

上海财经大学

毕 业 论 文

随机局部波动率模型下波动率指数产品的  
定价理论研究

姓 名 \_\_\_\_\_ 龚嘉欣

学 号 \_\_\_\_\_ 2018111641

学 院 \_\_\_\_\_ 数学学院

专 业 \_\_\_\_\_ 数学与应用数学

指导教师 \_\_\_\_\_ 马俊美

定稿日期：2022 年 5 月

# 随机局部波动率模型下波动率指数产品的定价理论研究

## 摘要

为了应对股市的千变万化, 如何降低投资组合的风险成为了投资者们的关注焦点. 其中, 对波动率的研究逐渐受到重视. 第一个波动率指数, VIX 期货合约和期权合约在芝加哥期权交易所相继问世. 近年来, 波动率指数和衍生品蓬勃发展, 也掀起了其定价算法的研究热潮. 本文将关注波动率产品中最具代表性的 VIX 期权, 研究 Heston-Dupire 随机局部波动率模型下其定价的相关理论.

第二章中主要围绕 Heston-Dupire 随机局部波动率模型进行介绍, 并且构造了两个模型变式. 随后详细介绍了模型中比较特殊的杠杆函数和局部波动率部分. 本文首先借助 Tanka-Meyar 公式及一系列理论推导得到了杠杆函数的表达式, 随后借用 SVI 函数和插值方法拟合并且校准参数得到隐含波动率曲面, 最后用 Dupire 函数计算局部波动率.

第三章为波动率指数产品的定价研究. 本文共使用了柳树法和作为对照的蒙特卡罗算法两种方法. 柳树法是一种计算效率高且占用存储空间小的数值方法, 通过构造树节点和转移概率矩阵的方式很好地近似了标的资产价格和波动率的分布, 并且一般情况下, 设置较少的节点数就可以获得较高的精度, 因此计算效率很高. 本章首先搭建波动率的一维柳树, 在每个时刻, 根据理论表达式求出 CEV 过程的前四阶矩, 用 Johnson Curve 变换求出节点值, 并由 Fokker-Planck 方程推导出节点之间转移概率的计算公式. 随后, 在每个时刻构建资产价格和波动率的二维柳树, 迭代使用 Dynkin 公式计算资产价格的前四阶矩以产生节点值, 之后分别在考虑波动率和资产价格过程的相关性和不考虑两种情形下计算转移概率, 并在二维柳树框架下进行了欧式期权和 VIX 期权定价的数值计算公式的推导以及收敛性的分析. 最后进行了蒙特卡罗法的对照实验. 其中, 需要注意的是杠杆函数分母部分的计算, 本章给出了柳树法计算和条件蒙特卡罗法两种方法.

第四章为数值模拟及实验结果. 在本章中进行了一系列的柳树法和作为对照组的蒙特卡罗法的数值实验, 包括 Dupire 局部波动率计算, 改变相关性大小, 到期日等模型和期权参数定价, 柳树法的收敛性和适应性验证以及不同模型下的定价计算等, 结果表明柳树法具有准确性, 稳定性及高效性.

**关键词:** VIX 期权, Heston-Dupire 随机局部波动率模型, 柳树法, 蒙特卡罗算法, 杠杆函数, SVI 函数

# Pricing Theory of Volatility Products under Stochastic Local Volatility Model

## ABSTRACT

To cope with the volatility of the stock market, how to reduce portfolio risk has become a common issue for investors around the world. Among them, the study of volatility has gradually gained importance. The first volatility index was introduced by the Chicago Board Options Exchange in 1993, followed by the first VIX futures contract in March 2004 and the first VIX options contract in February 2006. In recent years, volatility indices and derivatives have flourished, leading to a boom in research on their pricing algorithms. In this paper, we focus on the most representative of volatility products, VIX options, and study the theory related to their pricing under the Heston-Dupire stochastic local volatility model.

Chapter 2 focuses on the Heston-Dupire stochastic partial volatility model and constructs two model variants. This is followed by a detailed description of the leverage function and the partial volatility component of the model. In this paper, we first obtain the expression of the leverage function with the help of the Tanka-Meyar formula and a series of theoretical derivations, then we fit and calibrate the parameters to obtain the implied volatility surface by using the SVI function and interpolation methods, and finally we calculate the local volatility by using the Dupire function.

Chapter 3 is a pricing study of volatility index products. In this paper, two methods are used: the willow tree method and the Monte Carlo algorithm as a control. The willow tree method is a numerical method that is computationally efficient and takes up little storage space. The distribution of the underlying asset price and volatility is well approximated by constructing tree nodes and transferring the probability matrix, and in general, a high degree of accuracy can be obtained by setting a small number of nodes, making it computationally efficient. In this chapter, we first construct the one-dimensional willow tree of volatility, and at each moment, we find the first four moments of the CEV process according to the theoretical expression, use the Johnson Curve transform to find the node values, and derive the formula for the transfer probability between nodes

from the Fokker-Planck equation. Subsequently, the two-dimensional willow trees of asset prices and volatilities are constructed at each moment, the Dynkin formula is introduced to calculate the first fourth-order moments of asset prices, and the transfer probabilities are calculated under the two scenarios of considering the correlation between the volatility and asset price processes and not considering them, respectively, and the numerical calculations of the pricing of European and VIX options are performed in the two-dimensional willow tree framework. Finally, a controlled experiment of the Monte Carlo method is performed under the same parameter settings. Among them, special attention needs to be paid to the calculation of the expectation of the denominator part of the leverage function, which is given in this chapter based on both the Willow Tree method of calculation and the conditional Monte Carlo method.

Chapter 4 presents numerical simulations and experimental results. In this chapter, a series of numerical experiments of the Willow method and the Monte Carlo method as a control group are conducted, including the calculation of Dupire's local volatility, modeling and pricing of option parameters by varying correlation size, maturity, etc., verification of the convergence and adaptability of the Willow method, and the calculation of pricing under different models.

**Keywords:** VIX options, Heston-Dupire stochastic local volatility model, Willow Tree method, Monte Carlo algorithm, Leverage function, SVI function

# 目 录

第一章 序言 .....	1
1.1 文献综述 .....	1
1.1.1 VIX 指数和期权研究介绍 .....	1
1.1.2 波动率模型研究介绍 .....	1
1.1.3 数值方法研究介绍 .....	2
1.2 本文主要内容 .....	4
第二章 随机局部波动率模型 .....	6
2.1 模型介绍 .....	6
2.1.1 Heston-Dupire 模型 .....	7
2.1.2 模型变式 1 .....	7
2.1.3 模型变式 2 .....	8
2.2 杠杆函数的计算 .....	8
2.3 局部波动率的校准 .....	10
第三章 波动率指数产品定价研究 .....	13
3.1 基于柳树法的 VIX 期权定价 .....	13
3.1.1 构造关于 $v_t$ 的一维柳树 .....	13
3.1.2 $\{X_t, v_t\}$ 二维柳树构造 .....	16
3.1.3 欧式期权及 VIX 期权定价 .....	20
3.1.4 杠杆函数的期望部分计算方法 .....	22
3.1.5 收敛性分析 .....	25
3.2 基于 Monte Carlo 法的 VIX 期权定价 .....	29
第四章 数值模拟及结果分析 .....	31
4.1 Dupire 局部波动率的计算 .....	31

4.2 模型及期权参数数值实验 .....	33
4.2.1 $\gamma$ 数值实验 .....	33
4.2.2 $\rho$ 数值实验 .....	35
4.2.3 $T$ 数值实验 .....	36
4.3 柳树法收敛性数值实验 .....	38
4.4 柳树法适应性数值实验 .....	40
4.5 其他模型数值实验 .....	41
第五章 总结与展望 .....	43
参考文献 .....	43
致谢 .....	47

## 第一章 序言

### 1.1 文献综述

#### 1.1.1 VIX 指数和期权研究介绍

为了应对股市的千变万化, 如何降低投资组合的风险成为了世界各地的投资者们的共同议题. 其中, 对波动率的研究逐渐受到重视. 波动率作为一种度量金融风险的重要工具, 应用于风险管理, 资产定价及投资组合理论等众多领域.

第一个波动率指数在 1993 年由芝加哥期权交易所推出, 即 Chicago Board Options Exchange Volatility Index, 简称 VIX. 在 Whaley(1993)[1] 首次提出 VIX 的计算法则以来, 该法则经过了一些修改, 目前 CBOE 提供的 VIX 计算规则如下:

$$VIX^2 = \frac{2}{\tau} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} Q(K_i) - \frac{1}{\tau} \left( \frac{F_t(t+\tau)}{K_0} - 1 \right)^2, \quad (1.1)$$

其中,  $\tau = \frac{30}{365}$ ,  $Q(K_i)$  是执行价格为  $K_i$  时 S&P500 指数的虚值期权价格,  $K_0$  代表低于指数远期价格  $F_t(t+\tau)$  的最高履约价格.

VIX 指数又被称为“恐慌指数”, 这是因为 VIX 越大说明标的资产价格波动率越大, 投资的不确定性增加, 从而恐慌情绪在市场上蔓延. 除此之外, VIX 指数本身具有较高的可预测性且十分灵敏, 可以捕获市场上的各种重大特殊事件.

首个 VIX 期货合约和 VIX 期权合约分别在 2004 年 3 月及 06 年 2 月由芝加哥期权交易所推出, 从而投资者可以构建投资组合直接对冲波动风险且不再受到未来波动影响.

Aramian[2] 将目前关于 VIX 衍生品的研究分为两大类. 一类是为 S&P500 指数建立适当的数学模型, 计算指数的瞬时方差从而推导出 VIX 衍生品的价格, 例如 Zhu[3], Lin[4]. 还有一类是直接对 VIX 指数建立数学模型, 从而推导衍生品价格, 例如 Wang 等 [5], Drimus 和 Farkas[6]. 除此之外, 还有一些研究是将两种方法结合或是进行比较, 比如 Sircar 等 [7].

#### 1.1.2 波动率模型研究介绍

波动率微笑现象的发现撼动了常数波动率假设的地位, 为了更加准确地刻画市场表现, 学者们基于经典几何布朗运动, 提出了大致两类模型: 随机波动率模型和局部波动率模型.

如果假设波动率是一个随时间改变的随机变量, 且假定该随机过程与资产价格过程具有相关性, 那么就称此类模型为随机波动率模型 (SV model). 研究表明,

SV 模型优点如下:

- 能够提供更加多样化的市场动态;
- 对波动率的期限结构建模的同时还能对其波动性建模;
- 对未来波动率的解释能力和预测能力增强.

随机波动率模型中较为经典的有:Hull-White 模型 [8],Stein-Stein 模型 [9],Heston 模型 [10] 等. 其中, 应用最广的是 Heston 模型, 因为假定标的资产价格符合该模型时, 能够解出封闭形式的欧式期权价格, 并且可以用市场数据对模型参数进行稳定有效的校准.

还有学者提出了另外一种波动率建模的方式, 即在随机波动率的基础上增加一个自变量, 波动率由时间和标的资产价格共同决定, 将该类模型称为局部波动率模型 (LV model). 该类模型又可以分为有参数形式和无参数形式两种. 第一种给出了局部波动率的具体表达式, 比如 Cox 模型和 Hagan-Woodward 模型等. 著名的常弹性方差模型 (CEV 模型) 就是其中一种, 它的局部波动率函数为: $\sigma(t, S) = \alpha S^\beta$ . Vasicek 模型和 CIR 模型等在短期利率研究中常见的模型均为 CEV 模型的特例. 第二种局部波动率没有表达式, 只能由市场数据计算获得. 代表模型有 Dupire 模型 [11],Rubinstein 模型 [12] 和 Derman 模型 [13]. 其中, 值得注意的一点是,Dupire 公式证明了存在唯一一种局部波动率公式使得基于此模型计算的期权价格和市场实际的期权价格数据一致, 换句话说, 存在一种局部波动率模型可以完美拟合市场的波动率曲面.

SV 模型和 LV 模型优点显著且互补, 因此 Mark J 等人 (1993)[14] 将其进行了结合, 构造了随机局部波动率模型 (SLV model). 该模型提出后得到了巨大的反响, 成为了业界和学界的一个重要研究方向. 在这个模型中, 有两种类型的参数: 一种是全局参数, 包括跳过程, 随机波动率, 失效风险等, 主要反映市场的外部冲击; 还有一种是局部参数, 包括漂移项和局部波动率, 主要受资产的内在表现影响.

近年来, 随机局部波动率模型受到的关注程度越来越高, 学者们不断提出不同的局部波动率和随机波动率结合的新模型, 并且广泛应用于各个领域. 例如,Hagan 等 (2002)[15] 随机化 CEV 模型中的参数  $\alpha$ , 得到了著名的 SABR 模型, 它在解释期限结构和波动率微笑问题上效果较好;Lipton(2002)[16] 将跳过程引入到 Heston-Dupire 随机局部波动率模型中, 并在外汇期权定价中广泛应用.

### 1.1.3 数值方法研究介绍

#### (一) 蒙特卡罗方法

蒙特卡罗方法简称 MC 方法, 基于概率统计理论, 用随机抽样的方式求得数值结果. 该方法具有一个重要的优点——收敛速度和维数无关, 因此在路径依赖,



多标的资产等定价问题中得到了广泛应用. 尽管衍生品产品的种类越来越多样化, 复杂程度也在不断提升, 但是由于蒙特卡罗方法具有极强的普适性, 其已经成为资产定价和风险管理的一种重要的基本工具.

蒙特卡罗方法的使用过程主要分为以下三步:

1, 构造概率模型: 如果研究的问题本身具有随机性, 比如量子热力学计算, 资产价格过程等, 那么我们需要模拟出这个概率过程; 如果问题本身是一个非随机性的问题, 比如计算定积分等, 我们需要先把它转化为一个具有随机性的问题, 即构造出一个某些参量是该问题的解的概率项;

2, 根据概率分布抽样: 在第一步得到概率过程后, 由基础概率论的知识, 复杂的概率模型可以拆解成各种基础的概率分布, 从而只需要产生服从这些基础概率分布的随机数, 即可计算得到所需的随机数, 据此, 学者们也将蒙特卡罗方法称作随机采样方法.

3, 建立目标估计量: 最后一步, 我们需要确定一个随机变量作为所求问题的解, 同时也可以用于评估实验结果.

虽然蒙特卡罗方法步骤简单, 普适性强, 但是其具有一个致命缺点——收敛速度慢, 如果想要提高一位有效数字的精度, 通常需要增加 100 倍的计算量. 因此, 蒙特卡罗方法难以满足比较复杂的衍生品的定价精度的要求, 比如, 在 VIX 衍生品的定价中, 由于需要进行嵌套循环, 蒙特卡罗的速度非常慢, 提高精度需要付出的代价极大.

## (二) 柳树法

Curran 于 2001 年提出了柳树法 [17], Xu(2013)[18] 等将其推广到了金融中的衍生品定价领域, 用柳树法的框架构造几何布朗运动模型用于定价, 随后又将柳树法框架应用于各类波动率模型, 比如 Merton 跳扩散模型, CEV 模型等. 图1.1展示了一个简单的柳树结构.

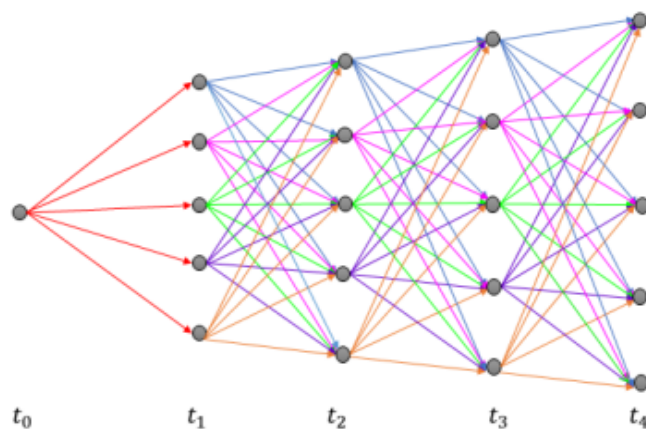


图 1.1 Heston-Dupire 模型的二维柳树结构

该柳树模型的初始时刻是  $t_0$ , 到期日为  $t_4$ , 共包含五个离散时刻点. 从时刻  $t_1$  开始, 每个时刻点都将对应五个资产价格节点. 在不同的模型和期权中, 时刻点和资产价格节点的合适数量略有区别, 视具体情况而定, 一般情况下, 30-50 的节点数量就可以使得定价结果具有较高的精度.

相比于其他数值方法, 柳树法具有计算效率高, 占用存储空间小等优点. 首先, 除了初始点外每个时刻的资产价格节点数量是恒定且相同的, 因此总的节点的数量与时间长短成线性关系. 其次, 可以自由设置每个时刻点对应的资产价格节点数, 且通常情况下, 较少的节点数就可以保证较高的精度, 即它能够较精确地离散近似每个时刻标的资产价格服从的分布.

柳树法构造树节点和转移概率矩阵动态逼近随机过程, 使得其具有处理许多复杂的及路径依赖的衍生品定价问题和风险管理问题的能力, 例如美式期权定价, 可变年金的风险度量 VaR 及 CVaR 的计算 [20], 移动平均障碍期权定价 [21] 和亚式期权定价 [22]. 除此之外, 对于给定的波动率模型, 柳树法的结构是不变的, 相似地, 对于给定的衍生品产品, 基于柳树法的定价算法也是不变的, 即在柳树法中, 树的构造和定价算法是相互独立的. 因此, 柳树法最小化了当衍生品类型和标的资产发生变化时定价过程需要进行的变动.

## 1.2 本文主要内容

本文主要分为四个部分, 内容结构分布如下:

第一个部分为序言. 主要通过梳理和总结国内外的相关文献的方式, 介绍了 VIX 指数和期权的相关研究, 波动率模型的研究现状以及相关的数值方法, 同时还对本文的主要研究方法和思路进行了介绍.

第二个部分为理论基础. 主要围绕 Heston-Dupire 随机局部波动率模型进行介绍, 并且构造了两个模型变式, 尤其是该模型中比较特殊的杠杆函数和局部波动率部分. 本文首先借助 Tanka-Meyar 公式及一系列理论推导得到了杠杆函数的表达式, 随后借用 SVI 函数和插值方法拟合并且校准参数得到市场隐含波动率曲面, 最后用 Dupire 函数计算局部波动率.

