ДИСЦИПЛИНА	**Математический анализ**
	(полное наименование дисциплины без сокращений)
ИНСТИТУТ	**ИПТИП**
КАФЕДРА	**высшей математики-3**
	(полное наименование кафедры)
ВИД УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА	**Лекций в виде презентации**
ПРЕПОДАВАТЕЛЬ	**О.Р. Параскевуполо, Н.С.Чекалкин, В.А. Кадымов, Е.Ю. Кузнецова, И.Л. Шульман, О.Ю. Козлова.**
	(фамилия, имя, отчество)
СЕМЕСТР	**3 семестр, 2023-2024 учебного года**
	(указать семестр обучения, учебный год)

Математический анализ-3 семестр

Лекция 1

Введение

Тема 1. Числовые ряды

1.1. Числовой ряд, сходимость числового ряда

1.2. Геометрическая прогрессия

1.3. Гармонический ряд

1.4. Необходимое условие сходимости числового ряда

1.5. Критерий Коши сходимости ряда

1.6. Свойства сходящихся рядов

Введение

1. Основные понятия, связанные с последовательностями

Определение 1. Пусть $\forall n$ – натуральному числу поставлено в соответствие некоторое действительное число x_n: $\forall n \to x_n$.
Тогда совокупность элементов x_n $(n = 1,2, \ldots)$ называется *числовой последовательностью* (обозначается $\{x_n\}$).

Каждый элемент x_n называется членом последовательности, а n – его номером.

Определение 2. Число a называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, если

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon) > 0\colon\ \forall n > N(\varepsilon)\ \to\ |x_n - a| < \varepsilon.$

Примеры числовых последовательностей: арифметическая и геометрическая прогрессии.

Определение 3. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется *бесконечно малой*, если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, т.е. $\forall\varepsilon >$

$0\ \exists\ N(\varepsilon) > 0\colon\ \forall n > N(\varepsilon)\ \to\ |\alpha_n| < \varepsilon.$

Например, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$.

Определение 4. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, т.е.

$\forall E > 0\ \exists\ N(E) > 0\colon\ \forall n > N(E)\ \to\ |x_n| > E.$

Например, $\{n\}$, $\{n^2\}$.

Определение 5. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если существует число M

такое, что $x_n \le M\ \forall n \in N$.

Определение 6. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной снизу*, если существует число m такое, что $x_n \geq m \ \forall n \in N$.

Определение 7. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если она ограничена сверху и снизу.

Определение 8. Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей* (*неубывающей*), если $x_n < x_{n+1}$ $(x_n \leq x_{n+1}) \ \forall n \in N$, и *убывающей* (*невозрастающей*), если $x_n > x_{n+1}$ $(x_n \geq x_{n+1}) \ \forall n \in N$.

Определение 9. Возрастающие и убывающие последовательности называются *монотонными* последовательностями.

Определение 10. Если последовательность не имеет предела, то ее называют *расходящейся*.

Теорема Вейерштрасса. Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

2. Вычисление предела последовательности. Раскрытие неопределенностей

1). $\left[\frac{\infty}{\infty}\right] \lim\limits_{n\to\infty} \frac{P_k(n)}{Q_m(n)} = \begin{cases} const, & k = m \\ \infty, & k > m \\ 0, & k < m \end{cases}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{3n^2-6} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(2+\frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(3-\frac{6}{n^2}\right)} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+3}{3n^2-6} = \infty\ ;\ \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{3n^5-6} = 0\ .$$

2). $[\infty - \infty]$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3-n}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}} = \frac{3}{\infty} = 0$$

3). II замечательный предел: $[1^\infty]$: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-5}{n^2+1}\right)^{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1-6}{n^2+1}\right)^{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{-6}{n^2+1}\right)^{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{-6}{n^2+1}\right)^{\frac{n^2+1}{-6}\cdot\frac{-6}{n^2+1}\cdot 2n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{-12n^2}{n^2+1}} = e^{-12}.$$

4). Замена бесконечно малых функций на эквивалентные.

1.	$sin\ \alpha_n \sim \alpha_n$	6.	$e^{\alpha_n} - 1 \sim \alpha_n$
2.	$tg\ \alpha_n \sim \alpha_n$	7.	$a^{\alpha_n} - 1 \sim \alpha_n \cdot lna$
3.	$arcsin\ \alpha_n \sim \alpha_n$	8.	$\ln(1 + \alpha_n) \sim \alpha_n$
4.	$arctg\ \alpha_n \sim \alpha_n$	9.	$\log_b(1 + \alpha_n) \sim \dfrac{\alpha_n}{lnb}$
5.	$1 - cos\ \alpha_n \sim \dfrac{(\alpha_n)^2}{2}$	10.	$(1 + \alpha_n)^m - 1 \sim m \cdot \alpha_n$

Пусть $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \left(e^{\frac{2}{n^2}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \frac{2}{n^2} = 2.$$

5). Правило Лопиталя: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = \begin{cases} \left[\frac{0}{0}\right] \\ \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \end{cases} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f\prime(n)}{g\prime(n)}.$

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot e^{-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{e^n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{e^n} = 0\ .$$

1. Числовые ряды

1.1. Числовой ряд, сходимость числового ряда

Рассмотрим числовую последовательность $\{a_n\}$: $a_1,\ a_2,\ \dots a_n, \dots$

Определение 1. *Числовым рядом* называется *бесконечная* сумма членов числовой последовательности $\{a_n\}$, т.е.
$a_1 + \ a_2 + \ \dots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
При этом a_n называется *общим членом* ряда.

Замечание. Последовательность $\{a_n\}$ может состоять из вещественных или комплексных чисел, они могут иметь разные знаки. Пока будем считать, что $a_n \in R$ (множеству действительных чисел).

Примеры**.**
1). $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.
2). $1 + 1 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} 1$.
3). $1 - 1 + 1 - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$.

Определение 2*. Частичными суммами* числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называются суммы:
$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ \cdots,\ S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$,
которые образуют новую числовую последовательность $S_1,\ S_2,\ \dots,\ S_n$.

Определение 3. Числовой ряд называется *сходящимся*, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм, т.е. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Число S называется суммой ряда.

Допускается запись $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, которая придает символу бесконечной суммы числовой смысл.

Определение 4. Числовой ряд называется *расходящимся*, если предел последовательности частичных сумм равен бесконечности или не существует.

Исследуем на сходимость ряды.

<u>Пример 1.</u>

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

$S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3}$,

$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$.

Разложим общий член ряда на сумму простейших дробей:

$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1 \Rightarrow S = 1$, ряд сходится.

Пример 2.

$1+1+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} 1.$

$S_n = 1+1+\cdots+1 = n.$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty \;\Rightarrow$ числовой ряд расходится.

Пример 3.

$1-1+1-\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1},$

$$S_n = \begin{cases} 1\text{, если } n - \text{нечетно, } n = 2k-1 \\ \quad 0\text{, если } n - \text{четно, } n = 2k \end{cases}.$$

Предел последовательности частичных сумм не существует, и ряд расходится.

Пример 4.

$1+3+5+\cdots+(2n-1)+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(2n-1).$

Вычислим частичную сумму этого ряда.

$S_n = 1+3+5+\cdots+(2n-1) = \frac{1+(2n-1)}{2}\cdot n = n^2.$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$, следовательно, данный ряд расходится.

Итак, исследование числового ряда на сходимость состоит из двух этапов:

1) вычисление S_n

2) вычисление $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

1.2. Геометрическая прогрессия

Определение 5. Геометрической прогрессией называется числовая последовательность
$b,\ bq,\ bq^2, \dots,\ bq^{n-1}, \dots (b \neq 0,\ q \neq 0)$.
Суммируя члены геометрической прогрессии, получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b \cdot q^{n-1}$ – ряд геометрической прогрессии.

Выясним вопрос о сходимости ряда геометрической прогрессии.

Запишем частичную сумму этого ряда:

$S_{n+1} = b + bq + bq^2 + \dots + bq^n$ двумя способами:

$$S_{n+1} = b + q(b + bq + \dots + bq^{n-1}) = b + q \cdot S_n$$

$$S_{n+1} = (b + bq + \dots + bq^{n-1}) + bq^n = S_n + bq^n$$

Приравнивая эти выражения:

$b + q \cdot S_n = S_n + bq^n$, получим $S_n(1-q) = b(1-q^n)$.

Предполагая, что $q \neq 1$, выразим S_n: $S_n = \frac{b(1-q^n)}{1-q}$.

Если $q = 1$, очевидно, что $S_n = n \cdot b$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т.е. ряд расходится.

Если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{b}{1-q}$, т.е. ряд сходится, и его сумма $S = \frac{b}{1-q}$.

Если $|q| > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т.е. ряд расходится.

Если $q = -1$, то $S_n = b - b + b - b + \cdots = \begin{cases} b, \ n = 2k-1 \\ 0, \ n = 2k \end{cases}$.

Предел последовательности частичных сумм не существует. Ряд расходится.

Итак, доказана:

Теорема 1 (о сходимости ряда геометрической прогрессии).

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b \cdot q^{n-1}$ – $\begin{cases} \text{сходится, } S = \frac{b}{1-q}, \text{ если } |q| < 1 \\ \text{расходится, если } |q| \geq 1 \end{cases}$.

1.3. Гармонический ряд

Определение 6. Ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ называется *гармоническим*.

Каждый член гармонического ряда, начиная со второго, является гармоническим средним соседних с ним членов:

$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}\right)$, т.к.

$a_n = \frac{1}{n}$, $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, $a_{n-1} = \frac{1}{n-1}$, $\frac{1}{2}(n-1+n+1) = n$.

Покажем, что гармонический ряд является расходящимся. Воспользуемся тем, что:

1) последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ является монотонно возрастающей, т.к.

$a_1 = 2 < a_2 = \frac{9}{4} < a_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}$ и т.д.

2) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ (2-ой замечательный предел), следовательно, все члены этой последовательности меньше числа e:

$a_n < e$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$.

Прологарифмируем данное неравенство по основанию e:

$ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < lne \Rightarrow \ nln\left(\frac{n+1}{n}\right) < 1 \ \Rightarrow \ \frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n.$

$$\frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n$$

Полученное неравенство справедливо для всех натуральных значений n.

$$+\begin{cases} 1 > ln2 - ln1 \\ \frac{1}{2} > ln3 - ln2 \\ \frac{1}{3} > ln4 - ln3 \\ \dots \\ \frac{1}{n} > \ln(n+1) - lnn \end{cases}.$$

Складывая эти неравенства, получим $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \ln(n+1)$.

Это означает, что

$S_n > \ln(n+1)$,

$\lim_{n\to\infty} S_n > \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$,

а, следовательно, *гармонический ряд расходится*.

1.4. Необходимое условие сходимости числового ряда

Теорема 2. Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то его общий член стремится к нулю, т.е. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Доказательство: для сходящегося ряда $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S$ и $\exists \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$.

Т.к. $a_n = S_n - S_{n-1}$, то $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$.

Замечание. Мы получили *необходимое* условие сходимости числового ряда. При нарушении этого условия ряд заведомо расходится. При выполнении этого условия ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Вернемся к примерам:

1). Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, но ряд расходится.

2). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, ряд сходится.

Следствие. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

Необходимое условие удобно применять для доказательства расходимости рядов.

Примеры.

1). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3n+2}$ расходится, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+2} = \frac{2}{3} \neq 0$.

2). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^n$ также является расходящимся, т.к.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{3n+2}\right)^{-(3n+2)}\right)^{-\frac{n}{3n+2}} = e^{-\frac{1}{3}} \neq 0,$$

т.е. необходимое условие не выполняется.

Определение 7. Если отбросить первые n членов ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, то получится ряд $a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m} + \cdots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$, который называется *остатком* данного ряда с номером n: $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$.

Теорема 3. Ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится любой из его остатков.

Доказательство: Действительно, отбрасывание некоторого числа первых членов ряда изменит значения членов последовательности частичных сумм на некоторую величину, равную сумме отброшенных членов, но не повлияет на сходимость.

Теорема 4. Если ряд сходится, сумма его остатка стремится к нулю с возрастанием номера остатка.

Доказательство: Если S и S_n – соответственно сумма и частичная сумма с номером n сходящегося ряда,

а r_n – сумма его остатка, то

$$r_n = S - S_n.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}(S - S_n) = 0.$$

1.5. Критерий Коши сходимости ряда

Согласно определению, числовой ряд сходится, если сходится последовательность его частичных сумм. Для числовой последовательности критерий сходимости (критерий Коши) формулируется следующим образом: для того, чтобы числовая последовательность $S_n,\ \ n = 1,2,3, \ldots$, имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер N, что для всех $n \geq N$ и для всех натуральных чисел k выполнялось неравенство $|S_{n+k} - S_n| < \varepsilon$.

Формулируя эту теорему для последовательности частичных сумм, получим критерий сходимости числовых рядов:

Теорема 5. Для того чтобы сходился числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер N, что для всех $n \geq N$ и для всех натуральных чисел k выполнялось неравенство

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon.$$

В качестве примера применения критерия Коши, еще раз докажем расходимость гармонического ряда.

Для этого оценим разность между частичными суммами гармонического ряда $|S_{n+k} - S_n|$, полагая $k = n$:

$$|S_{2n} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2}\,.$$

Следовательно, какой бы ни был номер n, можно выбрать число

$k = n$ так, что $|S_{n+k} - S_n| > \frac{1}{2}$.

Итак, если выбрать $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и для любого номера n выбрать число $k = n$, то $|S_{n+k} - S_n| > \varepsilon$
и, согласно критерию Коши, гармонический ряд расходится.

1.6. Свойства сходящихся рядов

Сходящиеся ряды обладают следующими простыми свойствами:

1) если члены сходящегося ряда умножить на одно и то же число, то его сходимость не нарушится (сумма умножится на то число, на которое были умножены члены ряда):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot S .$$

2) если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, и их суммы равны A и B соответственно, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ также сходится и его сумма равна $A + B$, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

3) если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, то $\sum_{n=1}^{\infty}(c_1 a_n + c_2 b_n) = c_1 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + c_2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Обратное, вообще говоря, неверно. Например,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1},$$

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ сходится, рассматривали в п.1.1, а ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ расходятся.

Математический анализ-3 семестр

Лекция 2

Тема 2. Числовые ряды с положительными членами

2.1. Критерий сходимости

2.2. Признаки сравнения

2.3. Признак Даламбера

2.4. Радикальный признак Коши

2.5. Интегральный признак Коши

2.6. Общие рекомендации по исследованию на сходимость положительных рядов

2.Числовые ряды с положительными членами

2.1. Критерий сходимости

Определение 1. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, все члены которого неотрицательны: $a_n \geq 0\ \forall n$, называется *положительным* рядом.

Последовательности частичных сумм таких рядов монотонно возрастают, т.к. $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$.

По теореме Больцано-Вейерштрасса, монотонная последовательность имеет конечный предел тогда и только тогда, когда она ограничена. Следовательно:

Теорема 1. Положительный ряд сходится тогда и только тогда, когда последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм ограничена.

Для непосредственного применения этого простого утверждения требуется делать оценку частичных сумм ряда, а это оказывается сложно в большинстве случаев. Как правило, судить о сходимости или расходимости ряда удается, применяя некоторые достаточные признаки, например, сравнивая данный ряд с другим, заведомо сходящимся или расходящимся.

2.2. Признаки сравнения

Теорема 2 (*первый признак сравнения*). Пусть даны два положительных ряда:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n \geq 0\ \forall n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n,\ b_n \geq 0\ \forall n.$

Если для всех номеров n (или для всех номеров, бо́льших некоторого номера N) выполнено неравенство $a_n \leq b_n$,то: из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (из сходимости большего ряда следует сходимость меньшего, из расходимости меньшего ряда следует расходимость большего).

Доказательство. Будем предполагать, что неравенство $a_n \le b_n$ выполнено для всех номеров n. В противном случае можно отбросить конечное число членов ряда, для которых неравенство не выполнено, что не повлияет на сходимость ряда. Тогда $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \le b_1 + b_2 + \cdots + b_n$.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то его частичные суммы ограничены, т.е. $b_1 + b_2 + \cdots + b_n \le S$, где S − некоторая константа. Но тогда ограничены и частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, и ряд сходится.

Если же ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то, предполагая, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, получим противоречие с предыдущим доказанным утверждением.

Теорема доказана.

Пример 1.

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + \sqrt{n}}$.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, который сходится, как сумма геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{2}$. Для всех номеров n верно, что $\frac{1}{2^n + \sqrt{n}} < \frac{1}{2^n}$.

Согласно первому признаку сравнения исходный ряд также сходится.

Пример 2.

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Рассмотрим для сравнения гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который, как уже было доказано, расходится. Для всех $n > 1$ верно, что $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$, и, следовательно, исходный ряд также расходится по признаку сравнения.

Пример 3.

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

Рассмотрим для сравнения гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который расходится. Для всех $n \geq 3$ верно, что $\ln n < n$, $\frac{1}{ln n} > \frac{1}{n}$, и, следовательно, исходный ряд также расходится.

Теорема 3 (второй признак сравнения, или предельный).

Пусть даны два положительных ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $b_n > 0$ (начиная с некоторого номера).

Если существует конечный, отличный от нуля $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$,

то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Предположим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$.

По определению предела:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon):\ \forall n \geq N(\varepsilon):\ \left|\frac{a_n}{b_n} - A\right| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - A < \varepsilon, \quad a_n < (A + \varepsilon) \cdot b_n$$

Т.к. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то согласно свойству сходящихся рядов сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(A + \varepsilon) \cdot b_n$, а, значит, по первому признаку сравнения сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. По условию теоремы существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n}$, конечный и отличный от нуля. Аналогично придем к выводу, что из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Итак, если один из рядов сходится, то другой также сходится.

Далее, предполагая, что один из рядов расходится, а другой сходится, получим противоречие с уже доказанным утверждением. Теорема доказана.

Следствие 1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, то из сходимости $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$
следует сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Следствие 2. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, то из расходимости $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует расходимость $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пример 4.

Докажем еще раз расходимость гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, сравнивая его с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, общий член которого

$a_n = ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - lnn,$

а частичная сумма $S_n = (\ln 2 - ln1) + (\ln 3 - ln2) + \cdots + (\ln(n+1) - lnn) =$

$= \ln(n+1) \to \infty$ при возрастании n. Следовательно, этот ряд расходится.

Вычислим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(n\cdot ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = lne = 1.$$

Согласно предельному признаку сравнения гармонический ряд расходится.

Пример 5.

Пользуясь определением сходимости, т.е. рассматривая предел частичных сумм, мы уже доказали, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ сходится. Значит, сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, т.к. предел отношения общих членов этих рядов конечен и отличен от нуля:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Пример 6.

Исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} tg\,\frac{\pi}{5n}$. Выберем ряд для сравнения:

$\lim\limits_{n\to\infty} tg\,\frac{\pi}{5n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi}{5n} = 0$, из равенства нулю предела общего члена ряда вывод о сходимости или расходимости сделать нельзя, но можно выбрать ряд для сравнения – гармонический.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{tg\frac{\pi}{5n}}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{5}$. Предел конечен и отличен от нуля, исходный ряд расходится.

2.3. Признак Даламбера

При применении признаков сравнения необходимо подбирать известные сходящиеся или расходящиеся ряды. Признак Даламбера позволяет решить вопрос о сходимости ряда, проделав некоторые действия с самим рядом.

Теорема 4. Пусть дан положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$. Тогда:

если $D < 1$, то ряд сходится,

если $D > 1$, то ряд расходится.

Если $D = 1$, то признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости.

Доказательство.

1). Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = D$, то

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon)$: $\forall\ n \geq N(\varepsilon)$: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - D\right| < \varepsilon$,

$D - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < D + \varepsilon$.

2). Пусть $D < 1$. Выберем ε такое, что

$D + \varepsilon < 1$ и рассмотрим правую часть неравенства:
$a_{n+1} < (D + \varepsilon) \cdot a_n$.

Оно выполнено, начиная с некоторого номера N.
Обозначим $D + \varepsilon = q,\ q < 1$.

Итак, $\forall\ n \geq N\ a_{n+1} < q \cdot a_n$:

$a_{N+1} < a_N \cdot q$,

$a_{N+2} < a_{N+1} \cdot q < a_N \cdot q^2$,

. . . . . .

$a_{N+k} < a_N \cdot q^k, \ldots$

т.е. члены ряда оказываются меньше, чем члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии.
Значит, согласно первому признаку сравнения, ряд сходится.

3). Если $D > 1$ или $D = \infty$, то выберем ε такое, что $D - \varepsilon > 1$ и рассмотрим левую часть неравенства:

$(D - \varepsilon) \cdot a_N < a_{N+1}$,

т.е. члены ряда оказываются больше, чем члены бесконечно возрастающей геометрической прогрессии, и, значит, ряд расходится.

<u>*Замечания.*</u>
1). При $D = 1$ признак Даламбера не работает.
2). Признак Даламбера удобно применять, если a_n содержит $n!$ или a^n.

<u>Пример 7.</u>

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$. Вычислим предел отношения последующего члена ряда к предыдущему:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n} = \frac{1}{3} \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3} < 1$, согласно признаку Даламбера, данный ряд сходится.

<u>Пример 8.</u>

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$. Вычислим

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^n}{n!} \cdot \frac{n!}{n^n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1$, и, согласно признаку Даламбера, данный ряд расходится.

Пример 9.

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(n+1)!}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)!\cdot(n+2)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=0<1$, ряд сходится.

2.4. Радикальный признак Коши

Теорема 5. Пусть дан положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=K$.

Если $K<1$, то ряд сходится,

если $K>1$, то ряд расходится.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=K$, то

$\forall\varepsilon>0\ \exists\ N(\varepsilon)\colon\ \forall\ n\geq N(\varepsilon)$:

$\left|\sqrt[n]{a_n}-K\right|<\varepsilon$, или $K-\varepsilon<\sqrt[n]{a_n}<K+\varepsilon$.

Пусть $K<1$. Возьмем $\varepsilon=\frac{1-K}{2}>0$. Согласно определению предела, начиная с некоторого номера N, будет выполнено неравенство:

$\sqrt[n]{a_n}<K+\frac{1-K}{2}=\frac{K+1}{2}=q<1$ или $a_n<q^n$, т.е. члены ряда оказываются меньше, чем члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Значит, ряд сходится.

Если $K > 1$ или $K = \infty$, то, рассмотрев левую часть неравенства $K - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n}$, члены ряда оказываются больше, чем члены бесконечно возрастающей геометрической прогрессии, и, значит, ряд расходится.

Замечание. При $K = 1$ признак Коши-радикальный не работает.

Пример 10.

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n}\right)^n$.

Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{3n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3n}\right) = \frac{1}{3} < 1$, значит, ряд сходится по радикальному признаку Коши.

Пример 11.

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Применим радикальный признак Коши: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \frac{e}{2} > 1$, значит, ряд расходится.

Пример 12.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\ln^n(n+1)}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\ln(n+1)} = 0 < 1$, ряд сходится.

Пример 13.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}<1,$$

так как:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}lnn}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{lnn}{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1/n}{1}}=1$$. Ряд сходится.

(При вычислении предела показателя степени применили правило Лопиталя).

Замечания.

1). $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}(\ln n)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\ln(\ln n)}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{1}{lnn}\cdot\frac{1}{n}}=1$.

2). $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{P_k(n)}=1$ (аналогично).

3). Признаки Даламбера и Коши не дают ответа на вопрос о сходимости ряда в случае, когда соответствующие пределы равны 1.

Например, вычислим эти пределы для гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, расходимость которого была доказана:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1,\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=1.$$

Такой же результат получим, рассматривая сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$:

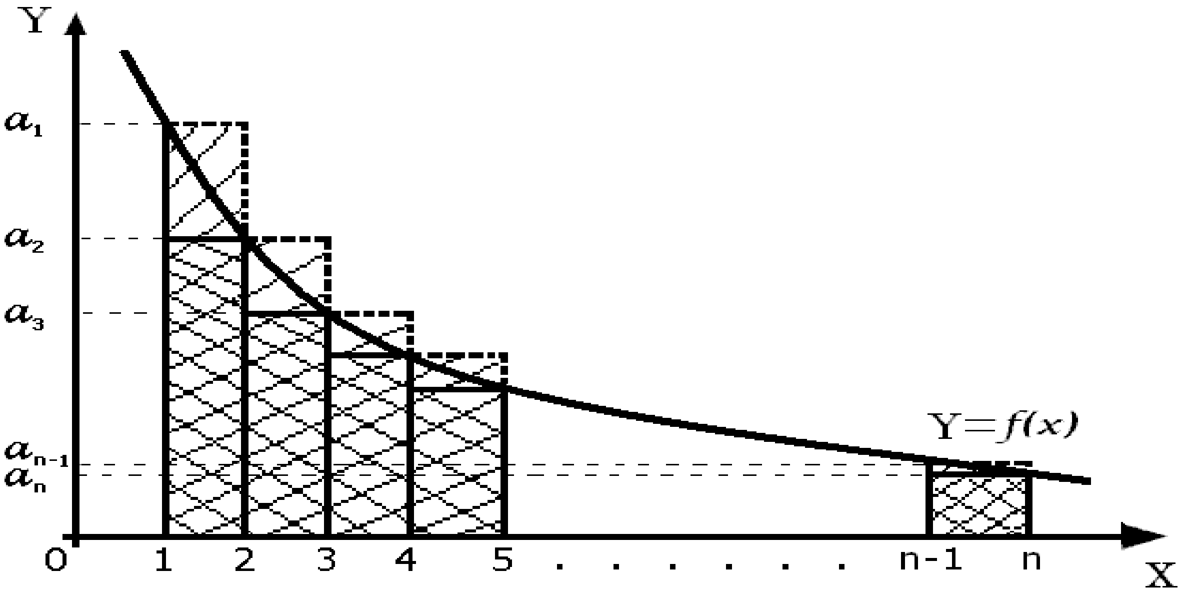
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=1,\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}=1.$$

2.5. Интегральный признак Коши

Теорема 6. Пусть дан положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, общий член которого можно рассматривать как функцию от n: $a_n=f(n)$. Предположим, что функция $f(x)$ определена, положительна, непрерывна и монотонно убывает при $x\geq 1$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, если сходится $\int_1^{+\infty}f(x)dx$, и расходится, если этот интеграл расходится.

Доказательство.

Рассмотрим график функции $y=f(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы. Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную сверху графиком $y=f(x)$, снизу осью OX, с боков прямыми $x=1,\ x=n.$ Построим ступенчатые фигуры, одна из которых вписана в криволинейную трапецию, а другая описана около этой трапеции.



Вычислим площадь вписанной и описанной ступенчатый фигур:
Площадь вписанной ступенчатой фигуры равна $a_2 + a_3 + \cdots + a_n$,
площадь описанной фигуры равна $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$. Площадь самой криволинейной трапеции равна $\int_1^n f(x)dx$ и заключена между площадями вписанной и описанной фигур:

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n < \int_1^n f(x)dx < a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}.$$

Если интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится, т.е. имеет конечное значение:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = I,$$

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n < \int_1^n f(x)dx$$

тогда частичные суммы ряда S_n ограничены:

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n < a_1 + \int_1^n f(x)dx < a_1 + I.$

Следовательно, ряд сходится.

Если $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится,

$\int_1^n f(x)dx < a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$,

то

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n > \int_1^n f(x)dx + a_n > \int_1^n f(x)dx \to \infty,\ n \to \infty$, следовательно ряд расходится.

<u>Пример 14.</u>

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = arctgx|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$. Несобственный интеграл сходится, следовательно, исходный ряд сходится.

<u>Пример 15.</u>

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$.

$\int_1^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)} =$

$\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1)|_1^{+\infty} = +\infty.$

Ряд расходится.

Пример 16.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{nln^2n}$. $\int_2^{+\infty}\frac{1}{xln^2x}dx = \int_2^{+\infty}\frac{dlnx}{ln^2x} = -\frac{1}{lnx}\Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{ln2}$. Ряд сходится.

Пример 17.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, который называют *обобщенным гармоническим рядом* или *рядом Дирихле*. Интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx$ сходится при условии $\alpha > 1$ и расходится при условии $\alpha \leq 1$, следовательно, обобщенный гармонический ряд
сходится, если $\alpha > 1$, и
расходится, если $\alpha \leq 1$.

Замечание. Мы рассмотрели основные признаки сходимости положительных рядов. Есть другие, более "тонкие" признаки, дающие ответ на вопрос о сходимости рядов в тех случаях, где рассмотренные признаки "не работают".

2.6. Общие рекомендации по исследованию на сходимость положительных рядов

1). Для доказательства расходимости ряда удобно использовать нарушение необходимого условия сходимости: если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

2). Если общий член ряда содержит факториал, то удобно использовать признак Даламбера.

3). Если общий член ряда содержит степени $n,\ n^2$, то удобно использовать признак Коши-радикальный.

4). При применении I признака сравнения удобно использовать оценки:

$$1 < lnn < n^p\ (p > 0)$$
$$-1 \leq \binom{sinn}{cosn} \leq 1$$
$$0 \leq \binom{sin^2 n}{cos^2 n} \leq 1$$
$$-\frac{\pi}{2} \leq arctgn \leq \frac{\pi}{2}.$$

5). При применении предельного признака сравнения удобно:

а) при вычислении $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ применять эквивалентности

б) использовать ряды для сравнения:

ряд Дирихле: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \alpha > 1 \text{ сходится} \\ \alpha \leq 1 \text{ расходится} \end{cases}$

ряд геометрической прогрессии: $\sum_{n=1}^{\infty} q^n \begin{cases} |q| < 1 \text{ сходится} \\ |q| \geq 1 \text{ расходится} \end{cases}$.

Примеры.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(2n+1)!}{3n}$, $\quad a_{n+1}=\frac{(n+1)!(2(n+1)+1)!}{3(n+1)}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,(2n+3)!\,3n}{3(n+1)n!\,(2n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,(n+1)(2n+1)!\,(2n+2)(2n+3)3n}{3(n+1)n!\,(2n+1)!}=$$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(2n+2)(2n+3)n=\infty>1$, ряд расходится (признак Даламбера).

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n(n-1)}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{2n+1}\right)^{(n-1)\cdot\frac{2n+1}{-2}\cdot\frac{-2}{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{-2(n-1)}{2n+1}}=\frac{1}{e}<1$$

ряд сходится (признак Коши-радикальный).

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=1$ (?) признак Коши-радикальный не работает.

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n}=\frac{1}{e}\neq 0$, ряд расходится (необходимое условие сходимости).

Математический анализ-3 семестр

Лекция 3

Тема 3. Знакопеременные числовые ряды

3.1. Ряд Лейбница

3.2. Абсолютная и условная сходимость

3.3. Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов

3. Знакопеременные числовые ряды

Определение 1. Числовой ряд называется *знакопеременным*, если среди его членов есть как положительные, так и отрицательные числа.

