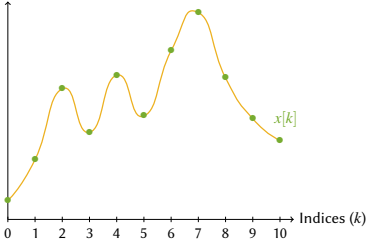
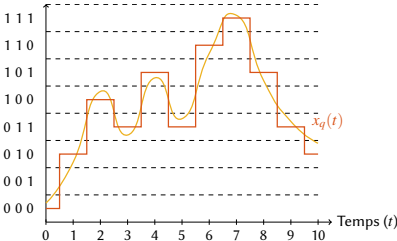
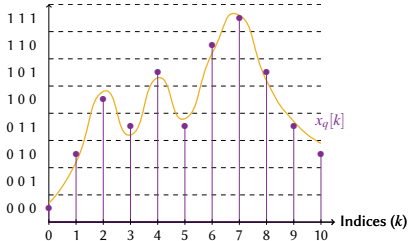
Cependant, la variable d'évolution peut aussi être une distance ou une position dans l'espace, par exemple : la température en fonction de l'altitude, la température en fonction de la position dans un plan, une image. On parle alors de **signal spatial**.

Les signaux peuvent être classés de différentes manières, selon leurs caractéristiques.

1.1 Classification morphologique

Un signal est caractérisé par 2 valeurs : sa variable d'évolution, en général (et ce sera le cas dans ce cours) le temps t , et son amplitude $x(t)$. Ces deux quantités peuvent être continues ou discrètes, conduisant à la classification proposée à la Table 1.1.

TABLE 1.1 – Classification morphologique des signaux.

	Temps continu	Temps discret
Amplitude continue		
Amplitude discrète		

Les signaux à amplitude et temps continus ont fait l'objet du cours de Signaux et Systèmes Linéaires [2], tandis que le cours de Traitement Numérique du Signal [5] se consacrait aux signaux à temps discret.

Il existe des signaux aléatoires dans les 4 catégories.

1.2 Classification énergétique

Un signal mesure l'évolution d'une grandeur dans le temps ou dans l'espace. Il constitue donc un transfert d'énergie d'une source à un récepteur.

La classification énergétique, illustrée à la Figure 1.1, s'appuie sur les définitions d'énergie et de puissance d'un signal, rappelées dans la Table 1.2 dans le cas déterministe.

TABLE 1.2 – Énergie et puissance d'un signal.

	Energie	Puissance moyenne
Temps continu	$E_x = \int_{\mathbb{R}} x(t) ^2 dt$	$\bar{P}_x = \lim_{D \rightarrow \infty} \frac{1}{2D} \int_{-D}^D x(t) ^2 dt$
Temps discret	$E_x = \sum_{k \in \mathbb{N}} x[k] ^2$	$\bar{P}_x = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{k=-K}^K x[k] ^2$

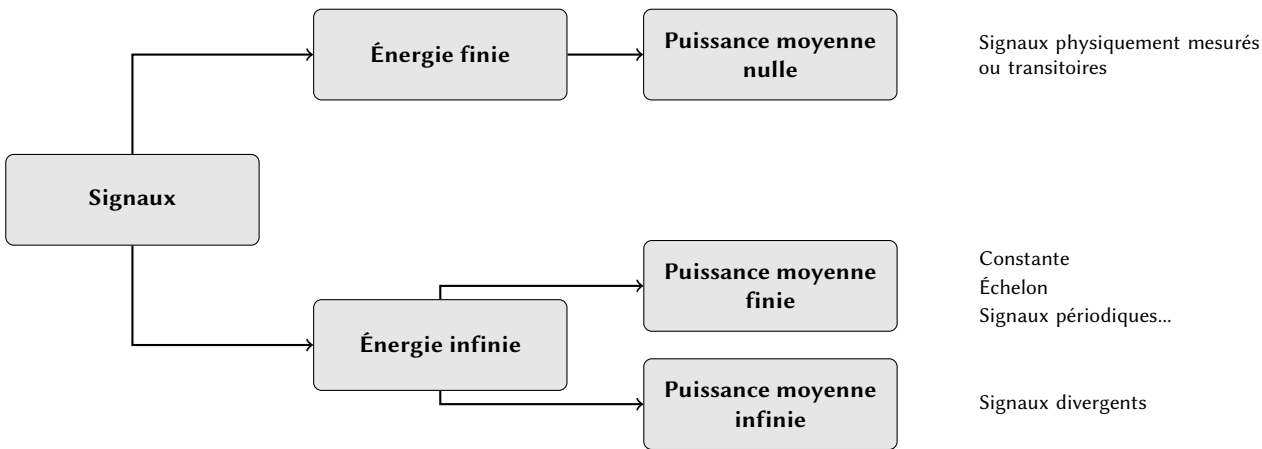


FIGURE 1.1 – Classification énergétique des signaux.

On s'intéresse en particulier aux deux sous-classes suivantes :

- les signaux d'**énergie finie** : leur énergie est bornée, et leur puissance moyenne est nulle. On trouve dans cette classe les signaux dont la durée est finie et dont l'amplitude est bornée. De ce fait, tous les signaux physiques que l'on manipule sont à énergie finie.
- les signaux de **puissance moyenne finie** : la puissance moyenne est bornée, et l'énergie est infinie. Ces signaux n'existent pas physiquement au sens strict, mais cette hypothèse permet une modélisation commode. On trouve notamment dans cette classe les signaux périodiques de durée infinie.

Remarque : Les signaux d'énergie infinie n'ont pas tous une puissance moyenne finie.

Les propriétés énergétiques des signaux appartenant à ces deux sous-catégories sont rappelées dans la Table 1.3.

TABLE 1.3 – Représentation énergétiques des signaux.

