



Математический анализ-3 семестр

Лекция 1

Введение

Тема 1. Числовые ряды

- 1.1. Числовой ряд, сходимость числового ряда
- 1.2. Геометрическая прогрессия
- 1.3. Гармонический ряд
- 1.4. Необходимое условие сходимости числового ряда
- 1.5. Критерий Коши сходимости ряда
- 1.6. Свойства сходящихся рядов

Введение

1. Основные понятия, связанные с последовательностями

Определение 1. Пусть $\forall n$ – натуральному числу поставлено в соответствие некоторое действительное число x_n : $\forall n \rightarrow x_n$.

Тогда совокупность элементов x_n ($n = 1, 2, \dots$) называется *числовой последовательностью* (обозначается $\{x_n\}$).

Каждый элемент x_n называется членом последовательности, а n – его номером.

Определение 2. Число a называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \text{ если}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) > 0: \forall n > N(\varepsilon) \rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Примеры числовых последовательностей: арифметическая и геометрическая прогрессии.

Определение 3. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется *бесконечно малой*, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) > 0$:

$$\forall n > N(\varepsilon) \rightarrow |\alpha_n| < \varepsilon.$$



Например, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$.

Определение 4. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, т.е.

$$\forall E > 0 \exists N(E) > 0: \forall n > N(E) \rightarrow |x_n| > E.$$

Например, $\{n\}$, $\{n^2\}$.

Определение 5. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если существует число M такое, что

$$x_n \leq M \quad \forall n \in N.$$

Определение 6. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной снизу*, если существует число m такое, что

$$x_n \geq m \quad \forall n \in N.$$

Определение 7. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если она ограничена сверху и снизу.

Определение 8. Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей* (неубывающей), если $x_n < x_{n+1}$ ($x_n \leq x_{n+1}$) $\forall n \in N$, и *убывающей* (невозрастающей), если $x_n > x_{n+1}$ ($x_n \geq x_{n+1}$) $\forall n \in N$.

Определение 9. Возрастающие и убывающие последовательности называются *монотонными* последовательностями.

Определение 10.

Если последовательность не имеет предела, то ее называют *расходящейся*.

Теорема Вейерштрасса. Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.



2. Вычисление предела последовательности.

Раскрытие неопределенностей

$$1). \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_k(n)}{Q_m(n)} = \begin{cases} \text{const}, & k = m \\ \infty, & k > m \\ 0, & k < m \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3}{3n^2-6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(2+\frac{3}{n^2})}{n^2(3-\frac{6}{n^2})} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3+3}{3n^2-6} = \infty; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3}{3n^5-6} = 0.$$

$$2). [\infty - \infty]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3-n}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} = \frac{3}{\infty} = 0$$

$$3). \text{II замечательный предел: } [1^\infty]: \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-5}{n^2+1}\right)^{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1-6}{n^2+1}\right)^{2n^2} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-6}{n^2+1}\right)^{2n^2} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-6}{n^2+1}\right)^{\frac{n^2+1}{-6} \cdot \frac{-6}{n^2+1} \cdot 2n^2} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{-12n^2}{n^2+1}} = e^{-12}.$$

4). Замена бесконечно малых функций на эквивалентные.

Пусть $\alpha_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$:

1.	$\sin \alpha_n \sim \alpha_n$	6.	$e^{\alpha_n} - 1 \sim \alpha_n$
2.	$\operatorname{tg} \alpha_n \sim \alpha_n$	7.	$a^{\alpha_n} - 1 \sim \alpha_n \cdot \ln a$
3.	$\arcsin \alpha_n \sim \alpha_n$	8.	$\ln(1 + \alpha_n) \sim \alpha_n$
4.	$\operatorname{arctg} \alpha_n \sim \alpha_n$	9.	$\log_b(1 + \alpha_n) \sim \frac{\alpha_n}{\ln b}$
5.	$1 - \cos \alpha_n \sim \frac{(\alpha_n)^2}{2}$	10.	$(1 + \alpha_n)^m - 1 \sim m \cdot \alpha_n$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \left(e^{\frac{2}{n^2}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \frac{2}{n^2} = 2.$$

5). Правило Лопиталя:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \begin{cases} \left[\frac{0}{0} \right] \\ \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \end{cases} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot e^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{e^n} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{e^n} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{e^n} = 0.$$

1. Числовые ряды

1.1. Числовой ряд, сходимость числового ряда

Рассмотрим числовую последовательность $\{a_n\}$: $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

Определение 1. Числовым рядом называется бесконечная сумма членов числовой последовательности $\{a_n\}$, т.е.