Если отрицательных членов конечное число, то, отбросив их, получим положительный ряд.

Если положительных членов конечное число, то, отбросив их, получим отрицательный ряд, который можно исследовать с помощью теорем о сходимости положительных рядов, изменив знаки всех членов ряда. Существенно новым является тот случай, когда среди членов ряда бесконечное число положительных и бесконечное число отрицательных чисел.

3.1. Ряд Лейбница

Рассмотрим случай, когда знаки членов ряда чередуются, например, члены с нечетными номерами положительны, а члены с четными номерами отрицательны.

Определение 2. Ряды, представленные в виде: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n$ или $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot a_n$, где $a_n>0$, называются *знакочередующимися*.

Теорема 1 Лейбница (признак сходимости знакочередующегося ряда).

Если члены знакочередующегося ряда монотонно убывают по модулю: $a_n>a_{n+1}$, $n=1,2,3,\ldots$, и стремятся к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, то ряд сходится.

Доказательство.
Для определенности возьмем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n$, $a_n>0$.

Рассмотрим последовательность частичных сумм с четными номерами:

$S_{2n}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{2n-1}-a_{2n})$.

Члены ряда сгруппированы так, что все слагаемые этой суммы – положительные числа. Значит, частичные суммы с четными номерами возрастают с ростом n.

С другой стороны,

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n},$$

т.е. частичные суммы с четными номерами ограничены первым членом ряда: $S_{2n} < a_1$.

Следовательно, существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$.

Для частичных сумм с нечетными номерами справедливо равенство: $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$, из которого следует, что

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} + a_{2n+1}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} =$$

$$= S + 0(\text{по условию теоремы}) = S.$$

Итак, частичные суммы с четными и нечетными номерами имеют один и тот же предел, а, значит, ряд сходится, и его сумма равна S.

Определение 3. Знакочередующийся ряд, удовлетворяющий условиям теоремы Лейбница, называется *рядом Лейбница*.

Замечание. Частичные суммы с четными номерами приближаются к сумме ряда S, возрастая, а частичные суммы с нечетными номерами – убывая, т.е. справедливо неравенство: $S_{2n} < S < S_{2n-1}$.

В частности, $0 < S < a_1$.

Если первый член ряда Лейбница $-a_1$, т.е. отрицателен, то $-a_1 < S < 0$.

В любом случае сумма ряда имеет знак его первого члена и меньше его по модулю.

Остаток ряда Лейбница также является рядом Лейбница. Следовательно, сумма остатка имеет знак своего первого члена и меньше его по модулю. Так для ряда Лейбница легко оценивается разность между суммой и частичной суммой.

<u>Пример 1.</u> Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Легко проверить, что условия теоремы Лейбница выполнены:

$a_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = a_{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, ряд сходится.

<u>Пример 2.</u> Исследовать на сходимость ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\ln n}{n}$, $a_n = \frac{\ln n}{n}$.

Для проверки выполнения условий теоремы Лейбница введем функцию $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ и докажем, что она монотонно убывает, начиная с некоторого значения x, и стремится к нулю при $x \to \infty$.

Вычислим:

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0$$

для $x > e$.

Это означает, что, начиная с номера $n = 3$, верно неравенство

$a_n > a_{n+1},\ n = 3, \ldots.$

Как уже было показано, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$. Следовательно, условия теоремы Лейбница выполнены, и ряд сходится.

Замечание. Составим ряды из модулей членов рассмотренных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}.$$

Оба эти ряда расходятся. Первый из них является гармоническим, а члены второго, начиная с $n = 3$, больше, чем члены гармонического ряда.

3.2. Абсолютная и условная сходимость

Пусть дан произвольный знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ составлен из модулей его членов.

Теорема 2. Если сходится ряд из модулей членов данного ряда, то сходится и сам знакопеременный ряд.

Доказательство. Пусть сходится ряд из модулей. Тогда согласно критерию Коши для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что для любого номера $n > N$ и любого натурального k будет верно неравенство:

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+k}| < \varepsilon.$$

Для знакопеременного ряда получим следующую оценку:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+k}| < \varepsilon \quad ,$$

что означает, что условие сходимости для него выполняется, т.е. сам знакопеременный ряд сходится.

Определение 3. Если сходится ряд, составленный из модулей членов данного ряда, то сам знакопеременный ряд называется *абсолютно сходящимся*.

Определение 4. Если знакопеременный ряд сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится, то такой ряд называется *условно сходящимся*.

Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$,$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\ln n}{n}$, рассмотренные в примерах предыдущего пункта, являются условно сходящимися.

При установлении *абсолютной* сходимости можно пользоваться всеми признаками сходимости положительных рядов. Если сходимость ряда из модулей установлена, то исследование ряда на этом заканчивается: ряд сходится абсолютно.

Если установлена расходимость ряда из модулей с помощью признаков Даламбера или Коши, то исследование также заканчивается, т.к. в этом случае знакопеременный ряд расходится в силу невыполнения необходимого условия сходимости (общий член ряда стремится к ∞ с возрастанием n).

Если расходимость ряда из модулей установлена другими способами, то исследование надо продолжить, например, для знакочередующихся рядов с помощью теоремы Лейбница: ряд может сходиться условно.

Пример 3.

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2^{n^2}}{n!}$.

Применим признак Даламбера к ряду из модулей:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{(n+1)^2}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^{n^2}}==\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n^2+2n+1}}{2^{n^2}}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}}{n+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n+1}\cdot 2ln2}{1} = +\infty$, предел вычислен с помощью правила Лопиталя.

Ряд из модулей расходится, причем его расходимость установлена с помощью признака Даламбера. Значит, и сам ряд расходится.

Пример 4.

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{3n+1}{5n+3}\right)^{n}$.

Применим радикальный признак Коши к ряду из модулей:

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{5n+3}\right) = \frac{3}{5} < 1$, значит, данный ряд сходится абсолютно.

Пример 5.

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$.

Ряд из модулей является расходящимся как обобщенный гармонический ряд с показателем $\alpha = \frac{1}{3}$. Однако, для данного ряда выполнены условия теоремы Лейбница, т.е. ряд сходится условно.

Пример 6.

Исследовать на сходимость знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sinn}{n^3}$.

Ряд из модулей: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|sinn|}{n^3}$.

$\frac{|sinn|}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ - ряд Дирихле, $\alpha = 3 > 1$, сходится,

Следовательно, ряд из модулей сходится по признаку сравнения.

Исходный ряд сходится абсолютно.

Пример 7.

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n^3}{2^n}$.

Ряд из модулей: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$.

Применим признак Коши-радикальный:

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1$, ряд из модулей сходится, следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

3.3. Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов

Без доказательства отметим следующие свойства абсолютно и условно сходящихся рядов.

Теорема 3. Если ряд сходится абсолютно, то ряд, полученный произвольной перестановкой его членов, также сходится и имеет ту же сумму. Другими словами, абсолютно сходящийся ряд обладает переместительным свойством так же, как и конечная сумма.

Если ряд сходится условно, то надлежащей перестановкой его членов можно изменить сумму ряда на любое заданное число, а также сделать ряд расходящимся.

Рассмотрим пример.

Ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots$
является условно сходящимся.
Теперь переставим члены ряда так, что после одного положительного члена будут следовать 2 отрицательных:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\cdots=$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\cdots=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots\right).$$

Ясно, что последовательность частичных сумм нового ряда сходится. Однако в результате перестановки членов ряда получен ряд, сумма которого в 2 раза меньше суммы исходного ряда.

Действия по исследованию знакочередующегося ряда на сходимость можно изобразить в виде схемы:

Знакочередующиеся ряды: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + a_n - \ldots$

или $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + a_n - \ldots$

1. Исследуем на абсолютную сходимость:

ряд из модулей: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

расходится (пр.Коши-рад, Даламбера) → **Исходный ряд расходится**

расходится (др. признаки) → у исходного ряда абсолютной сходимости нет ↓

сходится → **Исходный ряд сходится абсолютно**

2. Исследуем на условную сходимость:

$$\left.\begin{cases} 1)\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \\ 2)\ a_n \succ a_{n+1} \end{cases}\right\}\text{Условия Лейбница}$$

нет → **Исходный ряд расходится.**

да → **Исходный ряд** является рядом Лейбница, **сходится условно.**

Математический анализ-3 семестр

Лекция 4

Тема 4. Функциональные ряды

4.1. Функциональный ряд, его область сходимости

4.2. Равномерная сходимость функционального ряда

4.3. Теорема Вейерштрасса

4.4. Свойства равномерно сходящихся рядов

4. Функциональные ряды

4.1. Функциональный ряд, его область сходимости

Определение 1. Пусть дана последовательность функций:

$u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots, u_n(x), \ldots$,

определенных на некотором множестве X. Выражение вида:

$$u_1(x) + u_2(x) + \ \ldots + u_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

называется *функциональным рядом*, а множество X – областью определения этого ряда.

При подстановке произвольного значения x из множества X функциональный ряд становится числовым, причем при одних значениях x числовой ряд может быть сходящимся, а при других – расходящимся.

Определение 2. Множество значений переменной x, при которых функциональный ряд сходится, называется *областью сходимости* функционального ряда.

Примеры. Рассмотрим ряды, определенные для любых значений x.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$. Областью сходимости является интервал (-1,1) (при подстановке $\forall x \in (-1,1)$ получаем сходящийся ряд геометрической прогресии).

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$. Областью сходимости является интервал (1, +∞).

Сумма функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$ представляет собой функцию, определенную на области сходимости ряда.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$.

$\forall x \in R: 0 < \frac{1}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{n^2}$,

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} -$ ряд Дирихле, сходится, → положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ сходится при любых значениях x (по признаку сравнения).

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n^2x)}{n^2}$ – знакопеременный ряд.

Ряд из модулей: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin(n^2x)|}{n^2}$.

$\forall x \in R$: $\frac{|\sin(n^2x)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – сходится, следовательно, сходится ряд из модулей, значит, при любых значениях x (по признаку сравнения) сходится исходный ряд (абсолютно).

4.2. Равномерная сходимость функционального ряда

Конечные суммы сохраняют свойства своих слагаемых. Например, сумма конечного числа непрерывных функций также непрерывна. Обладают ли бесконечные суммы функций, т.е. функциональные ряды, аналогичными свойствами?

Рассмотрим пример.

Функциональный ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ представляет собой при $x \neq 0$ сумму геометрической прогрессии со знаменателем

$q = \frac{1}{1+x^2}$, $0 < q < 1$. При $x = 0$ все члены этого ряда равны нулю.

Следовательно, данный ряд определен и сходится при всех x, причем его сумма $S(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{(1+x^2)\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)} = 1, \ x \neq 0 \\ 0, \ \ x = 0 \end{cases}$.

Таким образом, сумма ряда терпит разрыв при $x = 0$, несмотря на то, что члены ряда непрерывны при всех x.

Функциональные свойства суммы ряда зависят от характера сходимости самого ряда.

Пусть функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на множестве X.

$S_n(x)$, $S(x)$ - частичная сумма и сумма этого ряда соответственно.

Определение 3. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *равномерно сходящимся* на множестве X, если этот ряд сходится при всех x, принадлежащих множеству X, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для всех номеров $n > N$ и для любого $x \in X$ будет выполнено неравенство: $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

Другими словами, ряд сходится равномерно на множестве X, если разность между частичной суммой и суммой ряда становится сколь угодно малой, начиная с некоторого номера, одновременно для всех x, принадлежащих области сходимости ряда.

Геометрически равномерная сходимость ряда означает, что графики частичных сумм $S_n(x)\ \forall n > N(\varepsilon)$ будут лежать внутри ε-полосы вокруг графика суммы $S(x)$.

Приняты обозначения:

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$ – сходимость ряда,

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows S(x) -$ равномерная сходимость ряда.

Рассмотрим примеры.

<u>Пример 5.</u>

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^{2n}}$ сходится при всех x как знакочередующийся ряд Лейбница.

В случае, когда $|x| \geq 1$, легко убедиться в том, что члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^{2n}}$ монотонно убывают по модулю, т.к. с ростом n увеличивается знаменатель дроби. В случае, когда $|x| < 1$ проверим, что выполняется неравенство:

$\frac{1}{n+x^{2n}} > \frac{1}{n+1+x^{2n+2}}$, которое равносильно неравенству:

$n + x^{2n} < n + 1 + x^{2n+2}$, которое, в свою очередь, равносильно неравенству:

$x^{2n}(1 - x^2) < 1$, а последнее верно при $x \in (-1,1)$.

Итак, общий член данного ряда стремится к нулю с ростом n при всех x.

Воспользуемся оценкой остатка ряда Лейбница: $|S_n(x) - S(x)| < |u_{n+1}(x)| = \frac{1}{n+1+x^{2n+2}} \leq \frac{1}{n+1} < \varepsilon$.

Разрешая данное неравенство относительно n, получим: $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$.

В качестве номера N можно выбрать, например, число, равное целой части числа $\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для всех номеров $n > N$ будет верно неравенство: $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$, т.е. данный ряд сходится равномерно на всей числовой оси.

<u>Пример 6.</u>

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ является суммой геометрической прогрессии и сходится $\forall x \in (-1,1)$. Вычислим сумму остатка этого ряда:

$$|S_n(x) - S(x)| = |x^{n+1} + x^{n+2} + \cdots| = \left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right|.$$

Если зафиксировать номер n, то $\lim\limits_{x \to -1+0} |S_n(x) - S(x)| = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \to 1-0} |S_n(x) - S(x)| = +\infty.$$

Это доказывает, что $\forall x \in (-1,1)$ невозможно осуществить выполнение неравенства $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$, например, для $\varepsilon = \frac{1}{2}$, при одном и том же номере n.

Таким образом, данный ряд сходится на интервале $(-1,1)$ неравномерно.

При исследовании функциональных рядов на практике удобно пользоваться достаточными условиями равномерной сходимости.

4.3. Теорема Вейерштрасса
(достаточное условие равномерной сходимости).

Если члены функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ при всех $x \in X$, удовлетворяют неравенству:

$|u_n(x)| \leq a_n,\ n = 1,2,3 \ldots,$

где a_n - члены некоторого сходящегося числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

то функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на множестве X.

Доказательство. Абсолютная сходимость функционального ряда при всех $x \in X$ следует из признака сравнения и из сходимости числового ряда.

Покажем, что функциональный ряд сходится равномерно на множестве X. Из условия теоремы следует, что для любого натурального числа k и для любого $x \in X$ верно неравенство:

$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+k}(x)| \leq |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \cdots + |u_{n+k}(x)| \leq$

$\leq a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k} \leq \rho_n$, где ρ_n – остаток числового ряда.

Переходя в этом неравенстве к пределу при условии $k \to \infty$, получим:

$|r_n(x)| \leq \rho_n$, где $r_n(x)$ – остаток функционального ряда.

Т.к. по условию теоремы числовой ряд сходится, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для всех номеров $n > N$ будет выполнено неравенство: $\rho_n < \varepsilon$,

а, значит, и для остатка функционального ряда верно, что

$|r_n(x)| \le \rho_n < \varepsilon$ для всех $x \in X$, т.е. функциональный ряд сходится равномерно на множестве X.

Теорема доказана.

Определение 4. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, удовлетворяющий условиям теоремы Вейерштрасса, называется *мажорирующим* числовым рядом для функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ или *числовой мажорантой.*

Пример 7. Доказать, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cosnx}{n^2}$ сходится равномерно при всех x.

Мажорирующим числовым рядом для данного функционального ряда является ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, т.к. $\left|\frac{cosnx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ при всех x.

А так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то данный функциональный ряд сходится равномерно на всей числовой оси.

Пример 8. Доказать, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^3+x^3}$ сходится равномерно на промежутке $[0, +\infty)$.
Члены данного функционального ряда неотрицательны при
$x \in [0, +\infty)$.

Для построения мажоранты найдем при каждом фиксированном n максимальное значение функции $u_n(x) = \frac{x}{n^3+x^3}$.

Для этого вычислим $u_n'(x)$:

$$u_n'(x) = \left(\frac{x}{n^3+x^3}\right)' = \frac{n^3+x^3-3x^3}{(n^3+x^3)^2} = \frac{-2x^3+n^3}{(n^3+x^3)^2} = \frac{-2\left(x^3-\frac{n^3}{2}\right)}{(n^3+x^3)^2}.$$

$u_n'(x) = 0$ при $x = \frac{n}{\sqrt[3]{2}}$ и эта точка является точкой максимума функции $u_n(x)$.

$$u_n(x)_{max} = u_n\left(\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{\frac{n}{\sqrt[3]{2}}}{n^3+\frac{n^3}{2}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Значит, члены функционального ряда на множестве $[0,+\infty)$ удовлетворяют неравенству: $0 \le u_n(x) \le \frac{2}{3\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{1}{n^2}$.

А т.к. числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то числовой ряд, общий член которого равен $\frac{2}{3\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{1}{n^2}$, также сходится.

В силу теоремы Вейерштрасса данный функциональный ряд сходится равномерно на промежутке $[0,+\infty)$.

4.4. Свойства равномерно сходящихся рядов

Рассматривая ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, который сходится при всех x, и все члены которого непрерывны на всей числовой оси, мы обнаружили, что сумма ряда терпит разрыв в точке $x=0$. Это объясняется неравномерностью сходимости данного ряда на любом множестве, содержащем точку $x=0$.

Покажем это, оценивая остаток ряда при $x\neq 0$:

$$S(x)-S_n(x)=r_n(x)=\quad \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}+\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+2}}+\cdots=\frac{\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}}{1-\frac{1}{1+x^2}}=\frac{1}{(1+x^2)^n},\ \lim_{x\to 0}r_n(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+x^2)^n}=1,$$

т.е. остаток ряда не может быть сколь угодно мал одновременно при всех x ни для какого номера n.

Ряд сходится неравномерно на множестве, содержащем точку $x=0$.

Перейдем к изучению свойств функциональных рядов, сходящихся равномерно на некотором отрезке.

1. *Непрерывность суммы* равномерно сходящегося ряда.

Теорема 2. Пусть функции $u_n(x)$ $(n=1,2,3,\dots$ определены и непрерывны на отрезке $[a,b]$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится равномерно на этом отрезке.

Тогда сумма ряда $S(x)$ непрерывна на этом отрезке.

2. Почленное *интегрирование*.

Теорема 3. Если функции $u_n(x)$ $(n = 1,2,3, \dots$ непрерывны на отрезке $[a{,}b]$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на этом отрезке, то интеграл от суммы ряда $S(x)$ на отрезке $[a{,}b]$ представляется в виде суммы интегралов от членов этого ряда:

$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b (\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x))\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\, dx$.

Замечание. Интегрирование можно выполнить на любом отрезке, принадлежащем отрезку $[a, b]$.

Пример 9. Вычислить сумму числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$.

Пусть S - искомая сумма, представим S в виде:

$$S = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n-1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

Рассмотрим функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}$.

На любом отрезке, принадлежащем интервалу (-1,1), этот ряд сходится равномерно, т.к. мажорируется сходящимся числовым рядом:

$|n \cdot x^{n-1}| < n \cdot |q|^{n-1}$ $(|q| < 1)$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n \cdot |q|^{n-1}} = |q| < 1$, следовательно, мажорирующий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot |q|^{n-1}$ сходится (по радикальному признаку Коши).

А, значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}$ сходится равномерно на $(-1,1)$.

Применим к построенному функциональному ряду теорему о почленном интегрировании. Интегрирование выполним на отрезке $[0, x]$, полагая, что

$x \in (-1,1)$.

$$\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n \cdot x^{n-1}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Искомая сумма $S = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{4}$.

3. Почленное *дифференцирование*.

Теорема 4. Пусть функции $u_n(x)$ ($n = 1,2,3, \ldots$ определены и непрерывны на отрезке $[a,b]$ и имеют на этом отрезке непрерывные производные $u_n{}'(x)$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n{}'(x)$ сходится равномерно на отрезке $[a,b]$. Тогда сумма $S(x)$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ дифференцируема на отрезке $[a,b]$, причем производная суммы равна сумме ряда из производных:

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n{}'(x).$$

<u>Пример 10.</u> Вычислить сумму числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n}$.

Рассмотрим функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, который сходится на интервале (-1,1). Обозначим исходную сумму числового ряда S, а сумму функционального ряда $S(x)$. Тогда $S = S\left(\frac{1}{2}\right)$.

Рассмотрим ряд из производных $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$. Этот ряд сходится равномерно на любом отрезке, принадлежащем интервалу (-1,1), т.к. мажорируется сходящимся числовым рядом.

Применим к данному ряду теорему о почленном дифференцировании:

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$S(x) = \int_0^x \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x) + ln1 = -\ln(1-x)$$

Искомая сумма $S = S\left(\frac{1}{2}\right) = -ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = ln2.$

Математический анализ-3 семестр

Лекция 5

Тема 5. Степенные ряды

5.1. Определение. Теорема Абеля

5.2. Интервал и радиус сходимости степенного ряда

5.3. Равномерная сходимость степенного ряда, его почленное интегрирование и дифференцирование

5. Степенные ряды

5.1. Определение. Теорема Абеля

Определение 1. Степенным рядом называется функциональный ряд вида: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$.

Рассматриваются также степенные ряды более общего вида:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots$,

которые с помощью замены $(x - x_0)$ на новую переменную сводятся к рядам вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, изучением которых можно ограничиться.

Выясним, какой вид имеет область сходимости степенного ряда.

Теорема 1 (Абеля).

Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится в некоторой точке $x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится в любой точке x, такой что $|x| < |x_0|$.

Доказательство. Из сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n {x_0}^n$ следует, что его общий член стремится к нулю, а, значит, ограничен, т.е. существует положительное число M такое, что:

$|a_n {x_0}^n| \leq M \ \ (n = 0,1,2, \dots)$.

Возьмем произвольное x, для которого $|x| < |x_0|$ и рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$. Оценим его общий член:

$$|a_n x^n| = \left|a_n {x_0}^n \cdot \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| = |a_n {x_0}^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \cdot q^n, \quad \text{где } q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1.$$

Общий член рассматриваемого ряда меньше, чем соответствующие члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Значит, степенной ряд сходится абсолютно в точке x. Теорема доказана.

5.2. Интервал и радиус сходимости степенного ряда

Заметим, что любой степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится при $x = 0$.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$. Применим для нахождения его области сходимости признак Даламбера: $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = |x| \cdot \lim\limits_{n\to\infty}(n+1) = \infty$, если $x \neq 0$.

Значит, данный ряд сходится только в одной точке $x_0 = 0$.

Предположим, что для степенного ряда существуют отличные от нуля значения x, при которых он сходится. Если множество этих значений не ограничено, то согласно теореме Абеля ряд сходится всюду, причем абсолютно.

Пусть множество значений x, при которых степенной ряд сходится, ограничено, и положительное число R – точная верхняя грань этого множества.

Если $|x| < R$, то найдется значение x_0 такое, что $|x| < |x_0| \leq R$, при котором ряд сходится. Тогда согласно теореме Абеля ряд сходится абсолютно в точке x. Итак, степенной ряд сходится абсолютно в интервале $(-R, R)$ и расходится вне этого интервала.

На концах интервала, т.е. при $x = \pm R$ может иметь место как сходимость, так и расходимость ряда.

Определение 2. Интервал $(-R, R)$ называется *интервалом сходимости* степенного ряда, а число R – *радиусом сходимости*. Если степенной ряд сходится на всей числовой оси, то его радиус сходимости $R = \infty$, а если ряд сходится только в одной точке $x = 0$, то $R = 0$.

Замечание 1. Степенной ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ сходится или в интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$ с центром в точке x_0, или на всей числовой оси, или только в точке $x = x_0$.

Замечание 2. Интервал сходимости степенного ряда может быть найден с помощью признаков Даламбера или Коши. Для установления сходимости или расходимости на концах интервала требуется дополнительное исследование с помощью других теорем.

Пример 1.

Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{2^n} x^n$.

Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+2)x^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{(n+1)x^n}\right| = \frac{|x|}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = \frac{|x|}{2} < 1$$

$\Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2.$

$(-2,2)$ – интервал сходимости, $R = 2$ – радиус сходимости.

Исследуем сходимость на концах $(-2,2)$.

При $x = 2$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{2^n} x^n \Big|_{x=2}$ получим положительный числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)$.

Не выполняется необходимое условие сходимости, ряд расходится.

При $x = -2$ получим числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)$. Аналогично, ряд расходится.

Ответ: область сходимости данного ряда $(-2,2)$, $R = 2$.

Пример 2.

Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{(x+1)^n}{3^n \cdot \ln n}$.

Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{n+1}}{3^{n+1}\cdot\ln(n+1)}\cdot\frac{3^{n}\cdot\ln n}{(x+1)^{n}}\right| =$$

$$= \frac{|x+1|}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(n+1)} = \frac{|x+1|}{3}.$$

При вычислении $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{ln n}{\ln\,(n+1)}$ используется правило Лопиталя:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{ln t}{\ln(t+1)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t+1}} = \lim_{t\to\infty}\frac{t+1}{t} = 1.$$

Интервал сходимости определяется из неравенства:

$$\frac{|x+1|}{3} < 1 \Leftrightarrow |x+1| < 3 \Leftrightarrow$$

$$-3 < x+1 < 3 \Leftrightarrow -4 < x < 2.$$

$(-4,2)$ – интервал сходимости,

$R = 3$ – радиус сходимости.

Исследуем сходимость на концах интервала:

При $x = -4$: $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+1)^n}{3^n\cdot\ln n}$, получим положительный ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$.

Сравним его с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Покажем, что для любого номера $n = 2,3,4, \ldots$ выполнено неравенство: $\frac{1}{lnn} > \frac{1}{n} \iff \frac{lnn}{n} < 1.$

Для этого рассмотрим функцию $f(x) = \frac{lnx}{x}$ и вычислим ее производную: $f'(x) = \frac{1-lnx}{x^2} < 0$ при $x > e$.

Так как $f(2) = \frac{ln2}{2} < 1$, $f(3) = \frac{ln3}{3} < 1$, а при $x > e$ $f(x)$ убывает, то ее значения меньше 1 при всех $n = 2,3,4, \ldots$.

Члены полученного ряда больше, чем соответствующие члены гармонического ряда, т.е. при $x = -4$ ряд расходится.

При $x = 2$ получим знакочередующийся ряд $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\ln n}$, который сходится условно как знакочередующийся ряд Лейбница.

Ответ: область сходимости данного ряда $(-4,2]$, $R = 3$.

Пример 3.

Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right| = |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 \quad \text{при всех } x.$$

Следовательно, область сходимости данного ряда – вся числовая ось. $R = \infty$.

Пример 4.

Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot n!$.

Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{x^n} \cdot \frac{(n+1)!}{n!}\right| = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty,\ x \neq 0.$$

Ответ: данный ряд сходится при $x = 0$. $R = 0$.

Пример 5.

Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}$.

Применим признак Коши: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n}\right|} = |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

$x = -1$.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{(-1)^n}{n} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n+1} \cdot \frac{1}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Ряд расходится.

$x = 1$. Получаем знакочередующийся ряд $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$, который сходится условно как знакочередующийся ряд Лейбница.

Ответ: область сходимости данного ряда $(-1,1]$, $R = 1$.

Пример 6.

Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n^2}$.

Применим признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{x^{2n}}{n^2}\right|} = |x^2| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

При $x = \pm 1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – ряд Дирихле, сходится.

Ответ: область сходимости данного ряда $[-1,1]$, $R = 1$.

Пример 7.

Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}(x+2)^n$.

Применим признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}(x+2)^n\right|} = \frac{|x+2|}{2} < 1,$$

$|x+2|<2 \Leftrightarrow -2<x+2<2$

$\Leftrightarrow -4<x<0.$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}}(x+2)^n.$

$x=-4.$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n \cdot 2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2}{n} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ – ряд Лейбница, сходится.

$x=0.$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$ – расходится (гармонический ряд).

Ответ: область сходимости данного ряда $[-4,0)$, $R=2.$

Пример 8.

Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}}(x-3)^n.$

Применим признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{2^n}{\sqrt{n}}(x-3)^n\right|} = 2 \cdot |x-3| < 1$$

$|x-3|<\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3-\frac{1}{2}<x<3+\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}$.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}} (x-3)^n$.

$x = \frac{5}{2}$. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}} (-\frac{1}{2})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ – ряд Лейбница, сходится.

$x = \frac{7}{2}$. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}} (\frac{1}{2})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ – ряд Дирихле, расходится.

Ответ: область сходимости данного ряда $[\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$, $R = \frac{1}{2}$.

5.3. Равномерная сходимость степенного ряда, его почленное интегрирование и дифференцирование

Теорема 2** (о равномерной сходимости степенного ряда).** Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится равномерно на любом отрезке, принадлежащем интервалу сходимости.

Доказательство. Пусть $(-R, R)$ – интервал сходимости степенного ряда и $[a, b]$ – произвольный отрезок, принадлежащий этому интервалу. Обозначим $x_0 = max\{|a|, |b|\}$.

Тогда для всех $x \in [a, b]$ будет выполняться неравенство $|x| < |x_0|$. Степенной ряд сходится абсолютно в точке x_0, т.к. $x_0 \in (-R, R)$. Кроме того: $|a_n x^n| \le |a_n {x_0}^n|$.

Т.е. степенной ряд мажорируется на отрезке $[a, b]$ сходящимся положительным числовым рядом, а, значит, согласно теореме Вейерштрасса, сходится на этом отрезке равномерно.

Теорема доказана.

Степенные ряды обладают свойствами равномерно сходящихся функциональных рядов.

1). Сумма степенного ряда непрерывна на любом отрезке, принадлежащем интервалу сходимости, а, значит, непрерывна на всем интервале.

2). Интеграл от суммы степенного ряда $S(x)$ на любом отрезке, принадлежащем интервалу сходимости, равен сумме ряда, полученного из данного степенного ряда путем почленного интегрирования на том же отрезке:

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n \, dx.$$

Если в качестве отрезка интегрирования взять отрезок $[0, x]$, где $x \in (-R, R)$, то равенство приобретает вид:

$$\int_0^x S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n,$$

т.е. в результате почленного интегрирования степенного ряда на отрезке $[0, x]$ получается также степенной ряд.

Пользуясь, например, признаком Даламбера, можно показать, что радиус сходимости полученного ряда совпадает с радиусом сходимости исходного ряда.

3). При почленном дифференцировании степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ получим также степенной ряд:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \cdot (n+1) x^n$$

с тем же радиусом сходимости.

Это означает, что сумма степенного ряда дифференцируема на интервале сходимости, и производная суммы равна сумме ряда из производных.

<u>Замечание.</u> Почленное дифференцирование можно применить повторно к ряду из производных первого порядка, второго и т.д.. Значит, сумма степенного ряда имеет внутри интервала сходимости производные всех порядков.