	Énergie finie → puissance moyenne nulle	Puissance moyenne finie → énergie infinie
Transformée de Fourier		Distribution
Autocorrélation (temps continu)	$\gamma_x(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)x^*(t-\tau)dt$	$\gamma_x(\tau) = \lim_{D \rightarrow \infty} \frac{1}{2D} \int_{-D}^D x(t)x^*(t-\tau)dt$
Autocorrélation (temps discret)	$\gamma_x[n] = \sum_{k \in \mathbb{N}} x[k]x^*[k-n]$	$\gamma_x[n] = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{k=-K}^K x[k]x^*[k-n]$
Maximum (à l'origine)	$\gamma_x(0) = E_x$	$\gamma_x(0) = \bar{P}_x$
Densité Spectrale	d'Énergie (DSE) $\Gamma_X(\nu) = X(\nu) ^2$	de Puissance moyenne (DSP) $\Gamma_X(\nu) = \text{TF}(\gamma_x(\tau))$
Intercorrélation (temps continu)	$\gamma_{xy}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t-\tau)dt$	$\gamma_{xy}(\tau) = \lim_{D \rightarrow \infty} \frac{1}{2D} \int_{-D}^D x(t)y^*(t-\tau)dt$
Intercorrélation (temps discret)	$\gamma_{xy}[n] = \sum_{k \in \mathbb{N}} x[k]y^*[k-n]$	$\gamma_{xy}[n] = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{k=-K}^K x[k]y^*[k-n]$
Densité Spectrale d'interaction	d'Énergie $\Gamma_{XY}(\nu) = X(\nu)Y^*(\nu)$	de Puissance $\Gamma_{XY}(\nu) = \text{TF}(\gamma_{xy}(\tau))$

1.3 Classification phénoménologique

La classification phénoménologique (Figure 1.2) prend en compte l'évolution du signal en fonction du temps (ou de l'espace).

On distingue deux grandes catégories de signaux.

Les cours de traitement du signal de troisième année à CPE [2, 5] ont porté sur les **signaux déterministes** (certains). On rappelle que les signaux déterministes ont une amplitude qui peut être connue à tout instant, avant même la réalisation de ce signal. La valeur en chaque instant peut être définie en fonction d'une formule mathématique. Il s'agit de signaux reproductibles et prévisibles. Ainsi, si l'on reproduit à l'identique l'expérience à l'origine du signal, on obtiendra un signal identique. Ils correspondent le plus souvent à des signaux synthétiques.

Exemple 1.1 Signal déterministe

On considère le signal $s(t) = \sin(2\pi\nu_0 t)$, avec $\nu_0 = 5$ Hz. On enregistre ce signal durant une seconde, à une fréquence de 100 Hz.

On obtient ainsi :

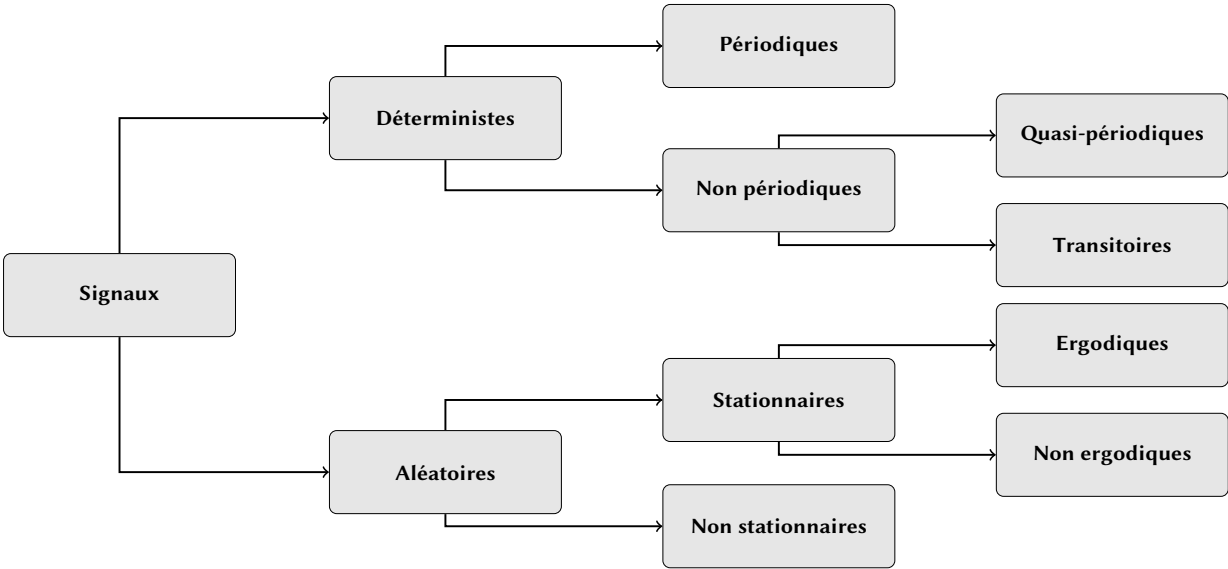
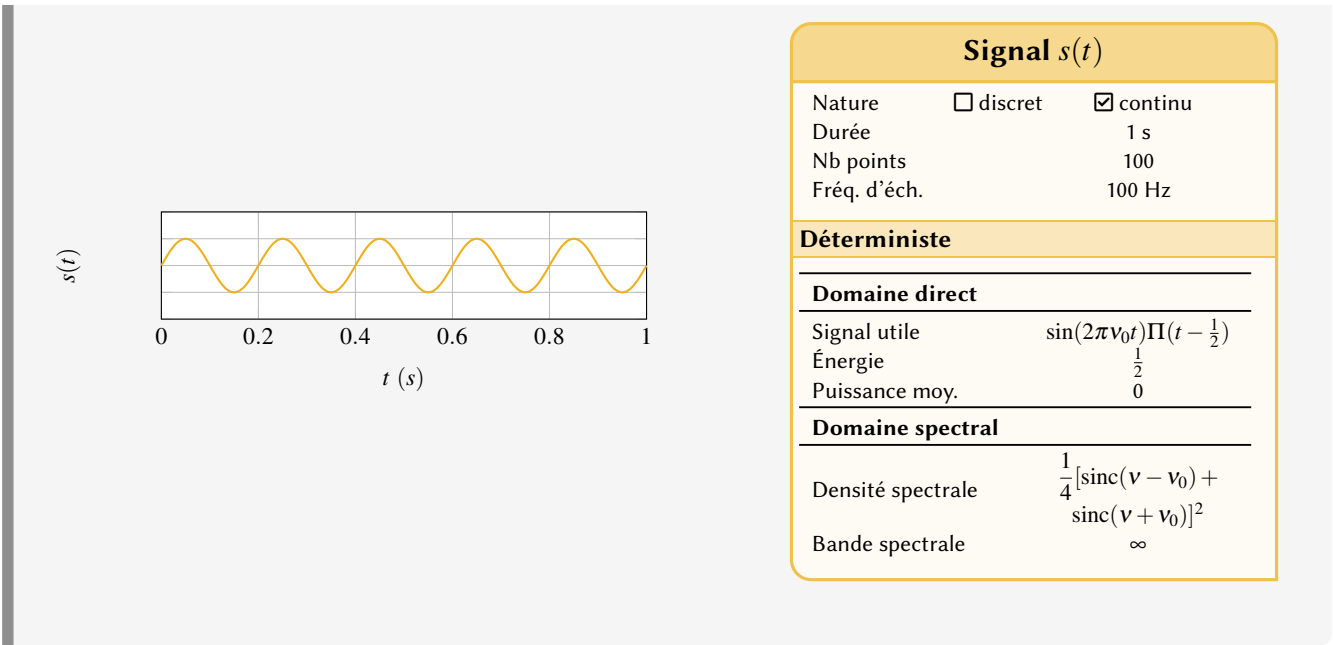