第三个部分为波动率指数产品的定价研究. 该部分又分为柳树法 VIX 期权定价和作为对照的蒙特卡罗算法 VIX 期权定价两大块. 本文先搭建了波动率的一维柳树, 随后分别在考虑波动率和资产价格过程的相关性和不考虑两种情形下搭建了二维柳树, 并且在此基础上进行了欧式期权和 VIX 期权定价的数值计算, 并且证明了柳树法下欧式看涨期权定价的收敛性. 其中, 需要主要注意的是杠杆函数分母部分的期望的计算, 本章给出了基于柳树法计算和条件蒙特卡罗法两种方法.

第四个部分为数值模拟及实验结果. 在本章中进行了一系列的数值实验, 包

括 Dupire 局部波动率计算, 改变相关性大小, 到期日等模型和期权参数定价, 柳树法的收敛性和适应性验证以及不同模型下的定价计算等.

第五个部分为总结和展望. 本章回顾了本文的主要内容和算法过程, 并且对未来可能的改进和发展方向提出了分析和展望.

## 第二章 随机局部波动率模型

本章将对本文需要用到的模型的相关理论进行介绍, 包括三种随机局部波动率模型及相关隐含波动率, 杠杆函数和局部波动率的构建和计算.

### 2.1 模型介绍

随机波动率模型 (SVM) 假设波动率是一个随机过程, 在一些情况下可以求出定价解析解, 比如 1993 年 Heston[23] 在一项研究中给出了基于 Heston 模型的欧式期权的积分定价公式, 以及 Lewis[24] 提出了针对 SVM 的期权定价混合解. 这些解的提出使得模型在使用的过程中十分有效, 因此受到了广泛的欢迎. 除此之外, SVM 能够体现波动率微笑特征, 较准确地描述波动率的动态变化, 但是 Gatheral(2006)[25] 等人发现其在拟合隐含波动率曲线方面效果欠佳, Fouque(2010)[26] 证实了在基于该模型进行的过度实值或虚值的欧式期权的定价与准确结果误差较大, 猜测由于单因子的随机波动率模型太过简单, 从而对波动率动态变化过程的刻画不够充分, 于是多尺度的 SVM 应运而生.

局部波动率模型 (LVM) 中波动率是关于时间和资产价格的函数, 因此随机性的产生完全依赖于  $S_t$ . 一种是 Dupire(1994,1997)[11, 27], Derman et al[28, 29] 以及 Rubinstein(1994)[30] 研究的无具体表达式完全根据市场数据计算得到的局部波动率. 还有一种是先给定具体形式, 再由市场数据拟合参数, 比如著名的 CEV 模型. 两种方式给出的局部波动率对市场隐含波动率的拟合都非常完美, 但是存在动态错误对冲 [31], 波动率函数不稳定等问题.

随机局部波动率模型 (SLVM) 是在局部波动率里面加入了随机项, 首次提出是在 Mark J(1999)[32] 的一项研究中. 该类模型具有 SVM 和 LVM 模型的优点, 对波动率微笑, 波动率曲面以及期限结构刻画效果良好, 因此将不同的 SVM 模型和 LVM 模型结合的研究日益增多, 并逐渐广泛应用于不同领域.

一般的随机局部波动率模型可以写作如下形式:

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + L(t, S_t) \phi(V_t) S_t dW_{1t}, \\ dV_t = \alpha(t, V_t) dt + \beta(t, V_t) dW_{2t}. \end{cases} \quad (2.1)$$

其中,  $E[dW_{1t}dW_{2t}] = \rho dt$ ; 局部波动率部分为  $L(t, S_t)$ , 该函数也被称为杜杆函数; 随机波动率过程为  $\phi(V_t)$ ;  $\alpha(t, V_t)$  为方差过程的漂移项;  $\beta(t, V_t)$  为方差过程的扩散项.

特别地, 当  $L(t, S_t) = 1$  时, 许多经典的随机波动率模型可以用该模型来刻画, 随机局部波动率模型退化成了随机波动率模型, 比如 Heston 模型, 其中波动率过程服从 CIR 过程:  $\psi(V_t) = \sqrt{V_t}, \alpha(t, V_t) = \kappa(\theta - V_t), \beta(t, V_t) =$

$\sigma\sqrt{V_t}$ ; Schobel-Zhu 模型 [33]:  $\psi(V_t) = V_t, a(t, V_t) = \kappa(\theta - V_t), b(t, V_t) = \sigma$ . 除此之外, 该模型也可以退化为局部波动率模型, 只要将  $\beta(t, V_t)$  取为 0 即可.

值得注意的是, 上述随机局部波动率模型中并没有给出杠杆函数  $L$  的具体形式. 这是因为上文中提到的局部波动率本身有无参数形式和有参数形式两种形式, 因此用  $L$  函数来涵盖这两种情形. 有参数形式的比如 CEV 模型中的局部波动率虽然易于计算, 但是却和真实的市场数据存在较大的误差, 因此本文考虑的是基于无参杠杆函数的随机局部波动率模型——Heston-Dupire 模型及其变式, 具体模型将在以下小节中详细介绍.

### 2.1.1 Heston-Dupire 模型

Heston-Dupire 随机局部波动率模型是将 Dupire 公式得到的无参形式的局部波动率与 Heston 随机波动率模型相结合得到的模型, 具体表达式如下所示:

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + L(t, S_t) \sqrt{V_t} S_t dW_{1t}, \\ dV_t = a(b - V_t) dt + \sigma_v \sqrt{V_t} dW_{2t}. \end{cases} \quad (2.2)$$

下文将介绍如何计算杠杆函数  $L$ . 第三章的算法介绍以及第四章数值介绍的参数探究部分, 都是基于 Heston-Dupire 模型进行, 其余模型可以用相同的方式进行算法搭建和数值实验探究.

### 2.1.2 模型变式 1

在模型 (2.2) 中, 波动率实际上是一个 CIR 过程. CIR 过程是 CEV 过程的一种特殊情况. CEV 过程的方程如下:

$$dV_t = a(b - V_t) dt + \sigma_v V_t^\gamma dW_{2t}, \quad (2.3)$$

其中,  $\gamma$  是一个常数, 且  $0 \leq \gamma \leq 1$ .

考虑将 Heston-Dupire 模型中的波动率部分替换为其他的 CEV 过程. 据多数研究表明, 当  $\gamma = 1$  时, 比较符合市场的实际情况, 因此本文将 Heston 模型, Dupire 局部波动率与  $\gamma$  为 1 的 CEV 模型结合起来, 构造了一种新的随机局部波动率模型, 如下:

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + L(t, S_t) \sqrt{V_t} S_t dW_{1t}, \\ dV_t = a(b - V_t) dt + \sigma_v V_t dW_{2t}. \end{cases} \quad (2.4)$$

事实上, 已经有很多学者将 CIR 过程引入随机波动率和随机局部波动率模型中, 比如由 Christoffersen 在 2010 年提出的 ONE model 以及 Henry-Labordere 在 2005 年提出的  $\lambda$ -SABR 模型, 在实证中都取得了不错的效果, 相比于部分波动率部分为 CIR 的模型, 这些模型的表现更好.

### 2.1.3 模型变式 2

在模型变式 1(2.4) 的基础上, 我们继续进行调整, 保持波动率服从  $\gamma$  为 1 的 CEV 过程不变, 将资产价格过程中的  $\sqrt{V_t}$  改成  $V_t$ , 即原本的假设是资产价格过程依赖于波动率平方的过程, 现在改为直接依赖于波动率过程, 具体的模型满足的方程如下所示:

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + L(t, S_t) V_t S_t dW_{1t}, \\ dV_t = a(b - V_t) dt + \sigma_v V_t dW_{2t}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Stein-Stein 模型中也是直接使用的波动率过程, 模型如下:

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + V_t S_t dW_{1t}, \\ dV_t = a(b - V_t) dt + \sigma_v dW_{2t}, \end{cases}$$

该模型是很经典的随机波动率模型, 我们希望借鉴其对波动率的处理, 以使原本的 Heston-Dupire 模型具有更好的实证效果.

## 2.2 杠杆函数的计算

设欧式看涨期权的价格为:

$$C(t, K) = \frac{B_{t_0}}{B_t} E[(S_t - K)^+], \quad (2.6)$$

其中,  $t_0$  为初始时刻,  $M_t$  代表零息债券,  $dB_t = rB_t dt$  成立, 且  $B(t_0) = 1$ ;  $r$  为无风险利率; 期望  $E$  在风险中性测度  $\mathbb{Q}$  上求得.

对 (2.6) 式左右两端微分, 并且利用 Fubini 定理, 可得:

$$dC(t, K) = -\frac{r}{M_t} E[(S_t - K)^+] dt + \frac{1}{M_t} E[d(S_t - K)^+]. \quad (2.7)$$

由于式子的后半部分是对  $g(x) = (x - c)^+$  类型的函数先求微分再求期望, 该函数在  $x = c$  处不具备可微性, 无法直接用 Itô 引理对其进行求解, 但是可以用如下 Tanaka-Meyer 公式 [34] 来解决这个问题.

**Theorem 2.1** 假设  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$  是一个概率空间,  $t_0 \leq t < \infty$  时,  $X_t = X_{t_0} + \tilde{B}_t + V_t$  是连续半鞅, 其中  $\tilde{B} = \{\tilde{B}_t, \mathcal{F}_t\}$  是连续局部鞅,  $V = \{V_t, \mathcal{F}_t\}$  是局部有界变差过程, 则对于  $g(x) = (x - b)^+, b \in \mathbb{R}$ , 有:

$$g(X_t) = g(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t 1_{X_u > b} d\tilde{B}_u + \int_{t_0}^t 1_{X_u > b} dV_u + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t g''(X_u) (d\tilde{B}_u)^2. \quad (2.8)$$

对 (2.7) 式中的后半部分应用该定理, 即可将其中的微分形式进行转化, 如下:

$$d(S_t - K)^+ = 1_{S_t > K} dS_t + \frac{1}{2} \delta(S_u - K) (dS_t)^2,$$



其中,  $\delta$  是狄拉克  $\delta$  函数, 又:

$$\begin{aligned} E[(S_t - K)^+] &= E[1_{S_t > K}(S_t - K)] \\ &= E[1_{S_t > K}S_t] - E[1_{S_t > K}]K, \end{aligned}$$

将上述两式以及 (2.2) 式中关于  $S_t$  的部分回代入式 (2.7) 中, 通过计算可得:

$$dC(t, K) = \frac{rK}{B_t} E[1_{S_t > K}] dt + \frac{1}{2B_t} E[\delta(S_t - K) V_t(L(t, S_t) S_t)^2] dt. \quad (2.9)$$

为了进一步化简计算, 可以用到 Feng(2010)[35] 给出的一个著名结论.

**Lemma 2.1** 若  $S_t, V_t$  服从 (2.2) 式中的随机局部波动率模型, 则关于欧式看涨期权价格的以下公式成立:

$$-\frac{\partial C(t, K)}{\partial K} = \frac{1}{B_t} E[1_{S_t > K}], \quad \frac{\partial C^2(t, K)}{\partial K^2} = \frac{\psi_S}{B_t}, \quad (2.10)$$

其中,  $S_t$  的边际概率密度函数用  $\psi_S$  表示.

在 (2.9) 左端中代入 (2.10) 中关于价格一阶偏导的等式, 则原等式可被改写为:

$$2B_t dC(t, K) + 2rKB_t \frac{\partial C(t, K)}{\partial K} dt = E[\delta(S_t - K) V_t(L(t, S_t) S_t)^2] dt =: M(t)dt.$$

上式右端的期望可以改写成积分:

$$\begin{aligned} M(t) &= \iint_R \psi_{V,S}(v, s) \delta(s - K) v (sL(t, s))^2 ds dv \\ &= \int_R v \left( \int_R \psi_{V,S}(v, s) \delta(s - K) (sL(t, s))^2 ds \right) dv, \end{aligned} \quad (2.11)$$

由于狄拉克  $\delta$  函数具有过滤性, 因此可以将其内层积分简化为

$$\int_R \psi_{V,S}(v, s) \delta(s - K) (sL(t, s))^2 ds = \psi_{V,S}(v, K) K^2 L^2(t, K),$$

将其代入 (2.11) 右端可得:

$$M(t) = K^2 L^2(t, K) \int_R v \psi_{V,S}(v, K) dv = K^2 L^2(t, K) \psi_S(K) E[V_t | S_t = K],$$

从而, 引理 2.1 中的第二个表达式以及  $M(t)$  的定义式, 通过化简得到:

$$L^2(t, K) = \frac{\frac{\partial C(t, K)}{\partial t} + rK \frac{\partial C(t, K)}{\partial K}}{\frac{1}{2} K^2 \frac{\partial^2 C(t, K)}{\partial K^2} E[V_t | S_t = K]} = \frac{\sigma_{LV}^2(t, K)}{E[V_t | S_t = K]}, \quad (2.12)$$

上式右端项的分子部分  $\sigma_{LV}$  就是 Dupire 局部波动率.

杠杆函数  $L$  由局部随机波动率函数  $\sigma_{LV}$  和随机波动率的条件期望  $E$  两个部分组成. 目前, 校准 Dupire 局部波动率函数的方法非常且丰富且成熟, 比如在  $T$  及  $K$  维度上分别用线性插值, SVI 函数, 三次样条插值等方法进行拟合. 但是, 计算分母部分的条件期望还没有比较成熟的方法和理论, 这是因为

Dupire 局部波动率的形式未知导致价格过程和波动率过程的联合分布未知. 虽然理论还不够完善, 但是学者们研究了许多用于估计该条件期望的方法, 比较经典的有 Anthonie W 在 2013 年提出的用无参数蒙特卡罗算法进行数值近似 [36], Piterbarg V 等提出的用马尔科夫链近似 [37, 38] 以及 Engelmann B 等采用的求解前向 Kolmogorov 偏微分方程的方法 [39, 40]. 其中, 第一种方法易于实施, 不受 Feller 条件的限制, 精确度相对较高, 本文将采用用柳树法节点替代蒙特卡罗算法的轨迹点, 同时保持其他计算步骤相似的方式计算该条件期望, 该算法的详细步骤将在第三章的涉及到的部分具体给出.

## 2.3 局部波动率的校准

上一节中提到, Dupire 局部波动率的数值计算有成熟的校准理论, 即先用市场期权数据拟合出波动率曲面, 常用的有 SVI 函数 [41], 然后代入 Dupire 公式中计算出局部波动率.

在上一节中, 我们推导出了 Dupire 公式, 用  $T$  代替  $t$ , 得到如下式子:

$$\sigma_{LV}^2(T, K) = \frac{\frac{\partial C(t, K)}{\partial T} + rK \frac{\partial C(T, K)}{\partial K}}{\frac{1}{2}K^2 \frac{\partial^2 C(T, K)}{\partial K^2}}, \quad (2.13)$$

其中,  $T$  为期权到期日,  $K$  为期权敲定价格.

但是在金融市场上, 期权的许多工作都是基于隐含波动率而非期权价格完成, 数据的给出也往往偏向于前者, 因此 Sepp 等人 [42] 和 Kotze 等人 [43] 研究出了由隐含波动率主导的 Dupire 公式, 如下:

$$\sigma_{LV}^2(T, K) = \frac{\sigma_I^2 + 2T\sigma_I \left( \frac{\partial \sigma_I}{\partial T} + rK \frac{\partial \sigma_I}{\partial K} \right)}{\left( 1 + d_1 K \sqrt{T} \frac{\partial \sigma_I}{\partial K} \right)^2 + K^2 \sigma_I T \left( \frac{\partial^2 \sigma_I}{\partial K^2} - d_1 \sqrt{T} \left( \frac{\partial \sigma_I}{\partial K} \right)^2 \right)}. \quad (2.14)$$

其中  $\sigma_I$  是期权的隐含波动率, 且:

$$d_1 = \frac{\ln \left( \frac{S_0}{K} \right) + \left( r + \frac{1}{2} \sigma_I^2 \right) T}{\sigma_I \sqrt{T}}.$$

将 (2.13) 转化为 (2.14), 除了上文提到的优点之外, 还可以注意到虽然前式上去比后式简单, 但是分母是一个二阶导, 在数值计算中很容易产生误差, 而后式中二阶导只是分母求和项中的一部分, 这一项的误差对局部波动率整体产生的影响大大减小. 因此将式子中的价格替换为隐含波动率从多个方面来看都更好. 接下来, 首先拟合出隐含波动率.

构造精确的隐含波动曲面已经是学术界和业界一个经典的课题, 有许多著名的研究, 详见 [44][45][46] 等. Gatheral(2004)[41] 提出的 SVI 函数——一种用来拟合波动率曲面的模型就是其中一例. 本节我们首先利用 SVI(Stochastic Volatility Inspired) 函数在  $K$  方向进行拟合, 随后在  $T$  方向用线性插值方法进行拟合, 从而将两个方向相结合即隐含波动率曲面.



给定一个到期日  $T_n$ , 可以用如下函数拟合敲定价格  $K$  方向上的隐含波动率:

$$\sigma_I^{SVI} = \sqrt{\frac{\alpha_n + \beta_n \left[ \rho_n (x - m_n) + \sqrt{(x - m_n)^2 + \sigma_n} \right]}{T_n}}, \quad (2.15)$$

其中,  $\alpha_n, m_n \in \mathcal{R}, \beta_n \geq 0, |\rho_n| < 1, \sigma_n > 0, x = \ln\left(\frac{K}{S_0}\right)$ , 是对价值程度的近似.

该模型的 5 个参数都有存在的意义: 1. 参数  $\alpha_n$  控制曲线的上下移动, 反映分子的总体水平; 2. 参数  $\beta_n$  控制曲线左右的张角; 3. 参数  $\rho$  控制曲线对称性的旋转调整; 4. 参数  $m$  控制曲线的左右平移; 5. 参数  $\sigma$  控制曲线端点处平滑度的调整.

该模型的优点也十分显著: 1. 形式简单, 参数数量少, 易于计算, 因此可以针对不同的到期日, 快速校准模型以适应市场波动; 2. 能够精确拟合波动率微笑和曲面; 3. 对渐近趋势的显示也是准确的 [47].

接下来的问题是, 给定不同的到期日  $T_n$ , 求出对应的参数, 这实际上转化成了一个优化问题, 即最小化实际隐含波动率与 SVI 函数求出来的波动率的差值, 具体问题如下:

$$\min J_n(\mathbf{C}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M w_i \left( \frac{\sigma_I^{SVI}(T_n, K_i; \mathbf{C}) - \sigma_I^{\text{Market}}(T_n, K_i)}{\sigma_I^{\text{Market}}(T_n, K_i)} \right)^2. \quad (2.16)$$

其中,  $\mathbf{C} = (\alpha_n, \beta_n, \rho_n, m_n, \sigma_n)$ :  $M$  表示每个到期日不同敲定价格的个数,  $\sigma_I^{\text{Market}}$  为每个不同到期日市场实际的隐含波动率值价格点的,  $w_i$  为达到更好的效果而选择的权重, 比如选择不同期权合约成交量的比值作为权重.