<u>Замечание.</u> При почленном интегрировании и дифференцировании степенного ряда интервал сходимости сохраняется. Сходимость на концах интервала может появляться или исчезать.

Пример 9. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^n}{n}$.

Данный ряд сходится на промежутке $(-1,1]$. Обозначим $S(x)$ его сумму и применим теорему о почленном дифференцировании:

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot x^{n-1}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\cdot x^{n}=\frac{1}{1+x}.$$

Полученный в результате почленного дифференцирования степенной ряд является суммой геометрической прогрессии и сходится на интервале $(-1,1)$.

$$\int_0^x S'(x)dx=S(x)-S(0)=$$

$$=\int_0^x\frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x).$$

Пример 10. Найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot x^n$.

Данный ряд сходится на интервале $(-1,1)$. Обозначим $S(x)$ его сумму и применим теорему о почленном интегрировании:

$$\int_0^x S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

Полученный в результате почленного интегрирования степенной ряд является суммой геометрической прогрессии и сходится на интервале $(-1,1)$.

$S(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Математический анализ-3 семестр

Лекция 6

Тема 6. Ряд Тейлора

6.1. Представление функций степенными рядами
6.2. Условие сходимости ряда Тейлора заданной функции к этой функции
6.3. Единственность представления функции степенным рядом
6.4. Разложение основных элементарных функций

6. Ряд Тейлора

6.1. Представление функций степенными рядами

Частичными суммами степенных рядов являются многочлены, что делает степенные ряды удобным средством для приближенных вычислений. Поэтому особое значение имеет вопрос о представлении функций степенными рядами.

Предположим, что заданная функция $f(x)$ в некотором интервале с центром в точке x_0 имеет производные всех порядков. Тогда согласно формуле Тейлора для всех значений x из этого интервала имеет место равенство:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

где $R_n(x)$ - остаточный член формулы Тейлора. Он может быть записан разными способами, например, в форме Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_1)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \qquad x_1 \in (x_0, x).$$

Или в форме Пеано: $R_n(x) = \bar{o}((x-x_0)^n)$.

При этом n можно выбрать сколь угодно большим, т.е. учитывать в этой формуле сколь угодно большие степени переменной $(x-x_0)$.

Естественно возникает вопрос о возможности представления функции $f(x)$ в виде бесконечной суммы или в виде степенного ряда:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots$$

Такой ряд, независимо от того, сходится он или не сходится к функции $f(x)$ в некотором интервале, называется *рядом Тейлора* этой функции, а его коэффициенты – коэффициентами Тейлора.

Если $x_0 = 0$, то данный степенной ряд называется *рядом Маклорена*: $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$

6.2. Условие сходимости ряда Тейлора заданной функции к этой функции

Согласно формуле Тейлора разность между значениями функции $f(x)$ и частичной суммой ряда Тейлора с номером $(n+1)$ этой функции равна остаточному члену формулы Тейлора $R_n(x)$. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Для того чтобы при некотором значении x значение функции $f(x)$ совпадало с суммой ряда Тейлора этой функции, необходимо и достаточно, чтобы остаточный член формулы Тейлора при этом значении x стремился к нулю с возрастанием n: $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Доказательство.

Необходимость. Пусть ряд Тейлора сходится к $f(x)$, т.е.

$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

– частичная сумма ряда Тейлора.

$f(x) = S_n(x) + R_n(x)$, $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$,

$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \big(f(x) - S_n(x)\big) = 0.$

Достаточность. Пусть $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Тогда

$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(f(x) - R_n(x)\right) = f(x)$, т.е. ряд сходится к $f(x)$.

Теорема доказана.

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0. \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

Можно показать, что эта функция на всей числовой оси имеет производные всех порядков, и $f^{(n)}(0) = 0\ \forall n$.

Ряд Маклорена этой функции сходится при всех x, и сумма его тождественно равна 0, но не равна $f(x)$. Таким образом, данная функция не представляется своим рядом Маклорена ни в какой окрестности точки $x = 0$.

Для того чтобы выяснить, сходится ли ряд Тейлора заданной функции к этой функции, в ряде случаев оказывается полезным следующее утверждение.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ в некотором интервале с центром в точке x_0 имеет производные всех порядков, и все производные для всех x из этого интервала ограничены одним и тем же числом:

$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M,$

то ряд Тейлора этой функции сходится к самой функции на данном интервале.

Доказательство.

По условию теоремы $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M$.

Оценим остаточный член в формуле Тейлора:

$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(x_1)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| \leq M \cdot \frac{|(x-x_0)^{n+1}|}{(n+1)!}.$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|(x-x_0)^{n+1}|}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^{n+1}}{(n+1)!}$$

По признаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c^{n+2}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{c^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{c}{(n+2)} = 0 < 1,$$

значит, этот ряд сходится, следовательно, $\lim_{n\to\infty} \frac{c^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ (необходимое условие сходимости). Значит, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. По теореме 1 это означает, что ряд Тейлора для $f(x)$ сходится к $f(x)$.

Это утверждение применимо к таким элементарным функциям как e^x, $sinx$, $\cos x$. Например, функции $sinx$, $cosx$ дифференцируемы всюду бесконечное число раз, и все их производные ограничены по модулю единицей. Значит, эти функции можно разложить в ряды Тейлора на любом интервале с центром в любой точке.

6.3. Единственность представления функции степенным рядом

Теорема 3. Если функция $f(x)$ представима на некотором интервале с центром в точке x_0 степенным рядом:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

то этот ряд является рядом Тейлора этой функции.

Доказательство. Полагая $x = x_0$, получим $f(x_0) = a_0$.

Применим к данному степенному ряду теорему о почленном дифференцировании:

$$f'^{(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (x - x_0)^{n-1}, f'(x_0) = a_1, a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}$$

$$f''^{(x)} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot n(n-1) \cdot (x-x_0)^{n-2}, f''^{(x_0)} = 2a_2, a_2 = \frac{f''^{(x_0)}}{2!}.$$

$$\dots\ f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)(x-x_0)^{n-k},$$

$$f^{(k)}(x_0) = a_k \cdot k(k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1, a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Т.е. данный ряд является рядом Тейлора этой функции. Теорема доказана.

6.4. Разложение основных элементарных функций

Получим разложения в ряды Маклорена основных элементарных функций.

1). $f(x) = e^x$.

$f^{(n)}(x) = e^x, f^{(n)}(0) = 1\ \forall n$.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Найдем область сходимости данного ряда.

Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{|x^n|}=|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1,\forall x$$

Область сходимости $x\in(-\infty,+\infty)$.

2). $f(x)=\sin x$.

$f(0)=0$.

$f'(x)=\cos x, f'(0)=1$.

$f''(x)=-\sin x, f''(0)=0$.

$f'''(x)=-\cos x, f'''(0)=-1$.

….

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

По признаку Даламбера:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x^{2n+3}|}{(2n+3)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{|x^{2n+1}|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)}=0<1.$

Область сходимости $x\in(-\infty,+\infty)$.

3). $f(x) = cosx$.

$f(0) = 1$.

$f'(x) = -\sin x, f'(0) = 0$.

$f''(x) = -\cos x, f''(0) = -1$.

$f'''(x) = sinx, f'''(0) = 0\ldots$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Аналогично предыдущему примеру находится область сходимости: $x \in (-\infty, +\infty)$.

4). $f(x) = \ln(1+x)$. $f(0) = 0$.

$f'(x) = \frac{1}{1+x}, f'(0) = 1$.

$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, f''(0) = -1$.

$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, f'''(0) = 2$.

$f^{(4)}(x) = -\frac{2\cdot 3}{(1+x)^4}, f'''(0) = 3!\quad \ldots$

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$$

По радикальному признаку Коши легко определить область сходимости: $x \in (-1,1]$.

5). $f(x) = (1+x)^\alpha$.

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots,$

$x \in (-1,1)$.

6). Последнее разложение при $\alpha = -1$ принимает вид:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot x^n, x \in (-1,1)$$

7). При замене x на $-x$ получим еще одно разложение

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, x \in (-1,1)$.

8). При разложении гиперболических функций используем формулы: $\text{sh}x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\text{ch}x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ и разложения функций e^x и e^{-x} в ряд Маклорена:

$$\text{sh}x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\text{ch}x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad x \in (-\infty, +\infty).$$

6.5. Методы разложения функции в ряд Тейлора

6.5.1. *Использование таблицы разложений основных элементарных функций*

Пример 1. Разложить в ряд Маклорена функцию:

$f(x) = \frac{2}{3-x}$ $(x_0 = 0)$.

Преобразуем функцию: $\frac{2}{3-x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{3}}$ и воспользуемся табличным разложением 7), заменяя переменную x на $\frac{x}{3}$:

$$f(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^n}{3^{n+1}}$$

Для нахождения области сходимости данного ряда к исходной функции решим неравенство: $-1 < \frac{x}{3} < 1$ $\Leftrightarrow -3 < x < 3$.

Пример 2. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $(x_0 = 1)$ функцию: $f(x) = \frac{2}{3-x}$.

Сделаем замену: $t = x - 1 \Leftrightarrow x = t + 1$:

$f(t) = \frac{2}{3-(t+1)} = \frac{2}{2-t}$ и разложим эту функцию в окрестности точки $(t = 0)$:

$$f(t) = \frac{2}{2-t} = \frac{1}{1-\frac{t}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2^n} \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n}.$$

Область сходимости: $-1 < \frac{t}{2} < 1 \Leftrightarrow -2 < t < 2 \Leftrightarrow$

$$-2 < x - 1 < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3.$$

Пример 3. Разложить в ряд Маклорена функцию:

$f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$.

Разложим дробь на сумму простейших дробей, и к каждой из них применим табличное разложение в ряд Маклорена:

$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n.$$

Для нахождения области сходимости решим систему неравенств:

$$\begin{cases} -1 < x < 1 \\ -1 < \frac{x}{2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ -2 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

<u>Пример 4</u>. Разложить в ряд Тейлора функцию

$f(x) = \ln(x^2 + 5x + 6)$ в окрестности точки $(x_0 = -1)$, т.е. по степеням $(x + 1)$.

Сделаем замену: $x + 1 = t$ и, пользуясь свойствами логарифмической функции, выполним тождественные преобразования:

$$f(t) = ln((t-1)^2 + 5(t-1) + 6) = \ln(t^2 + 3t + 2) =$$

$$= \ln((t+1)(t+2)) = \ln(t+1) + \ln(t+2) =$$

$$= ln2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{t^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{t^n}{2^n \cdot n} =$$

$$= ln2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) t^n.$$

Вернемся к исходной переменной:

$$f(x) = ln2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)(x+1)^n.$$

Область сходимости: $\begin{cases} -1 < t < 1 \\ -1 < \frac{t}{2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \ -1 < t < 1 \Leftrightarrow$

$$-1 < x + 1 < 1 \Leftrightarrow -2 < x < 0.$$

<u>Пример 5</u>. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x) = (x+2) \cdot 3^x$ в окрестности точки $(x_0 = -2)$, т.е. по степеням $(x+2)$.

Сделаем замену: $x + 2 = t, x = t - 2$:

$f(t) = t \cdot 3^{t-2} = \frac{1}{9} t \cdot 3^t = \frac{1}{9} t \cdot e^{ln3^t} =$

$$= \frac{1}{9} t \cdot e^{tln3} = \frac{1}{9} t \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} ln^n 3.$$

Вернемся к исходной переменной:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ln^n 3}{9n!}(x+2)^{n+1}.$$

Область сходимости: $x \in (-\infty, +\infty)$.

Пример 6. Разложить функцию $y = \sin^2 x$ в ряд Маклорена.

Воспользуемся тригонометрическим тождеством:

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$,

а затем табличным разложением функции $\cos x$, заменяя переменную x на переменную $2x$:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$

$$x \in (-\infty, +\infty).$$

6.5.2. *Использование почленного интегрирования*

Пример 7. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = arctgx$.

Воспользуемся табличным разложением для представления степенным рядом производной этой функции:

$f'(x) = (arctgx)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n \cdot x^{2n} + \cdots, x \in (-1,1)$. Тогда

$arctgx = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^x (1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n \cdot x^{2n} + \cdots) dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots,$
$x \in [-1,1]$.

Заметим, что производная представляется степенным рядом на интервале $(-1,1)$, а сама функция – на отрезке $\in [-1,1]$.

6.5.3. *Использование почленного дифференцирования*

Пример 8. Разложить в ряд Тейлора функцию

$f(x) = \frac{5}{(x+1)^2}, x_0 = 2.$ Замена: $x - 2 = t, x = t + 2.$

$f(t) = \frac{5}{(t+3)^2} = 5 \cdot -\left(\frac{1}{t+3}\right)' = -\frac{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{t}{3}}\right)' = -\frac{5}{3} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{3^n}\right)' = -\frac{5}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{nt^{n-1}}{3^n} =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{5n}{3^{n+1}} (x-2)^{n-1}.$$

Область сходимости: $-1 < \frac{t}{3} < 1 \Leftrightarrow -3 < t < 3 \Leftrightarrow -3 < x - 2 < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 5.$

6.6. Применение теории степенных рядов

6.6.1. *Приближенные вычисления значений функций*

Рассмотрим примеры применения ряда Тейлора для приближенных вычислений.

Пример 9. Вычислить $\sin 1$ с точностью до 0,001.

Для решения задачи воспользуемся табличным разложением функции $\sin x$:

$\sin 1 = 1 - \frac{1^3}{3!} + \frac{1^5}{5!} - \frac{1^7}{7!} + \cdots$ - знакочередующийся ряд Лейбница.

При замене суммы ряда на частичную сумму остаток не превосходит по модулю первого отброшенного члена ряда.

$\frac{1}{5!} > 0{,}001$, $\frac{1}{7!} < 0{,}001$, значит, это слагаемое можно отбросить, для достижения заданной точности достаточно учесть первые три члена ряда:

$\sin 1 \approx 1 - \frac{1^3}{3!} + \frac{1^5}{5!} = 0{,}842.$

6.6.2. *Приближенные вычисления определенных интегралов*

Пример 10. Вычислить с точностью до 3 знаков после запятой $\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx$.

Воспользуемся разложением функции e^x в ряд Маклорена, заменив в нем x на $-x^2$:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots$$

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots\right) dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \cdots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3 \cdot 4^3} + \frac{1}{10 \cdot 4^5} - \frac{1}{42 \cdot 4^7} + \cdots$$

Получен знакочередующийся ряд Лейбница, слагаемое $\frac{1}{10 \cdot 4^5}$ меньше, чем 0,001. Отбрасывая это слагаемое, получим приближенное значение интеграла с заданной точностью:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{3 \cdot 4^3} = 0{,}245.$$

6.6.3. *Вычисление значения производной функции в точке*

Если $f(x)$ представима степенным рядом, то это ряд Тейлора (в силу теоремы единственности разложения).

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

следовательно, $f^{(n)}(x_0) = a_n \cdot n!$

Пример 11. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Найти $f^{(41)}(0), f^{(30)}(0)$.

Разложим функцию в степенной ряд в окрестности $x_0 = 0$, т.е. в ряд Маклорена:

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Ряд содержит только четные степени x, все нечетные коэффициенты равны нулю, следовательно $f^{(41)}(0) = 0$.

$f^{(30)}(0) = a_{30} \cdot 30! = (n = 15) = -\frac{1}{31!} \cdot 30! = -\frac{1}{31}$.

Если требуется разложить функцию в ряд Тейлора по степеням $(x - x_0)$ (в окрестности точки x_0), то необходимо сделать замену $x - x_0 = t$, полученную функцию разложить по степеням t, пользуясь стандартными разложениями, затем вернуться к исходной переменной x.

Разложения основных элементарных функций в ряд Маклорена (по степеням *x*):

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \qquad |x| \prec 1$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots \qquad |x| \prec 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \qquad |x| \prec 1$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| \prec 1$$

$$tg\ x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \cdots \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

Математический анализ-3 семестр

Лекция 7.

Тема 7. Тригонометрический ряд Фурье

7.1. Тригонометрический ряд Фурье. Коэффициенты Фурье

7.2. Сходимость ряда Фурье

7.3. Сходимость в среднем ряда Фурье

7. Тригонометрический ряд Фурье

При решении многих технических задач приходится иметь дело с периодическими процессами, для описания которых требуются периодические функции. Простейшей периодической функцией периода 2π является функция $\sin(x+\alpha)$. При сложении периодических функций

$$\begin{cases} \sin(x+\alpha_1)\,, \; T = 2\pi \\ \sin(2x+\alpha_2)\,, T = \frac{2\pi}{2} \\ \qquad \ldots \\ \sin(nx+\alpha_n)\,, T = \frac{2\pi}{n} \end{cases},$$

получим периодическую функцию с периодом 2π.

Естественно возникает обратный вопрос: можно ли заданную периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π представить в виде суммы конечного или бесконечного числа простейших периодических функций вида $\sin(nx+\alpha_n)$:

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx+\alpha_n)\ ?$$

Постоянное слагаемое A_0 можно считать периодической функцией с любым периодом, в том числе и с периодом 2π.

В механике функция $\sin(nx+\alpha_n)$ описывает простейшее гармоническое колебательное движение. Представление периодической функции $f(x)$ в виде суммы простейших периодических функций можно рассматривать как разложение сложного колебания на отдельные гармонические колебания. Функции вида $\sin(nx+\alpha_n)$, входящие в состав разложения периодической функции $f(x)$, называются гармоническими составляющими этой функции или просто *гармониками*.

Пользуясь тригонометрическим тождеством:

$\sin(nx+\alpha_n) = sin\alpha_n \cdot cosnx + \cos\alpha_n \cdot \sin nx$, получим

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\alpha_n \cdot \cos nx + A_n \cos\alpha_n \cdot \sin nx$$

Обозначая $A_n \sin\alpha_n = a_n$, $A_n \cos\alpha_n = b_n$, разложение периодической функции $f(x)$ можно переписать в виде:

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx) \qquad (1)$$

7.1. Тригонометрический ряд Фурье. Коэффициенты Фурье

Пусть функция $f(x)$:

1) определена на всей числовой оси,
2) периодична с периодом 2π
3) является непрерывной или кусочно-непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$ (функция называется кусочно-непрерывной на отрезке, если она непрерывна во всех точках этого отрезка за исключением конечного числа точек, в которых функция терпит разрыв первого рода, т.е. в этих точках существуют конечные односторонние пределы функции, не равные друг другу).

Предполагая, что $f(x)$ представляется в виде суммы простейших тригонометрических функций, найдем коэффициенты ряда (1). С этой целью проинтегрируем обе части равенства (1) на отрезке $[-\pi, \pi]$, что оправдано, например, в случае равномерной сходимости на этом отрезке функционального ряда, стоящего в правой части равенства (1).

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} A_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right)$$

Воспользуемся тем, что:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = -\frac{1}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = A_0 \cdot 2\pi$$

откуда

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$$

Для вычисления коэффициентов a_n умножим обе части равенства (1) на $\cos kx$ и проинтегрируем на отрезке $[-\pi, \pi]$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} A_0 \cos kx dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos kx dx + b_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos kx dx\right)$$

Пользуясь тем, что:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos kx dx = 0, \quad \text{если } k \neq n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos kx dx = 0, \quad \text{для любых } k \text{ и } n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx) dx = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} A_0 \cos kx dx = 0,$$

если $n \neq 0$, получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = a_n \cdot \pi,$$

откуда:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx\,, n = 1,2,3,\dots$$

Аналогично, для вычисления коэффициентов b_n умножим обе части равенства (1) на $\sin kx$ и проинтегрируем на отрезке $[-\pi,\pi]$, получим:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx\,, n = 1,2,3,\dots$$

Чтобы формулы для коэффициентов выглядели единообразно, обозначим

$$a_0 = 2A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$$

Итак, для любой функции $f(x)$, кусочно-непрерывной на отрезке $[-\pi,\pi]$, можно вычислить коэффициенты:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx\,, n = 1,2,3, \dots, (2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx\,, n = 1,2,3, \dots$$

которые называются *коэффициентами Фурье* этой функции, и поставить в соответствие этой функции ряд:

$$f(x) \to \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx) \quad (3)$$

который называется *тригонометрическим рядом Фурье* этой функции.

Определение 1. Система функций:

$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots,$

на основе которой построен тригонометрический ряд Фурье, называется *основной тригонометрической системой функций*. Эта система на отрезке $[-\pi, \pi]$ обладает свойством ортогональности: интеграл от произведения любых двух функций этой системы на отрезке $[-\pi, \pi]$ равен нулю.

7.2. Сходимость ряда Фурье

Предполагая, что функция $f(x)$ является кусочно-непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$, поставим этой функции в соответствие ее тригонометрический ряд Фурье.

Предположим теперь, что функция является кусочно-дифференцируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$. Это означает, отрезок $[-\pi, \pi]$ можно разделить на конечное число отрезков, внутри которых функция дифференцируема, а на концах отрезков имеет не только конечные предельные значения, но и односторонние производные при условии замены на концах этих отрезков значений функции на соответствующие предельные значения.

Теорема Дирихле устанавливает условия сходимости тригонометрического ряда Фурье и связь между значением самой функции и суммой ее тригонометрического ряда Фурье. Сформулируем теорему Дирихле без доказательства. В формулировке теоремы используем выражения $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ для обозначения односторонних пределов функции $f(x)$ при условии, что x стремится к x_0 слева и справа соответственно.

Теорема Дирихле. Пусть функция $f(x)$ определена и кусочно-дифференцируема на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда тригонометрический ряд Фурье этой функции сходится в каждой точке отрезке $[-\pi, \pi]$, и сумма $S(x)$ этого ряда удовлетворяет следующим условиям:

1) $S(x_0) = f(x_0)$ во всех точках интервала $(-\pi, \pi)$, в которых $f(x)$ непрерывна,

2) $S(x_0) = \frac{1}{2}\big(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)\big)$ во всех точках разрыва функции,

3) $S(\pi) = S(-\pi) = \frac{1}{2}\big(f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)\big)$.

Замечание. Теорема остается справедливой в случае, когда функция $f(x)$ определена на всей числовой оси, является периодической с периодом 2π и на отрезке $[-\pi, \pi]$ кусочно-дифференцируема.

Точнее, в этом случае тригонометрический ряд Фурье этой функции сходится на всей числовой оси, и сумма $S(x)$ этого ряда удовлетворяет условиям:

1) $S(x_0) = f(x_0)$ во всех точках прямой $(-\infty, +\infty)$, в которых $f(x)$ непрерывна,

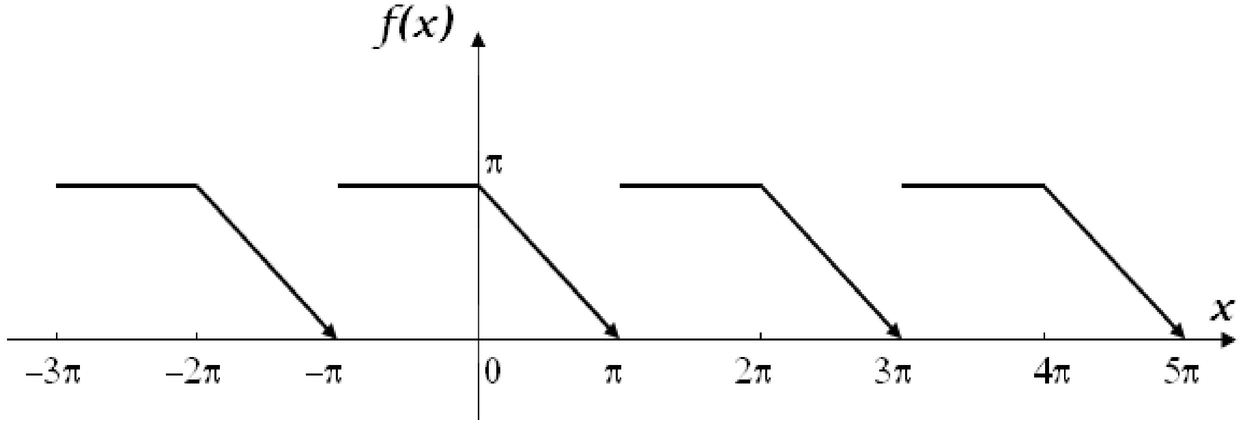
2) $S(x_0) = \frac{1}{2}\big(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)\big)$ во всех точках разрыва функции.

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ периода 2π, заданную на отрезке $[-\pi, \pi]$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} \pi, & -\pi \le x < 0 \\ \pi - x, & 0 \le x < \pi \end{cases}.$$

Обосновать сходимость ряда Фурье. Нарисовать график суммы ряда Фурье.

График функции $f(x)$ выглядит так:



Решение. Вычислим коэффициенты Фурье этой функции:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \pi dx + \int_{0}^{\pi} (\pi - x) dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(\pi^2 + \pi^2 - \frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{3}{2}\pi, \frac{a_0}{2} = \frac{3}{4}\pi.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \pi \cdot \cos nx dx + \int_{0}^{\pi} (\pi - x) \cdot \cos nx dx\right) = \begin{bmatrix} u = \pi - x & dv = \cos nx dx \\ du = -dx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(0 + \frac{\pi - x}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}\right) = -\frac{1}{\pi n^2}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, n = 2k \\ \frac{2}{\pi n^2}, n = 2k + 1 \end{cases}.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \pi \cdot \sin nx dx + \int_{0}^{\pi} (\pi - x) \cdot \sin nx dx\right) = \begin{bmatrix} u = \pi - x & dv = \sin nx dx \\ du = -dx & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{\pi - x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{\pi} + \frac{\pi}{n}(-1)^n + \frac{\pi}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n}.$$

Тригонометрический ряд Фурье $S(x)$, соответствующий данной функции, имеет вид:

$$f(x) \to \frac{3}{4}\pi + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right) - \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\right).$$

Поскольку данная функция непрерывна во всех внутренних точках отрезка $[-\pi, \pi]$, то согласно теореме Дирихле для всех $x \in (-\pi, \pi)$ имеет место равенство: $f(x) = S(x)$.

Например, полагая $x = 0$, получим:

$$\pi = \frac{3}{4}\pi + \frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right)$$

или

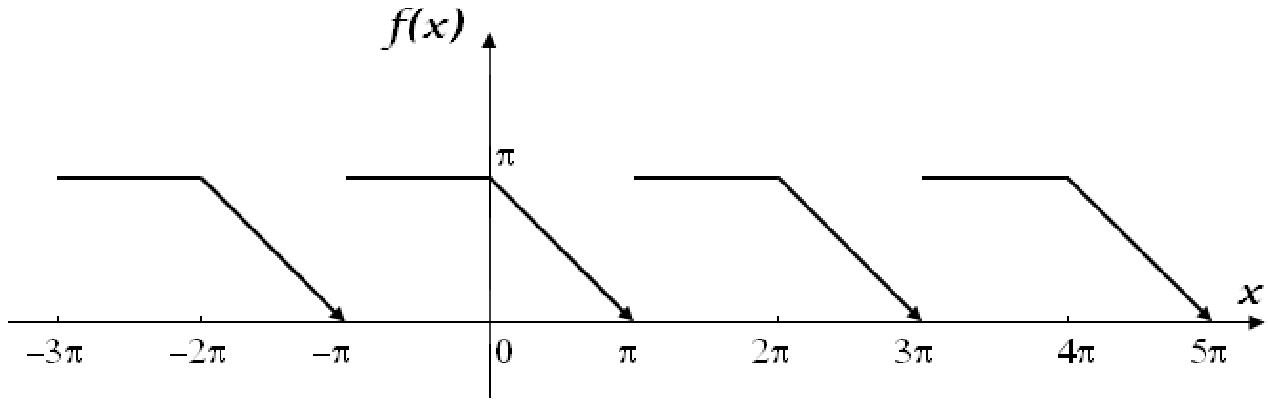
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

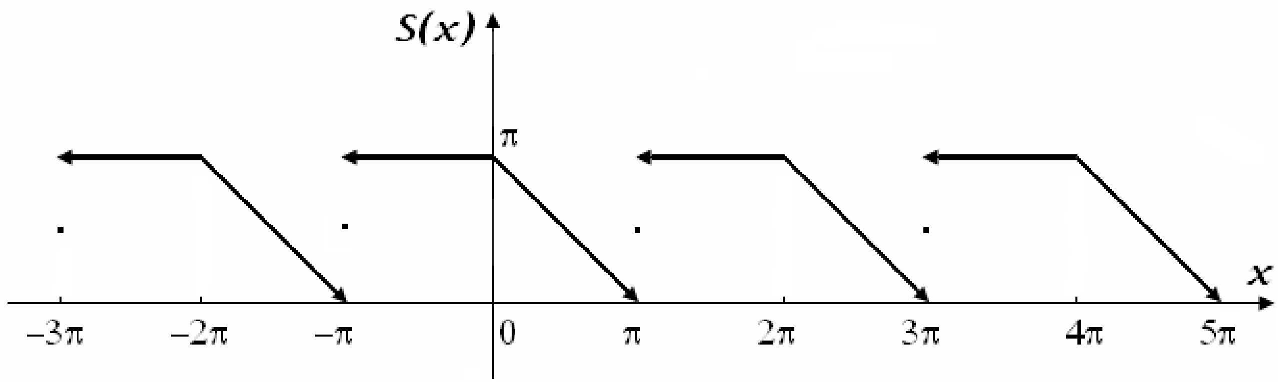
На концах отрезка $[-\pi, \pi]$ сумма ряда Фурье имеет следующее значение:

$$S(\pm\pi) = \frac{1}{2}\left(f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)\right) = \frac{1}{2}\pi.$$

На рисунке показаны графики функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье:

$$f(x) = \begin{cases} \pi, & -\pi \le x < 0 \\ \pi - x, & 0 \le x < \pi \end{cases}$$


f(x)
π
x
−3π
−2π
−π
0
π
2π
3π
4π
5π


S(x)
π
x
−3π
−2π
−π
0
π
2π
3π
4π
5π

7.3. Сходимость в среднем ряда Фурье

Пусть функция $f(x)$определена на отрезке $[a, b]$, и ставится задача о наилучшем приближении этой функции с помощью другой функции $g(x)$ из определенного класса функций, определенных на этом же отрезке. Если требуется обеспечить близость функций во всех точках отрезка, то в качестве критерия близости рассматривается величина, равная

$$max_{x\in[a,b]}|f(x) - g(x)|$$

и функция $g(x)$ выбирается так, чтобы эта величина принимала наименьшее возможное значение. В этом случае обеспечивается равномерная на всем отрезке близость функций. Если требуется обеспечить близость функций на отрезке в среднем, то в качестве критерия близости рассматривают величину, равную

$$\int_a^b (f(x) - g(x))^2\, dx.$$

Для достижения наилучшего приближения в среднем требуется минимизировать эту величину.