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

При этом a_n называется *общим членом* ряда.

Замечание. Последовательность $\{a_n\}$ может состоять из вещественных или комплексных чисел, они могут иметь разные знаки. Пока будем считать, что $a_n \in R$ (множеству действительных чисел).

Примеры.

$$1). \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

$$2). 1 + 1 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} 1.$$

$$3). 1 - 1 + 1 - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}.$$

Определение 2. Частичными суммами числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называются суммы:

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

которые образуют новую числовую последовательность S_1, S_2, \dots, S_n .



Определение 3. Числовой ряд называется *сходящимся*, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм, т.е.

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

Число S называется суммой ряда.

Допускается запись $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, которая придает символу бесконечной суммы числовой смысл.

Определение 4. Числовой ряд называется *расходящимся*, если предел последовательности частичных сумм равен бесконечности или не существует.

Исследуем на сходимость ряды.

Пример 1.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

$$S_1 = \frac{1}{2}, S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3},$$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Разложим общий член ряда на сумму простейших дробей:

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \Rightarrow S = 1, \text{ ряд сходится.}$$

Пример 2.

$$1 + 1 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} 1.$$

$$S_n = 1 + 1 + \dots + 1 = n.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \Rightarrow \text{числовой ряд расходится.}$$



Пример 3.

$$1 - 1 + 1 - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1},$$

$$S_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n - \text{нечетно, } n = 2k - 1 \\ 0, & \text{если } n - \text{четно, } n = 2k \end{cases}.$$

Предел последовательности частичных сумм не существует, и ряд расходится.

Пример 4.

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (2n - 1).$$

Вычислим частичную сумму этого ряда.

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = \frac{1 + (2n - 1)}{2} \cdot n = n^2.$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$, следовательно, данный ряд расходится.

Итак, исследование числового ряда на сходимость состоит из двух этапов:

- 1) вычисление S_n
- 2) вычисление $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

1.2. Геометрическая прогрессия

Определение 5. Геометрической прогрессией называется числовая последовательность $b, bq, bq^2, \dots, bq^{n-1}, \dots$ ($b \neq 0, q \neq 0$).

Суммируя члены геометрической прогрессии, получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b \cdot q^{n-1}$ – ряд геометрической прогрессии.

Выясним вопрос о сходимости ряда геометрической прогрессии.

Запишем частичную сумму этого ряда:

$$S_{n+1} = b + bq + bq^2 + \dots + bq^n \text{ двумя способами:}$$

$$S_{n+1} = b + q(b + bq + \dots + bq^{n-1}) =$$



$$= b + q \cdot S_n$$

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= (b + bq + \dots + bq^{n-1}) + bq^n = \\ &= S_n + bq^n \end{aligned}$$

Приравнивая эти выражения:

$$b + q \cdot S_n = S_n + bq^n, \text{ получим } S_n(1 - q) = b(1 - q^n).$$

Предполагая, что $q \neq 1$, выразим S_n : $S_n = \frac{b(1-q^n)}{1-q}.$

Если $q = 1$, очевидно, что $S_n = n \cdot b$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, т.е. ряд расходится.

Если $|q| < 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b}{1-q}$, т.е. ряд сходится, и его сумма $S = \frac{b}{1-q}.$

Если $|q| > 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, т.е. ряд расходится.

Если $q = -1$, то $S_n = b - b + b - b + \dots = \begin{cases} b, & n = 2k - 1 \\ 0, & n = 2k \end{cases}.$

Предел последовательности частичных сумм не существует. Ряд расходится.

Итак, доказана:

Теорема 1 (о сходимости ряда геометрической прогрессии).

$$\text{Ряд } \sum_{n=1}^{\infty} b \cdot q^{n-1} - \begin{cases} \text{сходится, } S = \frac{b}{1-q}, \text{ если } |q| < 1 \\ \text{расходится, если } |q| \geq 1 \end{cases}.$$

1.3. Гармонический ряд

Определение 6. Ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ называется *гармоническим*.