至此, 我们已经求出了固定到期日  $T$ , 在  $K$  方向的拟合函数, 下文将用线性差值的方式给出隐含波动率在  $T$  方向上的函数. 有一些文献采用的是三次样条差值, 但是实际上普通的线性差值精确度就比较理想了.

$$\sigma_I^{SVI}(T, x) = \frac{T_{n+1} - T}{T_{n+1} - T_n} \sigma_I^{SVI}(T_n, x) + \frac{T - T_n}{T_{n+1} - T_n} \sigma_I^{SVI}(T_{n+1}, x), \quad (2.17)$$

其中  $T_n$  和  $T_{n+1}$  是给定的到期日, 在这两个到期日上可以求出 SVI 函数,  $T_n < T \leq T_{n+1}$ .

结合 (2.15) 式和 (2.17) 式, 隐含波动率曲面得以构建. 由于在 SVI 中作了变量替换, 因此需要将 (2.14) 式中关于  $K$  的偏导全部替换为关于  $x$  的偏导, 结果如下:

$$\sigma_{LV}(T, x) = \sqrt{\frac{\sigma_I^2 + 2T\sigma_I \left( \frac{\partial \sigma_I}{\partial T} + r \frac{\partial \sigma_I}{\partial x} \right)}{\left( 1 + d_1 \sqrt{T} \frac{\partial \sigma_I}{\partial x} \right)^2 + \sigma_I T \left( \frac{\partial \sigma_I}{\partial x^2} - \frac{\partial \sigma_I}{\partial x} - d_1 \sqrt{T} \left( \frac{\partial \sigma_I}{\partial x} \right)^2 \right)}. \quad (2.18)$$

(2.18) 式中关于  $T$  的偏导采用数值微分近似, 关于  $x$  的一, 二阶偏导直接根

据 SVI 函数表达式求解, 从而各部分的计算式如下:

$$\begin{aligned}\sigma_I &= \sigma_I^{SVI}(T, x) = \lambda_n \sigma_I^{SVI}(T_n, x) + \lambda_{n+1} \sigma_I^{SVI}(T_{n+1}, x), \\ \frac{\partial \sigma_I}{\partial T} &= \frac{1}{T_{n+1} - T_n} [\sigma_I^{SVI}(T_{n+1}, x) - \sigma_I^{SVI}(T_n, x)], \\ \frac{\partial \sigma_I}{\partial x} &= \tau_n f_n^{(1)} + \tau_{n+1} f_{n+1}^{(1)}, \\ \frac{\partial^2 \sigma_I}{\partial x^2} &= \tau_n f_n^{(2)} + \tau_{n+1} f_{n+1}^{(2)}\end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \frac{T_{n+1} - T}{T_{n+1} - T_n}, \lambda_{n+1} = \frac{T - T_n}{T_{n+1} - T_n}, \\ f_n^{(1)}(x) &= \frac{\beta_n}{2\sigma_I^{SVI}(T_n, x)} \left[ \rho_n + \frac{(x - m_n)}{\sqrt{(x - m_n)^2 \sigma_n}} \right], \\ f_n^{(2)}(x) &= \frac{1}{\sigma_I^{SVI}(T_n, x)} \left[ \frac{\beta_n \sigma_n}{2[(x - m_n)^2 + \sigma_n]^{\frac{3}{2}}} - (f_n^{(1)}(x))^2 \right].\end{aligned}$$

### 第三章 波动率指数产品定价研究

在本章中, 我们将介绍基于第二章中提到的随机局部波动率模型进行定价, 分别采用柳树法和蒙特卡罗法. 由于三种模型大体形式上几乎一样, 因此下文将主要基于 Heston-Dupire 的原始模型进行建模和计算.

#### 3.1 基于柳树法的 VIX 期权定价

本小节中将基于 Heston-Dupire 模型, 在考虑和不考虑资产价格过程与波动率过程的相关性两种情形下时, 对 VIX 指数衍生品进行定价.

考虑模型 (2.2), 假设  $E[dW_{1t}dW_{2t}] = 0$ , 并且将资产价格对数化, 即  $X_t = \ln S_t$ , 则原模型被转化为:

$$\begin{cases} dX_t = (r - \frac{1}{2}L^2(t, e^{X_t})V_t)dt + L(t, e^{X_t})\sqrt{V_t}dW_{1t} \\ dV_t = a(b - V_t)dt + \sigma_v\sqrt{V_t}dW_{2t}. \end{cases} \quad (3.1)$$

##### 3.1.1 构造关于 $v_t$ 的一维柳树

我们首先将区间  $[0, T]$  划分为  $N$  个互斥等距小区间, 得到划分点  $0 < t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$ , 时间间隔为  $\delta t = T/N$ . 构造服从 (3.1) 模型的  $v_t$  的柳树有两个主要步骤: 确定可能的取值和取值之间的转移概率. 在  $t_n$  时刻,  $v_{t_n}$  是一个随机变量. 如果  $v(t_n)$  的概率密度函数已知且形式简单, 则我们可以直接根据概率密度函数生成  $m_v$  个  $v(t_n)$  的离散值来近似其连续分布. 尽管平方根过程  $v(t_n)$  存在概率密度函数的解析形式, 但是太过于复杂并且直接从概率密度函数获取  $v(t_n)$  的样本值太耗时. 因此, 我们在本文中采用 Johnson Curve 方法 [48] 来获取匹配  $v(t_n)$  前四阶矩的关于  $v(t_n)$  的采样.

##### 3.1.1.1 构造柳树节点

在时刻  $t_n$ , 假设  $m_v$  个  $v(t_n)$  的采样值可以记为  $v_i^n, v_i^n$  可以由一个标准正态分布变量经过 Johnson Curve 变换生成, 公式如下:

$$v_i^n = c + d \cdot g^{-1}\left(\frac{z_i - a}{b}\right), \quad (3.2)$$

其中,  $a, b, c, d$  和函数  $g^{-1}$  可以由  $v(t_n)$  的前四阶矩决定, 详见 Hill 等在 1976 年给出的算法 [50].

按照 Wang 和 Xu(2018)[49] 类似的推导, Heston-Dupire 模型以及模型变式 1 和 2 的波动率  $v(t)$  的前四阶矩可以求出具体表达式, 如下定理所示, 此处省略推导过程.

**Theorem 3.1** CIR 过程  $v(t)$  的前四阶矩的具体表达式如下:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[v(t)] &= b + (v_0 - b)e^{-at}, \\
 \mathbb{E}[v^2(t)] &= b \left( \frac{\sigma_v^2}{2a} + b \right) + (v_0 - b) \left( \frac{\sigma_v^2}{a} + 2b \right) e^{-at} + \left[ (v_0 - b)^2 + \frac{\sigma_v^2}{a} \left( \frac{b}{2} - v_0 \right) \right] e^{-2at}, \\
 \mathbb{E}[v^3(t)] &= \frac{3ab^2\sigma_v^2 + 2a^2b^3 + b\sigma_v^4}{2a^2} + (v_0 - b) \frac{9ab\sigma_v^2 + 6a^2b^2 + 3\sigma_v^4}{2a^2} e^{-at} \\
 &\quad + \left[ (v_0 - b)^2 \frac{3ab + 3\sigma_v^2}{a} + \left( \frac{b}{2} - v_0 \right) \frac{3ab\sigma_v^2 + 3\sigma_v^4}{a^2} \right] e^{-2at} + \left[ v_0^3 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3ab^2\sigma_v^2 + 4a^2b^3 - b\sigma_v^4}{2a^2} - (v_0 - b)^2 \frac{3ab + 3\sigma_v^2}{a} - v_0 \frac{3ab\sigma_v^2 + 6a^2b^2 - 3\sigma_v^4}{2a^2} \right] e^{-3at}, \\
 \mathbb{E}[v^4(t)] &= \frac{12a^2b^3\sigma_v^2 + 4a^3b^4 + 11ab^2\sigma_v^4 + 3b\sigma_v^6}{4a^3} + (v_0 - b) \frac{12a^2b^2\sigma_v^2 + 4a^3b^3 + 11ab\sigma_v^4 + 3\sigma_v^6}{a^3} e^{-at} \\
 &\quad + \left[ (v_0 - b)^2 \frac{6a^2b^2 + 15ab\sigma_v^2 + 9\sigma_v^4}{a^2} + \left( \frac{b}{2} - v_0 \right) \frac{6a^2b^2\sigma_v^2 + 15ab\sigma_v^4 + 9\sigma_v^6}{a^3} \right] e^{-2at} \\
 &\quad + \left[ v_0^3 \frac{4ab + 6\sigma_v^2}{a} + \frac{18a^2b^3\sigma_v^2 + 8a^3b^4 + 7ab^2\sigma_v^4 - 3b\sigma_v^6}{a^3} - (v_0 - b)^2 \frac{12a^2b^2 + 30ab\sigma_v^2 + 18\sigma_v^4}{a^2} \right. \\
 &\quad \left. - v_0 \frac{24a^2b^2\sigma_v^2 + 12a^3b^3 + 3ab\sigma_v^4 - 9\sigma_v^6}{a^3} \right] e^{-3at} + \left[ v_0^4 - \frac{48a^2b^2\sigma_v^2 + 20a^3b^3 + 25ab^2\sigma_v^4 - 3b\sigma_v^6}{4a^3} \right. \\
 &\quad \left. + v_0 \frac{18a^2b^2\sigma_v^2 + 8a^3b^3 + 7ab\sigma_v^4 - 3\sigma_v^6}{a^3} + (v_0 - b)^2 \frac{6a^2b^2 + 15ab\sigma_v^2 + 9\sigma_v^4}{a^2} \right. \\
 &\quad \left. - v_0^3 \frac{4ab + 6\sigma_v^2}{a} \right] e^{-4at},
 \end{aligned}$$

$\gamma = 1$  的 CEV 过程  $v(t)$  的前四阶矩的具体表达式如下:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[r(t)] &= b + (r_0 - b)e^{-at}, \\
 \mathbb{E}[r^2(t)] &= r_0^2 e^{(\sigma^2 - 2a)t} + \frac{2ab^2}{2a - \sigma^2} \left[ 1 - e^{(\sigma^2 - 2a)t} \right] + \frac{2ab(r_0 - b)}{a - \sigma^2} \left[ e^{-at} - e^{(\sigma^2 - 2a)t} \right], \\
 \mathbb{E}[r^3(t)] &= r_0^3 e^{3(\sigma^2 - a)t} + \frac{2a^2b^3}{(a - \sigma^2)(2a - \sigma^2)} \left[ 1 - e^{3(\sigma^2 - a)t} \right] + \frac{6a^2b^2(r_0 - b)}{(a - \sigma^2)(2a - 3\sigma^2)} \left[ e^{-at} - e^{3(\sigma^2 - a)t} \right] \\
 &\quad + \frac{3ab}{a - 2\sigma^2} \left[ r_0^2 - \frac{2ab^2}{2a - \sigma^2} - \frac{2ab(r_0 - b)}{a - \sigma^2} \right] \left[ e^{(\sigma^2 - 2a)t} - e^{3(\sigma^2 - a)t} \right], \\
 \mathbb{E}[r^4(t)] &= r_0^4 e^{(6\sigma^2 - 4a)t} + \frac{4a^3b^4}{(a - \sigma^2)(2a - \sigma^2)(2a - 3\sigma^2)} \left[ 1 - e^{(6\sigma^2 - 4a)t} \right] \\
 &\quad + \frac{8a^3b^3(r_0 - b)}{(a - \sigma^2)(2a - 3\sigma^2)(a - 2\sigma^2)} \left[ e^{-at} - e^{(6\sigma^2 - 4a)t} \right] \\
 &\quad + \frac{12a^2b^2}{(a - 2\sigma^2)(2a - 5\sigma^2)} \left[ r_0^2 - \frac{2ab^2}{2a - \sigma^2} - \frac{2ab(r_0 - b)}{a - \sigma^2} \right] \left[ e^{(\sigma^2 - 2a)t} - e^{(6\sigma^2 - 4a)t} \right] \\
 &\quad + 4ab \left[ \frac{r_0^3}{a - 3\sigma^2} - \frac{2a^2b^3}{(a - \sigma^2)(2a - \sigma^2)(a - 3\sigma^2)} - \frac{6a^2b^2(r_0 - b)}{(a - \sigma^2)(2a - 3\sigma^2)(a - 3\sigma^2)} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3ab}{(a - 2\sigma^2)(a - 3\sigma^2)} \left( r_0^2 - \frac{2ab^2}{2a - \sigma^2} - \frac{2ab(r_0 - b)}{a - \sigma^2} \right) \right] \left[ e^{3(\sigma^2 - a)t} - e^{(6\sigma^2 - 4a)t} \right].
 \end{aligned}$$

再回到 (3.2) 式, 其中  $a$  和  $b$  是形状参数,  $c$  是位置参数,  $d$  是比例参数,  $g$  函数有四种形式:

$$g(u) = \begin{cases} e^u, & \text{对数族 } S_L \\ (e^u - e^{-u})/2, & \text{无界族 } S_U \\ 1/(1 + e^{-u}), & \text{有界族 } S_B \\ u, & \text{正态族 } S_N. \end{cases}$$

令  $\gamma = \omega^4 + 2\omega^3 + 3\omega^2 - 3$ , 其中  $\omega$  为  $(\omega - 1)(\omega + 2)^2 = \kappa_3^2$  的解,  $\kappa_3$  是求出的三阶矩, 根据  $\gamma$  与  $\kappa_4$  的大小关系可以得到  $g$  函数族的最优选择.

确定好  $g$  的函数类型后, 我们需要生成标准正态分布离散序列  $\{(z_i, p_i)\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m_v$ ,  $m_v$  是需要产生的离散值的个数,  $z_i$  是服从标准正态分布的离散值,  $p_i$  是相应的概率. 首先需要构造一个序列  $\{\tilde{q}_j\}$ , 满足 [51]:

$$\tilde{q}_j = \frac{(j - 0.5)^\gamma}{m_v}, \quad \tilde{q}_{m_v+1-j} = \tilde{q}_j, \quad j = 1, 2, \dots, \frac{m_v}{2}.$$

因为  $N^{-1}(\tilde{q})$  是关于 0.5 左右对称的, 我们只需要计算一半  $\tilde{q}_j$  的概率值, 另一半通过对称即可得到. 将序列  $\{\tilde{q}_i\}$  中的元素标准化,  $p_i = \frac{\tilde{q}_i}{\sum_{j=1}^{m_v} \tilde{q}_j}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

最后, 我们将用最优化以下非线性最小二乘问题的方式得到  $\{z_i\}$ :

$$\begin{aligned} \min_{z_i} & \left[ \sum_{i=1}^{m_v} p_i z_i^4 - 3 \right]^2 \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^{m_v} p_i z_i = 0, \\ & \sum_{i=1}^m p_i z_i^2 = 1, \\ & Z_{i-1} \leq z_i \leq Z_i. \end{aligned}$$

以上问题的最优解为  $z_i = N^{-1}\left(\sum_{j=1}^i p_j\right)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m_v - 1$ ,  $z_0 = -\infty$  以及  $Z_{m_v} = \infty$ . 将得到的标准正态分布序列  $\{(z_i, p_i)\}$  代入 (3.4) 中计算出  $\{v_i^n\}$ , 特别地, [51] 中证明了  $\{v_i^n\}$  是一个单调递增的序列, 这个性质大大简化了柳树法的计算.

### 3.1.1.2 计算转移概率矩阵

在确定好  $v(t_n)$  的值之后, 下一步就是计算  $v_i^n$  和  $v_j^{n+1}$  之间的转移概率  $\hat{p}_{ij}^n, i, j = 1, 2, \dots, m_v, n = 1, 2, \dots, N - 1$ . 给定  $v(t_n)$  时, 关于  $v(t_{n+1})$  的条件概

率  $p(v(t_{n+1}) | v(t_n))$  是已知的, 求解以下 Fokker-Planck 方程 [49] 即可得到.

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial(\eta(\theta - v(t))p)}{\partial v} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \left( \left( \sigma_v \sqrt{v(t)} \right)^2 p \right)}{\partial^2 v}.$$

可以用对应的正态概率密度函数作为其近似解, 如下:

$$p(v(t_{n+1}) | v(t_n)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_v^2 v(t_n) \Delta}} e^{-\frac{(v(t_{n+1}) - v(t_n) - \eta(\theta - v(t_n))\Delta)^2}{2\sigma_v^2 v(t_n) \Delta}},$$

其中  $\Delta = t_{n+1} - t_n$ , 是前文中提到过的时间间隔.

从而, 相应的转移概率  $\hat{p}_{ij}^n$  可以计算如下:

$$\hat{p}_{ij}^n = \mathbb{P}(V_j^{n+1} \leq v(t_{n+1}) \leq V_{j+1}^{n+1} | v_i^n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_v^2 v_i^n \Delta t}} \int_{V_j^{n+1}}^{V_{j+1}^{n+1}} e^{-\frac{(x - v_i^n - \eta(\theta - v_i^n)\Delta t)^2}{2\sigma_v^2 v_i^n \Delta t}} dx, \quad (3.3)$$

其中  $V_j^{n+1} = (v_{j-1}^{n+1} + v_j^{n+1})/2$ ,  $V_1^{n+1} = -\inf$ ,  $V_{m_v+1}^{n+1} = +\inf$ ,  $j = 1, 2, \dots, m_v$ .

综上,  $t_n$  和  $t_{n+1}$  之间的转移概率组成了一个  $m_v \times m_v$  维的矩阵, 其中的分量  $\hat{p}_{ij}^n$ , 代表从  $v_i^n$  到  $v_j^{n+1}$  的转移概率.

特别地,  $t_0$  和  $t_1$  之间的转移概率组成了一个  $m_v \times 1$  维的向量, 其中的分量  $\hat{p}_i$ , 代表从  $v_0$  到  $v_i^1$  的转移概率, 计算公式如下:

$$\hat{p}_i = \mathbb{P}(V_i^1 \leq v(t_1) \leq V_{i+1}^1 | v_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_v^2 v_0 \Delta t}} \int_{V_i^1}^{V_{i+1}^1} e^{-\frac{(x - v_0 - \eta(\theta - v_0)\Delta t)^2}{2\sigma_v^2 v_0 \Delta t}} dx, \quad (3.4)$$

其中  $V_i^1 = (v_{i-1}^1 + v_i^1)/2$ ,  $V_1^1 = -\inf$ ,  $V_{m_v+1}^1 = +\inf$ ,  $i = 1, 2, \dots, m_v$ .