Пусть функция $f(x)$ кусочно-дифференцируема на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда согласно теореме Дирихле тригонометрический ряд Фурье этой функции во всех точках непрерывности сходится к этой функции. Можно показать, что величина

$$\delta_n = \int_a^b (f(x) - S_n(x))^2\, dx,$$

характеризующая отклонение в среднем частичной суммы $S_n(x)$ тригонометрического ряда Фурье от функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi,\pi]$, стремится к нулю при $n\to\infty$: $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n=0$.

Это означает, что тригонометрический ряд Фурье сходится в среднем на отрезке $[-\pi,\pi]$ к своей сумме.

Кэффициенты Фурье функции $f(x)$ удовлетворяют равенству:

$$\frac{{a_0}^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left({a_n}^2+{b_n}^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx,$$

которое называется *равенством Парсеваля* и является аналогом теоремы Пифагора в бесконечномерном пространстве функций, кусочно-дифференцируемых на отрезке $[-\pi,\pi]$.

Действительно, если считать, что квадрат “длины функции” в этом пространстве равен

$$\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx,$$

что основная тригонометрическая система функций является базисом этого пространства, а ряд Фурье – разложением функции по этому базису, то, согласно равенству Парсеваля, квадрат “длины функции” равен сумме квадратов ее координат.

В частном случае, когда функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi,\pi]$ и имеет кусочно-непрерывную производную на этом отрезке, то ее тригонометрический ряд Фурье сходится во всех точках этого отрезка к функции $f(x)$, причем равномерно.

Математический анализ-3 семестр
Лекция 8.
Тема 7. Тригонометрический ряд Фурье

7.4. Представление рядом Фурье функции произвольного периода

7.5. Ряд Фурье для четных и нечетных функций

7.6. Разложение функций, заданных на полупериоде, в ряд Фурье только по косинусам или только по синусам

7.4. Представление рядом Фурье функции произвольного периода

Пусть функция $f(x)$ определена и кусочно-дифференцируема на отрезке $[-l, l]$

или $f(x)$ определена на всей числовой оси, периодична с периодом $2l$ и кусочно-дифференцируема на отрезке $[-l, l]$. Сделав замену переменной

$$x = t\frac{l}{\pi}, \quad t = x\frac{\pi}{l},$$

получим: $f(x) = f\left(t\frac{l}{\pi}\right) = g(t)$.

Если функция $f(x)$ была определена на отрезке $[-l, l]$, то функция $g(t)$ определена на отрезке $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет на этом отрезке условиям теоремы Дирихле.

Раскладывая в ряд Фурье функцию $g(t)$

$$g(t) \to \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos nt + b_n \cdot \sin nt)$$

и возвращаясь к исходной функции, получим для нее следующее представление рядом Фурье:

$$f(x) \to \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \cdot \sin\frac{\pi n x}{l}\right), (4)$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx, n = 1,2,3, \dots, (5)$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx, n = 1,2,3, \dots$$

Теорема Дирихле остается в силе с той лишь разницей, что в случае произвольного отрезка $[-l, l]$ точки $x = \pm\pi$ заменяются на точки $x = \pm l$:

$S(l) = S(-l) = \frac{1}{2}\big(f(-l+0) + f(l-0)\big)$.

Равенство Парсеваля принимает вид:

$$\frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left({a_n}^2 + {b_n}^2\right) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)dx.$$

7.5. Ряд Фурье для четных и нечетных функций

Если кусочно-непрерывная функция $f(x)$, определенная на отрезке $[-l, l]$, является *четной*, то

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{-l}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{l} f(x)dx = 2\int_{0}^{l} f(x)dx.$$

Действительно, сделав замену $t = -x$, вычислим

$$\int_{-l}^{0} f(x)dx = -\int_{l}^{0} f(-t)dt = \int_{0}^{l} f(t)dt = \int_{0}^{l} f(x)dx$$

Аналогично устанавливается, что в случае *нечетной* функции $f(x)$:

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{-l}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{l} f(x)dx = -\int_{l}^{0} f(-t)dt + \int_{0}^{l} f(x)dx = -\int_{0}^{l} f(t)dt + \int_{0}^{l} f(x)dx = 0.$$

Предположим теперь, что кусочно-дифференцируемая функция $f(x)$, определенная на отрезке $[-l, l]$, является *четной*.

Тогда

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)dx.$$

Вычислим остальные коэффициенты Фурье четной функции.

Произведение $f(x)cos\frac{\pi nx}{l}$ также является четной функцией.

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)cos\frac{\pi nx}{l}dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)cos\frac{\pi nx}{l}dx, (n = 1,2,3, \dots)$$

Произведение $f(x)sin\frac{\pi nx}{l}$ является нечетной функцией.

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)sin\frac{\pi nx}{l}dx = 0, (n = 1,2,3, \dots).$$

Таким образом, тригонометрический ряд Фурье *четной* функции содержит только косинусы:

$$f(x) \to \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l}\text{ , где}$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)cos\frac{\pi n x}{l}dx, (n = 1,2,3, \dots)$$

$$b_n = 0, (n = 1,2,3, \dots).$$

Равенство Парсеваля приобретает вид:

$$\frac{2}{l}\int_0^l f^2(x)dx = \frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2.$$

Если функция $f(x)$ является *нечетной*, то произведение $f(x)cos\frac{\pi n x}{l}$ также является нечетной функцией, а произведение $f(x)sin\frac{\pi n x}{l}$ - четной. Вычислим коэффициенты Фурье нечетной функции:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^l f(x)cos\frac{\pi n x}{l}dx = 0, (n = 0,1,2,3, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^l f(x)sin\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)sin\frac{\pi n x}{l}dx, (n = 1,2,3, \dots$$

Тригонометрический ряд Фурье *нечетной* функции содержит только синусы:

$$f(x) \to \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l}$$

а равенство Парсеваля приобретает вид:

$$\frac{2}{l}\int_0^l f^2(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} {b_n}^2.$$

7.6. Разложение функций, заданных на полупериоде, в ряд Фурье только по косинусам или только по синусам

Пусть функция $f(x)$ определена и кусочно-дифференцируема на отрезке $[0, l]$. Желая получить разложение этой функции в ряд Фурье, доопределим ее на промежутке $[-l, 0)$ произвольным образом, сохраняя лишь требование кусочной дифференцируемости. Это дает возможность получать различные разложения одной и той же функции в тригонометрические ряды Фурье на отрезке $[0, l]$.

Если, определяя функцию на промежутке $[-l, 0)$, будем полагать, что $f(-x) = f(x)$ для всех $x \in [-l, 0)$, то получим *четную* функцию, тригонометрический ряд Фурье которой будет содержать только косинусы.

Если, определяя функцию на промежутке $[-l, 0)$, будем полагать, что $f(-x) = -f(x)$ для всех $x \in [-l, 0)$, то получим *нечетную* функцию, тригонометрический ряд Фурье которой будет содержать только синусы.

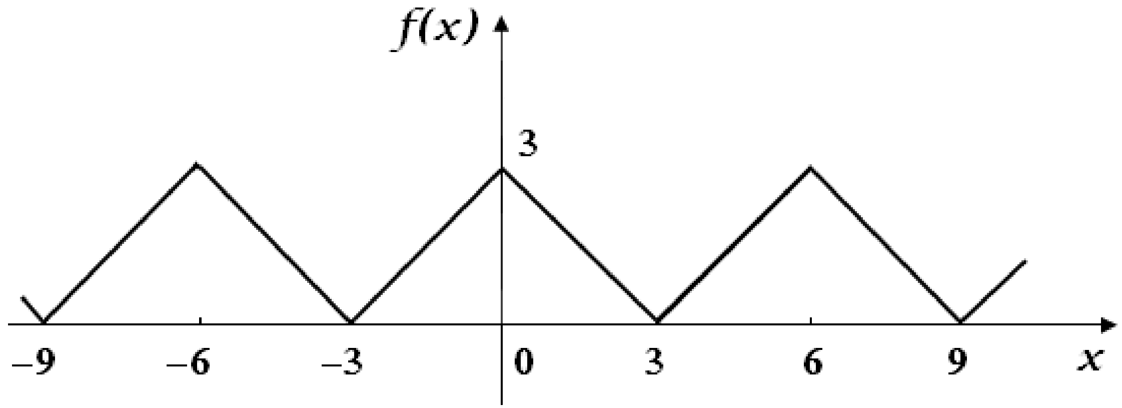
Пример 2. Разложить функцию $f(x) = 3 - x$, заданную на отрезке $[0,3]$, в тригонометрический ряд Фурье по косинусам и в тригонометрический ряд Фурье по синусам. Обосновать сходимость каждого ряда Фурье. Нарисовать графики суммы для каждого ряда Фурье.

Решение.

1). Разложение по косинусам.

Доопределим функцию $f(x) = 3 - x$ на промежутке $[-3,0)$ четным образом и продолжим ее на всю числовую ось как периодическую с периодом, равным 6:

$f(x) = f(-x) = 3 - (-x) = 3 + x,\ x \in [-3,0)$.



Вычислим коэффициенты Фурье этой четной функции:

$b_n = 0, (n = 1,2,3, \dots)$

$$a_0 = \frac{2}{3}\int_0^3 (3-x)dx = \frac{2}{3}\left(3x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 = 3, \frac{a_0}{2} = \frac{3}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{3}\int_0^3 (3-x)\cos\frac{\pi n x}{3}dx = \begin{bmatrix} u = 3-x & dv = \cos\frac{\pi n x}{3}dx \\ du = -dx & v = \frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{3} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2}{3}\left((3-x)\cdot\frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{3}\Bigg|_0^3 + \frac{3}{\pi n}\int_0^3 \sin\frac{\pi n x}{3}dx\right) = \frac{2}{\pi n}\left(-\frac{3}{\pi n}\right)\cos\frac{\pi n x}{3}\Bigg|_0^3 = -\frac{6}{\pi^2 n^2}(\cos\pi n - 1) =$$

$$= \frac{6}{\pi^2 n^2}(1-(-1)^n) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{12}{\pi^2(2k+1)^2}, & n = 2k+1 \end{cases}.$$

Так как рассматриваемая функция является непрерывной всюду, то сумма ее тригонометрического ряда Фурье равна данной функции при всех x:

$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{12}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{\pi(2k+1)}{3}x$$

Полученное разложение можно использовать для нахождения суммы ряда:

полагая в этом равенстве $x = 0$, получим:

$$3 = \frac{3}{2} + \frac{12}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

или

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Выпишем для этого разложения равенство Парсеваля.

$$\frac{2}{3}\int_0^3 (3-x)^2 dx = \frac{9}{2} + \frac{144}{\pi^4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$$

Вычислим интеграл в левой части:

$$\frac{2}{3}\int_0^3 (3-x)^2 dx = \frac{2}{3}\cdot\left.\frac{(x-3)^3}{3}\right|_0^3 = \frac{2}{9}\cdot 27 = 6$$

Равенство Парсеваля принимает вид:

$$6 = \frac{9}{2} + \frac{144}{\pi^4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$$

откуда

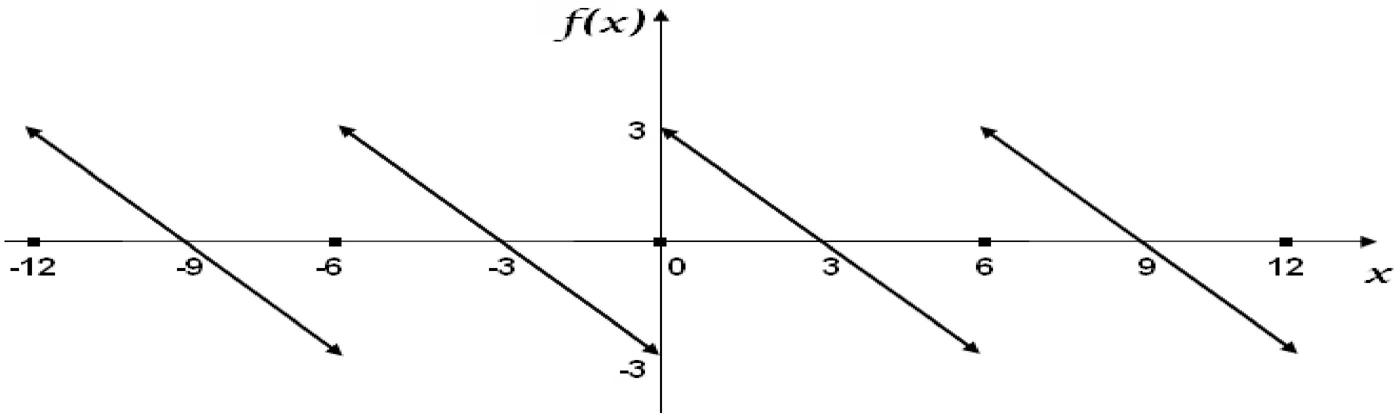
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Итак, с помощью разложений функций в тригонометрические ряды Фурье можно получать значения сумм некоторых числовых рядов.

2). Разложение по синусам.

Доопределим функцию $f(x) = 3 - x$ на промежутке $[-3,0)$ нечетным образом, изменим значение функции при $x = 0$, полагая $f(0) = 0$ и продолжим ее на всю числовую ось как периодическую с периодом, равным 6:

$f(x) = -f(-x) = -\big(3 - (-x)\big) = -3 - x,\ x \in [-3,0).$



Согласно теореме Дирихле сумма тригонометрического ряда Фурье такой функции будет равна функции при всех x. Вычислим коэффициенты Фурье этой функции:

$a_n = 0, \qquad (n = 0,1,2,3, \dots)$

$$b_n = \frac{2}{3}\int_0^3 (3-x)\sin\frac{\pi n x}{3}dx = \begin{bmatrix} u = 3-x & dv = \sin\frac{\pi n x}{3}dx \\ du = -dx & v = -\frac{3}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{3} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2}{3}\left((3-x)\cdot\left(-\frac{3}{\pi n}\right)\cos\frac{\pi n x}{3}\Big|_0^3 - \frac{3}{\pi n}\int_0^3 \cos\frac{\pi n x}{3}dx\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{9}{\pi n} - \frac{9}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n x}{3}\Big|_0^3\right) = \frac{6}{\pi n}.$$

$b_n = \dfrac{6}{\pi n} \quad (n = 1,2,3, \dots)$

$$f(x) = \frac{6}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n x}{3}$$

Полагая в этой формуле $x = \frac{3}{2}$, получим:

$$\frac{3}{2} = \frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{2}$$

Учитывая, что $\sin\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0, n = 2k \\ (-1)^k, n = 2k+1 \end{cases}$, перепишем полученный результат в виде:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1}(-1)^k$$

Выписывая равенство Парсеваля для данного разложения, получим значение суммы еще одного числового ряда:

$$\frac{2}{3}\int_0^3 (3-x)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6}{\pi n}\right)^2$$

$$6 = \frac{36}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \text{откуда}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Математический анализ-3 семестр

Часть II. Теория функции комплексного переменного

Лекция 9

Тема 1. Комплексные числа и действия над ними

1.1. Алгебраическая форма комплексного числа

1.2. Геометрическое представление комплексного числа

1.3. Действия над комплексными числами

1.4. Тригонометрическая форма комплексного числа

1.5. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.

1.6. Показательная форма записи комплексного числа

1.7. Изображение множеств на комплексной плоскости

1.1. Алгебраическая форма комплексного числа

Определение 1. Комплексным числом называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y – действительные числа, i – мнимая единица, определяемая условием $i^2 = -1$.

Числа x и y называются соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа z и обозначаются

$x = \mathrm{Re} z,\ y = \mathrm{Im} z.$

Такое представление комплексного числа z называется *алгебраической формой* комплексного числа.

Комплексное число $\overline{z} = x - iy$ называется *сопряженным* комплексному числу $z = x + iy$.

<u>*Пример 1.*</u> 1) $z = 2 + i,\quad \bar{z} = 2 - i,$

2) $z = -5 - 3i,\ \bar{z} = -5 + 3i$

Комплексные числа $\boldsymbol{z_1 = x_1 + iy_1}$ *и* $\boldsymbol{z_2 = x_2 + iy_2}$ считаются равными тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{x_1 = x_2,\ y_1 = y_2}$.

<u>*Пример 2.*</u>

Решить уравнение $(5 - i)x + (3 + 2i)y = 1 + 5i.$

Выделим в левой части уравнения действительную и мнимую части:

$(5x + 3y) + (-x + 2y)i = 1 + 5i.$

Из определения равенства двух комплексных чисел получаем

$$\begin{cases} 5x + 3y = 1 \\ -x + 2y = 5. \end{cases}$$

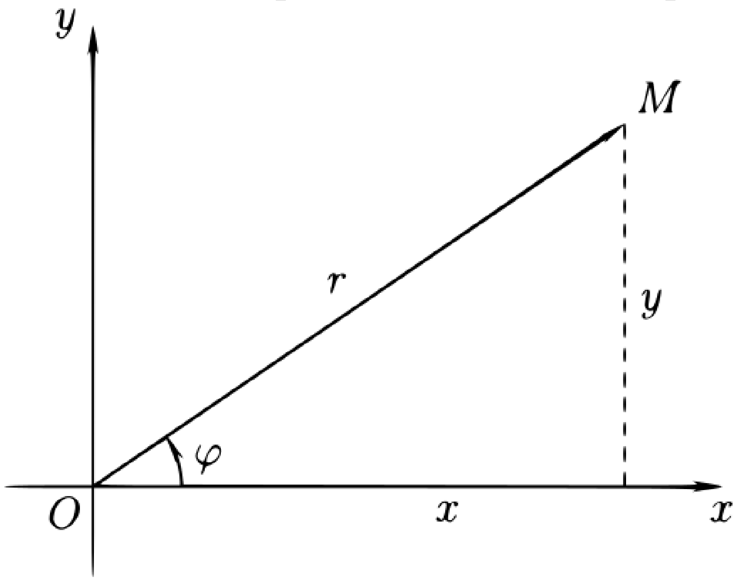
Решая эту систему, находим $x = -1,\ y = 2.$

1.2. Геометрическое представление комплексного числа

Комплексное число $z = x + iy$ изображается на плоскости xOy точкой M с координатами (x, y), либо вектором $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$, начало которого находится в точке $O(0,0)$, а конец в точке $M(x, y)$ ($\vec{r}$ – радиус-вектор из начала координат).

И наоборот, каждой точке $M(x, y)$ соответствует одно комплексное число $z = x + iy$.

Сопряженные числа на комплексной плоскости расположены симметрично относительно оси OX.



Если $y = 0$, то $z = x + i \cdot 0 = x$, то есть получаем обычное вещественное, расположенное на оси OX, число.

Если $x = 0$, то $z = iy$. Такие числа называются чисто мнимыми. Они изображаются точками на оси OY.

Определение 2. Длина вектора $(\overrightarrow{\boldsymbol{OM}})$ называется *модулем* комплексного числа и обозначается $|\boldsymbol{z}| = \boldsymbol{r} = \sqrt{\boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{y^2}}$.

Определение 3. Угол $\varphi,$ образованный вектором $\overrightarrow{OM}$ с положительным направлением оси $OX,$ называется *аргументом* комплексного числа z и обозначается $\varphi = Argz$; определяется с точностью до слагаемого $2\pi k(k = 0, \pm 1, \dots)$:

$$Argz = argz + 2\pi k, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

где $argz$ есть *главное значение* $Argz,$ определяемое условиями $-\pi < atgz \leq \pi$.

В зависимости от положения точки на комплексной плоскости,

$$argz == \left[\begin{array}{ll} arctg\dfrac{y}{x}, & \text{если z в I , IV четверти,} \\ \pi - arctg\left|\dfrac{y}{x}\right|, & \text{если z во II четверти,} \\ -\pi + arctg\left|\dfrac{y}{x}\right|, & \text{если z в III четверти,} \\ 0, & \text{если x>0, y=0,} \\ \pi, & \text{если x<0, y=0,} \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если x=0, y>0,} \\ \dfrac{-\pi}{2}, & \text{если x=0, y<0.} \end{array}\right.$$

Примеры.

Найти модуль и аргумент комплексного числа.

1) $z = 1 + i$.

$|z| = r = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Для нахождения аргумента определим положение числа на комплексной плоскости: $z = 1 + i$ лежит в I четверти.

$argz = arctg\frac{y}{x} = arctg1 = \frac{\pi}{4}$.

$z = -2 + 2\sqrt{3}i$, II четверть

$|z| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4,$

$argz = \pi - arctg\left|\frac{2\sqrt{3}}{-2}\right| = \pi - arctg\sqrt{3} = \frac{2\pi}{3}$

2) $z = -\sqrt{3} - i$, III четверть

$|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2,$

$argz = -\pi + arctg\left|\frac{-1}{-\sqrt{3}}\right| = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$

3) $z = 1 - i$, IV четверть

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$
$$argz = -arctg\left|\frac{-1}{-1}\right| = -\frac{\pi}{4}$$

4) $z = 2$ $\quad |z| = 2,$ $\quad argz = 0$

5) $z = 3i$ $\quad |z| = 3,$ $\quad argz = \frac{\pi}{2}$

6) $z = -5$ $\quad |z| = 5,$ $\quad argz = \pi$

7) $z = -2i$ $\quad |z| = 2,$ $\quad argz = -\frac{\pi}{2}$

1.3. Действия над комплексными числами (сложение, вычитание, умножение и деление)

Пусть даны два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$.

Определение 4. Суммой $\boldsymbol{z_1 + z_2}$ комплексных чисел $\boldsymbol{z_1}$ и $\boldsymbol{z_2}$ называется комплексное число
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Определение 5. Разностью $\boldsymbol{z_1 - z_2}$ комплексных чисел $\boldsymbol{z_1}$ и $\boldsymbol{z_2}$ называется комплексное число
$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Определение 6. Произведением $\boldsymbol{z_1 z_2}$ комплексных чисел $\boldsymbol{z_1}$ и $\boldsymbol{z_2}$ называется комплексное число

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Определение 7. Частным $\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2}}$ от деления комплексного числа $\boldsymbol{z_1}$ на комплексное число $\boldsymbol{z_2 \neq 0}$ называется такое комплексное число $\boldsymbol{z}$, которое удовлетворяет уравнению $\boldsymbol{z z_2 = z_1}$.

Для частного имеет место формула

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Примеры. $z_1 = 5 - i, z_2 = -1 - 2i$

1) $z_1 + z_2 = 4 - 3i$

2) $z_1 - z_2 = 6 + i$

3) $z_1 z_2 = (5 - i)(-1 - 2i) = -5 + i - 10i + 2i^2 = -7 - 9i$

4) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(5-i)(-1+2i)}{(-1-2i)(-1+2i)} = \frac{-5+i+10i+2}{1+4} = -\frac{3}{5} + \frac{11}{5} i$

5) Вычислить i^{27}.

Так как

$i^1 = i,\quad i^2 = -1,\quad i^3 = -i,\quad i^4 = 1,\quad i^5 = i,$

$i^6 = -1,\quad i^7 = -i,\quad i^8 = 1,\quad$ и т. д., то $i^{27} = (i^4)^6 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$.

1.4. Тригонометрическая форма комплексного числа

Любое комплексное число $z = x + iy$ $(z \neq 0)$ можно записать в тригонометрической форме

$$z = |z| \cdot \left(\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|}\right) = r(cos\varphi + isin\varphi),$$

где $r = |z|, \varphi = argz$.

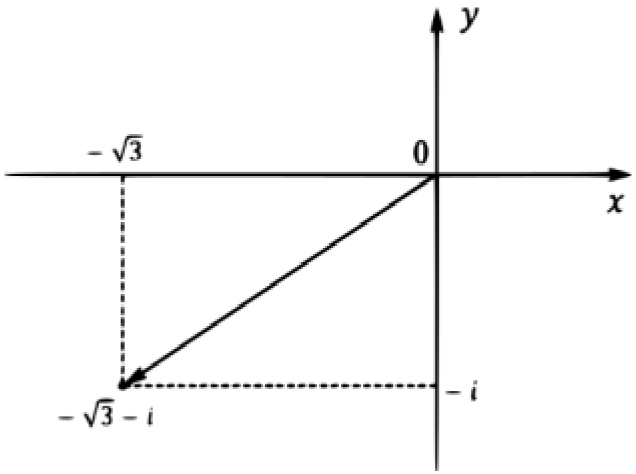
Пример. Записать число в тригонометрической форме:

$$z = -\sqrt{3} - i.$$

$$|z| = r = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2.$$

Для нахождения аргумента определим положение z на комплексной плоскости: z лежит в III четверти, тогда

$$argz = -\pi + arctg\frac{1}{\sqrt{3}} = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}.$$



Подставляя значения модуля и аргумента в формулу, получим

$$z = -\sqrt{3} - i = 2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right].$$

1.5. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.

Пусть комплексные числа z_1 и z_2 даны в тригонометрической форме $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

1. Произведение $z_1 z_2$ комплексных чисел z_1 и z_2 находится по формуле

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

т.е. при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \qquad argz(z_1 z_2) = argz_1 + argz_2.$$

2. Частное двух комплексных чисел z_1 и $z_2 \neq 0$ находится по формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isin(\varphi_1 - \varphi_2)],$$

т.е. при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, arg\,\frac{z_1}{z_2} = argz_1 - argz_2.$$

3. Возведение комплексного числа $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$ в натуральную степень n производится по формуле

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + isin(n\varphi)),$$

т. е. $|z^n| = |z|^n, \quad arg(z^n) = n \cdot argz$

Формула Муавра:

$$(cos\varphi + isin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + isin(n\varphi).$$

4. Корень n-й степени из комплексного числа $z \neq 0$ имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + isin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

где $\varphi = argz, k = 0,1,2,\ldots,n-1$.

<u>Пример.</u> Вычислить $(2-2i)^{10}$.

Решение: представим число $z = 2 - 2i$ в тригонометрической форме:

$2 - 2i = 2\sqrt{2}\left[cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

$(2-2i)^{10} = \left(2\sqrt{2}\right)^{10}\left[cos\left(-\frac{10\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{10\pi}{4}\right)\right] =$

$= 2^{15}\left[cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) - isin\left(\frac{5\pi}{2}\right)\right] = -2^{15}\cdot i$.

<u>Пример.</u> Вычислить $\sqrt[4]{-16}$.

Решение: представим число -16 в тригонометрической форме. Число лежит на действительной оси:

$x < 0, y = 0$.

$|-16| = \sqrt{(-16)^2 + 0^2} = 16, \varphi = \pi$.

$\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16}\left(cos\frac{\pi+2\pi k}{4} + isin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right) =$

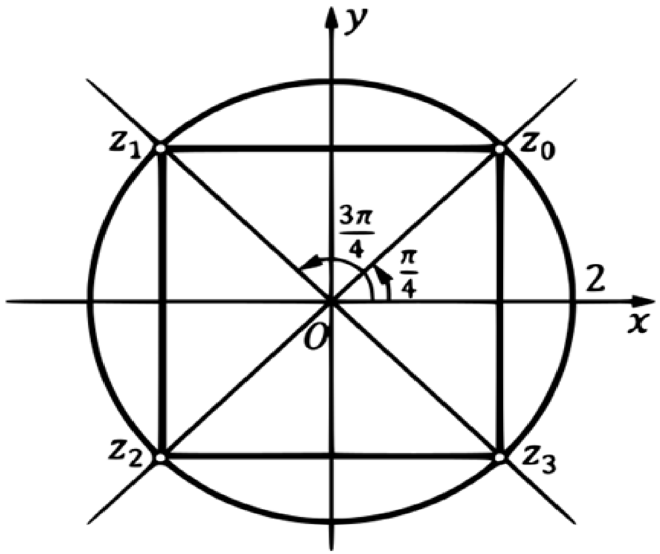
$= 2\left(cos\frac{\pi+2\pi k}{4} + isin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right), k = 0,1,2,3.$

Полагая последовательно $k = 0,1,2,3$, выпишем все корни

$k = 0: z_0 = 2\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)$, $k = 1: z_1 = 2\left(cos\frac{3\pi}{4} + isin\frac{3\pi}{4}\right)$, $k = 2: z_2 = 2\left(cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4}\right)$,

$k = 3: z_3 = 2\left(cos\frac{7\pi}{4} + isin\frac{7\pi}{4}\right)$.

На плоскости корни располагаются на окружности радиуса 2 в вершинах правильного четырехугольника, вписанного в окружность радиуса $R = 2$ с центром в начале координат:



5) Решить уравнение $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$. Корни уравнения изобразить на комплексной плоскости.

Обозначим $t = z^2$. Тогда уравнение примет вид $t^2 - 2t + 4 = 0$.

Корни этого уравнения

$$t_1 = 1 + \sqrt{3}i, \qquad t_2 = 1 - \sqrt{3}t,$$

откуда $z_{1,2} = \sqrt{t_1}$, $z_{3,4} = \sqrt{t_2}$.

Пусть $z = \sqrt{1 + \sqrt{3}i}$.

Представим в тригонометрической форме:

$$1 + \sqrt{3}i = 2\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right).$$

Число $1 + \sqrt{3}i$ находится в I четверти, найдем модуль и аргумент:

$$\left|1 + \sqrt{3}i\right| = \sqrt{1 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2, \qquad arg\left(1 + \sqrt{3}i\right) = \frac{\pi}{3}.$$

$$z_{1,2} = \sqrt{1 + \sqrt{3}i} = \sqrt{2}\left(cos\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{2} + isin\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{2}\right), k = 0,1,$$

т.е.

$$z_1 = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}\right), k = 0,$$

$$z_2 = \sqrt{2}\left(cos\frac{7\pi}{6} + isin\frac{7\pi}{6}\right), k = 1.$$

Пусть $z = \sqrt{1 - \sqrt{3}i}$.
Представим в тригонометрической форме:

$1 - \sqrt{3}i$.

Число $1 - \sqrt{3}i$ находится в IV четверти, найдем модуль и аргумент:

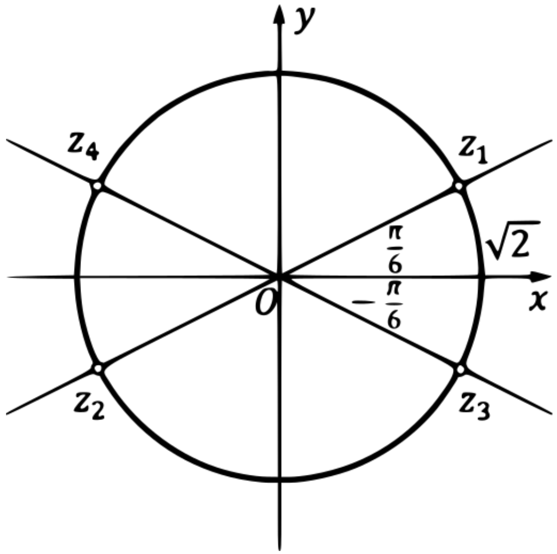
$|1 - \sqrt{3}i| = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2, \quad arg(1 - \sqrt{3}i) = -\frac{\pi}{3}$

т. е. $1 - \sqrt{3}i = 2\left(cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

$$z_{3,4} = \sqrt{2}\left(cos\frac{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{2} + isin\frac{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{2}\right), k = 0,1.$$

$$z_3 = \sqrt{2}\left(cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right), k = 0,$$

$$z_4 = \sqrt{2}\left(cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right), k = 1.$$



Все корни находятся на окружности радиуса $R = \sqrt{2}$.