FIGURE 1.2 – Classification phénoménologique des signaux.



Les **signaux aléatoires** résultent quant à eux de processus aléatoires (stochastiques), et une expérience ne permet d'observer qu'une seule des réalisations possibles du signal aléatoire. Ainsi, si on réalise de multiples acquisitions d'un signal aléatoire, dans des conditions globalement identiques, on obtiendra des résultats différents. De même, les signaux utilisés pour transporter de l'information sont aléatoires, puisque cette information n'est pas connue a priori au niveau du récepteur.

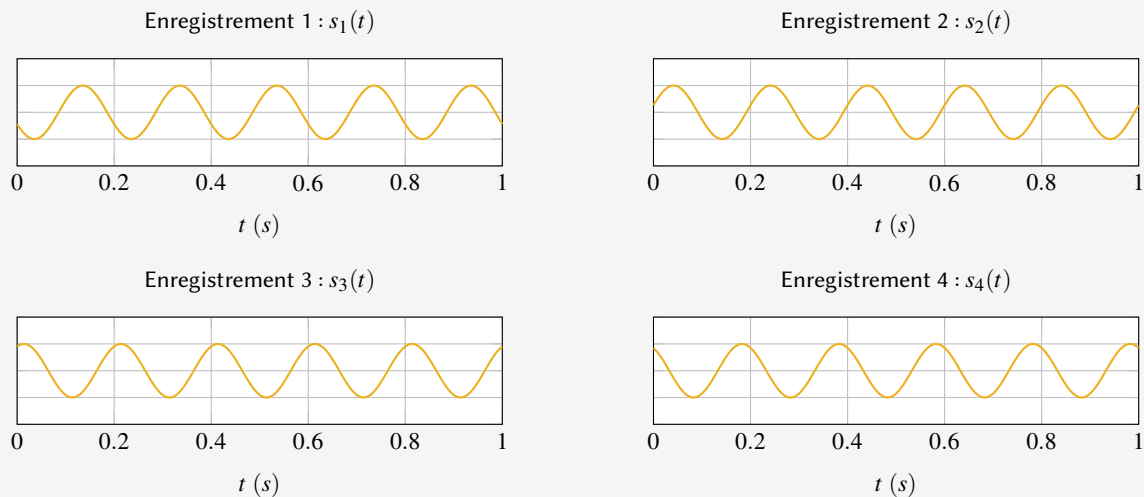
La plupart des signaux naturels sont des signaux aléatoires :

- signaux électro-physiologiques,
- signaux géodésiques,
- signal de la parole,
- signaux parasites ou bruits (bruit électronique, bruit d'un canal de transmission etc..),

- signal bruité,
- image,
- etc.

Exemple 1.2 Signal certain à phase aléatoire

On se rend compte qu'en allumant plusieurs fois un oscilloscope, il y a à chaque fois un décalage de phase à l'origine. En répétant 4 fois l'enregistrement, on obtient les 4 signaux suivants :



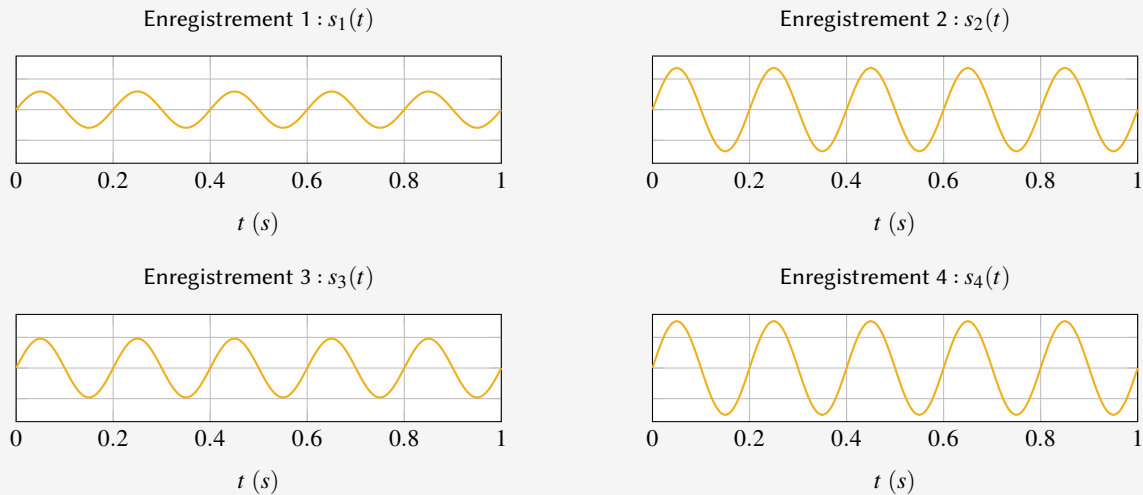
Ces 4 signaux sont identiques au signal $s(t)$ de l'exemple 1.3, à un décalage de phase près. Une fois que l'on connaît la phase à l'origine φ_k , on peut donc remplir une carte d'identité :