到目前为止, 关于波动率  $v(t)$  的一维柳树已经建立. 在下一节中, 我们将会在  $v(t)$  的柳树的基础上构建关于  $(X(t), v(t))$  的二维柳树.

### 3.1.2 $\{X_t, v_t\}$ 二维柳树构造

#### 3.1.2.1 构造柳树节点

Heston-Dupire 模型是一个二维随机过程, 资产价格过程建立在波动率过程的基础上, 因此需要在上一节中所示, 先建立关于  $v(t)$  的一维柳树, 然后再根据生成的  $v(t)$  节点生成  $S(t)$  节点.

在生成节点的过程中, 与一维柳树情况不同的是, 无法写出  $X_t$  和  $S_t$  在  $t = t_n$  的前四阶矩的解析表达式. 因此, 为了估计前四阶矩, 我们将采用由 Dynkin 给出的类似于 Taylor 展开的公式 [52]. 给定  $v_t$  的值, 关于 (3.1) 中的扩散过程  $X_t$  的一个足够平滑的函数的条件期望的展开, 可以写作如下形式:

$$\mathbb{E}[f(X_t) | v_t] = \sum_{k=1}^{\kappa} \mathcal{L}^k[f(X_0)] \frac{t^k}{k!} + R_{\kappa+1}, \quad (3.5)$$

其中  $\mathcal{L}[f(X_t)]$  是关于  $f(X_t)$  的一个算子,  $R_{\kappa+1}$  是余项.

因此, 如果我们将  $f$  指定为  $X_t$  的幂函数,  $X_t$  的前四阶矩即可估算出来, 如定理 3.2 所示.

**Theorem 3.2** 在给定  $v_t$ , 初始值  $v_0$  和  $X_0$  的情况下, (3.3) 中  $X_t$  的前四阶矩可以计算如下:

$$\mathbb{E}[X_t^n | v_t] = \sum_{k=0}^{\kappa} \{\mathcal{L}^k [X_t^n]\}_{t=0} \frac{t^k}{k!} + R_{\kappa+1}, \quad n = 1, 2, 3, 4,$$

其中算子  $\mathcal{L}$  和余项的具体形式如下:

$$\mathcal{L} = \left( r - \frac{1}{2} L^2(t, e^{X_t}) v_t \right) \frac{\partial}{\partial X_t} + \frac{1}{2} L^2(t, e^{X_t}) v_t \frac{\partial^2}{\partial X_t^2},$$

以及

$$R_{\kappa+1} = \frac{t^{\kappa+1}}{(\kappa+1)!} \mathbb{E} \{ \mathcal{L}^{\kappa+1} [X_t^n] \}, \quad 0 \leq \xi \leq t$$

具体地, 以  $X_t$  的前二阶矩为例计算如下:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t | v_t] &= X_0 + r - \frac{1}{2} L^2(0, e^{X_0}) v_t, \\ \mathbb{E}[X_t^2 | v_t] &= X_0^2 + \left( r - \frac{1}{2} L^2(0, e^{X_0}) v_t \right) X_0 t + L^2(0, e^{X_0}) t \\ &\quad + \left( r - \frac{1}{2} L^2(0, e^{X_0}) v_t \right)^2 X_0 \frac{t^2}{2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

注意到在 (3.6) 中需要计算  $L^2(0, e^{X_0})$ , 将在本章的 3.1.4 小节中给出具体计算方法.

在  $t_n$  时刻, 给定一个波动率的节点值  $v_{i1}^n$ , 其中  $i1 = \lceil i/m_v \rceil, \lceil \cdot \rceil$  是向上取整函数. 我们可以用定理 3.2 中求出的前四阶矩通过 Johnson Curve 方法生成  $m_x$  个离散的  $X_{t_n}$  值, 将此方法遍历该时刻的  $m_v$  个波动率树节点  $v_{i1}, i1 = 1, 2, \dots, m_v$ , 则此时二维柳树所有的树节点  $(X_i^n, v_{i1}^n), i = 1, 2, \dots, m_v m_x$  得以生成.

### 3.1.2.2 计算不考虑相关性情况下的转移概率

和构造一维柳树相似的, 下一步是计算从  $(X_i^n, v_{i1}^n)$  到  $(X_j^{n+1}, v_{j1}^{n+1})$  的转移概率  $p_{ij}^n$ . 注意到在给定  $(X_i^n, v_{i1}^n)$  的情况下,  $X_{t_{n+1}}$  和  $v_{t_{n+1}}$  是独立的, 因此转移概率可以计算如下:

$$\begin{aligned} p_{ij}^n &= P(A_j^{n+1} \leq X_{t_{n+1}} \leq A_{j+1}^{n+1}, V_{j1}^{n+1} \leq v_{t_{n+1}} \leq V_{j1+1}^{n+1} | (X_i^n, v_{i1}^n)) \\ &= P(V_{j1}^{n+1} \leq v_{t_{n+1}} \leq V_{j1+1}^{n+1} | (X_i^n, v_{i1}^n)) \cdot P(A_j^{n+1} \leq X_{t_{n+1}} \leq A_{j+1}^{n+1} | (X_i^n, v_{i1}^n)) \\ &= \hat{p}_{i1j1}^n P(A_j^{n+1} \leq X_{t_{n+1}} \leq A_{j+1}^{n+1} | (X_i^n, v_{i1}^n)), \end{aligned}$$

其中  $A_j^{n+1} = (X_{j-1}^{n+1} + X_j^{n+1})/2$ ,  $V_{j1}^{n+1} = (v_{j1-1}^{n+1} + v_{j1}^{n+1})/2$ . 参考文献 [47] 中已经证明, 在给定  $(X_i^n, v_{i1}^n)$  的情况下,  $X_{t_{n+1}}$  的概率分布可以由一个正态分布来估算,

即:

$$X_{t_{n+1}} | (X_i^n, v_{i1}^n) \sim \mathcal{N} \left( X_i^n + \Theta(X_{i1}^n, \hat{v}_{i1}^n) \Delta t, \sqrt{(1 - \rho^2) \Delta t v_{i1}^n} \right).$$

因此, 转移概率  $p_{ij}^n$  可以通过下式计算:

$$\begin{aligned} p_{ij}^n &= \hat{p}_{i1j1}^n \left[ \Phi \left( \frac{X_j^{n+1} - \tilde{\mu}_{i1,j}}{\tilde{\sigma}_{i1}} \right) - \Phi \left( \frac{X_{j-1}^{n+1} - \tilde{\mu}_{i1,j}}{\tilde{\sigma}_{i1}} \right) \right] \\ &= \hat{p}_{j1k1}^n \cdot \frac{1}{L(t_n, e^{X_i^n}) \sqrt{2\pi V_{j1}^n \Delta}} \int_{A_k^{n+1}}^{A_{k+1}^{n+1}} e^{-\frac{(x - X_i^n - r + \frac{1}{2} L^2(t_n, e^{X_i^n}) v_{j1}^n \Delta)}{2}} dx, \end{aligned} \quad (3.7)$$

其中  $\hat{p}_{i1j1}^n$  是 (3.3) 式中计算的  $v_{i1}^n$  和  $v_{j1}^{n+1}$  之间的转移概率. 从  $(X_0, v_0)$  到  $(X_i^1, v_{i1}^1)$  的转移概率计算如下:

$$\begin{aligned} p_i^0 &= \hat{p}_{i1}^0 P(A_i^1 \leq X(t_1) \leq A_{i+1}^1) = \hat{p}_{i1}^0 \Phi \left( \frac{A_{i+1}^1 - \tilde{\mu}_0}{\tilde{\sigma}_0} \right) - \Phi \left( \frac{A_i^1 - \tilde{\mu}_0}{\tilde{\sigma}_0} \right) \\ &= \hat{p}_{j1k1}^n \cdot \frac{1}{L(0, e^{X_0}) \sqrt{2\pi V_0 \Delta}} \int_{A_k^1}^{A_{k+1}^1} e^{-\frac{(x - X_0 - r + \frac{1}{2} L^2(0, e^{X_0}) v_0 \Delta)}{2}} dx. \end{aligned}$$

### 3.1.2.3 计算考虑相关性情况下的转移概率

考虑相关性情况下的转移概率的计算与不考虑的情况有很大的不同, 此时不需要事先计算波动率的转移概率, 而是巧妙地通过正交补进行转化, 具体计算见下文.

给定  $(X_i^n, v_{i1}^n)$ , 假设下一个时刻的节点为  $(X_j^{n+1}, v_{j1}^{n+1})$ , 转移概率同样可以计算如下:

$$p_{ij}^n = P(A_k^{n+1} \leq X_{t_{n+1}} \leq A_{k+1}^{n+1}, V_{k1}^{n+1} \leq v_{t_{n+1}} \leq V_{k1+1}^{n+1} | (X_i^n, v_{i1}^n)). \quad (3.8)$$

令  $\Delta X_j = X_j^{n+1} - X_i^n$ , 则根据式 (3.1) 的第一式,  $\Delta X_j$  可以估算如下:

$$\Delta X_j = \left( r - \frac{1}{2} L^2(t_n, X_i^n) v_{i1}^n \right) \Delta t + L(t_n, X_i^n) \sqrt{v_{i1}^n} \sqrt{\Delta t} Z,$$

其中,  $Z$  是标准正态变量, 因此,  $A_k^{n+1} \leq X_{t_{n+1}} \leq A_{k+1}^{n+1}$  可以转化为

$$\begin{aligned} Z &\geq \frac{(A_k^{n+1} - X_i^n - (r - \frac{1}{2} L^2(t_n, X_i^n) v_{i1}^n) \Delta t)}{L(t_n, X_i^n) \sqrt{v_{i1}^n} \sqrt{\Delta t}}, \\ Z &\leq \frac{(A_{k+1}^{n+1} - X_i^n - (r - \frac{1}{2} L^2(t_n, X_i^n) v_{i1}^n) \Delta t)}{L(t_n, X_i^n) \sqrt{v_{i1}^n} \sqrt{\Delta t}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

在式 (3.9) 中, 将第一式的右端记为  $C_j^{n+1}$ , 将第二式的右端记为  $D_j^{n+1}$ .

类似地, 令  $\Delta v_{j1}^{n+1} = v_{j1}^{n+1} - v_{i1}^n$ , 则根据式 (3.1) 的第二式,  $\Delta v_{j1}^{n+1}$  可以估算如下:

$$\Delta v_{j1}^{n+1} = a(b - v_{i1}^n) \Delta t + \sigma_v \sqrt{v_{i1}^n} \rho \sqrt{\Delta t} Z + \sigma_v \sqrt{v_{i1}^n} \sqrt{1 - \rho^2} \sqrt{\Delta t} Z^\perp,$$



其中,  $Z^\perp$  是  $Z$  的正交补, 且也是一个标准正态变量, 因此,  $V_{k1}^{n+1} \leq v_{t_{n+1}} \leq V_{k1+1}^{n+1}$  可以转化为

$$\begin{aligned} Z^\perp &\geq \frac{(V_{k1}^{n+1} - v_{i1}^n - a(b - v_{i1}^n) \Delta t - \sigma_v \sqrt{v_{i1}^n} \rho \sqrt{\Delta t} Z)}{\sigma_v \sqrt{v_{i1}^n} \sqrt{1 - \rho^2} \sqrt{\Delta t}}, \\ Z^\perp &\leq \frac{(V_{k1+1}^{n+1} - v_{i1}^n - a(b - v_{i1}^n) \Delta t - \sigma_v \sqrt{v_{i1}^n} \rho \sqrt{\Delta t} Z)}{\sigma_v \sqrt{v_{i1}^n} \sqrt{1 - \rho^2} \sqrt{\Delta t}}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

将  $Z$  的上下界  $C_j^{n+1}$ ,  $D_j^{n+1}$  代入式 (3.10) 中, 记此时  $Z^\perp$  的上下界为  $c_{j1}^{n+1}$ ,  $d_{j1}^{n+1}$ , 则可以得到:

$$\begin{aligned} c_{j1}^{n+1} &= \frac{(V_{k1}^{n+1} - v_{i1}^n - a(b - v_{i1}^n) \Delta t - \sigma_v \sqrt{v_{i1}^n} \sqrt{\Delta t} \rho C_j^{n+1})}{\sigma_v \sqrt{v_{i1}^n} \sqrt{1 - \rho^2} \sqrt{\Delta t}}, \\ d_{j1}^{n+1} &= \frac{(V_{k1+1}^{n+1} - v_{i1}^n - a(b - v_{i1}^n) \Delta t - \sigma_v \sqrt{v_{i1}^n} \sqrt{\Delta t} \rho D_j^{n+1})}{\sigma_v \sqrt{v_{i1}^n} \sqrt{1 - \rho^2} \sqrt{\Delta t}}. \end{aligned}$$

注意到, 这里的  $\rho$  通常来说为负值, 否则需要将上式中的  $C_j^{n+1}$ ,  $D_j^{n+1}$  进行调换.

从而, (3.8) 中的转移概率计算可以转化为

$$\begin{aligned} p_{ij}^n &= P(A_k^{n+1} \leq X_{t_{n+1}} \leq A_{k+1}^{n+1}, V_{k1}^{n+1} \leq v_{t_{n+1}} \leq V_{k1+1}^{n+1} | (X_i^n, v_{i1}^n)) \\ &= P(C_j^{n+1} \leq Z \leq D_j^{n+1}) (c_{j1}^{n+1} \leq Z^\perp \leq d_{j1}^{n+1}). \end{aligned} \quad (3.11)$$

至此, 我们建立了  $\{X_t, v_t\}$  的转移概率矩阵. 其中,  $t_0$  和  $t_1$  之间的转移概率构成了一个  $m_x \times 1$  维的向量,  $t_n$  和  $t_{n+1}$  之间的转移概率构成了一个  $m_x \times m_x$  维的矩阵,  $n = 1, \dots, N - 1$ .

Heston-Dupire 模型的二维柳树见图3.1

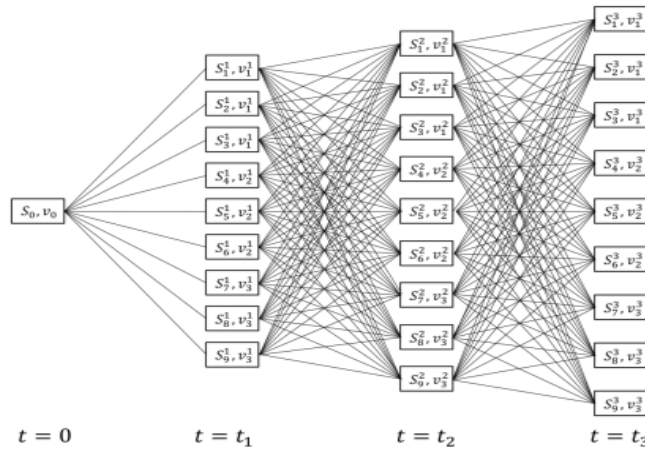


图 3.1 Heston-Dupire 模型的二维柳树结构

### 3.1.3 欧式期权及 VIX 期权定价

在这一节中, 假设上证 50ETF 指数的动态过程服从 (2.2) 中的 Heston-Dupire 随机局部波动率模型, 并且已经根据上文中的方法构建好了资产价格和波动率的二维柳树. 则以该指数为标的资产的欧式看涨期权定价和美式看跌期权可以用逆向归纳法计算, 如下:

$$V_j^n = \begin{cases} e^{-r\Delta t} \sum_{k=1}^{m_v m_x} p_{jk}^n V_k^{n+1}, & \text{欧式看涨期权} \\ \max(\max(K - S_j^n, 0), e^{-r\Delta t} \sum_{k=1}^{m_v m_x} p_{jk}^n V_k^{n+1}), & \text{美式看跌期权.} \end{cases}$$

其中,  $K$  是执行价格,  $V_j^N = \max(S_j^N - K, 0)$  是在节点  $j$  和时刻  $N$  处的收益,  $n = N - 1, N - 2, \dots, 1$ . 在初始时刻  $t_0$  的期权价格可以由下式计算:

$$V^0 = \begin{cases} e^{-r\Delta t} \sum_{k=1}^{m_v m_x} p_k^0 V_k^1, & \text{欧式看涨期权} \\ \max(\max(K - S_0, 0), e^{-r\Delta t} \sum_{k=1}^{m_v m_x} q_k V_k^1), & \text{美式看跌期权.} \end{cases}$$

接下来介绍基于上述指数的 VIX 期权的定价. VIX 指数的定义如下 [53]:

$$\text{VIX}_T^2(\tau) = \frac{2}{\tau} \mathbb{E}_t^Q \left[ \int_T^{T+\tau} \frac{dS_u}{S_u} - d(\log S_u) \right] \times 100^2. \quad (3.12)$$

其中  $\tau$  是波动率指数的长度,  $\mathbb{E}^Q[\cdot]$  是风险中性测度下给定  $T$  时刻资产价格  $S_T$  时的条件期望. 由 Itô 引理, (3.12) 可以被改写为:

$$\begin{aligned} \text{VIX}_T^2(\tau) &= \frac{1}{\tau} \mathbb{E}_T^Q \left[ \int_T^{T+\tau} \frac{1}{S_u^2} (dS_u)^2 \right] \times 100^2 \\ &= \frac{1}{\tau} \int_T^{T+\tau} \mathbb{E}_T^Q [L(u, S_u)^2 v_u] du \times 100^2, \end{aligned} \quad (3.13)$$

假定  $S_t$  服从 (2.2) 中的随机局部波动率模型, 即  $(dS_u)^2 = L(u, S_u)^2 v_u S_u^2 du$ . 为了计算由 (3.7) 给出的 VIX 指数的值, 我们将区间  $[T, T + \tau]$  划分成  $N_1$  个小区间, 即  $T = \bar{t}_0 < \bar{t}_1 < \dots < \bar{t}_{N_1} = T + \tau$ . 则 (3.7) 式中 VIX 的计算式可以改写为:

$$\begin{aligned} \text{VIX}_T^2(\tau) &= \frac{1}{\tau} \mathbb{E}_T^Q \left[ \int_T^{T+\tau} \frac{1}{S_u^2} (dS_u)^2 \right] \times 100^2 \\ &= \frac{1}{\tau} \mathbb{E}_T^Q \left[ \sum_{n=1}^{N_1} \int_{\bar{t}_{n-1}}^{\bar{t}_n} L(u, S_u)^2 v_u du \right] \times 100^2 \\ &\approx \frac{\Delta\tau \times 100^2}{\tau} \sum_{n=N}^{N'-1} \mathbb{E}_T^Q [L^2(\bar{t}_n, S_{\bar{t}_n}) v_{\bar{t}_n}], \end{aligned} \quad (3.14)$$

其中  $\Delta\tau = \tau/N_1$  且  $N' = N + N_1$ .