1.6. Показательная форма записи комплексного числа

Используя формулу Эйлера $e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi$,

перепишем тригонометрическую форму записи комплексного числа в виде

$$z = r(cos\varphi + isin\varphi) = re^{i\varphi},$$

где $r = |z|$, $\varphi = argz$.

Отметим, что $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$.

Пример. Записать комплексное число $z = -3 - 3i$ в тригонометрической и показательной форме.

Число находится в III четверти. Найдем модуль и аргумент:

$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2},$$

$$argz = -\pi + arctg\left|\frac{y}{x}\right| = -\pi + arctg\left(\frac{-3}{-3}\right) = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}.$$

Тригонометрическая форма записи z

$$z = 3\sqrt{2}\left(cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right),$$

Показательная форма записи $z = 3\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$.

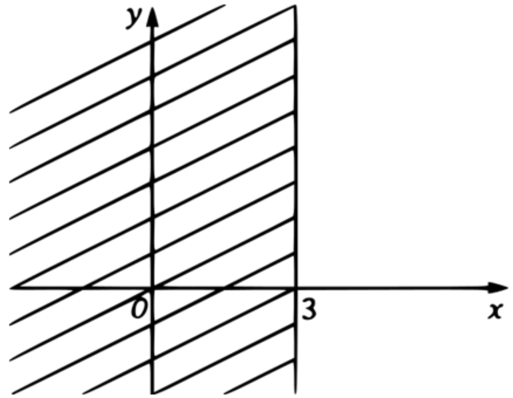
1.7. Изображение множеств на комплексной плоскости

Изобразить на комплексной плоскости линии и области, заданные уравнениями и неравенствами.

Пример 1.

$\operatorname{Re} z \leq 3.$

Т.к. $\operatorname{Re} z = x$, то неравенство можно переписать так: $x \leq 3$. На плоскости xOy это определяет полуплоскость левее прямой $x = 3$.

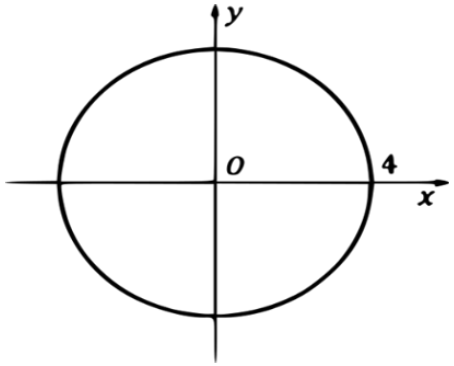


Пример 2.

$|z| = 4$

По определению, $|z|$ – это расстояние от начала координат до точки z, т.е. $|z| = 4$ – это геометрическое множество точек, равноудаленных от начала координат. Таким геометрическим местом является окружность с центром в начале координат радиуса $R = 4$.

Также можно вывести уравнение кривой алгебраическим способом. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, т. е. уравнение переписывается в виде $\sqrt{x^2 + y^2} = 4$, или $x^2 + y^2 = 4^2$ – это и есть уравнение окружности с центром в точке O и $R = 4$).

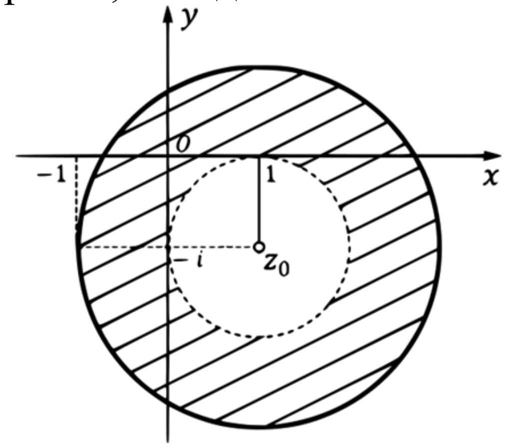


Пример 3.

$1 < |z - 1 + i| \leq 2.$

$|z - 1 + i| = |z - (1 - i)| \leq 2$

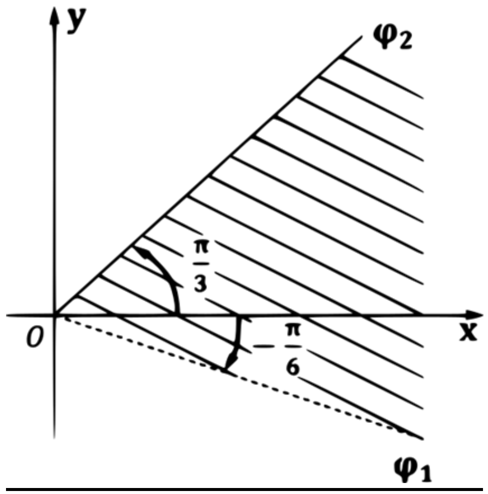
Это множество точек z, расстояние которых от точки $1 - i$ не больше 2, то есть круг с центром в $1 - i$ радиуса 2. Множество точек z таких, что $1 \leq |z - (1 - i)|$, представляет собой внешность круга радиуса 1 с центром в точке $1 - i$. Таким образом, исходное множество – кольцо с центром в точке $1 - i$.



Пример 4.

$-\frac{\pi}{6} < argz \le \frac{\pi}{3}$.

Множество точек, удовлетворяющих двойному неравенству, совпадает с точками угла с вершиной в начале координат, заключенного между лучами $\varphi_1 = -\frac{\pi}{6}$ и $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$. Луч $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$ входит в данное множество, а луч $\varphi_1 = -\frac{\pi}{6}$ не входит.



Математический анализ-3 семестр

Лекция 10

Тема 2. Функции комплексного переменного

2.1. Определение функции комплексного переменного

2.2. Элементарные функции комплексного переменного

2.3. Предел и непрерывность функции комплексного переменного

2.1. Определение функции комплексного переменного

Определение 1. $\boldsymbol{\delta}$-*окрестностью* точки $\boldsymbol{z_0}$ называется множество точек $\boldsymbol{z}$**,** лежащих внутри круга радиуса $\boldsymbol{\delta}$ с центром в точке $\boldsymbol{z_0}$**,** т. е. множество точек, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \delta$.

Определение 2. *Областью* комплексной плоскости называется множество точек $\boldsymbol{D}$**,** обладающее следующими свойствами:

1) вместе с каждой точкой из D этому множеству принадлежит и некоторая окрестность этой точки, то есть некоторый круг без границы с центром в этой точке (свойство открытости);

2) две любых точки из D можно соединить ломаной, состоящей из точек D (свойство связности).

Определение 3. Область называется *односвязной*, если любую замкнутую кривую, лежащую в этой области, можно стянуть в точку, не выходя за пределы этой области.

Определение 4. *Граничной точкой* области ***D*** называют такую точку, которая сама не принадлежит ***D,*** но в любой окрестности которой лежат точки этой области.

Определение 5. Совокупность граничных точек области ***D*** называют *границей* этой области.

Определение 6. Область ***D*** с присоединенной к ней границей называется замкнутой областью и обозначается $\overline{\boldsymbol{D}}$.

Определение 7. Замкнутая кривая на комплексной плоскости, не имеющая самопересечений, называется *замкнутым контуром*.

Замечание. Границей области может быть замкнутый контур, не замкнутая кривая или дискретное множество точек, например, $D\colon |z| \neq 0$, граница – точка $z = 0$.

Определение 8. Говорят, что в области ***D*** определена функция $\boldsymbol{\omega = f(z)}$**,** если каждой точке $\boldsymbol{z \in D}$ поставлено в соответствие одно (однозначная функция) или целое множество (многозначная функция) значений $\boldsymbol{\omega}$.

Примеры.

1) $\omega = |z|$ – однозначная функция,

2) $\omega = \sqrt[n]{z}$ – n-значная функция, т.к. имеет n корней,

3) $\omega = Argz$ – бесконечнозначная функция, т.к. слагаемое $2\pi k$, входящее в $Argz$, принимает бесконечное число значений при $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Геометрически задание функции $\omega = f(z)$ означает задание отображения точек комплексной плоскости z на соответствующие точки комплексной плоскости ω.

Пусть $z = x + iy$ и $\omega = f(z)$, тогда $\omega = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$,

где $u(x, y) = \mathrm{Re} f(z)$ – действительная часть функции, $v(x, y) = \mathrm{Im} f(z)$ – мнимая часть функции.

Пример.

Найти действительную и мнимую части функции $\omega = z^2 + 2\overline{z}$.

Положим $z = x + iy$,

тогда $\omega = (x + iy)^2 + 2(x - iy) = x^2 + 2xyi - y^2 + 2x - 2iy = (x^2 - y^2 + 2x) + i(2xy - 2y)$.

$u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$ – действительная часть функции,

$v(x, y) = 2xy - 2y$ – мнимая часть функции.

2.2. Элементарные функции комплексного переменного

Основные элементарные функции комплексного переменного определяются следующими формулами ($z = x + iy$)

1. *Дробно-рациональная функция*

$$\omega = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + a_m}.$$

В частности, рациональной функцией является многочлен

$$\omega = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n.$$

2. *Показательная функция e^z* определяется равенством

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(cosy + isiny).$$

В частности, при $z \in R$ ($y = 0$) функция e^z совпадает с обычной экспонентой, а при $x = 0$ получаем формулу Эйлера: $e^{iy} = cosy + isiny$.

Свойства показательной функции:

а) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$, где z_1, z_2 – комплексные числа,
в) $e^{z+2\pi ki} = e^z (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$, т.е. e^z – периодическая функция с периодом $2\pi i$.
$e^{z+2\pi ki} = e^{x+iy+2\pi ki} =$
$= e^x\big(\cos(y + 2\pi k) + isin(y + 2\pi k)\big) = e^z$

3. *Тригонометрические функции*

Из формулы Эйлера $\begin{cases} e^{ix} = cosx + isinx \\ e^{-ix} = cosx - isinx \end{cases}$ следует, что $\forall x \in R\ cosx = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, sinx = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$.

По аналогии с этими равенствами введем функции комплексного переменного $cosz$ и $sinz$ $\forall z \in C$:

$$cosz = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\ sinz = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$$

Функции $sinz$ и $cosz$ – периодические функции с периодом $T = 2\pi$. Справедливо основное тригонометрическое тождество: $cos^2z + sin^2z = 1$.

Уравнение $sinz = 0$ имеет решение $z = k\pi$,

$cosz = 0$ имеет решение $z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k = 0, \pm1, \pm2, \dots$

Функции tgz и $ctgz$ определяются равенствами $tgz = \frac{sinz}{cosz}, ctgz = \frac{cosz}{sinz}$. Для тригонометрических функций комплексного переменного остаются в силе все формулы тригонометрии.

4. *Гиперболические функции*.

Гиперболические функции shz, chz, thz, $cthz$ определяются равенствами

$$shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

$$thz = \frac{shz}{chz}, cthz = \frac{chz}{shz}.$$

Основное гиперболическое тождество $ch^2 z - sh^2 z = 1$.

5. *Связь между тригонометрическими и гиперболическими функци*ями

$$sinz = -ishiz, \quad cosz = chiz, \quad tgz = -ithiz,$$

$$ctgz = icthiz, \quad shz = -isiniz, \quad chz = cosiz,$$
$$thz = -itgiz, \quad cthz = ictgiz.$$

Отсюда получим формулы для вынесения i из аргумента:

$$\cos(iz) = chz, \sin(iz) = ishz$$

6. *Логарифмическая функция $Ln\ z$*, где $z \neq 0$, определяется как функция, обратная показательной, причем $\mathrm{Ln}\, z = ln|z| + iArgz = ln|z| + i(argz + 2\pi k)$,

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Функция $\omega = \mathrm{Ln}\, z$ является многозначной.

Определение 9. Главным значением $\operatorname{Ln} \boldsymbol{z}$ называется значение, получаемое при $\boldsymbol{k=0}$: $\boldsymbol{lnz = ln|z| + iargz.}$

Тогда: $\operatorname{Ln} z = ln|z| + i(argz + 2\pi k) = lnz + 2\pi ki$

<u>Свойства $\omega = Ln\, z$:</u>

$$\text{a) } \operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\text{b) } \operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2.$$

7. *Общая показательная функция* определяется равенством

$$a^z = e^{z\operatorname{Ln} a},$$

где a – любое комплексное число, $a \neq 0$.

8. *Общая степенная функция* $w = z^a$, где a – любое комплексное число, $z \neq 0$ $\quad z^a = e^{a\operatorname{Lnz}}$.

<u>*Примеры*</u> вычисления значений функции:

1) Вычислить $\operatorname{Ln}(-1)$.

$\operatorname{Ln}(-1) = ln|-1| + i(arg(-1) + 2\pi k) = i(\pi + 2\pi k) =$

$= (2k+1)\pi i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

2) Вычислить $sin(3-i)$.

$$sin(3-i) = \frac{1}{2i}\left[e^{i(3-i)} - e^{-i(3-i)}\right] = -\frac{i}{2}\left[e^{1+3i} - e^{-1-3i}\right] =$$

$$= -\frac{i}{2}\left[e(cos3 + isin3) - e^{-1}(cos3 - isin3)\right] =$$

$$= -i\left[cos3\left(\frac{e-e^{-1}}{2}\right) + isin3\left(\frac{e+e^{-1}}{2}\right)\right] =$$

$$= sin3ch1 - icos3sh1.$$

Можно воспользоваться формулами тригонометрии:

$sin(3-i) = sin3 \cdot cosi - cos3 \cdot sini = sin3 \cdot ch1 - icos3 \cdot sh1$.

3) Вычислить i^{2i}.

$$i^{2i} = e^{2i\mathrm{Ln}i}.$$

Вычислим отдельно $\mathrm{Ln}(i)$. Используя формулу, получим:

$$\mathrm{Ln}(i) = ln|i| + i(argi + 2\pi k) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),$$

$$|i| = \sqrt{0+1^2} = 1,\ ln|i| = ln1 = 0, argi = \frac{\pi}{2},$$

$$i^{2i} = e^{2i\cdot i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)} = e^{-\pi-4\pi k},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

4) Решить уравнение $sinz = 3$, корни уравнения изобразить на комплексной плоскости.

Уравнение можно переписать в виде: $\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = 3$ или $e^{2iz} - 6ie^{iz} - 1 = 0$ – это квадратное уравнение относительно e^{iz}.

Его корни

$$e^{iz} = 3i \pm 2\sqrt{2}i = i(3 \pm 2\sqrt{2})$$

Прологарифмируем полученное равенство

$$iz = \mathrm{Ln}\left(i(3 \pm 2\sqrt{2})\right) = ln\left|i(3 \pm 2\sqrt{2})\right| + i\left(arg\left(i(3 \pm 2\sqrt{2})\right) + 2\pi k\right),$$

$k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Вычислим $\left|i(3 \pm 2\sqrt{2})\right| = 3 \pm 2\sqrt{2}$, $arg\left(i(3 \pm 2\sqrt{2})\right) = \frac{\pi}{2}$

и подставим полученный результат, получим

$$iz = ln(3 \pm 2\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),$$

отсюда вычислим

$$z = \frac{1}{i} ln(3 \pm 2\sqrt{2}) + \frac{\pi}{2} + 2\pi k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - iln(3 \pm 2\sqrt{2}).$$

Получили две серии корней

$$z_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - iln\left(3 + 2\sqrt{2}\right), z_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - iln\left(3 - 2\sqrt{2}\right).$$

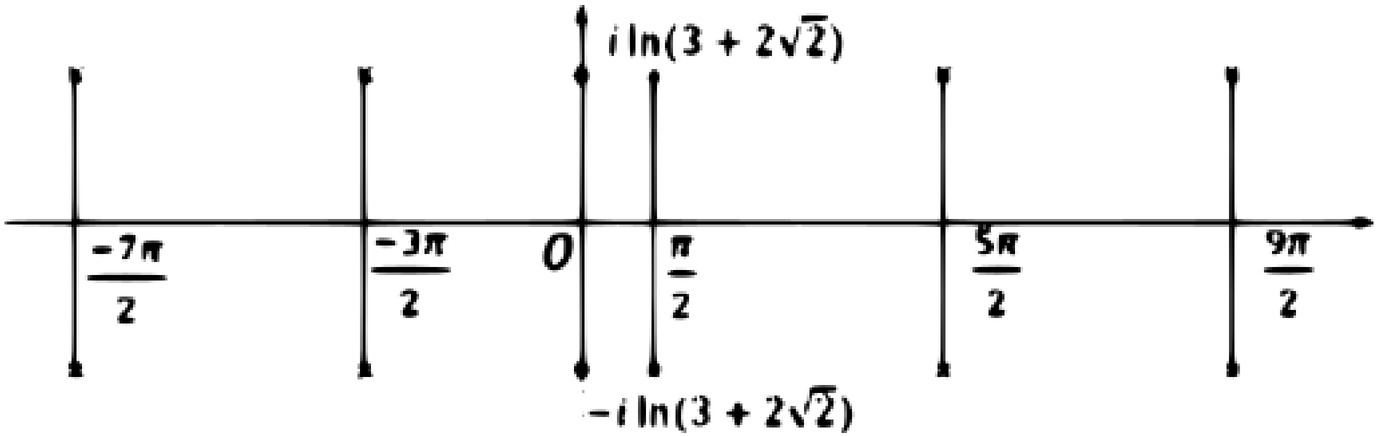
Преобразуем z_2.

$$ln\left(3 - 2\sqrt{2}\right) = ln\frac{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}{(3+2\sqrt{2})} = ln\frac{1}{3+2\sqrt{2}} = -ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right),$$

Поэтому окончательно имеем:

$$z_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - iln\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$$
$$z_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k + iln\left(3 + 2\sqrt{2}\right).$$

Корни находятся на двух прямых, параллельных оси Ox и отстоящих от нее на расстояние $ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$.



2.3. Предел и непрерывность функции комплексного переменного

Пусть $f(z)$ определена и однозначна в некоторой окрестности точки z_0, кроме, может быть, самой точки z_0.

Определение 10. Комплексное число A называется пределом однозначной функции $f(z)$ в точке z_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех точек z, удовлетворяющих условию $0 < |z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - A| < \varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta = \delta(\varepsilon): \forall z: 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - A| < \varepsilon$. z_0 и A – конечные точки комплексной плоскости.

Геометрически это означает, что для всех точек из δ-окрестности точки z_0 значения функции лежат в ε-окрестности точки A.

Определение 11. Однозначная функция $f(z)$, заданная в области D, называется непрерывной в точке $z_0 \in D$, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Определение 12. Функция, непрерывная в любой внутренней точке области, называется непрерывной в этой области.

Теорема 1. Для того чтобы функция комплексной переменной $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ была непрерывна в точке $z_0 = z_0 + iy_0$, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x,y)$ *и* $v(x,y)$ были непрерывны в точке $M_0(x_0,y_0)$ по совокупности переменных x и y.

Таким образом, функция $\omega = f(z)$ непрерывна в точке z_0 тогда и только тогда, когда функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывны в этой же точке. Поэтому все свойства непрерывных функций двух действительных переменных переносятся без изменений на функции комплексного переменного.

Замечание.

Правила действий с пределами и непрерывными функциями действительной переменной остаются справедливыми и для функции комплексной переменной**.**

Пример.

Вычислить предел функции $\lim\limits_{z \to -2i} \frac{z^2+iz+2}{z+2i}$.

Непосредственная подстановка в числитель и знаменатель предельного значения аргумента $z = -2i$ обращает их в нуль и приводит к неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Разложим числитель и знаменатель на множители, выделяя множитель $(z + 2i)$:

$$\lim_{z \to -2i} \frac{z^2 + iz + 2}{z + 2i} = \lim_{z \to -2i} \frac{(z + 2i)(z - i)}{z + 2i} = \lim_{z \to -2i} (z - i) = -3i.$$

Математический анализ-3 семестр

Лекция 11

Тема 2. Функции комплексного переменного

2.4. Дифференцирование функций комплексного переменного.
Условия Коши-Римана
2.5. Связь аналитических и гармонических функций

Тема 3. Интегрирование функций комплексного переменного

3.1. Интеграл от функции комплексного переменного и его свойства

2.4. Дифференцирование функций комплексного переменного. Условия Коши-Римана

Пусть однозначная функция $\omega = f(z)$ определена в некоторой области D комплексного переменного z. Пусть точки z и $z + \Delta z$ принадлежат области D.

Обозначим

$$\Delta\omega = f(z + \Delta z) - f(z), \quad \Delta z = \Delta x + i\Delta y.$$

Определение 13. Однозначная функция $\omega = f(z)$ называется дифференцируемой в точке $z \in D$, если отношение $\frac{\Delta\omega}{\Delta z}$ имеет конечный предел при Δz, стремящемся к нулю. Этот предел называется производной функции $f(z)$ в данной точке z и обозначается $f'(z)$ или ω', т.е.

$$\omega' = f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta z}.$$

Замечание. Правила дифференцирования остаются справедливыми и для функции комплексной переменной**.**

Определение 14. Однозначная функция $f(z)$ называется *аналитической* в точке z_0, если она дифференцируема в самой точке z_0 и в некоторой окрестности этой точки. Функция $f(z)$ называется аналитической в области D, если она дифференцируема в любой точке области.

Теорема 2. Для того чтобы функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была дифференцируема в точке $z = x + iy$, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ были дифференцируемы в точке (x, y) и чтобы в этой точке имели место равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

называемые условиями Коши-Римана. При этом формулы для производной функции $f'(z)$ имеют вид:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Замечание. Условия Коши-Римана (необходимое и достаточное условия дифференцируемости функции комплексного переменного) позволяют решать вопрос об аналитичности функции в области.

Примеры. Проверить аналитичность функции.

1). $f(z) = z^2$.

Выделим действительную $u(x,y)$ и мнимую $v(x,y)$ части функции, подставив вместо $z = x + iy$:

$$f(z) = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

т.е. $\mathrm{Re} f(z) = u(x, y) = x^2 - y^2$

$\mathrm{Im} f(z) = v(x, y) = 2xy.$

Функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ дифференцируемы во всех точках (x, y). Проверим условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y$$

Условия выполнены для любых x, y, следовательно, $f(z) = z^2$ аналитична во всей комплексной плоскости.

2) $f(z) = 3\overline{z} + 2.$

Выделим действительную и мнимую части функции, подставим вместо $\overline{z} = x - iy$:

$f(z) = 3(x - iy) + 2 = (3x + 2) - 3yi,$

т.е. $\mathrm{Re} f(z) = u(x, y) = 3x + 2,$

$\mathrm{Im} f(z) = v(x, y) = -3y.$

Функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ дифференцируемы во всех точках (x, y), проверим выполнение условий Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(3x+2)}{\partial x} = 3, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial(-3y)}{\partial y} = -3,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(3x+2)}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial(-3y)}{\partial x} = 0$$

так что $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$, т.е. первое условие Коши-Римана не выполнено ни в одной точке комплексной плоскости.

Значит, функция $\omega(z) = 3\overline{z} + 2$ нигде не дифференцируема, а, следовательно, не является аналитической.

3). $f(z) = e^z$.

$f(z) = e^{x+iy} = e^x(cosy + isiny) = e^x cosy + ie^x siny$

$$\mathrm{Re} f(z) = u(x,y) = e^x cosy$$

$$\mathrm{Im} f(z) = v(x,y) = e^x siny$$

$u(x,y), v(x,y)$ дифференцируемы как функции действительных переменных при любых x, y (имеют непрерывные частные производные).

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x cosy, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x cosy$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x siny, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x siny$$

Условия Коши-Римана выполнены для любых x, y, следовательно, $f(z)$ аналитична во всей комплексной плоскости.

$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x cosy + ie^x siny = e^x(cosy + isiny) = e^z$.

4). $f(z) = \overline{z} \cdot z$

$f(z) = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2$

$\mathrm{Re} f(z) = u(x, y) = x^2 + y^2$

$\mathrm{Im} f(z) = v(x, y) = 0$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$. Условия Коши-Римана выполнены только в точке $(0;0)$, функция нигде не аналитична.

Свойства аналитических функций.

Если $f_1(z)$, $f_2(z)$ аналитические функции в области D, то

1) $f_1(z) \pm f_2(z)$, $f_1(z) \cdot f_2(z)$ – также аналитические в области D,

2) $\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ аналитична во всех точках области D, где $f_2(z) \neq 0$.

При этом имеют место формулы:

$$[f_1(z) \pm f_2(z)]' = f_1'(z) \pm f_2'(z)$$

$$[cf_1(z)]' = cf_1'(z)$$

$$\left[\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right]' = \frac{f_1'(z)f_2(z) - f_2'(z)f_1(z)}{f_2^2(z)}$$

$$[f_1(z) \cdot f_2(z)]' = f_1'(z)f_2(z) + f_1(z)f_2'(z)$$

Справедлива также таблица производных:

$$(z^n)' = nz^{n-1}$$

$$(e^z)' = e^z$$

$$(\mathrm{Ln}z)' = \frac{1}{z}$$

$$(cosz)' = -sinz$$

$$(sinz)' = cosz$$

$$(tgz)' = \frac{1}{cos^2 z}$$

$$(ctgz)' = -\frac{1}{sin^2 z}$$

$$(shz)' = chz$$

$$(chz)' = shz$$

2.5. *Связь аналитических и гармонических функций*

Определение 15. Функция $\varphi(x, y)$ называется *гармонической* в области D, если она имеет в этой области непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет в этой области уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Теорема 3. Если функция $f(z) = u + iv$ аналитична в некоторой области D, то ее действительная часть $u(x, y)$ и мнимая часть $v(x, y)$ являются гармоническими в этой области функциями, т. е. $u(x, y)$, $v(x, y)$ *удовлетворяют уравнению Лапласа:* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$.

Доказательство.

$f(z) = u + iv$ аналитична, следовательно, выполнены условия Коши-Римана:

1) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, дифференцируем равенство по x

2) $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, дифференцируем равенство по y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

и сложим их:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Дифференцируем первое равенство по y, второе по x:

1) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ 2) $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

вычтем из первого второе:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Теорема доказана.

Определение 16. Две гармонические функции, связанные условиями Коши-Римана, называются *сопряженными*.

Теорема 4. Если в области D заданы две гармонические функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, удовлетворяющие условиям Коши-Римана, то из них можно построить аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Замечание. Задание одной (действительной или мнимой) части при условии ее гармоничности определяет аналитическую функцию с точностью до константы.

Примеры. Найти аналитическую функцию по ее заданной действительной или мнимой части.

1). $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2$.

Проверим гармоничность функции $u(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0,$$

т. е. $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа и является гармонической.

Функция $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2$ и искомая функция $v(x, y)$ должны удовлетворять условиям Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial v}{\partial y}$$

интегрируем последнее уравнение по y (считая x постоянной), получаем

$$v(x, y) = \int (3x^2 - 3y^2)\, dy + \varphi(x) = 3x^2 y - y^3 + \varphi(x).$$

Из второго условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, -6xy = -(6xy + \varphi'(x))$$

$$\varphi'(x) = 0, \varphi(x) = c = const$$

Итак, $v(x, y) = 3x^2 y - y^3 + \text{c}$.

Следовательно,

$$f(x + iy) = (x^3 - 3xy^2 + 2) + i(3x^2 y - y^3 + \text{c})$$

Для того, чтобы записать функцию $f(z)$, можно взять

$y = 0, x = z$

$f(x + iy) = (x^3 - 3xy^2 + 2) + i(3x^2y - y^3 + c)$,

тогда $f(z) = z^3 + 2 + ic$.

2). Найти аналитическую функцию по ее заданной мнимой части:

$v(x, y) = 3x + 2xy$ при условии $f(-i) = 2$.

Проверим гармоничность функции $v(x, y)$:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 3 + 2y, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$, т. е. $v(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа и является гармонической.

Первое условие Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$

интегрируем уравнение по x (считая y постоянной), получаем

$u(x, y) = \int 2x\, dx + \varphi(y) = x^2 + \varphi(y)$.

Из второго условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \varphi'(y) = -(3 + 2y)$$

$$\varphi(y) = -3y - y^2 + c$$

Итак, $u(x, y) = x^2 - 3y - y^2 + c$.

$f(x + iy) = (x^2 - 3y - y^2 + c) + i(3x + 2xy)$.

Для того, чтобы записать функцию $f(z)$, можно взять

$y = 0$, $x = z$, тогда $f(z) = z^2 + c + i3z$.

Подставим начальные условия: $2 = -1 + c + 3$; $c = 0$

Ответ: $f(z) = z^2 + i3z$.

3. Интегрирование функций комплексного переменного

3.1. Интеграл от функции комплексного переменного и его свойства

Рассмотрим однозначную функцию $f(z)$, определенную и непрерывную в области D и кусочно-гладкую кривую L, лежащую в D. Зададим на этой кривой направление обхода: точка A – начало, точка B – конец.

Введем определение интеграла от функции комплексного переменного.

Разобьем L на n частей точками: $z_0 = A$; z_1; ... $z_n = B$.

На каждом участке $[z_{k-1}; z_k]$ выберем произвольную точку J_k,

$k = 1, \dots, n$

Составим интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f(J_k) \cdot (z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(J_k) \cdot \Delta z_k.$$

Определение 1. Предел интегральной суммы

при $n \to \infty$ и $\max\limits_{k} \Delta z_k \to 0$ называется интегралом от функции *f(z)* по кривой L, если он существует и не зависит от способа разбиения кривой точками z_k и от выбора точек J_k.

Обозначается:

$$\int_L f(z)dz = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_k |z_k - z_{k-1}| \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(J_k)\Delta z_k\,.$$

Теорема 1. Если *f(z)* определена и непрерывна на L, то $\oint_L \; f(z)dz$ существует.

Пусть $z = x + iy$, $f(z) = u + iv$, где $u(x, y)$, $v(x, y)$ – действительные функции переменных x и y.

Вычисление интеграла от функции $f(z)$ комплексного переменного z сводится к вычислению обычных криволинейных интегралов от действительной и мнимой частей, а именно:

$$\int_L f(z)dz = \int_L (u+iv)d(x+iy) = \int_L u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_L u(x,y)dy + v(x,y)dx$$

Основные свойства криволинейных интегралов переносятся на интеграл от функции комплексного переменного:

1. Линейность

$$\int_L [c_1 f_1(z) \pm c_2 f_2(z)]\,dz = c_1 \int_L f_1(z)dz \pm c_2 \int_L f_2(z)dz,$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

2. Аддитивность

$$\int_{L_1 \cup L_2} f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz,$$

где $L_1 \cup L_2$ – кривая, составленная из кривых L_1 и L_2.