Каждый член гармонического ряда, начиная со второго, является гармоническим средним соседних с ним членов:



$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}} \right), \text{ т.к.}$$

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}, \quad a_{n-1} = \frac{1}{n-1}, \quad \frac{1}{2}(n-1+n+1) = n.$$

Покажем, что гармонический ряд является расходящимся. Воспользуемся тем, что:

1) последовательность $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ является монотонно возрастающей, т.к.

$$a_1 = 2 < a_2 = \frac{9}{4} < a_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} \text{ и т.д.}$$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ (2-ой замечательный предел), следовательно, все члены этой последовательности меньше числа e :

$$a_n < e, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e.$$

Прологарифмируем данное неравенство по основанию e :

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \ln e \Rightarrow n \ln \left(\frac{n+1}{n}\right) < 1 \Rightarrow \frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n.$$

$$\frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n$$

Полученное неравенство справедливо для всех натуральных значений n .

$$+ \begin{cases} 1 > \ln 2 - \ln 1 \\ \frac{1}{2} > \ln 3 - \ln 2 \\ \frac{1}{3} > \ln 4 - \ln 3 \\ \dots \\ \frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n \end{cases}.$$

Складывая эти неравенства, получим $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \ln(n+1)$.

Это означает, что

$$S_n > \ln(n+1),$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n > \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty,$$

а, следовательно, гармонический ряд расходится.

1.4. Необходимое условие сходимости числового ряда

Теорема 2. Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то его общий член стремится к нулю, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Доказательство: для сходящегося ряда $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ и $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$.

$$\text{Т.к. } a_n = S_n - S_{n-1}, \text{ то } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

Замечание. Мы получили *необходимое* условие сходимости числового ряда. При нарушении этого условия ряд заведомо расходится. При выполнении этого условия ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Вернемся к примерам:

1). Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, но ряд расходится.

2). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, ряд сходится.

Следствие. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

Необходимое условие удобно применять для доказательства расходимости рядов.

Примеры.

1). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n+2}$ расходится, т.к. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+2} = \frac{2}{3} \neq 0$.

2). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^n$ также является расходящимся, т.к.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{1}{3n+2}\right)^{-(3n+2)}\right)^{-\frac{n}{3n+2}} = e^{-\frac{1}{3}} \neq 0,$$



т.е. необходимое условие не выполняется.

Определение 7. Если отбросить первые n членов ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, то получится ряд $a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m} + \dots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$, который называется *остатком* данного ряда с номером n : $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$.

Теорема 3. Ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится любой из его остатков.

Доказательство: Действительно, отбрасывание некоторого числа первых членов ряда изменит значения членов последовательности частичных сумм на некоторую величину, равную сумме отброшенных членов, но не повлияет на сходимость.

Теорема 4. Если ряд сходится, сумма его остатка стремится к нулю с возрастанием номера остатка.

Доказательство: Если S и S_n – соответственно сумма и частичная сумма с номером n сходящегося ряда,

а r_n – сумма его остатка, то

$$r_n = S - S_n.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S - S_n) = 0.$$

1.5. Критерий Коши сходимости ряда

Согласно определению, числовой ряд сходится, если сходится последовательность его частичных сумм. Для числовой последовательности критерий сходимости (критерий Коши) формулируется следующим образом:

для того, чтобы числовая последовательность S_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер N , что для всех $n \geq N$ и для всех натуральных чисел k выполнялось неравенство

$$|S_{n+k} - S_n| < \varepsilon.$$



Формулируя эту теорему для последовательности частичных сумм, получим критерий сходимости числовых рядов:

Теорема 5. Для того чтобы сходилась числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер N , что для всех $n \geq N$ и для всех натуральных чисел k выполнялось неравенство

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k}| < \varepsilon.$$

В качестве примера применения критерия Коши, еще раз докажем расходимость гармонического ряда.

Для этого оценим разность между частичными суммами гармонического ряда $|S_{n+k} - S_n|$, полагая $k = n$:

$$|S_{2n} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, какой бы ни был номер n , можно выбрать число

$$k = n \text{ так, что } |S_{n+k} - S_n| > \frac{1}{2}.$$

Итак, если выбрать $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и для любого номера n выбрать число

$$k = n, \text{ то } |S_{n+k} - S_n| > \varepsilon$$

и, согласно критерию Коши, гармонический ряд расходится.

1.6. Свойства сходящихся рядов

Сходящиеся ряды обладают следующими простыми свойствами:

1) если члены сходящегося ряда умножить на одно и то же число, то его сходимость не нарушится (сумма умножится на то число, на которое были умножены члены ряда):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot S.$$

2) если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, и их суммы равны A и B соответственно, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ также сходится и его сумма равна



$A + B$, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

3) если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_1 a_n + c_2 b_n) =$$

$$= c_1 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + c_2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Обратное, вообще говоря, неверно. Например,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1},$$

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ сходится, рассматривали в п.1.1, а ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ расходятся.