为了计算 (3.14) 中的期望值, 我们首先在区间  $[0, T + \tau]$  上构建一个柳树, 假设  $S_t$  服从 (2.2). 那么, 在树节点  $(S_i^N, v_{i1}^N)$  处 VIX 的值, 记作  $\text{VIX}_i^N$ , 可以写成

如下形式:

$$\text{VIX}_i^N = \sqrt{\frac{\Delta\tau \times 100^2}{\tau} \sum_{n=N+1}^{N'} \mathbb{E}^Q [L^2(t_n, S_{t_n}) v_{t_n} | (S_i^N, v_{i1}^N)]}. \quad (3.15)$$

对于  $n = N + 1$ , 期望  $\mathbb{E}^Q [L^2(t_{N+1}, S_{t_{N+1}}) v_{t_{N+1}} | (S_i^N, v_{i1}^N)]$  可以由下式估算:

$$\mathbb{E}^Q [L^2(t_{N+1}, S_{t_{N+1}}) v_{t_{N+1}} | (S_i^N, v_{i1}^N)] = \sum_{j=1}^{m_v m_x} p_{ij}^N L^2(N\Delta + \Delta\tau, S_j^{N+1}) v_{j1}^{N+1}, \quad (3.16)$$

其中  $\Delta$  是前  $N$  个点的划分时间间隔.

对于  $n = N + 2$ , 我们定义一个矩阵  $[\hat{p}_{ij}^N] = [p_{ij}^N] \times [p_{ij}^{N+1}]$ , 即  $[\hat{p}_{ij}^N]$  是转移概率矩阵  $[p_{ij}^N]$  和  $[p_{ij}^{N+1}]$  的乘积. 则期望  $\mathbb{E}^Q [L^2(t_{N+2}, S_{t_{N+2}}) v_{t_{N+2}} | (S_i^N, v_{i1}^N)]$  可以由下式估算:

$$\mathbb{E}^Q [L^2(t_{N+2}, S_{t_{N+2}}) v_{t_{N+2}} | (S_i^N, v_{i1}^N)] = \sum_{j=1}^{m_v m_x} \hat{p}_{ij}^N L^2(N\Delta + 2\Delta\tau, S_j^{N+2}) v_{j1}^{N+2}. \quad (3.17)$$

类似地, 对于  $n = N + 3$ , 有矩阵  $[\hat{p}_{ij}^N] = [p_{ij}^N] \times [p_{ij}^{N+1}] \times [p_{ij}^{N+2}]$ , 则期望  $\mathbb{E}^Q [L^2(t_{N+3}, S_{t_{N+3}}) v_{t_{N+3}} | (S_i^N, v_{i1}^N)]$  可以由下式估算:

$$\mathbb{E}^Q [L^2(t_{N+3}, S_{t_{N+3}}) v_{t_{N+3}} | (S_i^N, v_{i1}^N)] = \sum_{j=1}^{m_v m_x} \hat{p}_{ij}^N L^2(N\Delta + 3\Delta\tau, S_j^{N+3}) v_{j1}^{N+3}. \quad (3.18)$$

根据以上过程, (3.15) 右端求和式的每一个期望项都可以用式 (3.16) 到式 (3.18) 相似的方法估算. 从而计算得到了树节点  $(S_i^N, v_{i1}^N)$  处的  $\text{VIX}_i^N$  的值. 因此, 到期日为  $T$  的 VIX 上的欧式看涨期权价格为

$$\begin{aligned} V^0 &= e^{-rT} \mathbb{E}^Q [(VIX_T(\tau) - K)^+] \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}^Q \left[ \left( \sqrt{\frac{1}{\tau} \mathbb{E}_T^Q \left[ \sum_{n=1}^{N1} \int_{\tilde{t}_{n-1}}^{\tilde{t}_n} L^2(u, S(u)) v_u du \right] \times 100^2 - K} \right)^+ \right] \\ &\approx e^{-rT} \mathbb{E}^Q \left[ \left( \sqrt{\frac{\Delta\tau \times 100^2}{\tau} \sum_{n=N}^{N'-1} \mathbb{E}_T^Q [L^2(\tilde{t}_n, v_{\tilde{t}_n}) v_{\tilde{t}_n}] - K} \right)^+ \right] \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}^Q [(VIX_i^N - K)^+]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

上式可以通过本小节最开始提到的指数的柳树逆向归纳法来计算. 更进一步地, 由于在计算过程中对  $\tau$  没有限制, 因此柳树法可以适用于任何长度的波动率指数, 比如 VXST, VXMT 和 VXV, 柳树的构建和指数的计算方法和 VIX 大致

相同.

### 3.1.4 杠杆函数的期望部分计算方法

注意到在构建二维柳树及定价的过程中, 杠杆函数  $L$  出现在了 Dynkin 公式, 转移概率矩阵和 VIX 定价公式中. 难点在于对其分母部分的计算, 在 Dynkin 公式中, 我们需要计算每个时刻的  $E[v_t | S_t = s_0]$ . 在转移概率矩阵和 VIX 定价公式中, 需要计算  $E[v_t | S_t = s_{i,j}]$ .

在第二章的介绍中提到了几种经典的计算方法, 其中最常用的是条件蒙特卡罗法, 在下一节中将具体介绍算法过程. 本小节将借鉴其区间划分的思想, 在柳树框架下计算杠杆函数中的期望值, 并且给出了以上几种不同情况下的具体计算方法.

#### 3.1.4.1 Dynkin 公式中的杠杆函数

对于时刻  $t = t_{i+1}$ , Dynkin 公式的目的是产生此时与给定的与  $v_t$  对应的  $X_t$  的前四阶矩, 以通过 Johnson Curve 方法生成  $X_t$  的  $m_x$  个样本点. 此时, 已经生成的部分是: 从 0 到  $t_{i+1}$  的每个时刻的波动率样本点, 从 0 到  $t_i$  的每个时刻的资产价格样本点以及这些样本点之间的转移概率矩阵. 因此, 为了估算这个期望值, 我们将用  $t_i$  时刻的资产价格来代替此时的资产价格作为近似.

首先将  $t_i$  时刻资产价格的离散模拟值  $s_{i,j}$  从小到大排列, 得到  $\{\bar{s}_{i,j} | j = 1, \dots, m_x \times m_v\}$ , 其中  $\bar{s}_{i,1} \leq \bar{s}_{i,2} < \dots < \bar{s}_{i,m_x \times m_v}$ .

假设划分后的小区分别为  $(C_1, C_2], (C_2, C_3], \dots, (C_m, C_{m+1}]$ , 其中  $C_1 \geq 0, C_{m+1} < \infty$ . 令:

$$C_{i,1} = \bar{s}_{i,1}, C_{i,m+1} = \bar{s}_{i,m_x \times m_v}, C_{i,k} = \bar{s}_{i,(k-1)m_x \times m_v/m}, k = 2, \dots, m.$$

注意到, 该划分保证了每个区间内模拟离散值的个数是相同的. 因此, 这实际上不是一个距离意义上的均分, 而是数量意义上的均分, 这样的划分方式能够遵循原分布.

假设  $t_i$  时刻的小区间的集合是  $\mathcal{B}_i$ ,  $\mathcal{J}_{i,k}$  是包含在第  $k$  个小区间中的资产价格模拟点的下标集, 即  $\mathcal{J}_{i,k} = \{(i, j) | (s_{i,j}, v_{i,j}) \in \mathcal{B}_{i,k}\}$ . 假设  $S_0$  包含在第  $k$  个小区间中, 则概率测度为  $\mathbb{Q}$  时, 有:

$$\begin{aligned} E[V_{t_{i+1}} | S_{t_{i+1}} = S_0] &\approx E[V_{t_{i+1}} | S_{t_i} = S_0] \\ &\approx \frac{E[V_{t_{i+1}} 1_{S_{t_i} \in (b_{i,k}, b_{i,k+1}]}]}{\mathbb{Q}[S_{t_i} \in (b_{i,k}, b_{i,k+1}]} \end{aligned} \quad (3.20)$$

其分母部分实际上等价于  $t_i$  时刻的资产价格  $S_{t_i}$  处于第  $k$  个小区间内的概率.

在前面转移概率矩阵的计算中, 我们曾将每个时刻的资产价格进行划分, 用一个点到一个区间的累积转移概率来代替点对点之间的转移概率. 类似地, 在划

分后, 每个离散资产价格点的出现概率可以由区间的累积概率来近似, 即此概率可以用该区间里的每个  $S_{t_i}$  离散点的近似分布概率的总和来估算.

假设从  $t_0$  到  $t_1$  的二维柳树转移概率横向量为  $\hat{P}_{k_0, j_0}^0$ , 从  $t_{i-1}$  到  $t_i$  时刻的二维柳树转移概率矩阵为  $\hat{P}_{k_{i-1}, j_{i-1}}^{i-1}$ , 则  $t_i$  时刻各个离散点的分布概率即从初始点到此时的各个离散点的转移概率为

$$\hat{\Pi}_i = \hat{P}_{k_0, j_0}^0 \times \cdots \times \hat{P}_{k_{i-1}, j_{i-1}}^{i-1}, \quad \hat{\Pi}_i = (p_{i,1}, \cdots, p_{i,m_x \times m_v}).$$

从而 (3.15) 分母部分可以由下式估算:

$$\mathbb{Q}[S_{t_i} \in (b_{i,k}, b_{i,k+1}]] \approx \sum_{j=1}^{m_x \times m_v} p_{i,j} 1_{S_{i,j} \in (b_{i,k}, b_{i,k+1}]}.$$

同理, (3.15) 分子部分可以由下式估算:

$$E[V_{t_{i+1}} 1_{S_{t_i} \in (b_{i,k}, b_{i,k+1}]}] \approx \sum_{j=1}^{m_x \times m_v} p_{i,j} v_{i,j} 1_{S_{i,j} \in (b_{i,k}, b_{i,k+1}]}.$$

综上, 对期望的估计 (3.15) 的右端可以改写为:

$$E[V_{t_{i+1}} | S_{t_{i+1}} = S_0] \approx \frac{\sum_{j=1}^{m_x \times m_v} p_{i,j} v_{i,j} 1_{S_{i,j} \in (b_{i,k}, b_{i,k+1}]}}{\sum_{j=1}^{m_x \times m_v} p_{i,j} 1_{S_{i,j} \in (b_{i,k}, b_{i,k+1}]}} \quad (3.21)$$

#### 3.1.4.2 转移概率和 VIX 指数中的杠杆函数

在转移概率矩阵中, 在求  $t_i$  时刻  $t_{i+1}$  之间的转移概率时, 我们假设  $S_{t_{i+1}}$  中的点服从相应的正态分布, 而这些正态分布的参数由  $t_i$  时刻的资产价格和波动率决定, 即我们需要针对每对柳树节点  $(S_j^i, v_{j1}^i)$  求出期望值  $E[v_t | S_t = S_j^i]$ . 计算过程与 (一) 中 Dynkin 公式中的期望值算法类似, 区别在于从  $t_0$  到  $t_i$  的柳树节点和转移概率矩阵已经全部生成, 所以不需要用上一时刻的资产价格样本值和分布概率来近似计算, 可以直接用  $t_i$  时刻的节点和分布概率来计算, 如下:

$$E[V_{t_i} | S_{t_i} = S_j^i] \approx \frac{\sum_{j=1}^{m_x \times m_v} p_{i,j} v_{i,j} 1_{S_{i,j} \in (b_{i,k}, b_{i,k+1}]}}{\sum_{j=1}^{m_x \times m_v} p_{i,j} 1_{S_{i,j} \in (b_{i,k}, b_{i,k+1}]}}. \quad (3.22)$$

同理, 在 VIX 期权定价中, 此时二维柳树构建已经全部完成, 即每个时刻的树节点与和各个节点之间的转移概率矩阵已知, 因此,  $\tau$  中的每个柳树节点  $(S_j^i, v_{j1}^i)$  处的期望值  $E[v_t | S_t = S_j^i]$  可以用 (3.22) 式来计算, 从而计算出到期日  $T$  时刻每个节点的 VIX 指数的值, 进而计算 VIX 指数欧式看涨期权的价格.

注意, 由于在求期望的过程中需要用到每个时刻的转移概率, 因此柳树法的生成过程为生成一系列节点同时要计算出前一时刻到这个时刻的转移概率矩阵.

综上, 3.1 的四节给出了基于 Heston-Dupire 模型的柳树法定价的所有步骤与细节, 下文算法1将给出完整过程.

**算法 1:** 基于 Heston-Dupire 模型的柳树法 VIX 期权定价

**Input:** 到期日  $T$ , 划分的小区间个数  $N$ , 时间间隔  $\Delta$ ; 波动率指数时长  $\tau$ , 划分的小区间个数  $N_1$ , 时间间隔  $\Delta\tau$ ; 波动率初值  $v_0$ , 资产价格初值  $S_0$ , 柳树波动率节点个数  $m_v$ , 资产价格个数  $m_x$

**1)** 校准一组 SVI 隐含波动率参数

1. 选定一个日期, 记录当天不同到期日和行权价格的上证 50ETF 欧式看涨期权隐含波动率数据

2. 对于每个到期日, 通过最小化目标函数 (2.16) 的方式, 求出这个到期日下的 SVI 函数的一组最优参数  $C = (\alpha_n, \beta_n, \rho_n, m_n, \sigma_n)$

**2)** 构建波动率  $V$  的一维柳树

**for**  $n = 1 : N + N_1$  **do**

1. 根据公式计算  $t_n$  时刻的  $v_t$  的前四阶矩, 并据此用 Johnson Curve 变换生成波动率节点  $\{v_{i1}^n\}$ ,  $i1 = 1, \dots, m_v$

2. 根据 (3.3), (3.4) 计算  $t_{n-1}$  时刻的节点与 1 中生成的  $t_n$  时刻的节点之间的转移概率矩阵  $[\tilde{p}_{i1j1}^n]$ ,  $i1, j1 = 1, \dots, m_v$

**end for**

**3)** 构建波动率  $(S, V)$  的二维柳树

1.  $n=1$  根据 Dynkin 公式计算  $t_1$  时刻与每个波动率节点  $v_{i1}^1$  对应的  $X_t$  的前四阶矩, 并用 Johnson Curve 变换生成资产价格节点  $\{X_j^1\}$ ,  $j = 1, \dots, m_x$ , 计算从  $(X_0, v_0)$  到该时刻的所有柳树节点的转移概率构成的向量  $q$

2. 记从  $(X_0, v_0)$  到  $t_n$  时刻的转移概率向量为  $p_0^n$ , 则  $p_0^1 = q$

**for**  $n = 2 : N + N_1$  **do**

**for**  $i = 1 : m_x \times m_v$  **do**

计算波动率下标  $i1 = \left\lfloor \frac{i}{m_x} \right\rfloor$

**for**  $j1 = 1, \dots, m_v$  **do**

1. 根据 Dynkin 公式计算  $t_n$  时刻与波动率节点  $v_{i1}^n$  对应的  $X_t$  的前四阶矩, 并用 Johnson Curve 变换生成资产价格节点  $\{X_{j1}^n\}$ ,  $j = 1, \dots, m_x$

2.1.  $\rho=0$ : 由式 (3.7) 计算  $(X_i^{n-1}, v_{i1}^{n-1})$  到  $\{X_{j1}^n\}$  的转移概率向量  $p_{ij}^n$

2.2.  $\rho \neq 0$ : 由式 (3.11) 计算  $(X_i^{n-1}, v_{i1}^{n-1})$  到  $\{X_{j1}^n\}$  的转移概率向量  $p_{ij}^n$

**end for**

**end for**

1. 将循环中得到的转移概率向量组合起来即得可到  $t_{n-1}$  到  $t_n$  的转移概率矩阵  $[P_{ij}^n]$

2. 计算  $p_0^n = p_0^{n-1} \times [P_{ij}^n]$ , 用于 Dynkin 和转移概率向量里杠杆函数的分母部分的期望的计算

**end for**

**4)** VIX 期权定价

$VIX_{WT}$  为到期日  $T$  时刻, 每个柳树节点处的 VIX 指数的值构成的列向量, 则以下迭代的初值为  $\{L^2(T, S_j^N) v_{j1}^N\}$

**算法 2:** 基于 Heston-Dupire 模型的柳树法 VIX 期权定价**for**  $n=N+1:N+NI-1$  **do**1. 计算  $[\hat{p}_{ij}^n] = [\hat{p}_{ij}^{n-1}] \times [p_{ij}^{n-1}]$ 2. 在  $t_n$  时刻每个树节点处, 计算  $L^2(N\Delta + (n-N)\Delta\tau, S_j^n) v_{j1}^n$ , 其中,  $j1 = 1, \dots, m_v$ , 将这些值构成列向量并记为  $L_n$ 3.  $VIX_W T = VIX_W T + [\hat{p}_{ij}^{n-1}] \times L_n$ **end for**将  $VIX_{WT}$  和  $T$  之前的转移概率矩阵代入到柳树法欧式期权定价公式中即可得到 VIX 指数欧式看涨期权的价格  $V_0$ **Output:** VIX指数欧式看涨期权定价结果  $V_0$ 

### 3.1.5 收敛性分析

以 Heston-Dupire 模型为例, 我们来探究在该模型下欧式期权定价的收敛性. 首先, 需要推导出基于 Heston-Dupire 随机局部波动率模型 (2.2) 的欧式看涨期权满足的偏微分方程. 使用 Delta 对冲可以推导出该 PDE, 在此情形中, 我们不仅要对冲风险, 还要对冲波动率. 因此, 我们设计一个包含一个单位的期权  $V = V(S, v, t)$ ,  $\lambda$  单位的股票, 以及  $\phi$  单位的对冲波动率的期权  $U = U(S, v, t)$  的资产组合. 将该组合的价值记为  $\Pi$ , 则  $\Pi = V + \lambda S + \phi U$ . 由多元 Itô 公式, 得到:

$$\begin{aligned}
 d\Pi &= dV + \lambda dS + \phi dU \\
 &= \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 L^2(t, S) \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \sigma_v \rho v S L(t, S) \frac{\partial^2 V}{\partial v \partial S} + \frac{1}{2} v \sigma_v^2 \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \right] dt \\
 &\quad + \phi \left[ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 L^2(t, S) \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \sigma_v \rho v S L(t, S) \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial S} + \frac{1}{2} v \sigma_v^2 \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} \right] dt \\
 &\quad + \left[ \frac{\partial V}{\partial S} + \phi \frac{\partial U}{\partial S} + \lambda \right] dS + \left[ \frac{\partial V}{\partial v} + \phi \frac{\partial U}{\partial v} \right] dv.
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