3. $\int_L f(z)dz = -\int_{L^-} f(z)dz$,

где L^- – кривая, совпадающая с L, но проходимая в противоположном направлении.

4. Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, содержащей точки z_0 и z_1, то имеет место формула Ньютона-Лейбница

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = \Phi(z_1) - \Phi(z_0) = \Phi(z)\,\Big|_{z_0}^{z_1},$$

где $\Phi(z)$ – какая-либо первообразная для функции $f(z)$, т.е.

$\Phi'(z) = f(z)$ в области D.

5. Если кривая L задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},$$

начальная и конечная точки дуги L соответствуют значениям параметра $t = t_0$, $t = t_1$, то

$$\int_L f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} f[z(t)]z'(t)dt,$$

где $z(t) = x(t) + iy(t)$.

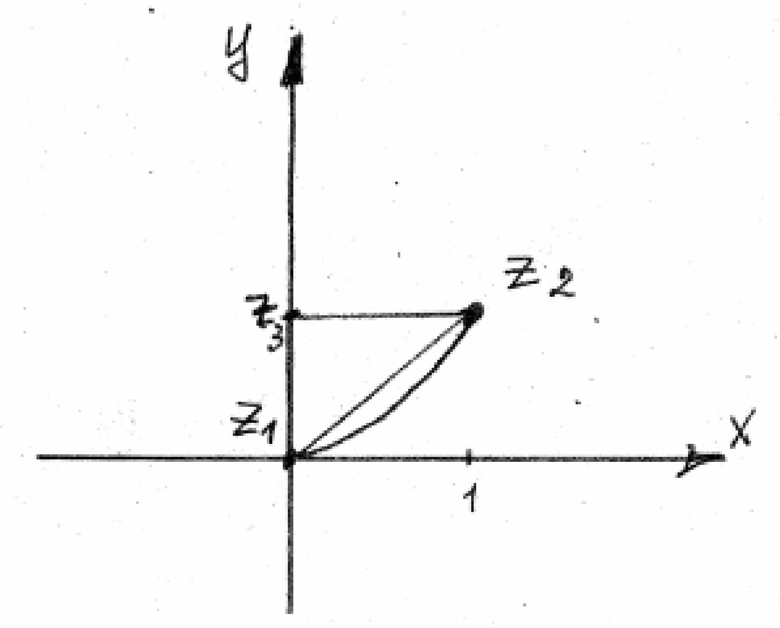
Примеры.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_L (1 + i - 2\overline{z})\, dz$ по линиям, соединяющим точки $z_1 = 0$, $z_2 = 1 + i$.

а) по прямой

б) параболе $y = x^2$

в) по ломаной $z_1 z_3 z_2, z_3 = 1$.



Перепишем подынтегральную функцию в виде

$1 + i - 2\overline{z} = 1 + i - 2(x - iy) = (1 - 2x) + i(2y + 1)$,

т.е. $u(x, y) = 1 - 2x, v(x, y) = 2y + 1$.

Проверим условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2$$

– первое условие не выполняется, т.е. подынтегральная функция не аналитична.

$$\int_C (1+i-2\bar{z})\,dz = \int_C (1-2x)dx-(1+2y)dy + i\int_C (1-2x)\,dy+(1+2y)dx.$$

а) Уравнение прямой, соединяющей точки $z_1 = 0$, $z_2 = 1+i$:

$y = x, 0 \le x \le 1, dy = dx$

$$\int_C (1-2x)dx-(1+2y)dy + i\int_C (1-2x)\,dy+(1+2y)dx =$$

$$= \int_0^1 (1-2x-1-2x)dx + i\int_0^1 2dx = -2x^2 + i2x|_0^1 = -2+2i$$

б) Для параболы $y = x^2; dy = 2xdx; 0 \le x \le 1.$

$$\int_C (1-2x)dx-(1+2y)dy + i\int_C (1-2x)\,dy+(1+2y)dx = \int_0^1 (1-2x-(1+2x^2)2x)dx +$$

$$+i\int_0^1 (1+2x^2+(1-2x)2x)dx == x-2x^2-x^4|_0^1 + i(x+x^2-2\frac{x^3}{3})|_0^1 = -2+\frac{4}{3}i$$

в) $z_1z_3: y = 0; dy = 0; 0 \le x \le 1.$

$z_3z_2: x = 1; dx = 0; 0 \le y \le 1.$

$$\int_C (1-2x)dx-(1+2y)dy+i\int_C (1-2x)\,dy+(1+2y)dx=\int_{z_1z_3}\quad+\int_{z_3z_2}\quad=$$

$$=\int_0^1 (1-2x)dx+i\int_0^1 dx-\int_0^1 (1+2y)dy+i\int_0^1 (1-2)dy=(x-x^2+ix-y-y^2-iy)|_0^1=-2$$

Интеграл зависит от пути интегрирования, так как функция не является аналитической.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_0^i \cos z\,dz$.

Функция $f(z)=cosz$ аналитична всюду в комплексной плоскости.

По свойству 4

$$\int_0^i \cos z\,dz=\sin z|_0^i=\sin i=ish1.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int_i^{2i}(3z^2+1)\,dz$.

Так как подынтегральная функция аналитична всюду (для проверки достаточно проверить все условия Коши-Римана), то можно применить формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_i^{2i}(3z^2+1)\,dz=(z^3+z)\,|_i^{2i}=(2i)^3+2i-i^3-i=-8i+2i+i-i=-6i.$$

Математический анализ-3 семестр

Лекция 12

Тема 3. Интегрирование функций комплексного переменного

3.2. Теорема Коши. Интегральная формула Коши

Тема 4. Ряды с комплексными членами. Ряды Тейлора и Лорана

4.1. Числовые ряды с комплексными членами

4.2. Ряд Тейлора

3.2. Теорема Коши. Интегральная формула Коши

Теорема 2 (*теорема Коши для односвязной области*) Если $f(z)$ – аналитическая функция в односвязной области D и C – замкнутый контур, принадлежащий области D, то интеграл не зависит от пути интегрирования и

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

Напоминание: область называется односвязной, если любую замкнутую кривую, принадлежащую области, можно стянуть в точку, не выходя за пределы области.

Доказательство.

$f(z) = u + iv$ – аналитична, следовательно, выполняются условия Коши-Римана: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

$$\oint_C (u + iv)d(x + iy) =$$

$$= \oint_C udx - vdy + i\oint_C udy + vdx =$$

$$\left\{ \begin{matrix} \text{применим Формулу Грина:} \\ \oint_C Pdx + Qdy = \iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \end{matrix} \right\} =$$

$$= \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + i\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = 0.$$

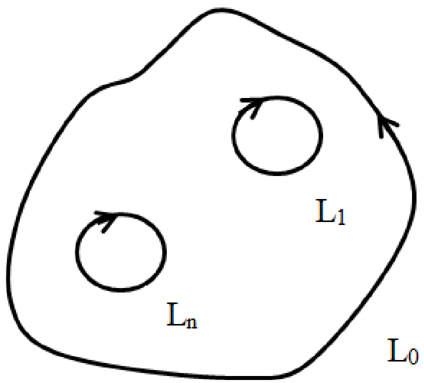
Определение 2. Линия называется *связной*, если из любой ее точки можно пройти по этой линии в любую другую ее точку.

Определение 3. *Порядком связности* ограниченной области D называется число связных частей, на которое разбивается ее граница.

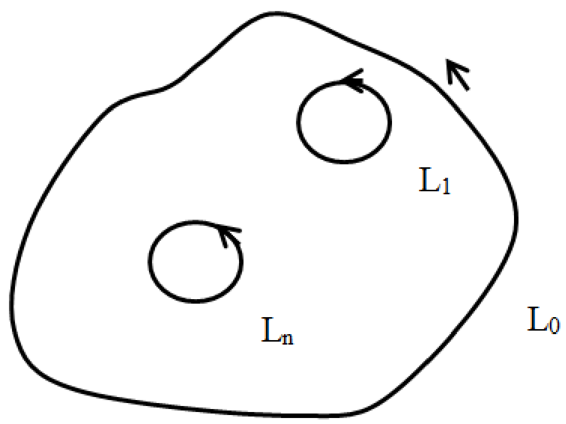
Например, круг $|z| \leq 1$ – односвязная область, а кольцо $1 \leq |z| \leq 2$ – двусвязная область.

Теорема 3 *(теорема Коши для многосвязной области).*

Если функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной кривыми $L_0, L_1, \ldots, L_n$, то $\oint_L f(z)dz = 0, L = L_0 + L_1 + \cdots + L_n$ при условии, что обход всех контуров совершается так, что область $\overline{D}$ остается с одной стороны (слева).



Следствие. Если все контуры проходить в одном направлении (например, против часовой стрелки), то $\int_{L_0} f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + \ldots + \int_{L_n} f(z)dz,$



т.е. интеграл по внешнему контуру L_0 равен сумме интегралов по внутренним контурам.

Теорема 4 *(интегральная формула Коши)*

Если $\boldsymbol{D}$ – односвязная или многосвязная область, ограниченная контуром $\boldsymbol{L}$, и $\boldsymbol{f(z)}$ – однозначная и аналитическая в $\overline{\boldsymbol{D}}$ функция, тогда для любой точки $\boldsymbol{z_0} \in \boldsymbol{D}$ справедлива формула

$$\boldsymbol{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz.}$$

Теорема 5. Если функция $\boldsymbol{f(z)}$ аналитична в области $\boldsymbol{D}$ и непрерывна в $\overline{\boldsymbol{D}}$, то во всех внутренних точках области у функции $\boldsymbol{f(z)}$ существуют производные любого порядка, причем справедлива формула

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,$$

где $z_0 \in D$, а L – граница области D.

Этой формулой можно пользоваться для вычисления некоторых интегралов.

Примеры.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_L \frac{e^z}{z^2-4z}dz$, если

1) $L: |z-1| = \frac{1}{2}$,

2) $L: |z-1| = 2$,

3) $L: |z-1| = 4$.

Решение:

1) $L: |z-1| = \frac{1}{2}$. В замкнутой области, ограниченной окружностью $|z-1| = \frac{1}{2}$, подынтегральная функция аналитическая, т. к. точки, в которых знаменатель обращается в нуль $z_1 = 0$, $z_2 = 4$ не входят в область. Тогда по теореме Коши

$$\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z^2-4z}dz = 0.$$

2) $L: |z-1| = 2$. Внутри области, ограниченной окружностью $|z-1| = 2$, находится одна точка $z_1 = 0$, в которой знаменатель обращается в ноль. Перепишем интеграл в виде

$$\int_{|z-1|=2} \frac{e^z}{z^2 - 4z} dz = \int_{|z-1|=2} \frac{\frac{e^z}{z-4}}{z} dz.$$

Функция $f(z) = \frac{e^z}{z-4}$ является аналитической в данной области.

Применяя интегральную формулу Коши ($z_0 = 0$)

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

получим

$$\int_{|z-1|=2} \frac{e^z}{z^2 - 4z} = 2\pi i \left(\frac{e^z}{z-4}\right) \Big|_{z=0} = 2\pi i \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi i}{2}.$$

3) $L: |z-1| = 4$. В области, ограниченной окружностью $|z-1| = 4$, имеем две точки $z_1 = 0$, $z_2 = 4$ в которых знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль. Применить сразу интегральную формулу Коши нельзя. Решить задачу можно двумя способами.

1 способ. Разложим дробь $\frac{1}{z^2-4z}$ на простейшие, получим

$$\frac{1}{z^2-4z}=\frac{A}{z-4}+\frac{B}{z}.$$

Найдем A и B любым способом (например, методом неопределенных коэффициентов). $A=\frac{1}{4}$, $B=-\frac{1}{4}$, т.е.

$$\frac{1}{z^2-4z}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z-4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z}.$$

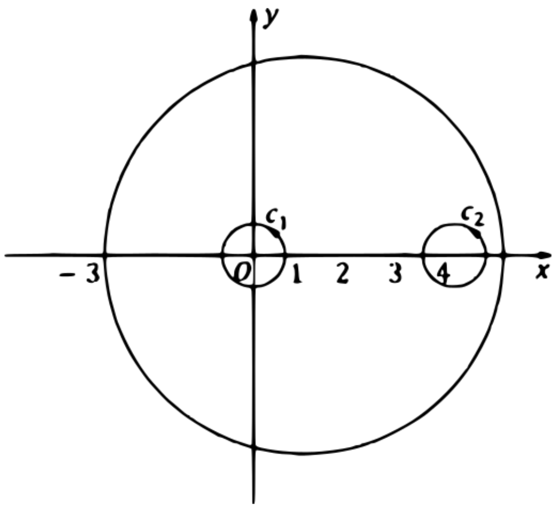
Подставляя в интеграл, получим

$$\int_{|z-1|=4}\frac{e^z}{z(z-4)}=\frac{1}{4}\int_{|z-1|=4}\frac{e^z}{z-4}dz-\frac{1}{4}\int_{|z-1|=4}\frac{e^z}{z}dz=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot 2\pi i(e^z)\,|_{z=4}-\frac{1}{4}\cdot 2\pi i(e^z)\,|_{z=0}=\frac{2\pi i}{4}(e^4-1)=\frac{\pi i(e^4-1)}{2}.$$

2 способ. Построим окружности c_1 и c_2 с центром в точках $z_1 = 0$ и $z_2 = 4$ настолько малых радиусов, чтобы окружности c_1 и c_2 не пересекались и целиком лежали в круге $|z-1| \leq 4$. В трехсвязной области, ограниченной окружностями $|z-1| = 4$, c_1, c_2 подынтегральная функция аналитична. Тогда по теореме 3 Коши для многосвязной области (см. рис.)

$$\int_{|z-1|=4} \frac{e^z}{z(z-4)} dz = \int_{c_1} \frac{e^z}{z(z-4)} dz + \int_{c_2} \frac{e^z}{z(z-4)} dz.$$



К каждому интегралу в правой части применим интегральную формулу Коши. Получим

$$\int_{|z-1|=4} \frac{e^z}{z(z-4)} dz = 2\pi i \left(\frac{e^z}{z-4}\right) \Big|_{z=0} + 2\pi i \left(\frac{e^z}{z}\right) \Big|_{z=4} =$$

$$= 2\pi i\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi i\frac{e^z}{4} = \frac{\pi i(e^4 - 1)}{2}.$$

Получен тот же результат, что и первым способом.

<u>*Пример 2*</u>. Вычислить интеграл $\int_{|z|=1} \frac{sin2z}{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3} dz$

Решение: точка $z_0 = \frac{\pi}{4}$ принадлежит кругу $|z| < 1$. Применим интегральную формулу Коши, $f(z) = sin2z$

$$\int_{|z|=1} \frac{sin2z}{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!}(sin2z)''\,|_{z=\frac{\pi}{4}} = 4\pi i(-sin2z)\,|_{z=\frac{\pi}{4}} = -4\pi i.$$

4. Ряды с комплексными членами. Ряды Тейлора и Лорана

<u>4.1. Числовые ряды с комплексными членами</u>

Определение 1. Последовательность комплексных чисел $\{z_n = x_n + iy_n\}, n = 1,2, \ldots,$ называется сходящейся, если сходятся соответствующие последовательности действительной части $\{x_n\}$ и мнимой части $\{y_n\}$.

Пусть задана последовательность комплексных чисел $\{z_n = x_n + iy_n\}, n = 1,2, \ldots$. Составленное из членов этой последовательности выражение

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

называется *числовым рядом с комплексными членами*, z_n – общий член ряда.

Сумма $S_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ называется n-ой частичной суммой ряда. Частичные суммы образуют новую числовую последовательность $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$.

Определение 2. Числовой ряд с комплексными членами называется *сходящимся*, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм, т.е. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Число S называется суммой ряда.

Числовой ряд называется *расходящимся*, если предел последовательности частичных сумм равен бесконечности или не существует.

Исследование ряда с комплексными членами сводится к исследованию двух вещественных рядов на основании следующего утверждения.

Сходимость ряда с комплексными членами

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n + iy_n)$ к сумме $S = A + iB$ равносильна сходимости двух вещественных рядов

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ соответственно к суммам A и B.

Определение 3. Ряд с комплексными членами называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд из модулей

$$\sum_{n=1}^{\infty}|z_n| = \sum_{n=1}^{\infty}|x_n + iy_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{{x_n}^2 + {y_n}^2}.$$

Теорема 1. Если сходится ряд из модулей членов данного ряда, то сходится и сам ряд с комплексными членами.

4.2. Ряд Тейлора. Коэффициенты ряда. Разложение функции, аналитической в круге, в степенной ряд

Пусть дана последовательность функций комплексной переменной $u_1(z), u_2(z), \dots, u_n(z), \dots$, определенных на некотором множестве D комплексной плоскости: $D \subset C$.

Выражение вида $u_1(z) + u_2(z) + \dots + u_n(z) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ называется *функциональным* рядом с комплексными членами.

Определение 4. Множество значений переменной z, при которых функциональный ряд сходится, называется *областью сходимости* функционального ряда.

Определение 5. Ряд вида

$$c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

где c_n и z_0 – комплексные постоянные, а z – комплексная переменная, называется *степенным рядом* в комплексной области.

При $z_0 = 0$ степенной ряд имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$$

Теорема 2 (теорема Абеля). Пусть степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n =$$

$$= c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots$$

сходится в некоторой точке $z_1 \neq z_0$. Тогда этот ряд *абсолютно* сходится в круге $|z - z_0| < |z_1 - z_0| = R$.

Следствие 1. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ расходится в некоторой точке $z_1 \neq z_0$, то этот ряд расходится в области

$|z - z_0| > |z_1 - z_0| = R$, т.е. вне круга $|z - z_0| \leq |z_1 - z_0| = R$.

Следствие 2. Для степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ существует число $R, 0 \leq R \leq +\infty$, называемое *радиусом сходимости* степенного ряда, такое, что внутри круга $|z - z_0| < R$ ряд сходится, а вне этого круга, т.е. в области $|z - z_0| > R$, ряд расходится.

Если R – радиус сходимости, то область $|z - z_0| < R$ называется *кругом сходимости* степенного ряда. В точках границы $|z - z_0| = R$ ряд может как сходиться, так и расходиться. В этом случае требуется дополнительное исследование.

Теорема 3. Функция $f(z)$, аналитичная в круге $|z - z_0| < R$, разлагается в нем единственным образом в сходящийся к ней степенной ряд Тейлора $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, коэффициенты которого c_n вычисляются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \ (n = 0,1, \dots),$$

где L – окружность с центром z_0, целиком лежащая в круге сходимости ряда $|z - z_0| < R$.

Предполагается, что окружность проходится в положительном направлении, т.е. против часовой стрелки.

Справедливы следующие разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$.

$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $R_{\text{сх}} = \infty$

$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R_{\text{сх}} = \infty$

$cosz = 1 - \frac{z^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $R_{\text{сх}} = \infty$

$ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$, $R_{\text{сх}} = 1$

$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \ldots$, $R_{\text{сх}} = 1$

при $\alpha = -1$

$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \ldots + (-1)^n z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$, $R_{\text{сх}} = 1$

$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $R_{\text{сх}} = 1$.

Пример.

Разложить по степеням $(z-3)$ функцию $f(z) = \frac{1}{5-3z}$.

Сделаем замену $t = z - 3$, выразим $z = t + 3$ и подставим в функцию $f(z)$

$$f(t) = \frac{1}{5-3(t+3)} = \frac{1}{-4-3t} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{3}{4}t}$$

Разложим полученную функцию в точке $z = 3$ $(t = 0)$. Воспользуемся стандартным разложением, подставляя вместо $z \to \frac{3}{4}t$:

$$f(t) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{3}{4}t} = -\frac{1}{4}\left(1 - \frac{3}{4}t + \left(\frac{3}{4}t\right)^2 - \ldots + (-1)^n \left(\frac{3}{4}t\right)^n + \ldots\right).$$

Сделаем обратную замену

$$f(z) = -\frac{1}{4}\left[1 - \frac{3}{4}(z-3) + \frac{3^2}{4^2}(z-3)^2 - \ldots + (-1)^n \frac{3^n}{4^n}(z-3)^n + \ldots\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{4^{n+1}} (z-3)^n$$

Этот ряд сходится при условии $\left|\frac{3}{4}(z-3)\right| < 1$, или $|z-3| < \frac{4}{3}$, т.е. радиус сходимости ряда $R = \frac{4}{3}$.

Математический анализ-3 семестр

Лекция 13

Тема 4. Ряды с комплексными членами. Ряды Тейлора и Лорана

4.3. Ряд Лорана, его область сходимости

4.4. Примеры разложения функций в ряд Лорана

4.3. Ряд Лорана, его область сходимости

Определение 6. Рядом Лорана называется ряд вида

$$\ldots + \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

$$+c_n(z-z_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n},$$

где z_0, c_n – комплексные постоянные, а z – комплексная переменная.

Областью сходимости ряда Лорана является общая часть областей сходимости рядов: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$

Областью сходимости первого ряда является внутренность круга

$|z - z_0| < R$.

Найдем область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$, сделав замену $t = \frac{1}{z-z_0}$. Полученный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_{-n} t^n$ сходится в круге $|t| < \frac{1}{r}$, следовательно, рассматриваемый ряд сходится в области $|z - z_0| > r$.

Если $r < R$, областью сходимости ряда Лорана является кольцо $r < |z - z_0| < R$. Здесь $r \geq 0$, $0 \leq R \leq +\infty$.

Теорема 4. Функция $f(z)$, однозначная и аналитическая в кольце $r < |z - z_0| < R$ (не исключаются случаи $r = 0$ и $R = +\infty$), разлагается в этом кольце единственным образом в сходящийся к ней ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

где коэффициенты c_n находятся по формулам

$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

Здесь L – произвольная окружность с центром в точке z_0, лежащей внутри данного кольца.

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ называется *правильной частью* ряда Лорана, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ называется *главной* *частью ряда* Лорана.

Замечание. Так как кольцо является областью аналитичности функции $f(z)$, то на границах кольца имеется хотя бы по одной точке, в которой аналитичность функции нарушается.

На практике при нахождении коэффициентов c_n используют готовые разложения в ряд Тейлора элементарных функций.

4.3. Примеры разложения функций в ряд Лорана

Пример 1. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = (z-2)^3 e^{\frac{1}{z-2}}$ в окрестности точки $z_0 = 2$.

Сделаем замену $t = \frac{1}{z-2}$, получим $f(t) = \frac{1}{t^3} e^t$.

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$

Тогда

$$f(z) = (z-2)^3 \left(1 + \frac{1}{z-2} + \frac{1}{2!\,(z-2)^2} + \frac{1}{3!\,(z-2)^3} + \frac{1}{4!\,(z-2)^4} + \right.$$

$$+\ldots) = (z-2)^3 + (z-2)^2 + \frac{1}{2!}(z-2) + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!\,(z-2)} + \ldots =$$

$$= (z-2)^3 + (z-2)^2 + \frac{1}{2!}(z-2) + \frac{1}{3!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)!\,(z-2)^n}$$

Это разложение справедливо для любой точки $z \neq 2$, т.е. в кольце

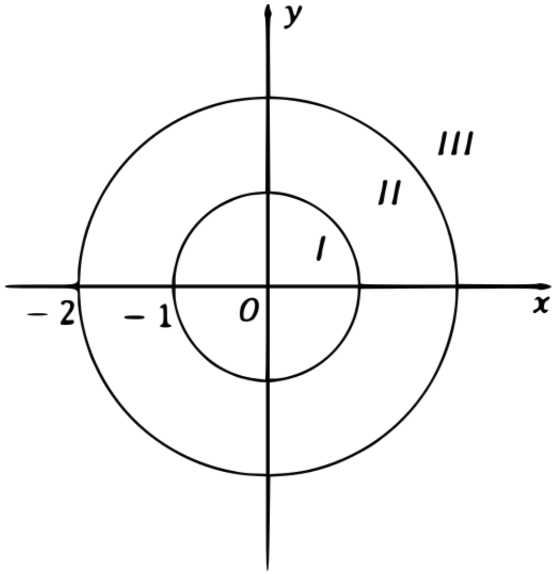
$0 < |z-2| < +\infty$. Здесь $r = 0$, $R = +\infty$.

В указанной области $f(z)$ – аналитическая.

Пример 2. Получить все разложения в ряд Лорана по степеням z ($z_0 = 0$) функции $f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2}$.

Определим области аналитичности функции, приравняв знаменатель дроби к нулю: $z^2 + z - 2 = (z+2)(z-1) = 0$, отсюда $z_1 = -2$, $z_2 = 1$. Изобразим на комплексной плоскости возможные области. Для этого проведем окружности с центром в $z_0 = 0$ и радиусом равным расстоянию до ближайшей особой точки. Имеем три «кольца» с центром в точке $z_0 = 0$, в каждом из которых $f(z)$ является аналитической:

1) круг $|z| < 1$,
2) кольцо $1 < |z| < 2$,
3) $2 < |z| < +\infty$ – внешность круга $|z| \leq 2$.



Найдем ряды Лорана для функции $f(z)$ в каждой из этих областей. Для этого представим $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей

$$f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{A}{z+2} + \frac{B}{z-1} = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-1}.$$

A и B нашли методом неопределенных коэффициентов.

1) Рассмотрим круг $|z| < 1$. Преобразуем $f(z)$:

$$f(z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}}-\frac{1}{1-z}.$$

$$f(z)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}-\frac{z^3}{2^3}-\ldots\right)-(1+z+z^2+z^3+\ldots)=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}z+\frac{1}{8}z^2-\frac{1}{16}z^3+\ldots-1-z-z^2-z^3-\ldots=-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}z-\frac{7}{8}z^2-\frac{15}{16}z^3-\ldots$$

Это разложение является рядом Тейлора функции $f(z)$, при этом ряд для функции

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\ldots$$

сходится при $|z|<1$, а

$$\frac{1}{1+\frac{z}{2}}=1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+\ldots$$

сходится при $\left|\frac{z}{2}\right|<1$ или $|z|<2$, т.е. внутри круга $|z|<1$ оба ряда сходятся.

2) Рассмотрим кольцо $1<|z|<2$.

Ряд для функции $\frac{1}{1+\frac{z}{2}}$ остается сходящимся в этом кольце, т.е. $|z|<2$, а ряд для функции $\frac{1}{1-z}$ расходится при $|z|>1$.

Поэтому преобразуем $f(z)$ следующим образом:

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z}{2}} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}}.$$

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \ldots\right)$$

Этот ряд сходится для $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, т.е. при $|z| > 1$.

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} - \frac{z^3}{2^3} + \ldots\right) + \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} + \ldots + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^3} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}$$

3) Рассмотрим $|z| > 2$. Представим $f(z)$ в виде

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{z}}.$$

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \ldots\right) + \frac{1}{z}\left(1 - \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} - \frac{8}{z^3} + \ldots\right) = \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{5}{z^3} - \frac{7}{z^4} + \ldots$$

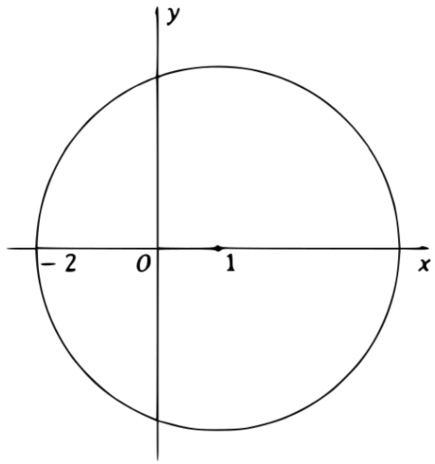
Первый ряд сходится при $|z| > 1$, второй – при $|z| > 2$.

В кольце $2 < |z| < +\infty$ сходятся оба ряда.

Таким образом, в разных областях функция $f(z)$ представима разными рядами.

<u>Пример 3.</u> Разложить в ряд Лорана функцию

$f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2}$ в окрестности $z_0 = 1$.



Найдем особые точки функции $f(z)$, для этого приравняем знаменатель к нулю $z^2 + z - 2 = 0$,

$z_1 = 1$, $z_2 = -2$, т.е. разложение необходимо осуществить в окрестности особой точки $z_1 = 1$, т.е. в кольце $0 < |z - 1| < 3$. Число 3 найдено, как расстояние между центром разложения $z = 1$ и ближайшей особой точкой $z = -2$ (см. рис.).

Представим $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+2}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+2}.$$

Первое слагаемое – дробь, содержащая $(z-1)^{-1}$. Дальнейшего разложения не требует.

Введем новую переменную $z-1=t$, т.е. $z=t+1$ и перепишем функцию

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{t+3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{t}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}.$$

Используя табличное разложение, получим

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}=\frac{1}{3}\left[1-\frac{z-1}{3}+\frac{(z-1)^2}{9}-\frac{(z-1)^3}{27}+\ldots\right]$$

Область сходимости этого ряда $\left|\frac{z-1}{3}\right|<1$ или $|z-1|<3$. Таким образом, разложение в ряд Лорана в кольце $0<|z-1|<3$ имеет вид

$$f(z)=\frac{2z-1}{z^2+z-2}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{3}-\frac{z-1}{9}+\frac{(z-1)^2}{27}-\frac{(z-1)^3}{81}+\ldots$$

Слагаемое $\frac{1}{z-1}$ является степенью $(z-1)^{-1}$ и поэтому не требует дальнейшего разложения.

Пример 4. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = \frac{2z-3}{z^2-4z+3}$

в окрестности ее особых точек.

Найдем особые точки функции $f(z)$: $z^2 - 4z + 3 = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = 3$.

Получим разложение функции в окрестности точки $z_1 = 1$. Ближайшая область аналитичности - кольцо $0 < |z-1| < 2$. Число 2 найдено, как расстояние между центром разложения $z = 1$ и ближайшей особой точкой $z = 3$.

Представим $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей

$$\frac{2z-3}{z^2-4z+3} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{z-3}.$$

Сделаем замену: $z - 1 = t$, т.е. $z = t + 1$ и перепишем функцию

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{z-3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{t-2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2-t} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{t}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t} - \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-1} - \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^n}$$

Область сходимости этого ряда $0 < \left|\frac{z-1}{2}\right| < 1$ или $0 < |z-1| < 2$.

Получим разложение функции в окрестности точки $z_2 = 3$. Ближайшая область аналитичности - кольцо $0 < |z-3| < 2$. Число 2 найдено, как расстояние между центром разложения $z = 3$ и ближайшей особой точкой $z = 1$.

Сделаем замену: $z - 3 = t$, т.е. $z = t + 3$ и перепишем функцию

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{z-3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t+2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 + \frac{t}{2}} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{t} =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{2^n} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-3)^n}{2^n} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{z-3}$$

Область сходимости этого ряда $0 \leq \left|\frac{z-3}{2}\right| < 1$ или $0 < |z-3| < 2$.

