Пример.

Метод Гаусса.

Решить систему уравнений вида: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right)$

Прямой ход:

I итерация.

Определяем новые коэффициенты в первой строке:

$$c_{11} = \frac{a_{11}}{a_{11}} = 1, \quad c_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = -2, \quad c_{13} = \frac{a_{13}}{a_{11}} = 1, \quad g_1 = \frac{b_1}{a_{11}} = 0$$

Коэффициенты для второй и третьей строк:

$$a_{21}^{(1)} = a_{21} - a_{21} \cdot \frac{a_{11}}{a_{11}} = 2 - 2 = 0 \qquad a_{31}^{(1)} = a_{31} - a_{31} \frac{a_{11}}{a_{11}} = 4 - 4 \cdot \frac{1}{1} = 0$$

$$a_{22}^{(1)} = a_{22} - a_{21} \cdot \frac{a_{12}}{a_{11}} = 2 - 2\frac{(-2)}{1} = 6 \qquad a_{32}^{(1)} = a_{32} - a_{31} \frac{a_{12}}{a_{11}} = -1 - 4\frac{(-2)}{1} = 7$$

$$a_{23}^{(1)} = a_{23} - a_{21} \frac{a_{13}}{a_{11}} = -1 - 2 \cdot \frac{1}{1} = -3 \qquad a_{33}^{(1)} = a_{33} - a_{31} \frac{a_{13}}{a_{11}} = 1 - 4 \cdot \frac{1}{1} = -3$$

$$b_2^{(1)} = b_2 - a_{21} \frac{b_1}{a_{11}} = 3 - 2 \cdot \frac{0}{1} = 3 \qquad b_3^{(1)} = b_3 - a_{31} \frac{b_1}{a_{11}} = 5 - 4 \cdot \frac{0}{1} = 5$$

Получаем матрицу следующего вида: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 3 \\ 0 & 7 & -3 & 5 \end{array}\right)$

II итерация.

Определяем новые коэффициенты во второй строке:

$$c_{22} = \frac{a_{22}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = 1, \quad c_{23} = \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}, \quad g_2 = \frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Коэффициенты для третьей строки:

$$a_{32}^{(2)} = a_{32}^{(1)} - a_{32}^{(1)} \cdot \frac{a_{22}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = 7 - 7 \cdot \frac{6}{6} = 0$$

$$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(2)} - a_{32}^{(1)} \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = -3 - 7 \cdot \frac{-3}{6} = -3 + \frac{21}{6} = \frac{1}{2}$$

$$b_3^{(2)} = b_3^{(1)} - a_{32}^{(1)} \frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = 5 - 7 \cdot \frac{3}{6} = 5 - \frac{7}{2} = \frac{3}{2}$$

Получаем матрицу следующего вида: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right)$

III итерация.

Определяем новые коэффициенты в третьей строке:

$$c_{33} = \frac{a_{33}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} = 1, \quad g_3 = \frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} = 3$$

Получаем матрицу следующего вида: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$

Обратный ход:

1) $x_3 = g_3 = 3$

2) $x_2 = g_2 - c_{23} \cdot x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 3 = 2$

3) $x_1 = g_1 - \sum_{i=2}^{3} c_{1i} x_i = g_1 - (c_{12} x_2 + c_{13} x_3) = 0 + 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 1$

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$

Пример

Метод ортогонализации

Решить систему линейных уравнений вида: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) = A$

Запишем матрицу A в векторном виде: $A: \bar{a}_1 x_1 + \bar{a}_2 x_2 + \bar{a}_3 x_3 = \bar{b}$

В качестве $\bar{r}_1$ выбираем $\bar{a}_1$: $\bar{r}_1 = \bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Тогда вектор $\bar{a}_2$ записывается в виде: $\bar{a}_2 = t_{12}\bar{r}_1 + \bar{r}_2$

Домножим обе части на $\bar{r}_1$: $(\bar{r}_1; \bar{a}_2) = t_{12}(\bar{r}_1; \bar{r}_1) + (\bar{r}_1; \bar{r}_2)$

По условию ортогональности: $(\bar{r}_1; \bar{r}_2) = 0 \Rightarrow t_{12} = \dfrac{(\bar{r}_1; \bar{a}_2)}{(\bar{r}_1; \bar{r}_1)} =$

$= \dfrac{1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1\cdot(-1)}{1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 1\cdot 1} = \dfrac{1+2-1}{1+4+1} = \dfrac{1}{3}$, тогда $\bar{r}_2$:

$$\bar{r}_2 = \bar{a}_2 - t_{12}\bar{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Теперь найдём вектор $\bar{r}_3$ из: $\bar{a}_3 = t_{13}\bar{r}_1 + t_{23}\bar{r}_2 + \bar{r}_3$, для этого, находим t_{13} и t_{23}:

t_{13}: $(\bar{r}_1; \bar{a}_3) = t_{13}(\bar{r}_1; \bar{r}_1) + t_{23}(\bar{r}_1; \bar{r}_2) + (\bar{r}_1; \bar{r}_3)$, по условию ортогональности $(\bar{r}_1; \bar{r}_2) = 0$, $(\bar{r}_1; \bar{r}_3) = 0 \Rightarrow t_{13} = \dfrac{(\bar{r}_1; \bar{a}_3)}{(\bar{r}_1; \bar{r}_1)} =$

$= \dfrac{1\cdot(-1) + 2\cdot 1 + 1\cdot 1}{1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 1\cdot 1} = \dfrac{-1+2+1}{1+4+1} = \dfrac{1}{3}$.