由于需要对冲掉波动率和股价的风险, 我们需要令 (3.23) 中  $dS$  和  $dv$  前面的系数项为 0, 即:

$$\frac{\partial V}{\partial S} + \phi \frac{\partial U}{\partial S} + \lambda = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial v} + \phi \frac{\partial U}{\partial v} = 0, \tag{3.24}$$

则 (3.23) 可化为:

$$\begin{aligned}
 d\Pi &= dV + \lambda dS + \phi dU \\
 &= \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 L^2(t, S) \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \sigma_v \rho v S L(t, S) \frac{\partial^2 V}{\partial v \partial S} + \frac{1}{2} v \sigma_v^2 \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \right] dt \\
 &\quad + \phi \left[ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 L^2(t, S) \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \sigma_v \rho v S L(t, S) \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial S} + \frac{1}{2} v \sigma_v^2 \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} \right] dt.
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

又因为对冲后, 该资产投资组合的收益率应为无风险收益率, 有  $d\Pi = r\Pi dt$ ,

因此结合 (3.25) 和 (3.24), 得到:

$$\frac{\left[ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2L^2(t, S) \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \sigma_v \rho vSL(t, S) \frac{\partial^2 V}{\partial v \partial S} + \frac{1}{2}v\sigma_v^2 \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \right] - rV + rs \frac{\partial V}{\partial S}}{\frac{\partial V}{\partial v}} = \frac{\left[ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2L^2(t, S) \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \sigma_v \rho vSL(t, S) \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial S} + \frac{1}{2}v\sigma_v^2 \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} \right] - rU + rs \frac{\partial U}{\partial S}}{\frac{\partial U}{\partial v}}. \quad (3.26)$$

观察式 (3.26), 发现左边是只关于  $V$  的函数表达式, 右边则是只关于  $U$  的函数表达式, 因此可以将其统一为一个函数  $f$ , 根据 Black Scholes(1973) 和 Merton(1973) 等人的研究,  $f$  具有表达式:  $f(S, v, t) = -a(b - v) + \Lambda(S, v, t)$ , 其中  $\Lambda(S, v, t)$  反映波动率风险的市场价格. Breeden(1979) 提出了波动率市场价格与波动率呈线性关系的假设, 即  $\Lambda(S, v, t) = \Lambda v$ , 从而得到:

$$f(S, v, t) = -a(b - v) + \Lambda(S, v, t) = \frac{\left[ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2L^2(t, S) \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \sigma_v \rho vSL(t, S) \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial S} + \frac{1}{2}v\sigma_v^2 \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} \right] - rU + rs \frac{\partial U}{\partial S}}{\frac{\partial U}{\partial v}}.$$

实际上, Heston(1993)[10] 指出  $\Lambda(S, v, t)$  与消费过程  $C(t)$  和波动率的相关性有关, 具体为  $\Lambda(S, v, t) = \gamma Cov[dv, dC/C]$ , 而在我们的问题中, 不需要考虑消费函数, 因此这一项为 0, 从而上式化简得到:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U}{\partial t} + rs \frac{\partial U}{\partial S} + \frac{1}{2}vS^2L^2(t, S) \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \frac{1}{2}v\sigma_v^2 \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} \\ & + [a(b - v)] \frac{\partial U}{\partial V} + \rho \sigma_v vSL(t, S) \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V} = rU. \end{aligned} \quad (3.27)$$

(3.27) 即是 Heston-Dupire 模型的偏微分方程.

令  $X(t) = \ln(S(t))$ , 则 (3.27) 可化为:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}v^2L^2(t, e^X) \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial X^2} + \rho \sigma_v vL(t, e^X) \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial X \partial v} + \frac{1}{2}\sigma_v^2 v \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial v^2} \\ & + \left( r - \frac{1}{2}L^2(t, e^X) v \right) \frac{\partial \tilde{U}}{\partial X} + a(b - v) \frac{\partial \tilde{U}}{\partial v} - r\tilde{U} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} = 0, \end{aligned} \quad (3.28)$$

其中  $\tilde{U} \equiv \tilde{U}(X(t), v(t), t)$ . 我们首先将  $[0, T]$  划分成  $N$  个均匀的小区间, 即,  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T, \Delta t = T/N$  且  $t_n = n\Delta t$ . 遵循前几节中介绍的柳树构建方法, 我们为  $(X_j^n, v_{i_2}^n)$  构建二维柳树, 其中  $n = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, m_v m_x, i_1 = \lceil k/m_x \rceil + 1$ , 且  $i_2 = \lceil j/m_x \rceil + 1$ . 从节点  $(X_j^n, v_{i_2}^n)$  到节点  $(X_k^{n+1}, v_{i_1}^{n+1})$  的转移概率记为  $p_{jk}^n$ .

考虑任一个时间区间  $[t_n, t_{n+1}]$ ,  $(X(t), v(t))$  的值从  $(X_j^n, v_{i_2}^n)$  演化



$(X_k^{n+1}, v_{i_1}^{n+1})$  的增量可以近似计算为:

$$\Delta X_{jk}^n \equiv X_k^{n+1} - X_j^n = \left( r - \frac{1}{2} L^2(t_n, e^{x_j^n}) \right) v_{i_2}^n \Delta t + L(t_n, e^{x_j^n}) \sqrt{v_{i_2}^n} \left( \sqrt{t_{n+1}} w_k - \sqrt{t_n} w_j \right),$$

以及

$$\Delta v_{jk}^n \equiv v_{i_1}^{n+1} - v_{i_2}^n = a(b - v_{i_2}^n) \Delta t + \sigma_v \sqrt{v_{i_2}^n} \left( \sqrt{t_{n+1}} w_k^1 - \sqrt{t_n} w_j^1 \right).$$

在前面几节中说明了给定  $X_j^n$  和  $v_{i_2}^n$  的情况下,  $X(t_{n+1})$  的值服从一个正态分布. 首先, 显然  $p_{jk}^n$  除了  $\sum_{k=1}^{m_v m_x} p_{jk}^n = 1$  外, 还具有具有以下性质:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m_v m_x} p_{jk}^n (\sqrt{t_{n+1}} w_k - \sqrt{t_n} w_j) &= 0, \\ \sum_{k=1}^{m_v m_x} p_{jk}^n (\sqrt{t_{n+1}} w_k - \sqrt{t_n} w_j)^2 &= \Delta t, \\ \sum_{k=1}^{m_v m_x} p_{jk}^n (\sqrt{t_{n+1}} w_k - \sqrt{t_n} w_j)^3 &= 0, \\ \sum_{k=1}^{m_v m_x} p_{jk}^n (\sqrt{t_{n+1}} w_k - \sqrt{t_n} w_j)^4 &= 3\Delta t^2, \\ \sum_{k=1}^{m_v m_x} p_{jk}^n (\sqrt{t_{n+1}} w_k - \sqrt{t_n} w_j)^{2l} &= (2l-1)!! \Delta t^l, \\ \sum_{k=1}^{m_v m_x} p_{jk}^n (\sqrt{t_{n+1}} w_k - \sqrt{t_n} w_j)^{2l-1} &= 0. \end{aligned}$$

在  $p_{jk}^n$  满足以上等式的基础上, 我们可以得到:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m_v m_x} p_{jk}^n \Delta X_{jk}^n &= \left( r - \frac{1}{2} L^2(t_n, e^{x_j^n}) \right) v_{i_2}^n \Delta t, \\ \sum_{k=1}^{m_v m_x} p_{jk}^n (\Delta X_{jk}^n)^2 &= \left( r - \frac{1}{2} L^2(t_n, e^{x_j^n}) \right)^2 (v_{i_2}^n)^2 \Delta t^2 + L^2(t_n, e^{x_j^n}) v_{i_2}^n \Delta t, \\ \sum_{k=1}^{m_v m_x} p_{jk}^n (\Delta X_{jk}^n)^3 &= \left( r - \frac{1}{2} L^2(t_n, e^{x_j^n}) \right)^3 (v_{i_2}^n)^3 \Delta t^3 \\ &\quad + 3L^2(t_n, e^{x_j^n}) (v_{i_2}^n)^2 \left( r - \frac{1}{2} L^2(t_n, e^{x_j^n}) \right) \Delta t^2, \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m_v m_x} p_{jk}^n (\Delta X_{jk}^n)^4 &= \left( r - \frac{1}{2} L^2(t_n, e^{x_j^n}) \right)^4 (v_{i_2}^n)^4 \Delta t^4 \\ &\quad + 6L^2(t_n, e^{x_j^n}) (v_{i_2}^n)^3 \left( r - \frac{1}{2} L^2(t_n, e^{x_j^n}) \right)^2 \Delta t^3 + 3(1 - \rho^2)^2 (v_{i_2}^n)^2 \Delta t^2. \end{aligned}$$

类似地, 给定  $v_{i_2}^n$ , 当  $\Delta t$  很小时,  $v(t_{n+1})$  也服从一个正态分布. 因此可以得到:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m_v m_x} p_{jk}^n \Delta v_{jk}^n &= \sum_{i_1=1}^{m_v} \hat{p}_{i_2 i_1}^n (v_{i_1}^{n+1} - v_{i_2}^n) = a(b - v_{i_2}^n) \Delta t, \\ \sum_{k=1}^{m_v m_x} p_{jk}^n (\Delta v_{jk}^n)^2 &= \sum_{i_1=1}^{m_v} \hat{p}_{i_2 i_1}^n (v_{i_1}^{n+1} - v_{i_2}^n)^2 = a^2 (b - v_{i_2}^n)^2 \Delta t^2 + \sigma_v^2 v_{i_2}^n \Delta t, \\ \sum_{k=1}^{m_v m_x} p_{jk}^n (\Delta v_{jk}^n)^3 &= \sum_{i_1=1}^{m_v} \hat{p}_{i_2 i_1}^n (v_{i_1}^{n+1} - v_{i_2}^n)^3 = a^3 (b - v_{i_2}^n)^3 \Delta t^3 + 3\sigma_v^2 v_{i_2}^n a (b - v_{i_2}^n) \Delta t^2, \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m_v m_x} p_{jk}^n (\Delta v_{jk}^n)^4 &= \sum_{i_1=1}^{m_v} \hat{p}_{i_2 i_1}^n (v_{i_1}^{n+1} - v_{i_2}^n)^4 \\ &= a^4 (b - v_{i_2}^n)^4 \Delta t^4 + 6\sigma_v^2 v_{i_2}^n a^2 (b - v_{i_2}^n)^2 \Delta t^3 + 3\sigma_v^4 (v_{i_2}^n)^2 \Delta t^2. \end{aligned}$$

由于该模型并没有消除相关性, 因此易知还有如下等式成立:

$$\sum_{k=1}^{m_v m_x} p_{jk}^n (\sqrt{t_{n+1}} w_k - \sqrt{t_n} w_j) (\sqrt{t_{n+1}} w_k^1 - \sqrt{t_n} w_j^1) = \rho \Delta t,$$

$$\sum_{k=1}^{m_v m_x} p_{jk}^n \Delta X_{jk}^n \Delta v_{jk}^n = \rho \sigma_v v_{i_2}^n L(t_n, e^{x_j^n}) \Delta t + a(b - v_{i_2}^n) \left(r - \frac{1}{2} L^2(t_n, e^{x_j^n})\right) v_{i_2}^n \Delta t^2,$$

并且  $\sum_{k=1}^{m_v m_x} p_{jk}^n (\Delta X_{jk}^n)^{k_1} (\Delta v_{jk}^n)^{l_1} \leq O(\Delta t^{\frac{3}{2}})$ , 其中  $k_1$  和  $l_1$  为大于等于 1 且不同时为 1 的整数, 下面以  $k_1 = 1, l_1 = 1$  时的情形为例证明该结论,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m_v m_x} p_{jk}^n \Delta X_{jk}^n (\Delta v_{jk}^n)^2 &\leq \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{m_v m_x} p_{jk}^n (\Delta X_{jk}^n)^2\right)} \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{m_v m_x} p_{jk}^n (\Delta v_{jk}^n)^4\right)} \\ &= \sqrt{a^4 (b - v_{i_2}^n)^4 \Delta t^2 + 6 \sigma_v^2 v_{i_2}^n a^2 (b - v_{i_2}^n)^2 \Delta t + 3 \sigma_v^4 (v_{i_2}^n)^2 \Delta t} \\ &\quad \sqrt{\left(r - \frac{1}{2} L^2(t_n, e^{x_j^n})\right)^2 (v_{i_2}^n)^2 \Delta t + L^2(t_n, e^{x_j^n}) v_{i_2}^n \Delta t^{\frac{1}{2}}} = O(\Delta t^{\frac{3}{2}}). \end{aligned}$$

对于时间  $t_{n+1}, X_k^{n+1}$  且  $v_{i_1}^{n+1}$  处的期权价值  $\tilde{U}_k^{n+1}$ , 它在  $(X_j^n, v_{i_2}^n, t_n)$  处的泰勒展开具有如下形式:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_k^{n+1} &= \tilde{U}(X_j^n + \Delta X_{jk}^n, v_{i_2}^n + \Delta v_{jk}^n, t_n + \Delta t) \\ &= \tilde{U}_j^n + \tilde{U}_t \Delta t + \frac{1}{2} \tilde{U}_{tt} \Delta t^2 + \tilde{U}_X \Delta X_{jk}^n + \frac{1}{2} \tilde{U}_{XX} (\Delta X_{jk}^n)^2 + \frac{1}{6} \tilde{U}_{XXX} (\Delta X_{jk}^n)^3 \\ &\quad + \frac{1}{24} \tilde{U}_{XXXX} (\Delta X_{jk}^n)^4 + \tilde{U}_v \Delta v_{jk}^n + \frac{1}{2} \tilde{U}_{vv} (\Delta v_{jk}^n)^2 + \frac{1}{6} \tilde{U}_{vvv} (\Delta v_{jk}^n)^3 + \frac{1}{24} \tilde{U}_{vvvv} (\Delta v_{jk}^n)^4 \\ &\quad + \tilde{U}_{Xt} \Delta X_{jk}^n \Delta t + \frac{1}{2} \tilde{U}_{XXt} (\Delta X_{jk}^n)^2 \Delta t + \tilde{U}_{vt} \Delta v_{jk}^n \Delta t + \frac{1}{2} \tilde{U}_{vvt} (\Delta v_{jk}^n)^2 \Delta t + \tilde{U}_{Xv} \Delta X_{jk}^n \Delta v_{jk}^n \\ &\quad + \frac{1}{2} \tilde{U}_{XXv} (\Delta X_{jk}^n)^2 \Delta v_{jk}^n + \frac{1}{2} \tilde{U}_{Xvv} \Delta X_{jk}^n (\Delta v_{jk}^n)^2 + \frac{1}{6} \tilde{U}_{XXXv} (\Delta X_{jk}^n)^3 \Delta v_{jk}^n \\ &\quad + \frac{1}{6} \tilde{U}_{Xvvv} \Delta X_{jk}^n (\Delta v_{jk}^n)^3 + \frac{1}{4} \tilde{U}_{XXvv} (\Delta X_{jk}^n)^2 (\Delta v_{jk}^n)^2 + O(\Delta t^{\frac{3}{2}}), \end{aligned}$$

因为在柳树法中, 欧式期权的定价采用逆向归纳法, 因此树节点  $(X_j^n, v_{i_2}^n)$  处的期权价值可以由估算为:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_j^n &= e^{-r \Delta t} \sum_{k=1}^{m_v m_x} p_{jk}^n \tilde{U}_k^{n+1} \\ &= \left(1 - r \Delta t + \frac{1}{2} r^2 \Delta t^2\right) \sum_{k=1}^{m_v m_x} p_{jk}^n \left[ \tilde{U}_j^n + \tilde{U}_t \Delta t + \frac{1}{2} \tilde{U}_{tt} \Delta t^2 + \tilde{U}_X \Delta X_{jk}^n + \frac{1}{2} \tilde{U}_{XX} (\Delta X_{jk}^n)^2 \right. \\ &\quad + \frac{1}{6} \tilde{U}_{XXX} (\Delta X_{jk}^n)^3 + \frac{1}{24} \tilde{U}_{XXXX} (\Delta X_{jk}^n)^4 + \tilde{U}_v \Delta v_{jk}^n + \frac{1}{2} \tilde{U}_{vv} (\Delta v_{jk}^n)^2 + \frac{1}{6} \tilde{U}_{vvv} (\Delta v_{jk}^n)^3 \\ &\quad + \frac{1}{24} \tilde{U}_{vvvv} (\Delta v_{jk}^n)^4 + \tilde{U}_{Xt} \Delta X_{jk}^n \Delta t + \frac{1}{2} \tilde{U}_{XXt} (\Delta X_{jk}^n)^2 \Delta t + \tilde{U}_{vt} \Delta v_{jk}^n \Delta t + \frac{1}{2} \tilde{U}_{vvt} (\Delta v_{jk}^n)^2 \Delta t \\ &\quad + \tilde{U}_{Xv} \Delta X_{jk}^n \Delta v_{jk}^n + \frac{1}{2} \tilde{U}_{XXv} (\Delta X_{jk}^n)^2 \Delta v_{jk}^n + \frac{1}{2} \tilde{U}_{Xvv} \Delta X_{jk}^n (\Delta v_{jk}^n)^2 + \frac{1}{6} \tilde{U}_{XXXv} (\Delta X_{jk}^n)^3 \Delta v_{jk}^n \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} \tilde{U}_{Xvvv} \Delta X_{jk}^n (\Delta v_{jk}^n)^3 + \frac{1}{4} \tilde{U}_{XXvv} (\Delta X_{jk}^n)^2 (\Delta v_{jk}^n)^2 + O(\Delta t^{\frac{3}{2}}) \right] \\ &= \tilde{U}_j^n + \tilde{U}_t \Delta t + \frac{1}{2} v_{i_2}^n L^2(t_n, e^{x_j^n}) \tilde{U}_{XX} \Delta t + a(b - v_{i_2}^n) \tilde{U}_v \Delta t + \frac{1}{2} \tilde{U}_{vv} \sigma_v^2 v_{i_2}^n \Delta t - r \tilde{U}_j^n \Delta t \\ &\quad + \left(r - \frac{1}{2} L^2(t_n, e^{x_j^n})\right) v_{i_2}^n \tilde{U}_X \Delta t + \rho \sigma_v v L(t, e^{x_j^n}) \tilde{U}_{Xv} + O(\Delta t^{\frac{3}{2}}). \end{aligned}$$

因此, 由逆向递推法在柳树法框架下计算的期权价值  $\tilde{U}_j^n$  满足 PDE (3.28),

局部截断误差为  $O(\Delta t^{\frac{3}{2}})$ . 不断逆向向前推直到初始时刻  $t_0 = 0$ , 则柳树法的全局收敛性得以证明, 其全局截断误差为  $O(\Delta t^{\frac{3}{2}})$  的.