Пример 5. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = (z-3)^4 cos\frac{1}{z-3}$ в окрестности точки $z_0 = 3$.

Решение: сделаем замену $t = \frac{1}{z-3}$, получим $f(t) = \frac{1}{t^4} cost$. Используя табличное разложение для функции $\cos t$:

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!},$$

получим

$$cos\frac{1}{z-3} = 1 - \frac{1}{2!\,(z-3)^2} + \frac{1}{4!\,(z-3)^4} - \frac{1}{6!\,(z-3)^6} + \ldots,$$

тогда

$$f(z) = (z-3)^4 \left(1 - \frac{1}{2!\,(z-3)^2} + \frac{1}{4!\,(z-3)^4} - \frac{1}{6!\,(z-3)^6} + \right.$$

$$+\dots) = (z-3)^4 - \frac{(z-3)^2}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!\,(z-3)^2} + \dots$$

Это разложение справедливо для любой точки $z \neq 3$. В данном случае «кольцо» представляет собой всю комплексную плоскость с одной выброшенной точкой $z = 3$. Его можно определить так: $0 < |z-3| < +\infty$. Здесь $r = 0$, $R = +\infty$. В указанной области $f(z)$ – аналитическая.

Пример 6. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = \frac{1}{z^2-z-6}$

в окрестности точки $z_0 = 0$.

Найдем особые точки функции $f(z)$:

$z^2 - z - 6 = 0,\ z_1 = -2,\ z_2 = 3.$

Области аналитичности функции:

а) $|z| < 2$,

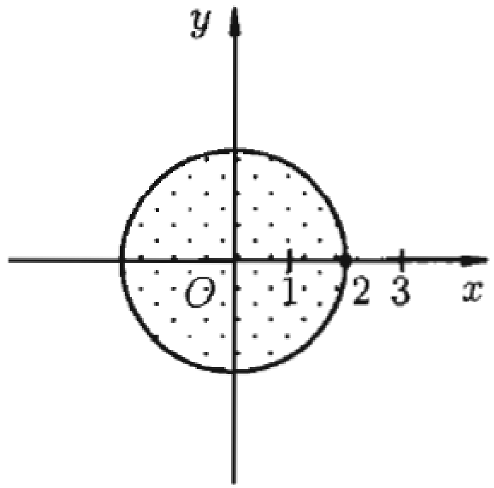
б) $2 < |z| < 3$,

в) $|z| > 3$.

Представим функцию в виде суммы простейших дробей:

$$f(z) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z+2}\right).$$

а) $|z| < 2$.



$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} + \cdots\right) =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}$$

Область сходимости ряда: $\left|\frac{z}{3}\right| < 1,$ т. е. $|z| < 3.$

$$-\frac{1}{z+2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} - \cdots\right) = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{2^{n+1}}$$

Область сходимости ряда: $\left|\frac{z}{2}\right| < 1,$ т. е. $|z| < 2.$

Следовательно,

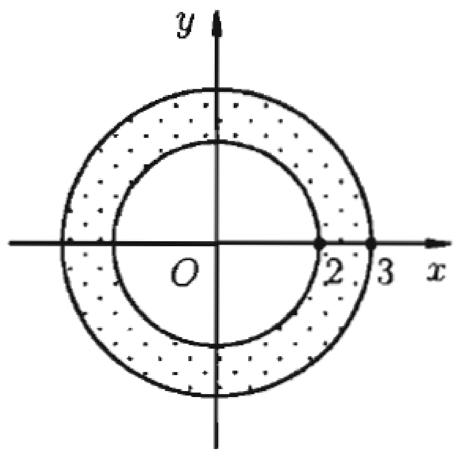
$$f(z) = \frac{1}{z^2 - z - 6} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z+2}\right) = -\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}} + (-1)^n\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$$

Ряд Лорана функции $f(z)$ обращается в ряд Тейлора.

б) $2 < |z| < 3$, в этом кольце получим:

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} + \cdots\right) =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}, |z| < 3$$



$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2} - \cdots\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+1}}, \qquad |z| > 2$$

Следовательно, $f(z) = \frac{1}{z^2-z-6} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z+2}\right) =$

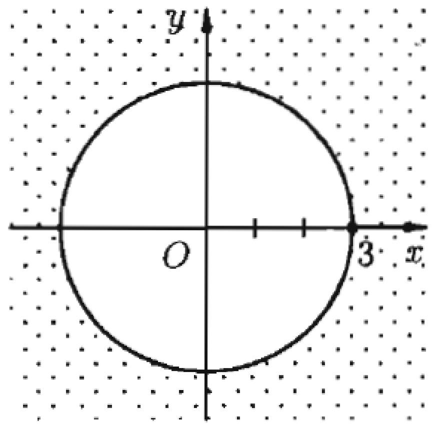
$$= -\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}} - \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+1}}$$

Выделим в полученном ряду главную и правильную части:

$-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}$ - правильная часть,

$-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+1}}$ – главная часть.

в) $|z| > 3$.



$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \frac{1}{z}\left(1+\frac{3}{z}+\frac{3^2}{z^2}-\cdots\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}, |z| > 3$$

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\left(1-\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}-\cdots\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+1}}, |z| > 2$$

Следовательно,

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - z - 6} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}} - \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+1}} = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n - (-1)^n \cdot 2^n}{z^{n+1}}$$

В полученном ряду нет правильной части.

Математический анализ-3 семестр

Лекция 14

Тема 5. Изолированные особые точки

5.1. Нули аналитической функции

5.2. Классификация изолированных особых точек на основе поведения функции в окрестности особой точки

5.3. Классификация изолированных особых точек по виду главной части ряда Лорана

Определение 1. Точка z_0 называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$, если $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности этой точки, за исключением самой точки z_0, а в точке z_0 функция не определена или не дифференцируема.

Рассмотрим точку z_0 и разложим $f(z)$ в ряд в окрестности точки z_0, т.е. по степеням $(z - z_0)$.

Если точка z_0 – правильная, т.е. $f(z)$ аналитична в т. z_0, то существует окрестность (круг радиуса R) $|z - z_0| < R$, внутри которого $f(z)$ аналитична и функция раскладывается в степенной ряд Тейлора:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n; \; c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Если точка z_0 – изолированная особая точка (ИОТ), то $f(z)$ аналитична в кольце $0 < |z - z_0| < R$ и функция раскладывается в степенной ряд Лорана: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n; \; c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

5.1. Нули аналитической функции

Определение 2. Точка z_0 называется *нулем n-го порядка* аналитической функции $f(z)$, если n – порядок первой не равной нулю производной: $f(z_0)=0, f'^{(z_0)}=0, \ldots, f^{(n-1)}(z_0)=0, f^{(n)}(z_0)\neq 0$.

Если $n=1$, то точка z_0 называется *простым нулем.*

Теорема 1. Точка z_0 является нулем n-го порядка функции $f(z)$, аналитической в точке z_0, тогда и только тогда, когда имеет место равенство $f(z)=(z-z_0)^n\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 и $\varphi(z_0)\neq 0$.

Пример 1. Найти нули функции, определить порядок нуля:

$f(z)=cosz-1.$

Решение: приравняем $f(z)$ нулю, получим $cosz=1$, откуда $z_n=2\pi n\ \ (n=0,\pm 1,\ldots)$ – нули данной функции.

Найдем

$$f'(z)\,|_{z=z_n}=-sinz\,|_{z=2\pi n}=0,$$

$$f''(z)\,|_{z=z_n}=-cosz\,|_{z=2\pi n}=-1\neq 0.$$

Согласно определению, $z_n=2\pi n$ являются нулями второго порядка.

Пример 2. Найти нули функции, определить порядок нуля:

$f(z) = z^8 - 9z^7$.

Решение: приравняем $f(z)$ нулю, получим $z^7(z-9) = 0$, $z_1 = 0$, $z_2 = 9$. Можно воспользоваться определением, однако проще использовать теорему 1. Функция $f(z)$ представима в виде $f(z) = z^7(z-9)$, но тогда $z = 0$ является нулем порядка 7, функцией $\varphi(z)$ является сомножитель $\varphi(z) = z - 9$, $\varphi(0) = -9 \neq 0$;
$z = 9$ является нулем порядка 1, функцией $\varphi(z)$ в данном случае является $\varphi(z) = z^7$, $\varphi(9) = 9^7 \neq 0$.

Пример 3. Найти нули функции, определить порядок нуля:
$f(z) = 1 - e^z$.

Приравняем $f(z)$ нулю, получим

$e^z = 1$, $z = Ln1 = ln1 + i(0 + 2\pi k)$,

откуда $z_k = 2\pi ki$ $(k = 0, \pm 1, \dots)$ – нули данной функции.

Найдем

$$f'(z)\,|_{z=z_n} = -e^z\,|_{z=2\pi ki} = -(cos2\pi k + isin2\pi k) = -1$$

Согласно определению, $z_k = 2\pi ki$ являются простыми нулями функции $f(z) = 1 - e^z$.

Пример 4.

Найти нули функции и определить порядок нуля:

$f(z) = (z^2 + 1)^3 e^z$.

$f(z) = 0$, $z^2 + 1 = 0$, $z_1 = i$, $z_2 = -i$. Функция $f(z)$ представима в виде $f(z) = (z + i)^3 (z - i)^3 e^z$.

$z_1 = i$: $f(z) = (z - i)^3 \varphi(\mathrm{z}), \varphi(z) = (z + i)^3 e^z, \varphi(i) \neq 0$, следовательно, по теор.1 $z_1 = i$ является нулем порядка 3.

$z_2 = -i$: $f(z) = (z + i)^3 \varphi(\mathrm{z}), \varphi(z) = (z - i)^3 e^z, \varphi(-i) \neq 0$, следовательно, по теореме 1 $z_2 = -i$ является нулем порядка 3.

Пример 5.

Найти нули функции и определить их порядки:

$f(z) = (z^2 - 1)(z^5 + 8z^3)$.

$f(z) = (z - 1)(z + 1)z^3(z + \sqrt{8}i)(z - \sqrt{8}i)$,

$\begin{cases} z_{1,2} = \pm 1 \\ z_{3,4} = \pm\sqrt{8}i \end{cases}$ – простые нули, $\quad z_5 = 0$ – ноль третьего порядка.

5.2. Классификация изолированных особых точек на основе поведения функции в окрестности особой точки

Определение 3. Точка z_0 называется *устранимой* особой точкой функции $f(z)$, если существует конечный предел функции $f(z)$ в точке z_0

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = C.$$

Пример 1. Найти особые точки функции $f(z) = \frac{1-e^{3z}}{z}$ и установить их тип.

Решение: особая точка функции $f(z)$ есть $z_0 = 0$. Вычислим

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-e^{3z}}{z} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{z\to 0}\frac{-3z}{z} = -3.$$

т.е. $z_0 = 0$ – устранимая особая точка.

Пример 2. Найти особые точки функции $f(z) = \frac{cosz-1}{z^2}$.

Особая точка функции $f(z)$ есть $z_0 = 0$. Вычислим

$$\lim_{z\to 0}\frac{cosz-1}{z^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{z\to 0}\frac{-(1-cosz)}{z^2} = \lim_{z\to 0}-\frac{z^2}{2z^2} = -\frac{1}{2}.$$

т.е. $z_0 = 0$ – устранимая особая точка.

Определение 4. Точка z_0 называется *полюсом* функции $f(z)$, если $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

Теорема 2. Для того чтобы точка z_0 была полюсом функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы эта точка была нулем для функции $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$.

Теорема 3. Пусть $f(z)$ является аналитической в окрестности точки z_0. Если точка z_0 – нуль порядка n для $f(z)$, то точка z_0 – полюс порядка n для функции $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$.

Замечание. Если точка z_0 – полюс порядка n для функции $f(z)$, то точка z_0 – нуль порядка n для функции $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ при условии $\frac{1}{f(z_0)} = 0$. Отметим, что без последнего условия $\frac{1}{f(z_0)} = 0$ утверждение становится неверным. В самом деле, если $f(z) = \frac{sinz}{z^2}$, то $z = 0$ – полюс первого порядка. Однако функция $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{z^2}{sinz}$ не определена при $z = 0$.

Теорема 4. Для того чтобы точка z_0 являлась полюсом порядка n функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы функцию $f(z)$ можно было представить в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}$, где $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 и $\varphi(z_0) \neq 0$.

Замечание. Теорема остается справедливой, если z_0 – устранимая особая точка функции $\varphi(z)$ и существует $\lim\limits_{z \to z_0} \varphi(z) \neq 0$.

Например, если $\varphi(z) = \frac{sinz}{z}$, а $f(z) = \frac{\varphi(z)}{z} = \frac{\frac{sinz}{z}}{z}$, то $z_0 = 0$ – полюс первого порядка для функции $f(z)$.

Пример 1.

Найти особые точки функции $f(z)$ и установить их тип:

$f(z) = \frac{2z+1}{z^4-2z^3}$.

Решение: найдем нули функции $\frac{1}{f(z)} = \frac{z^4-2z^3}{2z+1}$,

так как $z^4 - 2z^3 = z^3(z-2)$, то функция $\frac{1}{f(z)}$ имеет два нуля.

$z_1 = 0$ – это нуль третьего порядка, поэтому $f(z)$ можно представить в виде $\frac{\varphi(z)}{z^3}$, где $\varphi(z) = \frac{2z+1}{z-2}$, $\varphi(0) = -\frac{1}{2} \neq 0$.

По теореме 4 $f(z)$ в точке $z = 0$ имеет полюс третьего порядка.

$z_2 = 2$ – нуль первого порядка, $f(z)$ можно представить в виде $\frac{\psi(z)}{z-2}$, где $\psi(z) = \frac{2z+1}{z^3}$, $\psi(2) = \frac{5}{8} \neq 0$. По теореме 4 $f(z)$ в точке $z = 2$ имеет полюс первого порядка.

<u>Пример 2.</u>

Найти особые точки функции $f(z)$ и установить их тип:

$f(z) = \frac{z+3}{(z^2+2z)(z-1)^2}$.

Нули функции $\frac{1}{f(z)} = \frac{(z^2+2z)(z-1)^2}{z+3} = \frac{z(z+2)(z-1)^2}{z+3}$,

$z_1 = 0, z_2 = -2, z_3 = 1$.

$f(z) = \frac{1}{z}\varphi(z), \varphi(z) = \frac{z+3}{(z+2)(z-1)^2}, \varphi(z)$ аналитична в точке

$z_1 = 0, \varphi(0) \neq 0$, следовательно, $z_1 = 0 -$ простой полюс.

$z_2 = -2, f(z) = \frac{1}{z+2}\varphi(z), \varphi(z) = \frac{z+3}{z(z-1)^2}, \varphi(z)$ аналитична в точке $z_2 = -2, \varphi(-2) \neq 0$, следовательно, $z_2 = -2 -$ простой полюс.

$z_3 = 1$. $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}\varphi(z), \varphi(z) = \frac{z+3}{z(z+2)}, \varphi(z)$ аналитична в точке $z_3 = 1, \varphi(1) \neq 0$, следовательно, $z_3 = 1 -$ полюс 2-го порядка.

Теорема 5. Если функция $f(z)$ представима в виде $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ и точка z_0 является нулем порядка m для функции $P(z)$ $(z_0 = \text{Н}(m))$ и нулем порядка l для функции $Q(z)$ $(z_0 = \text{Н}(l))$, то есть $z_0 = \frac{\text{Н}(m)}{\text{Н}(l)}$, то:

1. если $m > l$, то $n = m - l$ есть порядок нуля функции $f(z)$ в точке z_0,

2. если $m < l$, то $n = l - m$ есть порядок полюса функции $f(z)$ в точке z_0,

3. если $m = l$, то z_0 – устранимая особая точка.

Пример 1.

Найти особые точки функции $f(z)$ и установить их тип: $f(z) = \frac{\sin z}{z^2(z-5)^3}$.

Особыми точками функции $f(z)$ являются $z_1 = 0$ и $z_2 = 5$.

$z_1 = 0$. Числитель и знаменатель $f(z)$ обращаются в ноль.

Для числителя $P(z) = sinz$ число $z = 0$ является нулем 1 порядка, так как $P'(z)\,|_{z=0} = \cos z\,|_{z=0} = 1 \neq 0$, то по определению 2 $z = 0$ – простой ноль.

Знаменатель $Q(z) = z^2(z-5)^3$ по теореме 1 в точке $z = 0$ имеет ноль 2-го порядка.

Следовательно, $z_0 = \frac{\text{Н}(1)}{\text{Н}(2)} = \Pi(1)$ – полюс первого порядка (по теореме 5).

В точке $z = 5$ перепишем функцию в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-5)^3}$, где

$\varphi(z) = \frac{\sin z}{z^2}$, $\varphi(5) = \frac{\sin 5}{25} \neq 0$, $\varphi(z)$ аналитична, т.е. $z_2 = \frac{\text{Н}(0)}{\text{Н}(3)} = \Pi(3)$ – полюс 3-го порядка.

Пример 2.

Найти тип особой точки $z_0 = 0$ функции $f(z) = \frac{z}{2+z^2-2chz}$.

$P(z) = z, P(0) = 0, P'(0) = 1 \neq 0, z_0 = \text{Н}(1)$.

$Q(z) = 2 + z^2 - 2chz, Q(0) = 0, Q'(z) = 2z - 2shz, Q'(0) = 0,$

$Q''(z) = 2 - 2chz, Q''(0) = 0, Q'''(z) = -2shz, Q'''(0) = 0,$

$Q^{(4)}(z) = -2chz, Q^{(4)}(0) = -2 \neq 0, z_0 = \text{Н}(4)$.

Итак, $z_0 = \frac{\text{Н}(1)}{\text{Н}(4)} = \Pi(3)$ – полюс 3-го порядка.

Пример 3.

Найти особые точки функции $f(z)$ и установить их тип:

$f(z) = \frac{1-e^{z+1}}{z(z+1)^3}$.

Особыми точками функции $f(z)$ являются $z_1 = 0$ и $z_2 = -1$.

$z_1 = \frac{\text{Н}(0)}{\text{Н}(1)} = \Pi(1)$ – простой полюс.

$z_2 = \frac{\text{Н}(1)}{\text{Н}(3)} = \Pi(2)$ – полюс 2-го порядка.

Определение 5. Точка z_0 называется *существенно особой* точкой, если не существует ни конечного, ни бесконечного предела $f(z)$: $\nexists \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.

Например, для функции $f(z) = sin\frac{1}{z}$ точка $z = 0$ является существенно особой точкой, т.к. $\nexists \lim\limits_{z \to 0} sin\frac{1}{z}$.

5.3. Классификация изолированных особых точек по виду главной части ряда Лорана

Теорема 6. Точка z_0 является *устранимой особой точкой*, если в *разложении* $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 отсутствует главная часть, т.е.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Теорема 7. Точка z_0 является *полюсом функции* $f(z)$, если главная часть разложения в ряд Лорана $f(z)$ в окрестности точки z_0 содержит конечное число слагаемых, т.е. $f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(z-z_0)^k$ $(c_{-n} \neq 0)$, наибольшая степень у разности $(z - z_0)$, стоящей в знаменателях членов главной части ряда Лорана, равна порядку полюса.

Теорема 8. Точка z_0 является *существенно особой точкой* для функции $f(z)$, если главная часть разложения $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности z_0 содержит бесконечно много членов.

В следующих примерах найти все особые точки данных функций и установить их тип.

Пример 1. $f(z) = \frac{1-e^{-z}}{z}$.

Особая точка $f(z)$: $z_0 = 0$, в этой точке функция не определена. Разложим $f(z)$ в окрестности точки $z_0 = 0$, т.е. по степеням z в ряд Лорана:

$$f(z) = \frac{1}{z}\left[1 - (1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^n}{n!} + \ldots\right] =$$

$$= 1 - \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^n}{(n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{(n+1)!}.$$

Это разложение не содержит главной части. Поэтому точка $z_0 = 0$ является устранимой особой точкой.

Пример 2. $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^7}$.

Особая точка $f(z)$: $z_0 = 0$. Используя разложение в ряд Тейлора для функции $\cos z$ в окрестности точки

$z_0 = 0$, получим лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности нуля:

$$f(z) = \frac{1}{z^7}\left[1 - (1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots\right] = \frac{1}{2!\,z^5} - \frac{1}{4!\,z^3} + \frac{1}{6!\,z} - \frac{z}{8!} + \ldots$$

Разложение в ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 содержит конечное число членов с отрицательными степенями z. Следовательно, точка $z_0 = 0$ является полюсом пятого порядка, т. к. наибольший показатель отрицательной степени z равен 5.

<u>Пример 3.</u> $f(z) = (z+3)^3 e^{\frac{1}{z+3}}$.

Используем разложение: $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots$

Сделаем замену $t = z + 3$, получим лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности $z_0 = -3$:

$$f(t) = t^3 \cdot e^{\frac{1}{t}} = t^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,t^n} = t^3\left(1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{2!\,t^2} + \frac{1}{3!\,t^3} + \cdots\right)$$

$$f(z) = (z+3)^3\left[1+\frac{1}{z+3}+\frac{1}{2!\,(z+3)^2}+\frac{1}{3!\,(z+3)^3}+\frac{1}{4!\,(z+3)^4}+\ldots\right] =$$

$$= (z+3)^3+(z+3)^2+\frac{z+3}{2!}+\frac{1}{3!}++\frac{1}{4!\,(z+3)}+\ldots$$

Это разложение содержит бесконечное множество членов с отрицательными степенями $(z+3)$. Следовательно, точка $z_0=-3$ является существенно особой точкой функции $f(z)$.

Таблица классификации изолированных особых точек функции

Типы ИОТ	
По пределу	По ряду Лорана в окрестности ИОТ
Устранимая особая точка $\boldsymbol{z_0}$:	
$\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = c_0$	Ряд Лорана не содержит главной части, т.е. $f(z) = c_0 + c_1(z - z_0)+\ldots$
Полюс порядка n:	
$\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$	Главная часть ряда Лорана конечна, n – старшая степень $(z - z_0)$ в знаменателе
Существенно особая точка $\boldsymbol{z_0}$	
$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не существует	Главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число слагаемых

Математический анализ-3 семестр

Лекция 15

Тема 6. Вычеты функций

6.1. Вычет функции в изолированной особой точке

6.2. Вычет функции в бесконечно удаленной точке

6.1. Вычет функции в изолированной особой точке

Рассмотрим точку z_0 − изолированную особую точку функции $f(z)$. Тогда существует R: в кольце $0 < |z - z_0| < R$ $f(z)$ − аналитична, разложима в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

C – любой замкнутый контур, принадлежащий кольцу
$0 < |z - z_0| < R$.

Определение 1. *Вычетом* аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется комплексное число, обозначаемое $resf(z_0) = res_{z_0}f(z)$ и определяемое равенством $res_{z_0}f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$, где C – любой контур, лежащий в области аналитичности функции $f(z)$, содержащий внутри себя единственную особую точку z_0 функции $f(z)$.

Замечание 1. Если точка z_0 – правильная, то интеграл в правой части определения равен нулю (по теореме Коши), следовательно, вычет функции в правильной точке равен нулю.

Замечание 2. Так как

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,$$

$$c_n|_{n=-1} = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz = resf(z_0)$$

то есть $resf(z_0) = c_{-1}$.

Определение 2. Вычетом аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется коэффициент при $(z-z_0)^{-1}$ в разложении $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

Формулы для вычисления вычетов функции $f(z)$:

1. Если z_0 – правильная точка функции $f(z)$, то $resf(z_0) = 0$.

2. Если z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$, то $resf(z_0) = 0$ (в ряде Лорана нет главной части,

$c_{-1} = 0$).

3. Если z_0 – простой полюс, то ряд Лорана имеет вид:

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

$$f(z)(z - z_0) = c_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n+1}$$

$$\lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0) = c_{-1}, \qquad res f(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0)$$

4. Если $f(z)$ в окрестности точки z_0 представима как частное двух аналитических функций $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\Psi(z)}$, причем $\varphi(z_0) \neq 0$, $\Psi(z_0) = 0$, $\Psi'(z_0) \neq 0$, т.е. z_0 – простой полюс функции $f(z)$, $z_0 = \frac{\text{Н}(0)}{\text{Н}(1)} = \Pi(1)$, то

$$res f(z_0) = res_{z_0} \frac{\varphi(z)}{\Psi(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{\varphi(z)}{\Psi(z)}(z - z_0) =$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{\varphi(z)}{\dfrac{\Psi(z) - \Psi(z_0)}{z - z_0}} = \frac{\varphi(z)}{\Psi'(z_0)}$$

5. Если z_0 – полюс порядка n функции $f(z)$, то ряд Лорана имеет вид:

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

$$f(z)(z-z_0)^n = c_{-n} + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{n-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^{k+n}$$

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[f(z)(z-z_0)^n] = (n-1)!\, c_{-1} + n!\, c_0 (z-z_0) + \cdots, \text{при } z \to z_0$$

$$c_{-1} = res f(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[f(z)(z-z_0)^n].$$

6. Если точка z_0 – существенно особая точка функции $f(z)$, то для нахождения необходимо найти коэффициент c_{-1} в лорановском разложении функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 ($res f(z_0) = c_{-1}$).

Примеры. Найти вычеты функции в ее особых точках.

1) $f(z) = \dfrac{1}{z - z^3} = \dfrac{1}{z(1-z)(1+z)}$

Особыми точками функции $f(z)$ являются точки

$z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = -1$, это простые полюса.

В точке $z_1 = 0$

$$\underset{z_1=0}{res} f(z) = \lim_{z\to 0}(f(z)\cdot z) = \lim_{z\to 0}\frac{1}{(1-z)(1+z)} = 1$$

В точке $z_2 = 1$

$$\underset{z_2=1}{res} f(z) = \lim_{z\to 1}(f(z)\cdot(z-1)) = \lim_{z\to 1}\frac{-1}{z(1+z)} = -\frac{1}{2}$$

В точке $z_3 = -1$

$$\underset{z_3=-1}{res} f(z) = \lim_{z\to -1}(f(z)\cdot(z+1)) = \lim_{z\to -1}\frac{1}{z(1-z)} = -\frac{1}{2}$$

2) $f(z) = \dfrac{cosz - 1}{z^2(z-\pi)}$

Особыми точками функции $f(z)$ являются точки $z_1 = 0$, $z_2 = \pi$.

В точке $z = 0$

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{cosz-1}{z^2(z-\pi)} = \lim_{z\to 0}\frac{-z^2}{2z^2(z-\pi)} = \frac{1}{2\pi}.$$

Следовательно, $z = 0$ – устранимая особая точка и $\underset{z=0}{res} f(z) = 0$.

В точке $z = \pi$ имеем полюс первого порядка. Тогда

$$\underset{z=\pi}{res} f(z) = \lim_{z\to\pi} \frac{(cosz - 1)(z - \pi)}{z^2(z - \pi)} = \frac{-1 - 1}{\pi^2} = -\frac{2}{\pi^2}.$$

3) $f(z) = \dfrac{z^2}{z^3 + 1}$

Особые точки функции $f(z)$ – нули знаменателя, т.е. корни уравнения $z^3 + 1 = 0$. Решая это уравнение, получим

$$z_k = e^{\frac{i(\pi+2k\pi)}{3}}, k = -1,0,1,$$

т.е. $z_1 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ $(k = -1)$, $z_2 = e^{\frac{i\pi}{3}}$ $(k = 0)$, $z_3 = e^{i\pi}$ $(k = 1)$ – нули первого порядка знаменателя, т.е. полюса первого порядка функции $f(z)$.

$$\underset{z=z_k}{res} f(z) = \frac{z^2}{3z^2} \Big|_{z=z_k} = \frac{1}{3},$$

т.е. вычеты по всех особых точках функции z_k равны $\frac{1}{3}$.

3) $f(z) = \dfrac{z^4}{z^4+1}$

Особые точки функции $f(z)$ – нули знаменателя, т.е. корни уравнения

$z^4 + 1 = 0$. Решая это уравнение, получим $z_k = e^{\frac{i(\pi+2k\pi)}{4}}$, $k = 0,1,2,3$,

т.е. $z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ $(k=0)$, $z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ $(k=1)$,

$z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}}$ $(k=2)$, $z_3 = e^{i\frac{7\pi}{4}}$ $(k=3)$ – нули первого порядка знаменателя, т.е. полюса первого порядка функции $f(z)$,

$z_k = \frac{\text{Н}(0)}{\text{Н}(1)} = \Pi(1)$. Воспользуемся формулой из п.4.

$$\underset{z=z_k}{res} f(z) = \frac{z^4}{4z^3}\Big|_{z=z_k} = \frac{z_k}{4}$$

$$\underset{z=z_0}{res} f(z) = \frac{\sqrt{2}}{8} + i\frac{\sqrt{2}}{8}, \quad \underset{z=z_1}{res} f(z) = -\frac{\sqrt{2}}{8} + i\frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$\underset{z=z_2}{res} f(z) = -\frac{\sqrt{2}}{8} - i\frac{\sqrt{2}}{8}, \quad \underset{z=z_3}{res} f(z) = \frac{\sqrt{2}}{8} - i\frac{\sqrt{2}}{8}$$

5) $f(z) = \dfrac{1}{z^5 + 4z^3}$

Особые точки функции находятся из уравнения $z^5 + 4z^3 = 0$ или $z^3(z+2i)(z-2i) = 0$.

$z_1 = 0$ – полюс третьего порядка,

$z_{2,3} = \pm 2i$ – полюса первого порядка.

Найдем вычеты в точках $z_2,\ z_3$

$$\underset{z=2i}{res} f(z) = \lim_{z \to 2i} \frac{(z-2i)}{z^3(z+2i)(z-2i)} = \frac{1}{(2i)^3 4i} = \frac{1}{32}$$

$$\underset{z=-2i}{res} f(z) = \lim_{z \to -2i} \frac{(z+2i)}{z^3(z+2i)(z-2i)} = \frac{1}{(-2i)^3(-4i)} = \frac{1}{32}$$

и в точке z_1 по формуле вычисления вычета в полюсе 3-го порядка:

$$\underset{z=0}{res} f(z) = \frac{1}{2!} \lim_{z \to 0} \frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1 \cdot z^3}{z^3(z^2+4)}\right] = \frac{1}{2} \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz}\left[-\frac{2z}{(z^2+4)^2}\right] =$$

$$= -\lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} \frac{z}{(z^2+4)^2} = -\lim_{z \to 0} \frac{-3z^2+4}{(z^2+4)^3} = -\frac{1}{16}$$

6) $f(z)=\frac{sinz^2}{z^3-\frac{\pi}{4}z^2}=\frac{sinz^2}{z^2(z-\frac{\pi}{4})}$

Особые точки функции $f(z)$ – $z_1=0, z_2=\frac{\pi}{4}$.