Signal $s_k(t)$	
Nature	<input type="checkbox"/> discret <input checked="" type="checkbox"/> continu
Durée	1 s
Nb points	100
Fréq. d'éch.	100 Hz
Déterministe	
Domaine direct	
Signal utile	$\sin(2\pi\nu_0 t + \varphi_k) \Pi(t - \frac{1}{2})$
Énergie	$\frac{1}{2}$
Puissance moy.	0
Domaine spectral	
Densité spectrale	$\frac{1}{4} [\text{sinc}(\nu - \nu_0) + \text{sinc}(\nu + \nu_0)]^2$
Bande spectrale	∞

Cependant, il apparaît que la phase φ_k est un paramètre aléatoire, qui nécessiterait d'être traité à part.

Exemple 1.3 Signal certain à amplitude aléatoire

Cette fois-ci, on se rend compte que l'amplificateur est défaillant, et l'amplitude du signal varie d'une expérience à l'autre. En répétant 4 fois l'enregistrement, on obtient les 4 signaux suivants :



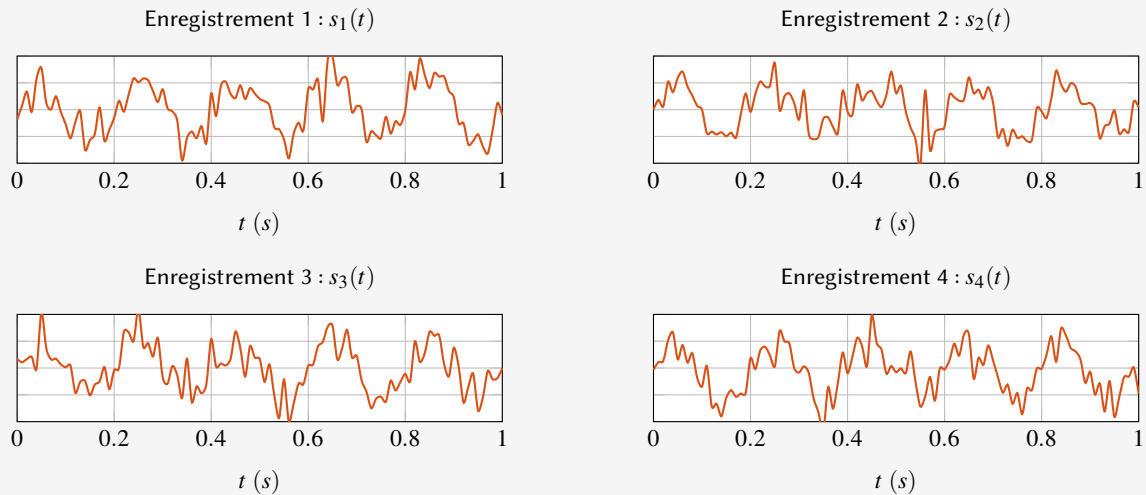
Tous ces signaux sont à nouveau identiques au signal $s(t)$ précédemment observé (exemple 1.3), à un facteur d'amplitude près. Une fois connue l'amplitude A_k pour chaque observation, on peut encore remplir une carte d'identité :

Signal $s_k(t)$	
Nature	<input type="checkbox"/> discret <input checked="" type="checkbox"/> continu
Durée	1 s
Nb points	100
Fréq. d'éch.	100 Hz
Déterministe	
Domaine direct	
Signal utile	$A_k \sin(2\pi\nu_0 t) \Pi(t - \frac{1}{2})$
Énergie	$\frac{A_k^2}{2}$
Puissance moy.	0
Domaine spectral	
Densité spectrale	$\frac{A_k^2}{4} [\text{sinc}(\nu - \nu_0) + \text{sinc}(\nu + \nu_0)]^2$
Bande spectrale	∞

Cette fois-ci, le changement d'amplitude d'une observation à l'autre impact non seulement la définition du signal, mais aussi son énergie et son spectre. De nouveau, il semblerait que le signal utile devrait être indépendant du paramètre aléatoire A_k , et que l'impact de ce dernier devrait être traité à part.

Exemple 1.4 Signal bruité

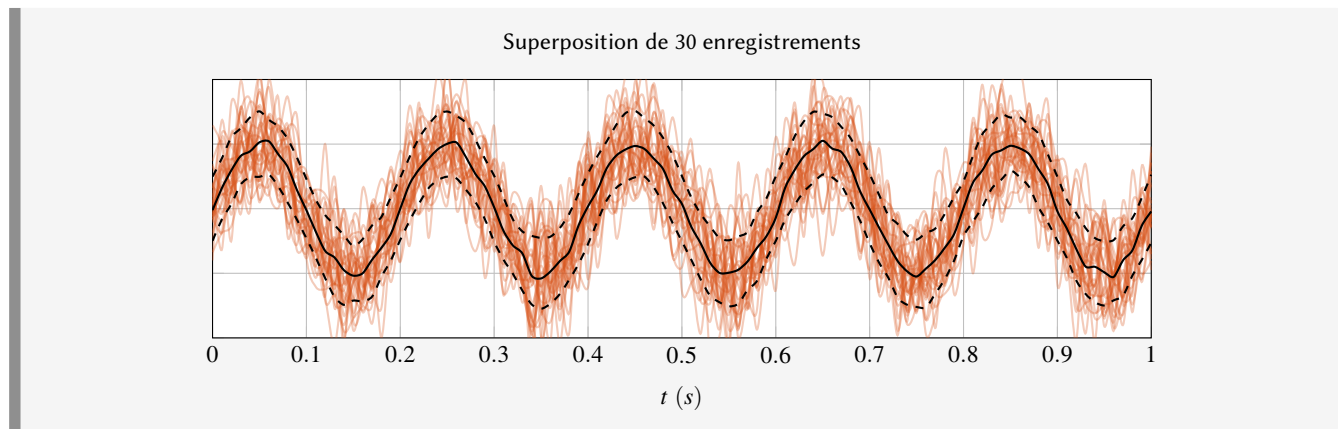
Lors de l'enregistrement de l'exemple 1.3, on remarque que le capteur n'est pas parfait. En répétant 4 fois l'enregistrement, on obtient les 4 signaux suivants :