### 3.2 基于 Monte Carlo 法的 VIX 期权定价

作为前文中柳树法的参照对象, 本节中将基于 Monte Carlo 方法进行 Heston-Dupire 模型下 VIX 指数衍生品的定价. 首先, 我们需要对 (2.2) 应用欧拉离散方法, 得到:

$$\begin{cases} s_{i+1,j} = s_{i,j} + rs_{i,j}\Delta + \sqrt{\frac{\sigma_{LV}^2(t_i, s_{i,j})}{E[V_{t_i}|S_{t_i}=s_{i,j}]}} s_{i,j} \sqrt{v_{i,j}\Delta} W_1 \\ v_{i+1,j} = v_{i,j} + \kappa(\theta - v_{i,j})\Delta + \sigma_v \sqrt{v_{i,j}\Delta} W_2. \end{cases} \quad (3.29)$$

其中  $\delta$  为离散时间间隔,  $W_1$  和  $W_2$  是相关系数为  $\rho$  的标准正态分布, 即  $E[dW_{1t}dW_{2t}] = \rho dt$ .

假设一共取  $M$  条模拟路径, 即  $j = 1, 2, \dots, M$ ; 划分  $N$  个时间小区间, 即  $i = 0, 2, \dots, N-1$ . 在求  $t_{i+1}$  时刻的资产价格和波动率时, 需要先求出  $\sigma_{LV}^2(t_i, s_{i,j})$  和  $E[V_{t_i} | S_{t_i} = s_{i,j}]$ , 其中  $\sigma_{LV}^2(t_i, s_{i,j})$  可以直接根据 2.2 节中的公式求出, 而  $E[V_{t_i} | S_{t_i} = s_{i,j}]$  的求解比较困难. 这是因为在蒙特卡洛算法中,  $s_{i,j}$  的产生和  $v_{i,j}$  的产生是一一对应的, 不存在可以用来求条件期望的数据. 为了解决这个问题, 学者们经过了许多的探索和尝试, 下面讲介绍一种经典方法.

以  $t_i$  时刻为例, Anthonie W(2014)[36] 等人提出将此刻的资产价格划分为  $m$  个互斥小区间的方法.

首先将资产价格的离散模拟值  $s_{i,j}$  从小到大排列, 得到  $\{\bar{s}_{i,j} | j = 1, \dots, M\}$ , 其中  $\bar{s}_{i,1} \leq \bar{s}_{i,2} < \dots < \bar{s}_{i,M}$ .

假设划分后的小区分别为  $(C_1, C_2], (C_2, C_3], \dots, (C_m, C_{m+1}]$ , 其中  $C_1 \geq 0, C_{m+1} < \infty$ . 令:

$$C_{i,1} = \bar{s}_{i,1}, C_{i,m+1} = \bar{s}_{i,M}, C_{i,k} = \bar{s}_{i,(k-1)M/m}, k = 2, \dots, m.$$

注意到, 该划分保证了每个区间内模拟离散值的个数是相同的. 假设  $t_i$  时刻的小区间的集合是  $\mathcal{B}_i$ ,  $\mathcal{J}_{i,k}$  是包含在第  $k$  个小区间中的资产价格模拟点的下标集, 即  $\mathcal{J}_{i,k} = \{(i, j) | (s_{i,j}, v_{i,j}) \in \mathcal{B}_{i,k}\}$ , 则概率测度为  $\mathbb{Q}$  时, 有:

$$\begin{aligned} E[V_{t_i} | S_{t_i} = s_{i,j}] &\approx \frac{E[V_{t_i} 1_{S_{t_i} \in (b_{i,k}, b_{i,k+1}]}]}{\mathbb{Q}[S_{t_i} \in (b_{i,k}, b_{i,k+1})]} \\ &\approx \frac{\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M v_{i,j} 1_{s_{i,j} \in (b_{i,k}, b_{i,k+1}]}]}{\mathbb{Q}[S_{t_i} \in (b_{i,k}, b_{i,k+1})]} \\ &\approx \frac{m}{M} \sum_{(i,j) \in \mathcal{J}_{i,k}} v_{i,j}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

作者在文中探究了不同的小区间个数  $m$  对结果的影响, 并且发现随着  $m$  的增加, 准确率逐渐上升并且趋近于稳定, 因此只要取一个适当大的  $m$  即可. 至此, 可以生成  $M$  条服从 (2.2) 中给出的 Heston-Dupire 模型的轨迹.

VIX 指数的定义在 (3.12) 中给出, (3.13) 中给出了基于  $Itô$  公式和模型改写后的计算式. 通过将区间  $[T, T + \tau]$  划分成  $N_1$  个小区间, 即  $T = \bar{t}_0 < \bar{t}_1 < \cdots < \bar{t}_{N_1} = T + \tau$ , 得到 (3.13) 进一步的估算式 (3.14). 相似地, 可以用 (3.15) 计算在每一个  $T$  时刻的 MC 轨迹点处 VIX 的值  $VIX_i^N$ .

对于 VIX 指数欧式看涨期权, 我们需要进行嵌套模拟. 从 0 到  $T$  时刻, 用欧拉离散方法生成  $M_1$  条轨迹. 然后, 把  $T$  时刻的每一个轨迹点分别当作初始值, 用欧拉离散方法生成从  $T$  到  $T + \tau$  时刻的  $M_2$  条轨迹. 将生成的点代入 (3.15) 右端计算即可得到  $VIX_i^N, i = 1 : M_1$ . 最后将得到的  $T$  时刻的所有  $VIX_i^N$  代入 (3.19) 计算即可得到最终的定价结果.

MC 方法与柳树法最大的不同在于求期望的方法不同. 前者依赖生成大量的点来近似实际分布, 因此期望都是简单的算术平均. 后者则生成少量的点, 但是会估算点的生成概率, 因此可以用概率论中求期望的公式来求解.

## 第四章 数值模拟及结果分析

本章将进行若干数值实验,主要是将柳树法的欧式期权和 VIX 期权定价结果和蒙特卡罗算法的结果进行对比,并探究一些参数的改变对算法的影响.

本次数值实验的执行设备为华硕笔记本电脑,2.20GHz,内存为 8.00G,系统为 Windows 11,运行软件为 Matlab 2018b.

### 4.1 Dupire 局部波动率的计算

在搭建模型之前,首先我们需要求出 SVI 函数中的参数以计算隐含波动率,从而计算出 Dupir 局部波动率.在本文中使用 2021 年 7 月 15 日的上证 50ETF 期权的共 60 组合约数据,其中包括 15 个不同的执行价格和 4 个不同的上市期权到期日.实验结果如下:

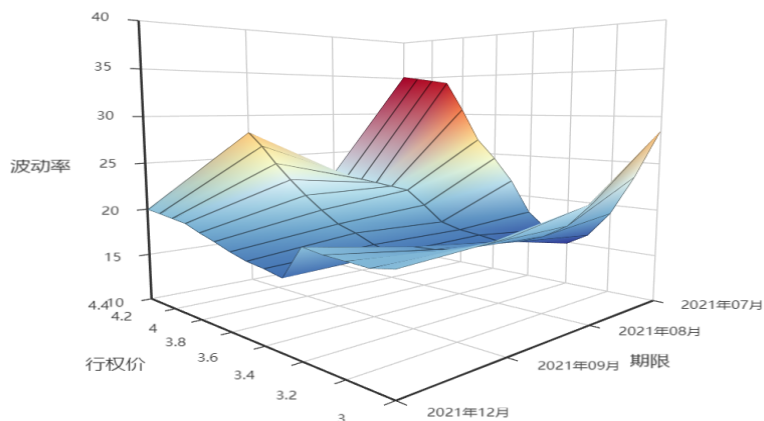


图 4.1 市场隐含波动率曲面

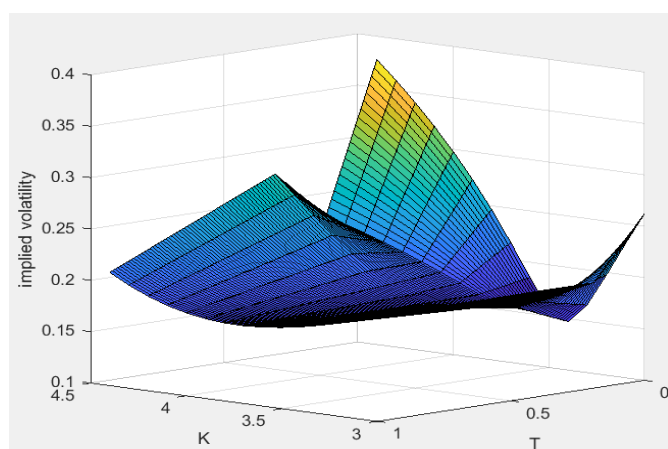


图 4.2 SVI 差值隐含波动率曲面

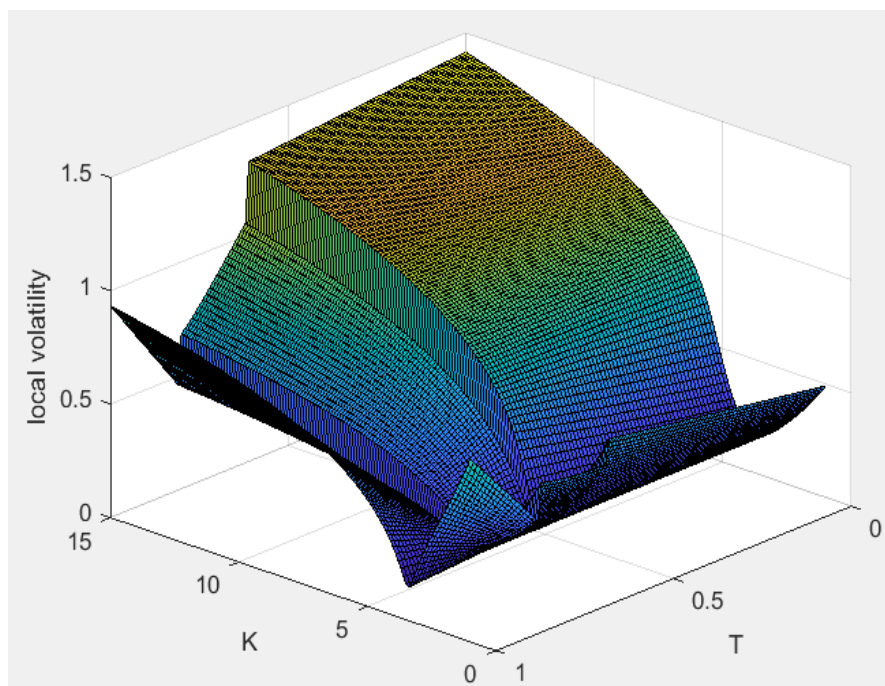


图 4.3 局部波动率曲面

通过对比图4.1和图4.2, 可以发现 SVI 函数可以较好地拟合市场的隐含波动率曲面. 图4.3是 Dupire 局部波动率曲面的结果, 下面四张图则是四个不同到期日的隐含波动率曲面截面图, 可以看出 SVI 函数对波动率微笑刻画良好. 在下文的模型搭建中, 将用到这个实验中拟合出来的参数值.

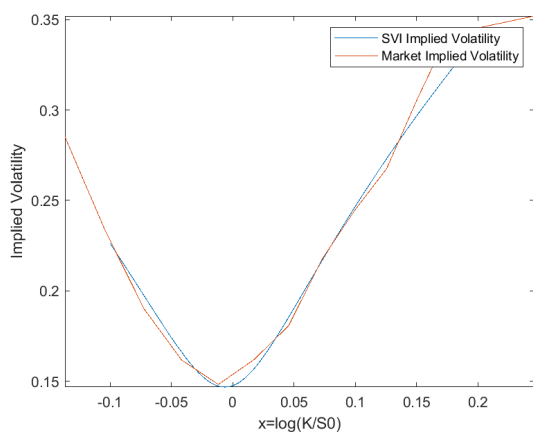


图 4.4 到期日为 2021 年 7 月 28 日的 SVI 函数拟合效果

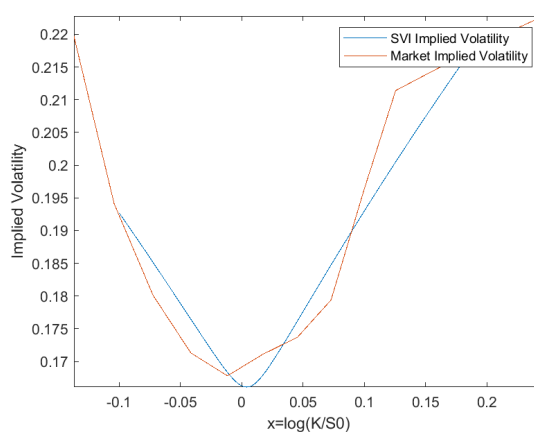


图 4.5 到期日为 2021 年 8 月 25 日的 SVI 函数拟合效果

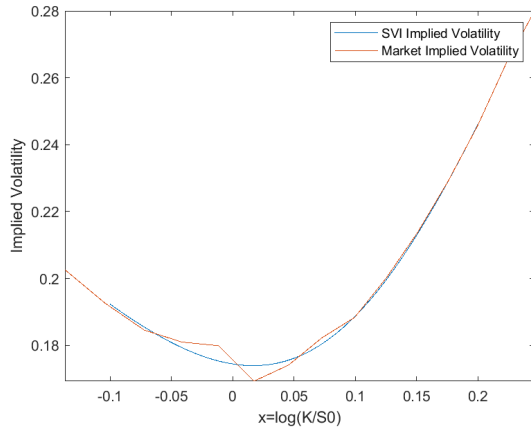


图 4.6 到期日为 2021 年 9 月 22 日的  
SVI 函数拟合效果

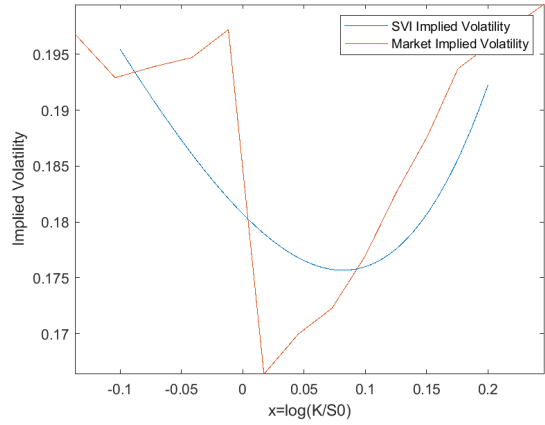


图 4.7 到期日为 2021 年 12 月 22 日的  
SVI 函数拟合效果

接下来, 将改变不同的参数研究柳树法, 并且将蒙特卡罗方法作为对照. 参数的设定如表所示 ( $bin$  为求杠杆函数中的期望时划分的小区间的个数).

参数	设定值	参数	设定值
$r$	0.05	$T$	1/6
$a$	2.8	$N$	60
$b$	0.12	$N$ (MC)	900
$\sigma_v$	0.05	$m$ (MC)	100000
$T$ (VIX)	1/12	$v_0$	0.04
$\tau$	1/12	$S_0$	3.44
$bin$	25	$bin$ (MC)	1000
$N_1, N_2$ (MC)	450, 450	$m_x, m_v$	100, 10
$N_1, N_2$	30, 30	$m_1, m_2$ (MC)	5000, 5000

表 4.1 参数设置

## 4.2 模型及期权参数数值实验

### 4.2.1 $\gamma$ 数值实验

$\gamma$  是 Johnson Curve 变换中的重要参数, 将影响随机数的产生, 图4.8展示了不同的  $\gamma$  对应的不同的正态随机数的分布情况.

将柳树法应用于 Heston-Dupire 模型时, 需要构造二维柳树, 因此需要两个  $\gamma$  参数以产生针对资产价格和波动率的两组不同随机数, 记为  $\gamma_x$  和  $\gamma_v$ .

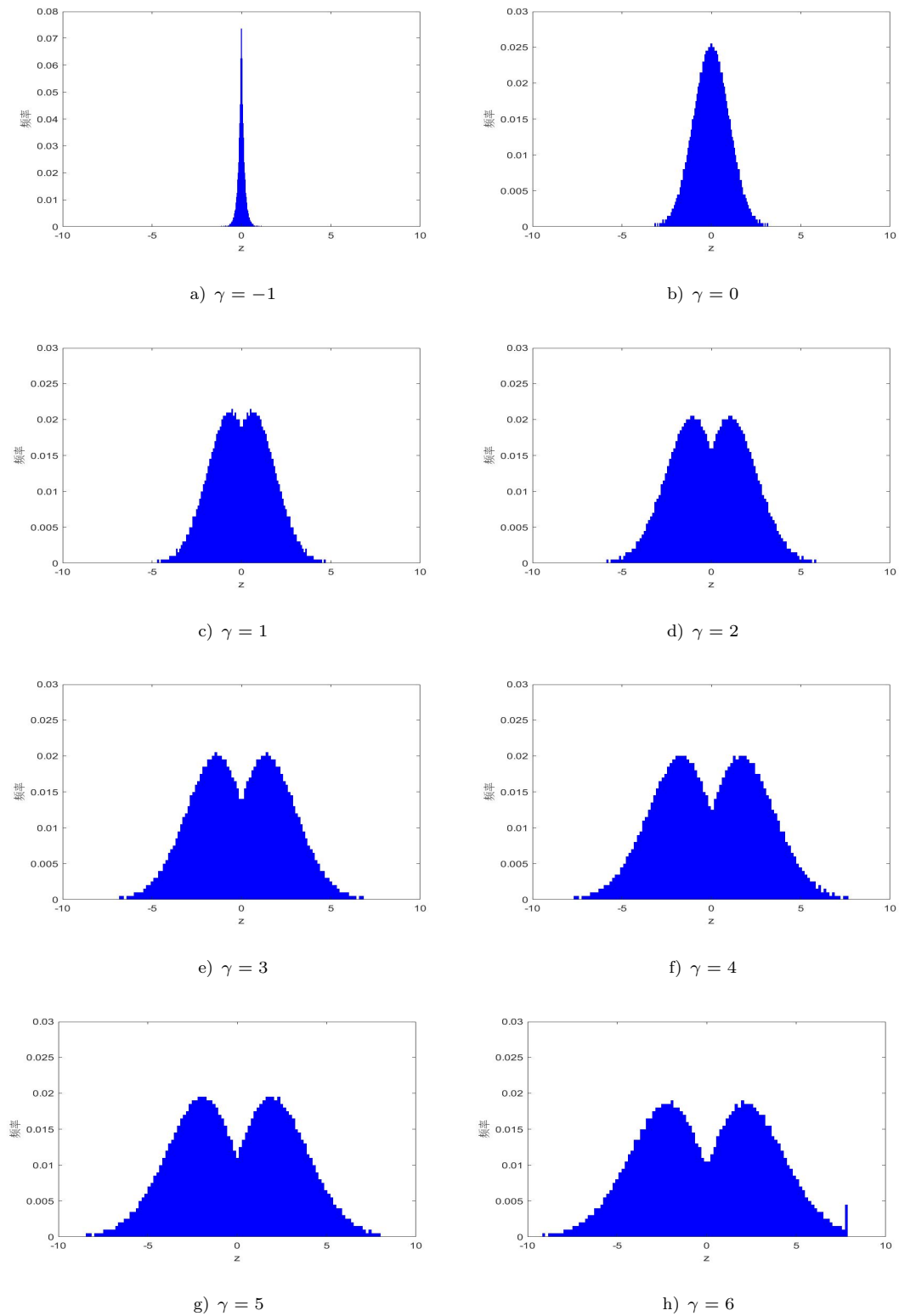


图 4.8 不同  $\gamma$  值对 Johnson Curve 随机数分布的影响

实际上, 在研究中发现, 定价结果对  $\gamma_x$  和  $\gamma_v$  的敏感程度较低, 一般选取 0.3 中的值即可.