$t_{23}: (\bar{r}_2, \bar{a}_3) = t_{13}(\bar{r}_2; \bar{r}_1) + t_{23}(\bar{r}_2; \bar{r}_2) + (\bar{r}_2; \bar{r}_3)$, по условию ортогональности: $(\bar{r}_2; \bar{r}_1) = 0$, $(\bar{r}_2; \bar{r}_3) = 0$, тогда

$$t_{23} = \frac{(\bar{r}_2; \bar{a}_3)}{(\bar{r}_2; \bar{r}_2)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot(-1) + \frac{1}{3}\cdot 1 + \left(-\frac{4}{3}\right)\cdot 1}{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)} = \frac{-\frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{4}{3}}{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{16}{9}} = \frac{-\frac{5}{3}}{\frac{21}{9}} =$$

$$= -\frac{5 \cdot \cancel{9}^{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{21}_{7}} = -\frac{5}{7}$$, тогда r_3:

$$\bar{r}_3 = \bar{a}_3 - t_{13}\bar{r}_1 - t_{23}\bar{r}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{7}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{10}{21} \\ \frac{5}{21} \\ -\frac{20}{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{10-7}{21} \\ \frac{5-14}{21} \\ \frac{-20-7}{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{21} \\ \frac{-9}{21} \\ \frac{-27}{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3-21}{21} \\ \frac{-9+21}{21} \\ \frac{21-27}{21} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{18}{21} \\ \frac{12}{21} \\ \frac{-6}{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{7} \\ \frac{4}{7} \\ -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

Теперь матрица A представима в виде: $A = R \cdot T =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{6}{7} \\ 2 & \frac{1}{3} & \frac{4}{7} \\ 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычисляем значения $\bar{x}$:

$\bar{a}_1 \cdot x_1 + \bar{a}_2 x_2 + \bar{a}_3 x_3 = \bar{b}$, для нахождения x_3 домножим обе части на $\bar{r}_3$:

1) $\bar{r}_3 (\bar{a}_1 x_1 + \bar{a}_2 x_2 + \bar{a}_3 x_3) = \bar{r}_3 \cdot \bar{b} \Rightarrow (\bar{r}_3, \bar{a}_3) x_3 = (\bar{r}_3, \bar{b}) \rightarrow$

$$x_3 = \frac{(\bar{r}_3 ; \bar{b})}{(\bar{r}_3 ; \bar{a}_3)} = \frac{-\frac{6}{7}\cdot 0 + \frac{4}{7}\cdot 7 + \left(-\frac{2}{7}\right)\cdot 2}{-\frac{6}{7}(-1) + \frac{4}{7}\cdot 1 + \left(-\frac{2}{7}\right)\cdot 1} = \frac{0 + 4 - \frac{4}{7}}{\frac{6}{7} + \frac{4}{7} - \frac{2}{7}} = \frac{\frac{24}{7}}{\frac{8}{7}} =$$

$$= \frac{\overset{3}{\cancel{24}} \cdot \cancel{7}}{\cancel{7} \cdot \cancel{8}} = 3$$

Вычисляем новый вектор $\bar{b}$:

$\bar{a}_1 x_1 + \bar{a}_2 x_2 + \bar{a}_3 x_3 = \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a}_1 x_1 + \bar{a}_2 x_2 = b - \bar{a}_3 x_3 \Rightarrow$

$$\bar{b}^{(1)} = b - \bar{a}_3 x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Для нахождения x_2, домножаем на $\bar{r}_2$ и получаем:

2) $$x_2 = \frac{(\bar{r}_2 ; \bar{b}^{(1)})}{(\bar{r}_2 ; \bar{a}_2)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot 3 + \frac{1}{3}\cdot 4 + \left(-\frac{4}{3}\right)(-1)}{\frac{2}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 1 + \left(-\frac{4}{3}\right)(-1)} = \frac{2 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{4}{3}} =$$

$$= \frac{\overset{2}{\cancel{14}} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{7}} = 2$$

Новый вектор $\bar{b}$:

$\bar{a}_1 x_1 + \bar{a}_2 x_2 = \bar{b}^{(1)} \Leftrightarrow \bar{a}_1 x_1 = \bar{b}^{(1)} - \bar{a}_2 x_2 \Rightarrow \bar{b}^{(2)} = \bar{b}^{(1)} - \bar{a}_2 x_2 =$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3) Для нахождения x_1, домножаем на $\bar{r}_1$, и получаем: $x_1 = \frac{(\bar{r}_1, \bar{b}^{(2)})}{(\bar{r}_1, \bar{a}_1)} = \frac{1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 1\cdot 1}{1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 1\cdot 1} = 1$

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$.