Encore une fois, tous ces signaux sont globalement proches du signal $s(t)$ précédemment observé (exemple 1.3), mais ont été dégradés lors de l'acquisition. Cette dégradation est cette fois-ci imprévisible. Il n'est donc plus possible de générer une carte d'identité telle que la précédente pour ce signall :

Signal $s_k(t)$		
Nature	<input type="checkbox"/> discret	<input checked="" type="checkbox"/> continu
Durée	1 s	
Nb points	100	
Fréq. d'éch.	100 Hz	
Déterministe		
Domaine direct		
Signal utile	$\sin(2\pi\nu_0 t)\Pi(t - \frac{1}{2}) + ??$	
Énergie	??	
Puissance moy.	0	
Domaine spectral		
Densité spectrale	??	
Bande spectrale	∞	

Cependant, lorsqu'on superpose plusieurs enregistrements, on constate que toutes ces observations semblent avoir des caractéristiques communes, qui pourraient nous servir pour décrire le signal étudié :



La description des signaux aléatoires ne peut alors se faire qu’au travers d’observations statistiques, à l’aide d’outils de probabilité, afin de compléter la carte d’identité précédemment établie pour les signaux déterministes.

1.4 Objectifs du cours

L’objet du cours de Traitement des Signaux Aléatoires est de mettre en place le formalisme nécessaire pour :

- ⊕ Définir les différentes grandeurs permettant de **caractériser un signal aléatoire** (chapitre 2),
- ⊕ **Estimer les caractéristiques** lorsqu’elles sont inconnues (chapitre 3),
- ⊕ **Filtrer** les signaux aléatoires (chapitre 4).

il est important de connaître et comprendre l’origine physique du bruit de mesure (section 2). La fin de ce chapitre est consacré à des rappels de probabilité (section 3)

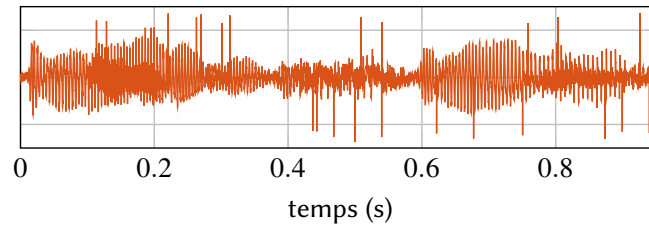
2 Origines physique du bruit

Idéalement, on aimerait que la mesure que l’on fait du phénomène physique corresponde parfaitement à la quantité effectivement mesurée. En pratique, les mesures sont souvent plus ou moins altérées par une information parasite, comme on peut le voir figure 2.1. Par exemple, lorsqu’on prend une photo, un réglage ISO élevé facilite l’acquisition lorsque la luminosité ambiante est faible. Cependant, augmenter la sensibilité introduit du bruit dans les images, d’autant plus fort que l’ISO est important (figure 2.1 (a)).

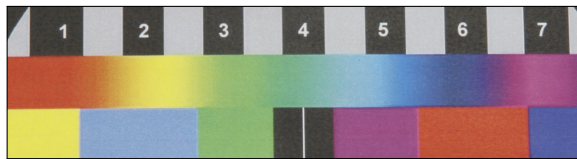
Il est important de savoir caractériser et quantifier ces dégradations, afin de pouvoir l’éliminer et récupérer uniquement l’information utile.

S’il existe de nombreux types de dégradations, en traitement du signal, on s’intéressera souvent au **bruit de mesure**. Ses origines peuvent être multiples :

- Le bruit d’origine externe, qui agit sur le phénomène observé, par exemple :
 - bruit d’origine naturelle (parasites cosmiques, bruit atmosphériques),
 - bruit d’origine artificielle (industriels)
- Le bruit d’origine interne est directement lié à l’appareil de mesure ou de génération du signal observé, par exemple :
 - bruit thermique (Johnson),
 - bruit de grenaille (Poisson),
 - bruit impulsionnel (capteur défectueux)...



(1) Signal 1D provenant de l'enregistrement d'un vinyle (avec bruit de craquements)



(2a) Image 2D à faible ISO



(2b) Image 2D à fort ISO



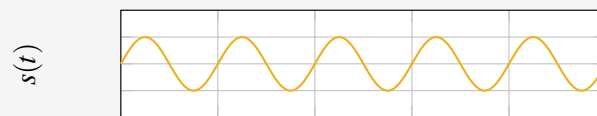
(3) Reconstruction 3D

FIGURE 2.1 – Exemples de signaux N -D dégradés.

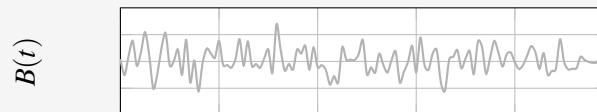
En général, le bruit est une dégradation purement aléatoire. Dans le cas le plus simple, il modifie une mesure en lui ajoutant une valeur aléatoire : on parle alors de bruit additif. Lorsque ce n'est pas le cas, la transformation peut être multiplicative ou même non linéaire (bruit optique par exemple). Quoiqu'il en soit, on le modélise alors par un processus aléatoire, afin de prendre en compte la dimension statistique de ce signal.