$z_1=0$ является нулем второго порядка для знаменателя.

Рассмотрим числитель:

$$sinz^2|_{z=0}=0, (sinz^2)'=2zcosz^2|_{z=0}=0,$$

$$(sinz^2)''=2cosz^2-2z\cdot 2z(-sinz^2)|_{z=0}=2\neq 0$$

следовательно, для числителя точка $z_1=0$ является также нулем второго порядка.

Итак, $z_1=\frac{\text{Н}(2)}{\text{Н}(2)}=$ УОТ – устранимая особая точка. $\underset{z_1=0}{res}f(z)=0$.

$z_2=\frac{\pi}{4}$ является нулем первого порядка для знаменателя,

$sinz^2|_{z=\frac{\pi}{4}}\neq 0$, следовательно, $z_2=\frac{\text{Н}(0)}{\text{Н}(1)}=\Pi(1)$ – полюс первого порядка.

$$\underset{z_2}{res}f(z)=\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}f(z)\left(z-\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\frac{sinz^2}{z^2}=\frac{16}{\pi^2}sin\frac{\pi^2}{16}.$$

6) $f(z)=\dfrac{sin2z}{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3}$

Особая точка функции $f(z)$: $z=\frac{\pi}{4}=\frac{\text{Н}(0)}{\text{Н}(3)}=\text{П}(3)$ – полюс третьего порядка.

$$\underset{\frac{\pi}{4}}{res}f(z)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\frac{d^2}{dz^2}\left(f(z)\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3\right)=$$

$$=\frac{1}{2!}\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\frac{d^2}{dz^2}(sin2z)=\frac{1}{2}\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}(-4sin2z)=-2.$$

8) $f(z)=z^3\cdot sin\dfrac{1}{z^2}$

Особая точка функции $f(z)$: $z=0$.

Она является существенно особой точкой функции $f(z)$. Чтобы убедиться в этом, достаточно выписать лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности точки $z=0$:

$$f(z)=z^3\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!\,z^6}+\frac{1}{5!\,z^{10}}-\ldots\right)=z-\frac{1}{3!\,z^3}+\frac{1}{5!\,z^7}+\ldots$$

Оно содержит бесконечное число членов в главной части. Вычет функции в точке $z=0$ есть коэффициент $c_{-1} = 0$, т.е. $\underset{z=0}{res} f(z) = 0$.

9) $f(z) = (z-2)^2 \cdot e^{\frac{1}{z-2}}$

Особая точка функции $f(z)$: $z = 2$.

Она является существенно особой точкой функции $f(z)$. Чтобы убедиться в этом, достаточно выписать лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности точки $z = 2$:

$$f(z) = (z-2)^2 \left(1 + \frac{1}{z-2} + \frac{1}{2!\,(z-2)^2} + \frac{1}{3!\,(z-2)^3} + \dots\right) =$$

$$= (z-2)^2 + (z-2) + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!\,(z-2)} + \dots$$

Оно содержит бесконечное число членов в главной части. Вычет функции в точке $z = 2$ есть коэффициент $c_{-1} = \frac{1}{6}$, т.е. $\underset{z=2}{res} f(z) = \frac{1}{6}$.

10) $f(z) = \dfrac{z+2}{z^3 - z^4} = \dfrac{z+2}{z^3(1-z)}$

Особые точки функции: $z_1 = 0, z_2 = 1$.

$$z_1 = \frac{\text{Н}(0)}{\text{Н}(3)} = \Pi(3), \quad z_2 = \frac{\text{Н}(0)}{\text{Н}(1)} = \Pi(1)$$

$$\underset{z_1}{res} f(z) = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}(f(z)z^3)'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{1-\text{z}+\text{z}+2}{(1-z)^2}\right)' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{6}{(1-z)^3} = 3$$

$$\underset{z_2}{res} f(z) = \lim_{z\to 1} -\frac{z+2}{z^3} = -3$$

11) $f(z) = \dfrac{3z^6 + z^2 + 1}{z^7}$

Особая точка функции $f(z)$: $z = 0 = \frac{\text{Н}(0)}{\text{Н}(7)} = \Pi(7)$.

Преобразуем функцию, поделив почленно на z^7:

$$f(z) = \frac{3}{\text{z}} + \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^7}$$

получили разложение в ряд Лорана по степеням z. Вычет функции в точке $z = 0$ есть коэффициент $c_{-1} = 3$, т.е. $\underset{z=0}{res} f(z) = 3$.

6.2. Вычет функции в бесконечно удаленной точке

В теории функции комплексного переменного кроме конечных комплексных

чисел вводится понятие бесконечного комплексного числа, называемого *бесконечно удаленной точкой*.

ε-окрестностью точки $z = \infty$ называется внешность круга радиуса ε с центром в начале координат: $|z| > \varepsilon$. Для точки $z = \infty$ нет понятия действительной и мнимой частей, отсутствует понятие аргумента, $|\infty| = +\infty$.

Определение 2. Функция $f(z)$ аналитична в бесконечно удаленной точке $z = \infty$, если функция $g(\zeta) = \mathrm{f}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ аналитична в $\zeta = 0$.

Например, $f(z) = sin\frac{1}{z}$, $g(\zeta) = \sin\zeta -$ аналитична в т. $\zeta = 0$. Следовательно, $f(z) = sin\frac{1}{z}$ аналитична в т. $z = \infty$.

Определение 3. Точка $z = \infty$ называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если в некоторой окрестности этой точки нет других особых точек функции $f(z)$.

Например, $f(z) = \frac{1}{sinz}$, особые точки: $sinz = 0, z_k = \pi k -$ полюсы. При $k \to \infty$ полюсы накапливаются в бесконечности, следовательно, не являются ИОТ.

Определение 4. Если $\zeta = 0$ – правильная, устранимая, полюс или существенно особая точка функции

$g(\zeta)$, то точка $z = \infty$ называется правильной, устранимой, полюсом или существенно особой точкой функции $f(z)$.

Определение 5. Вычетом аналитической функции $f(z)$ в точке $z = \infty$ называется комплексное число, равное значению интеграла

$res\ f(\infty) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^-} f(z)dz$ по любому замкнутому контуру, проходимому по часовой стрелке, вне которого функция аналитична и не имеет особых точек, отличных от $z = \infty$, т.е.

$$res_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^-} f(z)dz = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} f(z)dz\,,$$

$$res_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}.$$

Примеры.

1) $f(z) = \frac{z+1}{z}$. Найти $res_{z=\infty} f(z)$.

Сделаем замену $z = \frac{1}{\zeta}, f(\zeta) = \frac{\frac{1}{\zeta}+1}{\frac{1}{\zeta}} = 1 + \zeta$. $\zeta = 0$ $(z = \infty)$ – устранимая особая точка.

$f(z) = 1 + \frac{1}{z}, c_{-1} = 1, res_{z=\infty} f(z) = -1.$

Если $z = \infty$ - устранимая особая точка, вычет в ней не обязательно равен нулю!

2) Найти вычет в $z = \infty$ для функции $f(z) = \cos z$.

Сделаем замену $z=\frac{1}{\zeta}$, тогда лорановское разложение $\cos\frac{1}{\zeta}$ в окрестности точки $z=\infty$ $(\zeta=0)$ имеет вид

$$g(\zeta)=\cos\frac{1}{\zeta}=1-\frac{1}{2!\,\zeta^2}+\frac{1}{4!\,\zeta^4}-\cdots,$$

т.е. $\zeta=0$ – существенно особая точка.

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots,$$

Коэффициент c_{-1} в разложении $\cos z$ равен нулю: $c_{-1}=0$, т.е. $res_{z=\infty}f(z)=0$.

Теорема 1. Если функция $f(z)$ аналитична на полной комплексной плоскости за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1,z_2,\dots,z_{n-1},z_n=\infty$, то $\sum_{k=1}^{n}res_{z_k}f(z)=0$ или $res_{\infty}f(z)=-\sum_{k=1}^{n-1}res_{z_k}f(z)$.

Математический анализ-3 семестр

Лекция 16

Тема 7. Приложения теории вычетов

7.1. Основная теорема о вычетах

7.2. Вычисление несобственных интегралов

7.1. Основная теорема о вычетах

Теорема 1. Если функция $f(z)$ аналитична всюду внутри замкнутой области D, ограниченной контуром L, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_{1,} z_{2,} \dots, z_n$, лежащих внутри D, тогда

$$\oint_L f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z_k}{res} f(z).$$

Доказательство. Все особые точки $z_k \in D$, лежащие внутри контура L, окружим контурами l_k так, чтобы l_k не пересекались и целиком лежали в D. По следствию из теоремы Коши для многосвязной области интеграл по внешнему контуру L равен сумме интегралов по внутренним контурам $l_1, \dots, l_n$ при условии, обход всех контуров совершается в одном направлении. По определению вычета:

$$\oint_{l_1} f(z)dz = 2\pi i \cdot res f(z_1)$$

$$\oint_{l_2} f(z)dz = 2\pi i \cdot res f(z_2)$$

$$\vdots$$

$$\oint_{l_n} f(z)dz = 2\pi i \cdot res f(z_n)$$

Просуммируем равенства:

$$\sum_{k=1}^{n} \oint_{l_k} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res f(z_k)$$

$$\oint_{L} f\,(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z_k}{res}\, f(z).$$

__Примеры.__ Вычислить интеграл с помощью основной теоремы о вычетах.

1). $\int_{|z+2|=1} \dfrac{dz}{(z+2)^2(z^2+1)}$

Особые точки подынтегральной функции определяются из уравнения

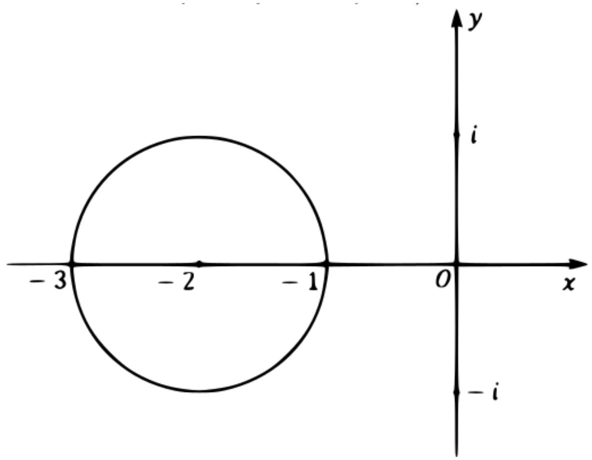
$(z+2)^2(z^2+1) = 0.$

$z_1 = -2$ – полюс второго порядка,

$z_{2,3} = \pm i$ – полюса первого порядка.

Внутри окружности $|z+2| = 1$ лежит одна точка $z = -2$, поэтому по основной теореме о вычетах

$$\int_{|z+2|=1} \frac{dz}{(z+2)^2(z^2+1)} = 2\pi i \cdot \underset{z=-2}{res} f(z).$$



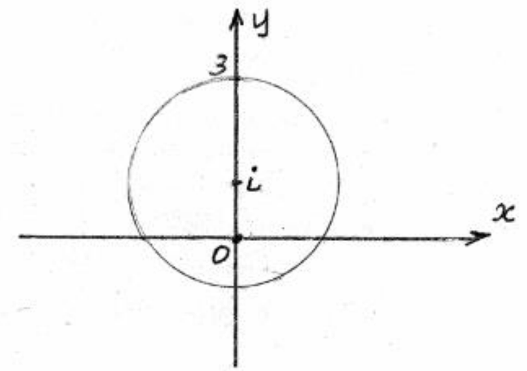
$z = -2$ является полюсом 2 порядка для функции $f(z)$.

$$\underset{z=-2}{res} f(z) = \frac{1}{1!} \lim_{z\to -2} \frac{d}{dz}\left[\frac{(z+2)^2}{(z+2)^2(z+i)(z-i)}\right] = \lim_{z\to -2} \frac{-2z}{(z^2+1)^2} = \frac{4}{25}.$$

Поэтому

$$\int_{|z+2|=1} \frac{dz}{(z+2)^2(z^2+1)} = \frac{8\pi i}{25}.$$

2). $\int_{|z-i|=2} z^2 e^{\frac{1}{z}} dz$



В области $D: |z-i| < 2$ функция

$f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$ имеет одну особую точку $z = 0$. Это существенно особая точка, так как ее лорановское разложение в окрестности $z = 0$ имеет вид:

$$f(z) = z^2\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{4!\,z^4} + \cdots\right) =$$

$$= z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!\,z} + \frac{1}{4!\,z^2} + \cdots$$

Оно содержит бесконечное число членов в главной части. Вычет в точке $z = 0$ равен коэффициенту

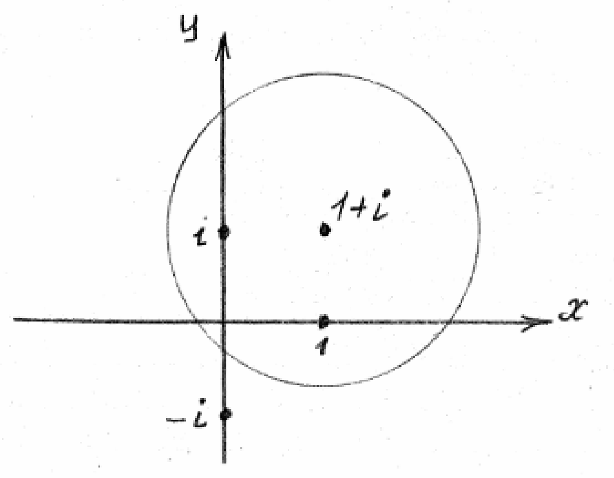
$$c_{-1} = \frac{1}{3!},$$

$$\text{т. е.}\, res_{z=0} f(z) = \frac{1}{3!}.$$

По основной теореме о вычетах

$$\int_{|z-i|=2} z^2 e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \cdot res_{z=0} f(z) = \frac{2\pi i}{3!} = \frac{\pi i}{3}.$$

3). $\int_{|z-1-i|=\sqrt{2}} \left(\frac{1}{(z-1)^2(\mathrm{z}^2+1)}\right) dz$



Особые точки подынтегральной функции определяются из уравнения

$(z-1)^2(\mathrm{z}^2+1) = 0.$

$z_1 = 1 = \frac{\text{Н}(0)}{\text{Н}(2)} = \text{П}(2)$ – полюс второго порядка,

$z_{2,3} = \pm i = \frac{\text{Н}(0)}{\text{Н}(1)} = \text{П}(1)$ – полюса первого порядка,

$z_3 = -i$ не принадлежит D: $|z - 1 - i| < \sqrt{2}$.

$$\underset{z=1}{res} f(z) = \lim_{z \to 1} \left(\frac{1}{(\text{z}^2 + 1)} \right)' = \lim_{z \to 1} - \frac{2z}{(\text{z}^2 + 1)^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\underset{z=i}{res} f(z) = \lim_{z \to i} \frac{1}{(z - 1)^2 (\text{z} + i)} = \frac{1}{(i - 1)^2 \cdot 2i} = \frac{1}{2i(-1 - 2i + 1)} = \frac{1}{4}$$

По основной теореме о вычетах

$$\int_{|z-1-i|=\sqrt{2}} \left(\frac{1}{(z - 1)^2 (\text{z}^2 + 1)} \right) dz = 2\pi i \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{\pi i}{2}.$$

4). $\int_{|z|=2} \text{tgz} dz$

Особые точки подынтегральной функции определяются из уравнения

$\cos z = 0, z = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ \ \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \in D. \ \ \frac{\text{Н}(0)}{\text{Н}(1)} = \text{П}(1) -$ простые полюсы.

$$\underset{z=\pm\frac{\pi}{2}}{res} f(z) = \frac{sinz}{(cosz)'}\bigg|_{z=\pm\frac{\pi}{2}} = \frac{sinz}{-sinz}\bigg|_{z=\pm\frac{\pi}{2}} = -1$$

$$\int_{|z|=2} \text{tg}z dz = 2\pi i(-2) = -4\pi i.$$

5). $\int_{|z-i|=\frac{3}{2}} \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1} dz$

В области $D: |z-i| < \frac{3}{2}$ функция

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1}$$

имеет две особые точки:

$z_1 = 0, z_2 = i.$

$z_1 = 0 -$ существенно особая точка, так как лорановское разложение функции в окрестности $z = 0$ имеет вид:

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} \cdot e^{\frac{1}{z^2}} =$$

$$= (1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots)\left(1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!\,z^4} + \frac{1}{3!\,z^6} + \frac{1}{4!\,z^8} + \cdots\right) =$$

$$= 1 - z^2 + z^4 + \cdots + \frac{1}{z^2} - 1 + z^2 + \cdots + \frac{1}{2!\,z^4} - \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{2!} + \cdots$$

Оно содержит бесконечное число членов в главной части. Вычет в точке $z = 0$ равен коэффициенту $c_{-1} = 0$, т.е. $res_{z=0} f(z) = 0$.

$z_2 = i$: $\frac{\text{Н}(0)}{\text{Н}(1)} = \text{П}(1)$ – простой полюс.

$$\underset{z=i}{res} f(z) = \left.\frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{2z}\right|_{z=i} = \frac{e^{-1}}{2i}$$

$$\int_{|z-i|=\frac{3}{2}} \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1} dz = 2\pi i \cdot \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}.$$

6). $\int_{|z+3|=2} \text{z} \cdot e^{\frac{1}{z+3}} dz$

Особая точка подынтегральной функции $z = -3$ – существенно особая точка. Разложим функцию в ряд Лорана в окрестности точки $z = -3$.

Замена: $z + 3 = t, z = t - 3$.

$$f(t) = (t-3)e^{\frac{1}{t}} = (t-3)\left(1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{2!\,t^2} + \frac{1}{3!\,t^3} + \cdots\right) =$$

$$= t - 3 + 1 - \frac{3}{t} + \frac{1}{2t} - \frac{3}{2t^2} + \frac{1}{3!\,t^2} - \frac{3}{3!\,t^3} + \cdots$$

$$f(z) = (z+3) - 2 + \frac{1}{z+3}\left(\frac{1}{2} - 3\right) + \frac{1}{(z+3)^2}\left(\frac{1}{6} - \frac{3}{2}\right) + \cdots$$

$$\underset{z=-3}{res} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$$

$$\int_{|z+3|=2} \mathrm{z} \cdot e^{\frac{1}{z+3}} dz = 2\pi i\left(-\frac{5}{2}\right) = -5\pi i.$$

7). $\int_{|z|=3} \frac{dz}{z^5 + 4z^3}$

Подынтегральная функция $f(z) = \frac{1}{z^3(\mathrm{z}^2+4)}$ внутри окружности

$|z| = 3$ имеет три особые точки

$z_1 = 0 - \Pi(3)$, $z_2 = 2i - \Pi(1)$, $z_3 = -2i - \Pi(1)$.

Использование основной теоремы о вычетах приводит к громоздким вычислениям. Удобнее воспользоваться формулой:

$$I = -2\pi i \cdot res_{\infty} f(z).$$

Выпишем лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty$:

$$f(z) = \frac{1}{z^5 + 4z^3} = \frac{1}{z^5} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4}{z^2}} = \frac{1}{z^5}\left(1 - \frac{4}{z^2} + \frac{4^2}{z^4} - \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{z^5} - \frac{4}{z^7} + \frac{16}{z^9} - \cdots$$

Коэффициент $c_{-1} = 0$, т.е. $res_{\infty} f(z) = 0$, следовательно

$$\int_{|z|=4} \frac{dz}{z^6 + 9z^4} = 0.$$

8). $\int_{|z|=3} \frac{z^7}{(z^2+2)(z^3+3)} dz$

Подынтегральная функция $f(z)=\frac{z^7}{(z^2+2)(z^3+3)}$ внутри окружности $|z|=3$ имеет пять особых точек: $z_{1,2}=\pm\sqrt{2}i, z_{3,4,5}=\sqrt[3]{-3}$.

Выпишем лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки $z=\infty$:

$$f(z)=z^7\cdot\frac{1}{z^2+2}\cdot\frac{1}{z^3+3}=z^7\cdot\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{z^2}}\cdot\frac{1}{z^3}\cdot\frac{1}{1+\frac{3}{z^3}}=$$

$$=z^2\left(1-\frac{2}{z^2}+\frac{2^2}{z^4}-\frac{2^3}{z^6}+\cdots\right)\left(1-\frac{3}{z^3}+\frac{3^2}{z^6}-\cdots\right)=$$

$$=z^2\left(1-\frac{2}{z^2}+\frac{2^2}{z^4}-\frac{3}{z^3}+\frac{6}{z^5}-\frac{4\cdot 3}{z^7}+\frac{9}{z^6}+\cdots\right)$$

$c_{-1}=-3, res_\infty f(z)=3$

$$I=-2\pi i\cdot res_\infty f(z)=-2\pi i\cdot 3=-6\pi i.$$

<u>7.2. Вычисление несобственных интегралов</u>

<u>7.2.1. Интегралы от рациональных функций.</u>

Теорема 2. Если $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$, $Q(x)$ – многочлены, причем все корни знаменателя комплексные и степень $Q(x)$ «m» хотя бы на две единицы больше степени $P(x)$ «n» $(m - n \geq 2)$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res_{z_k} F(z),$$

где

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

и z_k – полюсы функции $F(z)$, лежащие в верхней полуплоскости.

Пример.

Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 9)^2}.$$

Так как подынтегральная функция

$$F(x) = \frac{x^2}{(x^2 + 9)^2}$$

– четная, то

$$I=\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+9)^2}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+9)^2}.$$

Введем функцию

$$F(z)=\frac{z^2}{(z^2+9)^2}$$

(заменили переменную x на z). Т.е. на действительной оси при $z=x$ $F(z)=F(x)$. Функция $F(z)$ имеет две особые точки $z_1=3i$, $z_2=-3i$ – это полюса второго порядка. В верхней полуплоскости находится точка $z=3i$. Условия теоремы 2 для функции $F(z)$ выполнены. Вычислим $res_{z=3i}F(z)$.

$$res_{z=3i}F(z)=\lim_{z\to 3i}\frac{d}{dz}[F(z)(z-3i)^2]=$$

$$=\lim_{z\to 3i}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2(z-3i)^2}{(z-3i)^2(z+3i)^2}\right]=\lim_{z\to 3i}\frac{d}{dz}\frac{z^2}{(z+3i)^2}=$$

$$=\lim_{z\to 3i}\frac{2z(z+3i)^2-2z^2(z+3i)}{(z+3i)^4}=$$

$$= \lim_{z \to 3i} \frac{6iz}{(z+3i)^3} = \frac{-18}{-6^3 i} = \frac{1}{12i}.$$

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+9)^2} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot res_{z=3i}F(z) = \frac{\pi i}{12i} = \frac{\pi}{12}.$$

7.3.2. Вычисление интегралов с тригонометрическими функциями вида

$$\int_0^{+\infty} R(x)\cos\alpha x\, dx, \quad \int_0^{+\infty} R(x)\sin\alpha x\, dx$$

где $R(x)$ – правильная рациональная дробь, $\alpha > 0$ – любое вещественное число.

Пусть функция $f(z)$ удовлетворяет следующим двум условиям:

1) $f(z)$ аналитическая в верхней полуплоскости и на действительной оси, кроме конечного числа полюсов, лежащих в верхней полуплоскости;
2) При $z \to \infty$ в верхней полуплоскости и на действительной оси $zf(z) \to 0$ равномерно по аргументу z, т.е. $max_{z \in C_R}|zf(z)| \to 0$ при $R \to \infty$, контур C_R $-$ полуокружность $|z| = R$ в верхней полуплоскости. При этом справедливо равенство:

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} res\, f(z_k).$$

Здесь

$$\sum_{k=1}^{n} res\, f(z_k)$$

– сумма вычетов $f(z)$ относительно полюсов, лежащих в верхней полуплоскости.

Разобьем интервал $(-R, R)$ на части $(-R, 0)$ и $(0, R)$ и заменим в первом из интегралов x на $-x$. В результате получим

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{0}^{R} \big(f(x) + f(-x)\big)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} res\, f(z_k)$$

Следовательно,

$$\int_{0}^{+\infty} (f(x) + f(-x))dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} res\, f(z_k).$$

Используем полученный результат в частном случае, когда подынтегральная функция имеет вид: $f(z) = F(z) \cdot e^{iaz},\ a > 0$, где функция $F(z)$ удовлетворяет двум условиям 1) и 2).

Тогда этим же условиям будет удовлетворять и функция $f(z)$. Тогда

$$\int_0^{+\infty} \left(F(x) \cdot e^{iax} + F(-x) \cdot e^{-iax}\right) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res\left[F(z_k) \cdot e^{iaz_k}\right].$$

Пусть $F(z)$ – *четная* функция, т.е. $F(-z) = F(z)$, тогда

$$\int_0^{+\infty} F(x) \cos ax\, dx = \pi i \sum_{k=1}^{n} res\left[F(z_k) \cdot e^{iaz_k}\right].$$

Аналогично, если $F(z)$ – *нечетная* функция, т.е. $F(-z) = -F(z)$, тогда

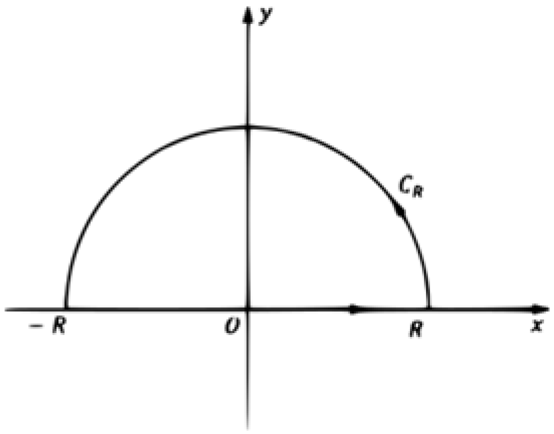
$$\int_0^{+\infty} F(x) \sin ax\, dx = \pi \sum_{k=1}^{n} res\left[F(z_k) \cdot e^{iaz_k}\right].$$

Следующая лемма позволяет ослабить условия 1)-2), наложенные на функцию $F(z)$.

Лемма Жордана. Если функция $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости за исключением конечного числа изолированных особых точек и стремится в этой полуплоскости к нулю при $|z| \to \infty$, тогда при $\alpha > 0$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{i\alpha z} f(z)dz = 0\,,$$

где контур C_R – полуокружность $|z| = R$ в верхней полуплоскости.



Теорема 3. Если функция $f(z)$, заданная на всей действительной оси, может быть продолжена на верхнюю полуплоскость и полученная функция $f(z)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана и не имеет особых точек на действительной оси, тогда при $a > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res_{z_k}[f(z)e^{i\alpha z}],$$

где z_k – особые точки функции $f(z)$ в верхней полуплоскости.

Так как согласно формуле Эйлера $e^{i\alpha x} = \cos\alpha x + i\sin\alpha x$, т.е. $\cos \alpha x = Re(e^{i\alpha x})$, $\sin \alpha x = Im(e^{i\alpha x})$, то:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \alpha x \, dx = Im\left[2\pi i \sum_{k=1}^{n} res_{z_k}\left(f(z)e^{i\alpha z}\right)\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) cos\ \alpha x \, dx = Re\left[2\pi i \sum_{k=1}^{n} res_{z_k}\left(f(z)e^{i\alpha z}\right)\right], \qquad (Im\ z_k > 0).$$

<u>Примеры.</u>

1). Вычислить

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^2+1} dx.$$

Введем вспомогательную функцию $F(z) = \frac{e^{i3z}}{z^2+1^2}$. Если $z = x$, то $Re\, F(x)$ совпадает с подынтегральной функцией $f(x) = \frac{\cos 3x}{x^2+1}$. Так как подынтегральная функция $f(x)$ четная, то

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} Re\left(2\pi i \sum_{k=1}^{n} res_{z_k} F(z)\right), Im\ z_k > 0.$$

Функция $\frac{1}{z^2+1}$ при стремлении $|z| \to \infty$ стремится к нулю и не имеет особых точек на действительной оси, т.е. удовлетворяет условиям леммы Жордана.

$z = i$ – особая точка функции $F(z)$, находится в верхней полуплоскости и является простым полюсом.

$z = -i$ – также особая точка $F(z)$, находится в нижней полуплоскости и в вычислении интеграла не используется.

Вычислим вычет в точке $z = i$

$$res_{z=i}\left(\frac{e^{i3z}}{z^2+1}\right) = \lim_{z\to i}\frac{e^{i3z}}{z^2+1}(z-i) = \lim_{z\to i}\frac{e^{i3z}}{z+i} = \frac{e^{-3}}{2i} = \frac{-i}{2e^3}.$$

$$I = \frac{1}{2}Re\left(2\pi i\cdot\frac{-i}{2e^3}\right) = \frac{\pi}{2e^3}$$

2). Вычислить

$$I = \int_0^\infty \frac{x\sin 2x}{x^2+9}dx.$$

Введем вспомогательную функцию $F(z) = \frac{ze^{i2z}}{z^2+3^2}$. Если $z = x$, то $Im\,F(x)$ совпадает с подынтегральной функцией $f(x) = \frac{x\sin 2x}{x^2+9}$. Так как подынтегральная функция $f(x)$ четная, то

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2+9} dx = \frac{1}{2} Im\left(2\pi i \sum_{k=1}^{n} res_{z_k} F(z)\right), Im\, z_k > 0$$

Функция $\frac{z}{z^2+9}$ при стремлении $|z| \to \infty$ стремится к нулю и не имеет особых точек на действительной оси, т.е. удовлетворяет условиям леммы Жордана. По теореме 3 получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i2x}}{x^2+9} dx = 2\pi i \cdot res_{z=3i}\left(\frac{ze^{i2z}}{z^2+9}\right).$$

$z = 3i$ – особая точка функции $F(z)$, находится в верхней полуплоскости и является простым полюсом.

$z = -3i$ – также особая точка $F(z)$, находится в нижней полуплоскости и в вычислении интеграла не используется.

Вычислим вычет в точке $z = 3i$

$$res_{z=3i}\left(\frac{ze^{i2z}}{z^2+9}\right) = \lim_{z\to 3i} \frac{ze^{i2z}}{z^2+9}(z-3i) =$$

$$= \lim_{z\to 3i} \frac{ze^{i2z}}{z+3i} = \frac{3ie^{-6}}{6i} = \frac{1}{2e^6}.$$

Подставляя полученное значение, получим

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin 2x}{x^2+9}dx = \frac{1}{2}\cdot Im\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i2x}}{x^2+9}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot Im\left[2\pi i\cdot res_{z=3i}\frac{\left(ze^{i2z}\right)}{z^2+9}\right] = \frac{1}{2}\cdot Im\left[2\pi i\frac{1}{2e^6}\right] = \frac{\pi}{2e^6}.$$