Exemple 2.1 Bruit additif

On considère le signal $s(t) = \sin(2\pi\nu_0 t)$, avec $\nu_0 = 5\text{Hz}$:

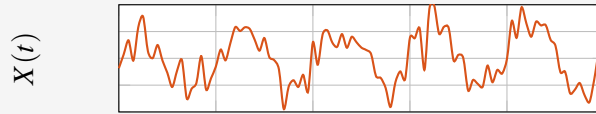


Et soit $B(t)$ un bruit blanc Gaussien centré, de variance $\sigma_B^2 = 0.25$, dont une réalisation est présentée ci-dessous :



On construit le signal $X(t)$ bruité par un bruit blanc **additif** Gaussien centré de variance de variance $\sigma_B^2 = 0.25$ comme la somme du signal $s(t)$ et du bruit $B(t)$, i.e.

$$X(t) = s(t) + B(t).$$



On distinguera par ailleurs le bruit, à caractère aléatoire, d'une dégradation issue d'interférences entre plusieurs signaux, à caractère non aléatoire.

Remarque : Une erreur courante réside dans la confusion entre le bruit et le flou. Le bruit change la valeur en un point indépendamment des autres valeurs mesurées et des manière aléatoire, tandis que le flou dégrade une valeur en tenant compte d'autres valeurs mesurées.

3 Outils mathématiques : rappels de probabilités continues

Dans cette partie, on rappelle l'ensemble des notions de probabilités continues qui seront utiles pour caractériser ou estimer les caractéristiques d'un signal aléatoire (d'après le cours de *Probabilités discrètes et continues* [3]).

3.1 Variable aléatoire continue

Variable aléatoire (VA) continue

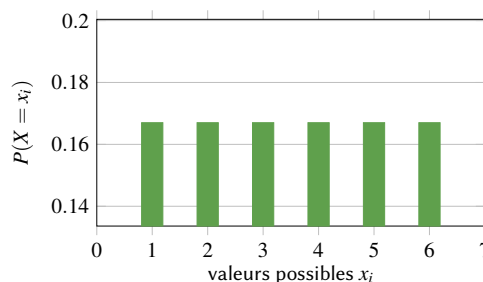
Une **variable aléatoire** est une expérience dont le résultat n'est pas prévisible, mais dont l'ensemble de tous les résultats est connu.

Une variable aléatoire **continue** peut prendre une infinité (non dénombrable) de valeurs.

Par exemple, la durée de vie d'un composant électronique peut prendre toute valeur réelle comprise entre deux bornes.

3.2 Densité de probabilité

On peut caractériser une variable aléatoire discrète par sa probabilité d'être égale à une valeur donnée ($P(X = k)$). Par exemple, la loi de probabilité d'un lancer de dé peut être représentée par l'histogramme suivant :



Une variable aléatoire continue peut quant à elle prendre un nombre infini de valeurs. Ainsi, la probabilité d'apparition d'une valeur en particulier est nulle, et l'histogramme devient infini. On caractérise donc une variable aléatoire continue par la courbe représentative de sa densité de probabilité.

Densité de Probabilité (DDP)

La **Densité de Probabilité (DDP)** $f_X(x)$ d'une variable aléatoire continue X vérifie les conditions suivantes :

- $\forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) \geq 0$;
- f_X est continue (sauf éventuellement en un nombre fini de points);
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$.

On peut également introduire la densité de probabilité d'une variable aléatoire continue à partir de sa fonction de répartition :

Fonction de répartition

On définit la **fonction de répartition** $F_X(x)$ d'une variable aléatoire X en fonction des valeurs x qu'elle peut prendre, i.e. :

$$F_X(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx.$$

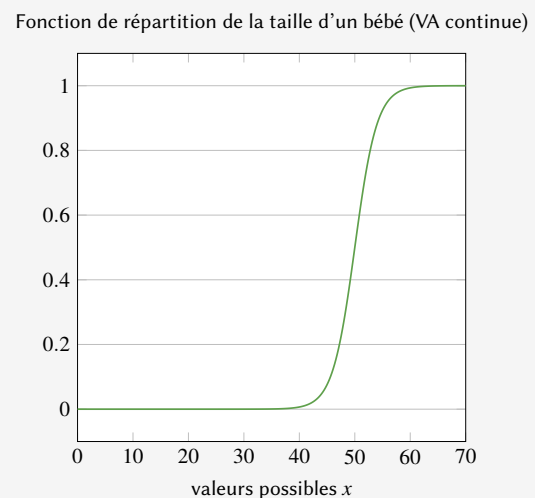
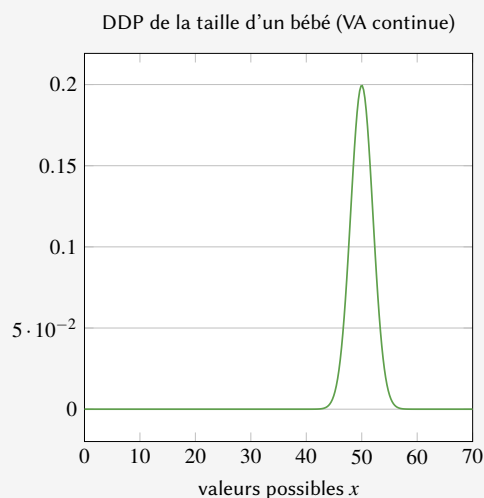
La fonction de répartition $F_X(x)$ est alors une primitive de $f_X(x)$.

La fonction de répartition est une fonction croissante, possédant les propriétés suivantes :

Propriétés

- $F_X(-\infty) = P(X < -\infty) = 0$,
- $F_X(+\infty) = P(X < +\infty) = 1$,
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b p_X(x) dx = F_X(b) - F_X(a)$

Exemple 3.1



Variables aléatoires indépendantes

On dit que deux variables aléatoires continues X et Y sont indépendantes si, pour tout couple $(a, b) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on a :

$$P((X \leq a) \cap (Y \leq b)) = P(X \leq a)P(Y \leq b).$$

3.3 Changement de variable

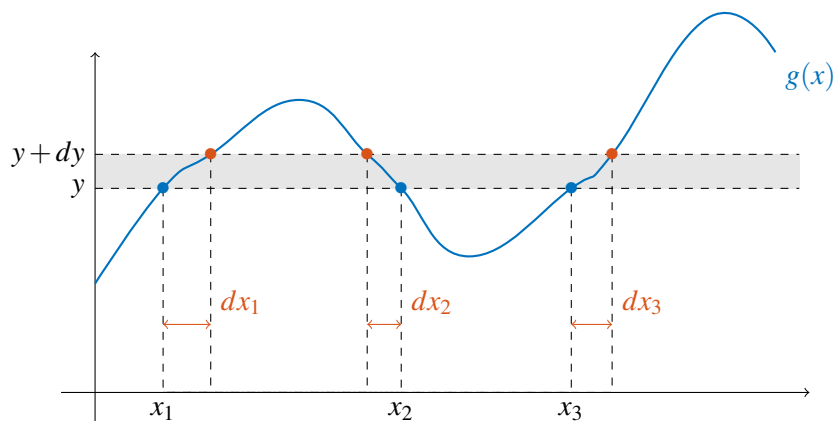
Soient X une variable aléatoire, et g une fonction dérivable. On pose $Y = g(X)$. Alors

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^N \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|},$$

où les x_i , $i = 1, \dots, N$ désignent les N solutions de l'équation $y = g(x)$.

On sait que la densité de probabilité $f_Y(y)$ vérifie la relation

$$f_Y(y)dy = P(y \leq Y \leq y + dy).$$



Sur l'exemple de la figure ci-dessus, $Y(t)$ vérifie $y \leq Y \leq y + dy$ lorsque

$$\begin{cases} x_1 \leq x \leq x_1 + dx_1, \\ x_2 + dx_2 \leq x \leq x_2, \quad (dx_2 < 0) \\ x_3 \leq x \leq x_3 + dx_3 \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P(y \leq Y \leq y + dy) &= P(x_1 \leq x \leq x_1 + dx_1) + P(x_2 + dx_2 \leq x \leq x_2) + P(x_3 \leq x \leq x_3 + dx_3) \\ &= f_X(x_1)dx_1 + f_X(x_2)|dx_2| + f_X(x_3)dx_3. \end{aligned}$$

De manière plus générale, $Y(t)$ vérifie $y \leq Y(t) \leq y + dy$ sur tous les intervalles de la forme $[x_i, x_i + dx_i]$ ou $[x_i + dx_i, x_i]$, où les x_i , $i = 1, \dots, N$, sont les N solutions de $y = g(x)$ (points en rouge sur la figure).

On en déduit donc que

$$P(y \leq Y \leq y + dy) = \sum_{i=1}^N f_X(x_i) |dx_i|.$$

Or $dy = g'(x)dx$, donc

$$f_Y(y)dy = \sum_{i=1}^N f_X(x_i) \frac{dy}{|g'(x_i)|},$$

ce qui donne finalement

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^N \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}.$$

3.4 Loi conjointe

Certains problèmes dépendent de plusieurs variables aléatoires X, Y . Il est alors nécessaire de définir une **loi de probabilité jointe**, permettant de mesurer la probabilité de l'événement joint : $\{X < x \text{ et } Y < y\}$.

Densité conjointe

La **densité conjointe** $f_{X,Y}(x,y)$ d'un couple de variables aléatoires X, Y doit vérifier :

- ▷ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f_{X,Y}(x,y) \geq 0,$
- ▷ $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy = 1.$

Il en découle la définition de la fonction de répartition jointe :

Fonction de répartition conjointe

$$F_{X,Y}(a,b) := P((X \leq a) \cap (Y \leq b)) = \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^b f_{X,Y}(x,y) dx dy,$$

où $f_{X,Y}(x,y)$ est la densité de probabilité jointe de X et Y .

Si de plus X et Y sont indépendantes, $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$.

Il est possible de définir de manière similaire une loi jointe de plusieurs variables aléatoires X_1, \dots, X_n .

3.5 Caractéristiques statistiques d'une variable aléatoire

3.5.1 Espérance mathématique

Espérance mathématique

L'**espérance mathématique**, ou moyenne statistique, d'une variable aléatoire continue X est définie par (sous réserve de convergence) :

$$\mathbb{E}(X) := \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx.$$

Propriétés

Soient a, b deux réels, et X, Y deux variables aléatoires.

Linéarité	$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$
Produit	si X, Y sont indépendantes, alors : $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$
Transfert	soit g une fonction réelle, et $Z = g(X)$, on a (si convergence) : $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)dx$

3.5.2 Variance, écart-type**Variance / Écart-type**

La **variance** correspond à l'espérance de la variable aléatoire centrée $(X - \mathbb{E}(X))^2$, i.e.

$$V(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2).$$

L'**écart-type** de la variable aléatoire X se calcule à partir de la variance, afin de retrouver une dimension homogène à celle de X :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

En pratique, on calcule souvent la variance à partir de la formule suivante :

Formule de Konig-Huygens

Il est en général plus simple de calculer la variance en utilisant la relation :

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

La variance et l'écart-type ne sont pas linéaire (ce sont des moments d'ordre 2), mais possèdent quand même les propriétés suivantes :

Propriétés

Soient a, b deux réels, et X une variable aléatoire. Alors

$$V(aX + b) = a^2 V(X),$$

$$\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X).$$

Variable centrée réduite. Il s'avère souvent utile de rendre une variable indépendante de l'échelle ou de l'unité choisie (pour comparer l'allure de deux densités entre elles par exemple). Pour ce faire, on peut centrer et réduire une variable aléatoire. On peut aussi, à l'inverse, imposer une espérance et une variance choisie à une variable aléatoire centrée réduite.

Variable centrée réduite

On dit qu'une variable aléatoire Y est centrée réduite si $\mathbb{E}(Y) = 0$ et $V(Y) = 1$.

Étant donnée une variable aléatoire X d'espérance $\mathbb{E}(X) = \mu$ et de variance $V(X) = \sigma^2$, on a alors :

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{E}(X) = \mu \\ V(X) = \sigma^2 \end{array} \right. & \begin{array}{c} Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \\ \longleftarrow \\ X = \sigma Y + \mu \end{array} & \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{E}(Y) = 0 \\ V(Y) = 1 \end{array} \right. \end{array}$$

Il est important de noter que cette opération **ne modifie par l'allure générale de la densité**.

3.5.3 Moments d'ordre n

De manière plus générale, on peut caractériser une variable aléatoire X par ses **moments**.

Moment ordinaire d'ordre n

Le **moment ordinaire d'ordre n** de la variable aléatoire X est défini, s'il existe, par

$$m_n := \mathbb{E}(X^n) = \int_{\mathbb{R}} x^n f_X(x) dx \quad \forall n \geq 1.$$

Moment centré d'ordre n

Le **moment centré d'ordre n** de la variable aléatoire X est défini, s'il existe, par

$$\begin{cases} \tilde{m}_1 = 0, \\ \tilde{m}_n := \mathbb{E}([X - \mu]^n) = \int_{\mathbb{R}} [x - \mu]^n f_X(x) dx \quad \forall n \geq 2, \end{cases}$$

avec $\mu = m_1 = \mathbb{E}(X)$.

Moment centré réduit d'ordre n

Le **moment centré réduit d'ordre n** de la variable aléatoire X est défini, s'il existe, par

$$\begin{cases} \hat{m}_1 = 0, \\ \hat{m}_2 = 1, \\ \hat{m}_n := \mathbb{E}\left(\left[\frac{X - \mu}{\sigma}\right]^n\right) = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{x - \mu}{\sigma}\right]^n f_X(x) dx \quad \forall n \geq 3, \end{cases}$$

avec $\mu = m_1 = \mathbb{E}(X)$ et $\sigma = \sqrt{\tilde{m}_2}$.

En résumé

Les moments statistiques (ordinaires, centrés, ou centrés réduits) d'une variable aléatoire permettent de **décrire la "forme" de sa distribution**. En particulier,

- la **moyenne** (moment d'ordre 1) permet de **localiser** la distribution,
- la **variance** (moment centré d'ordre 2) décrit l'**étalement**, la dispersion de la distribution ,
- le moment centré réduit d'ordre 3 décrit l'**asymétrie** de la distribution autour de la moyenne,
- le **Kurtosis** (moment centré réduit d'ordre 4) décrit l'**aplatissement** (relativement à la variance) de la distribution.

3.6 Lois usuelles**3.6.1 Processus Gaussien****Processus Gaussien**

Un processus X est dit Gaussien si la répartition de ses amplitudes suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ (parfois dite "Gaussienne"), c'est-à-dire :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Cette densité de probabilité à une allure "en cloche", comme illustré à la Figure 3.1, symétrique par rapport à la valeur moyenne m_X .

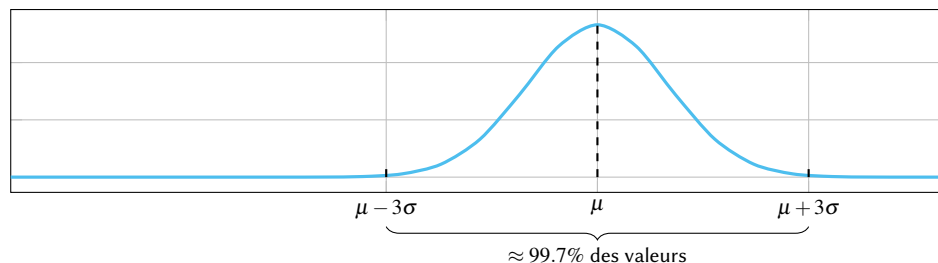


FIGURE 3.1 – Allure de la densité de probabilité des amplitudes d'une variable aléatoire Gaussienne de moyenne μ et de variance σ^2 .

Le Kurtosis d'une variable aléatoire Gaussienne est égal à 3.

En pratique, on rencontre fréquemment la distribution normale dans la modélisation de phénomènes aléatoires (en particulier, le bruit), car elle permet de modéliser des phénomènes aléatoires résultant de la superposition de très nombreux phénomènes aléatoires individuels indépendants. C'est une conséquence directe du théorème central limite :

Théorème Central Limite

Soient X_1, \dots, X_N , N variables aléatoires **indépendantes** et identiquement distribuées ^a.

On considère les variables aléatoires "somme" et "moyenne" suivantes :

$$S_N = \sum_{n=1}^N X_N \quad \text{et} \quad M_N = \frac{S_N}{N}.$$

Pour N suffisamment grand, les densités de S_N et M_N tendent vers une loi normale :

$$S_N \sim \mathcal{N}(N\mu, \sigma\sqrt{N}) \quad \text{et} \quad M_N \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right).$$

a. On parle de VA identiquement distribuées lorsqu'elles suivent toutes la même loi, d'espérance μ et d'écart-type σ .

Propriétés.

- Les propriétés statistiques d'un processus aléatoire Gaussien X sont complètement définies par sa valeur moyenne statistique m_X et sa variance σ_X^2 .
- Si un processus aléatoire Gaussien est centré, alors tous ses moments statistiques d'ordre impair sont nuls, et ses moments d'ordre pair correspondent à des combinaisons linéaires de ses moments d'ordre 2.

3.6.2 Récapitulatif des lois continues usuelles

Loi	DDP $f_X(x)$	Espérance $\mathbb{E}(X)$	Variance $V(X)$
Uniforme $\mathcal{U}(a, b)$	$\frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(x)$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	μ	σ^2
Exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x} 1_{\mathbb{R}^+}(x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

Références

- [1] Franck Corbin. Cours de traitement du signal. *Chap. 1-5*, 2018.
- [2] Paulo Goncalves. Signaux et systèmes linéaires. *Poly de cours, CPE Lyon*, 2019-2020.
- [3] Serge Mazaauric. Probabilités discrètes et continues. *Slides de cours, CPE Lyon*, 2019-2020.
- [4] Patrick Pittet. Traitement des signaux aléatoires. *Poly et slides de cours, CPE Lyon*, 2019-2020.
- [5] Eric Van Reeth. Traitement numérique du signal. *Poly de cours, CPE Lyon*, 2019-2020.