#### 4.2.2 $\rho$ 数值实验

本实验改变资产价格和波动率的相关性  $\rho$  的大小, 分别用柳树法和蒙特卡罗法进行欧式看涨期权和 VIX 指数欧式看涨期权的定价. 实验结果结果如表4.15-表4.9所示, 可以看到柳树法的结果十分接近蒙特卡罗的结果, 并且速度更快. 特别是进行 VIX 期权定价时, 柳树法仅需要几分钟, 而蒙特卡罗法需要若干小时.

$K$	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	$t$
上界	0.3728	0.2817	0.1987	0.1292	0.0782	0.0453	0.0256	0.0143	
MC	0.3714	0.2803	0.1975	0.1281	0.0773	0.0446	0.0251	0.0139	55.26s
WT	0.3717	0.2807	0.1980	0.1291	0.0783	0.0453	0.0254	0.0140	46.10s
下界	0.3700	0.2790	0.1962	0.1270	0.0764	0.0439	0.0245	0.0135	

表 4.2  $\rho = 0$  欧式看涨期权定价比较

$K$	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	$t$
上界	0.3728	0.2817	0.1989	0.1295	0.0786	0.0458	0.0260	0.0147	
MC	0.3714	0.2804	0.1977	0.1284	0.0777	0.0451	0.0255	0.0142	53.33s
WT	0.3717	0.2806	0.1978	0.1285	0.0777	0.0449	0.0252	0.0138	47.18s
下界	0.3700	0.2790	0.1964	0.1273	0.0768	0.0443	0.0249	0.0138	

表 4.3  $\rho = -0.4$  欧式看涨期权定价比较

$K$	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	$t$
上界	0.3735	0.2822	0.1991	0.1296	0.0787	0.0459	0.0262	0.0147	
MC	0.3721	0.2809	0.1979	0.1285	0.0778	0.0452	0.0256	0.0143	55.21s
WT	0.3722	0.2811	0.1982	0.1288	0.0779	0.0452	0.0255	0.0141	48.35 s
下界	0.3707	0.2795	0.1966	0.1274	0.0769	0.0445	0.0251	0.0139	

表 4.4  $\rho = -0.6$  欧式看涨期权定价比较

$K$	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	$t$
上界	0.3741	0.2827	0.1995	0.1299	0.0788	0.0460	0.0261	0.0146	
MC	0.3727	0.2813	0.1982	0.1288	0.0779	0.0452	0.0255	0.0142	54.98 s
WT	0.3725	0.2813	0.1983	0.1289	0.0779	0.0451	0.0254	0.0140	48.11 s
下界	0.3713	0.2800	0.1970	0.1277	0.0770	0.0445	0.0250	0.0138	

表 4.5  $\rho = -0.8$  欧式看涨期权定价比较

$K$	16	16.5	17	17.5	18	18.5	19	19.5	$t$
上界	1.9496	1.4617	1.0484	0.7582	0.5578	0.4113	0.3009	0.2191	$9h+$ $55.13s$
MC	1.9078	1.4202	1.0088	0.7223	0.5261	0.3838	0.2771	0.1988	
WT	1.9072	1.4207	1.0094	0.7256	0.5277	0.3846	0.2795	0.2020	
下界	1.8661	1.3787	0.9692	0.6863	0.4944	0.3562	0.2534	0.1785	

表 4.6  $\rho = 0$  VIX 指数欧式看涨期权定价比较

$K$	16	16.5	17	17.5	18	18.5	19	19.5	$t$
上界	1.9505	1.4669	1.0555	0.7640	0.5631	0.4178	0.3098	0.2297	$10h+$ $50.21s$
MC	1.9078	1.4246	1.0151	0.7272	0.5304	0.3892	0.2849	0.2083	
WT	1.8987	1.4205	1.0184	0.7277	0.5294	0.3862	0.2806	0.2021	
下界	1.8651	1.3823	0.9748	0.6904	0.4977	0.3606	0.2601	0.1869	

表 4.7  $\rho = -0.4$  VIX 指数欧式看涨期权定价比较

$K$	16	16.5	17	17.5	18	18.5	19	19.5	$t$
上界	1.9505	1.4669	1.0555	0.7640	0.5631	0.4178	0.3098	0.2297	$10h+$ $51.39s$
MC	1.9078	1.4246	1.0151	0.7272	0.5304	0.3892	0.2849	0.2083	
WT	1.8990	1.4163	1.0103	0.7250	0.5299	0.3882	0.2834	0.2055	
下界	1.8651	1.3823	0.9748	0.6904	0.4977	0.3606	0.2601	0.1869	

表 4.8  $\rho = -0.6$  VIX 指数欧式看涨期权定价比较

$K$	16	16.5	17	17.5	18	18.5	19	19.5	$t$
上界	1.9505	1.4669	1.0555	0.7640	0.5631	0.4178	0.3098	0.2297	$10h+$ $51.19s$
MC	1.9078	1.4246	1.0151	0.7272	0.5304	0.3892	0.2849	0.2083	
WT	1.9039	1.4158	1.0013	0.7187	0.5239	0.3814	0.2759	0.1974	
下界	1.8651	1.3823	0.9748	0.6904	0.4977	0.3606	0.2601	0.1869	

表 4.9  $\rho = -0.8$  VIX 指数欧式看涨期权定价比较

### 4.2.3 $T$ 数值实验

设定不同的到期日, 分别用柳树法和蒙特卡罗法对欧式看涨期权和 VIX 指数欧式看涨期权进行定价, 实验结果如表4.10-表4.18所示. 欧式期权中的到期日设定为一个月, 二个月, 三个月, 半年和一年, VIX 期权设定为一个月, 两个月, 三个月, 指数长度为固定的一个月.

$K$	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	$t$
上界	0.3559	0.2590	0.1685	0.0935	0.0441	0.0190	0.0078	0.0031	30.45s 23.84s
MC	0.3549	0.2581	0.1676	0.0927	0.0436	0.0186	0.0075	0.0030	
WT	0.3541	0.2574	0.1671	0.0922	0.0431	0.0182	0.0073	0.0028	
下界	0.3539	0.2571	0.1667	0.0920	0.0430	0.0182	0.0073	0.0028	

表 4.10  $T = 1/12$  欧式看涨期权定价比较

$K$	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	$t$
上界	0.3728	0.2817	0.1987	0.1292	0.0782	0.0453	0.0256	0.0143	53.33s 47.18s
MC	0.3714	0.2803	0.1975	0.1281	0.0773	0.0446	0.0251	0.0139	
WT	0.3717	0.2806	0.1978	0.1285	0.0777	0.0449	0.0252	0.0138	
下界	0.3700	0.2790	0.1962	0.1270	0.0764	0.0439	0.0245	0.0135	

表 4.11  $T = 1/6$  欧式看涨期权定价比较

$K$	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	$t$
上界	0.3929	0.3062	0.2276	0.1606	0.1088	0.0721	0.0471	0.0305	80.05s 74.086s
MC	0.3911	0.3045	0.2261	0.1592	0.1076	0.0711	0.0462	0.0298	
WT	0.3918	0.3052	0.2268	0.1600	0.1081	0.0712	0.0461	0.0295	
下界	0.3894	0.3028	0.2245	0.1578	0.1063	0.0701	0.0454	0.0291	

表 4.12  $T = 1/4$  欧式看涨期权定价比较

$K$	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	$t$
上界	0.4576	0.3780	0.3056	0.2421	0.1888	0.1458	0.1126	0.0878	163.26s 149.79s
MC	0.4547	0.3752	0.3030	0.2396	0.1864	0.1436	0.1105	0.0858	
WT	0.4521	0.3736	0.3025	0.2402	0.1876	0.1443	0.1104	0.0849	
下界	0.4519	0.3725	0.3003	0.2371	0.1841	0.1414	0.1085	0.0839	

表 4.13  $T = 1/2$  欧式看涨期权定价比较

$K$	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	$t$
上界	0.5759	0.5028	0.4351	0.3736	0.3189	0.2713	0.2310	0.1977	330.85s 298.01s
MC	0.5697	0.4966	0.4291	0.3677	0.3130	0.2656	0.2253	0.1921	
WT	0.5684	0.4954	0.4278	0.3665	0.3119	0.2644	0.2242	0.1910	
下界	0.5635	0.4905	0.4230	0.3617	0.3072	0.2598	0.2197	0.1865	

表 4.14  $T = 1$  欧式看涨期权定价比较

$K$	16	16.5	17	17.5	18	18.5	19	19.5	$t$
上界	1.9505	1.4669	1.0555	0.7640	0.5631	0.4178	0.3098	0.2297	$9h+$ $50.21s$
MC	1.9078	1.4246	1.0151	0.7272	0.5304	0.3892	0.2849	0.2083	
WT	1.8987	1.4205	1.0184	0.7277	0.5294	0.3862	0.2806	0.2021	
下界	1.8651	1.3823	0.9748	0.6904	0.4977	0.3606	0.2601	0.1869	

表 4.15  $T = 1/12$  VIX 指数欧式看涨期权定价比较

$K$	17.5	18	18.5	19	19.5	20	20.5	21	$t$
上界	1.7388	1.3547	1.0618	0.8356	0.6560	0.5129	0.3990	0.3070	$10h+$ $74.78s$
MC	1.6861	1.3045	1.0153	0.7934	0.6181	0.4792	0.3692	0.2808	
WT	1.6850	1.3028	1.0175	0.7959	0.6222	0.4851	0.3768	0.2917	
下界	1.6334	1.2543	0.9688	0.7512	0.5802	0.4455	0.3394	0.2547	

表 4.16  $T = 1/6$  VIX 指数欧式看涨期权定价比较

$K$	18	18.5	19	19.5	20	20.5	21	21.5	$t$
上界	1.8685	1.5518	1.2995	1.0934	0.9226	0.7807	0.6647	0.5673	$12h+$ $99.54s$
MC	1.7958	1.4822	1.2337	1.0315	0.8647	0.7267	0.6144	0.5207	
WT	1.7952	1.4860	1.2398	1.0396	0.8750	0.7389	0.6259	0.5316	
下界	1.7230	1.4127	1.1679	0.9697	0.8068	0.6726	0.5641	0.4740	

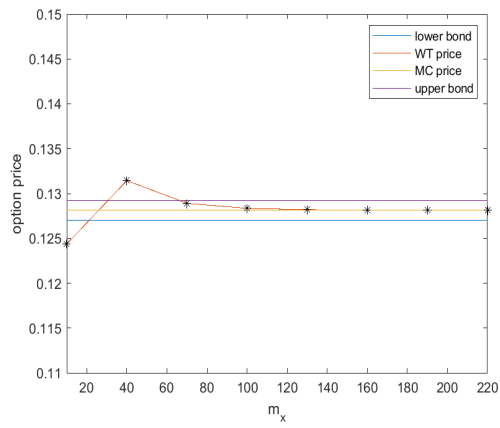
表 4.17  $T = 1/4$  VIX 指数欧式看涨期权定价比较

$K$	19.4	20.2	21	21.8	22.6	23.4	24.2	25	$t$
上界	3.5389	3.1892	2.8987	2.6502	2.4351	2.2450	2.0768	1.9299	$13h+$ $184.66s$
MC	3.3184	2.9735	2.6881	2.4446	2.2346	2.0494	1.8860	1.7439	
WT	3.3367	2.9863	2.6937	2.4453	2.2315	2.0456	1.8825	1.7392	
下界	3.0979	2.7578	2.4774	2.2391	2.0341	1.8538	1.6952	1.5578	

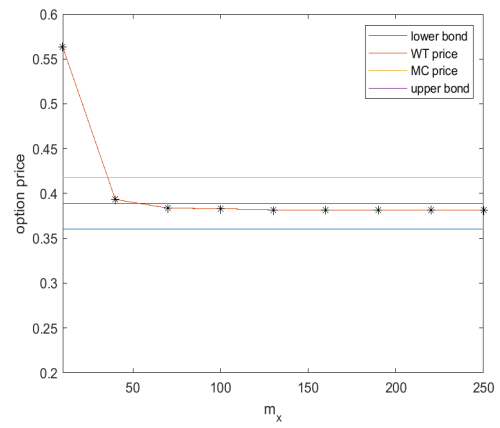
表 4.18  $T = 1/2$  VIX 指数欧式看涨期权定价比较

### 4.3 柳树法收敛性数值实验

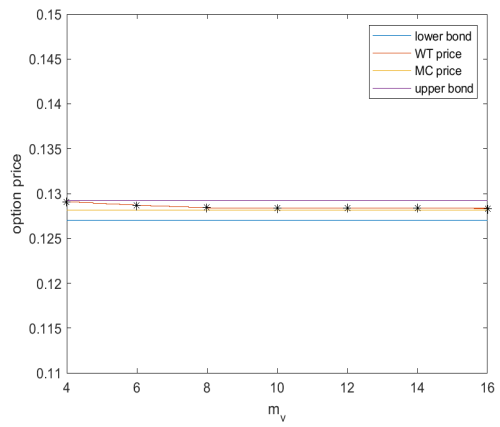
由于本文尚未给出 VIX 柳树法定价的收敛性的理论证明, 因此只能通过数值实验的方式探究算法的收敛性和稳定性, 图4.9中罗列了分别改变  $m_v$ ,  $m_x$ ,  $N$  时欧式看涨期权和 VIX 欧式看涨期权定价结果的改变, 由此看出, 随着时间间隔和节点数的增大, 定价结果逐渐趋于稳定, 始终在真实值所在的置信区间内。



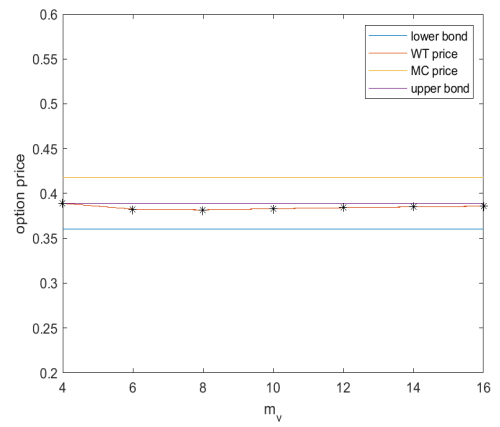
a)  $m_x$  对欧式看涨期权定价的影响



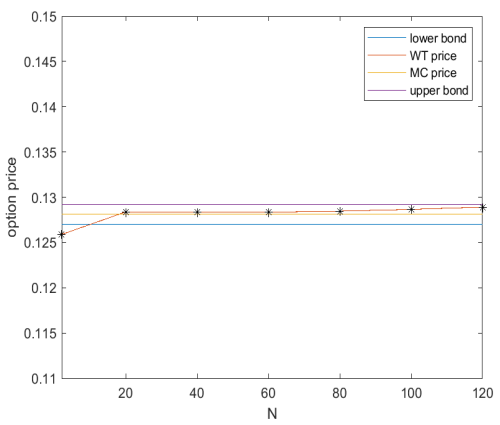
b)  $m_x$  对 VIX 期权定价的影响



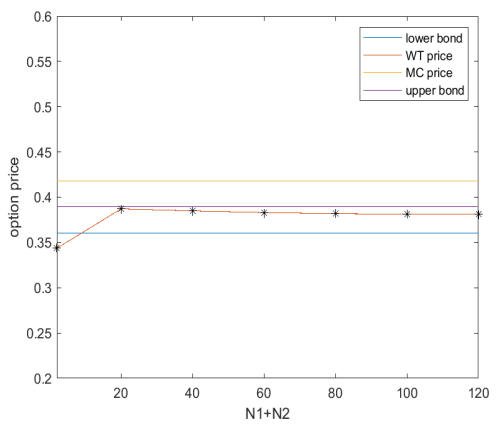
c)  $m_v$  对欧式看涨期权定价的影响



d)  $m_v$  对 VIX 期权定价的影响



e)  $N$  对欧式看涨期权定价的影响



f)  $N$  对 VIX 期权定价的影响

图 4.9 不同参数对不同期权定价结果的影响

#### 4.4 柳树法适应性数值实验

在第一节中,选取的交易日的四个隐含波动率截面都具有明显微笑特性,SVI函数拟合效果很好,使用校准出来的参数进行的两种算法的定价结果也十分吻合.但是,在市场上,有些波动率截面不具有明显的微笑特性,而是呈现一些具有明显波动的线性形状,比如图4.10中的 c),d).为了说明不同形状的波动率截面情形下拟合出的参数不会影响定价效果,与(一)中类似地,选取2022年1月28日的上证50ETF期权的共96组合约数据,包括24个不同的执行价格和4个不同的上市期权到期日,用该组数据校准SVI函数中的参数并用于后续定价.此时,标的资产价格的初值为3.036.

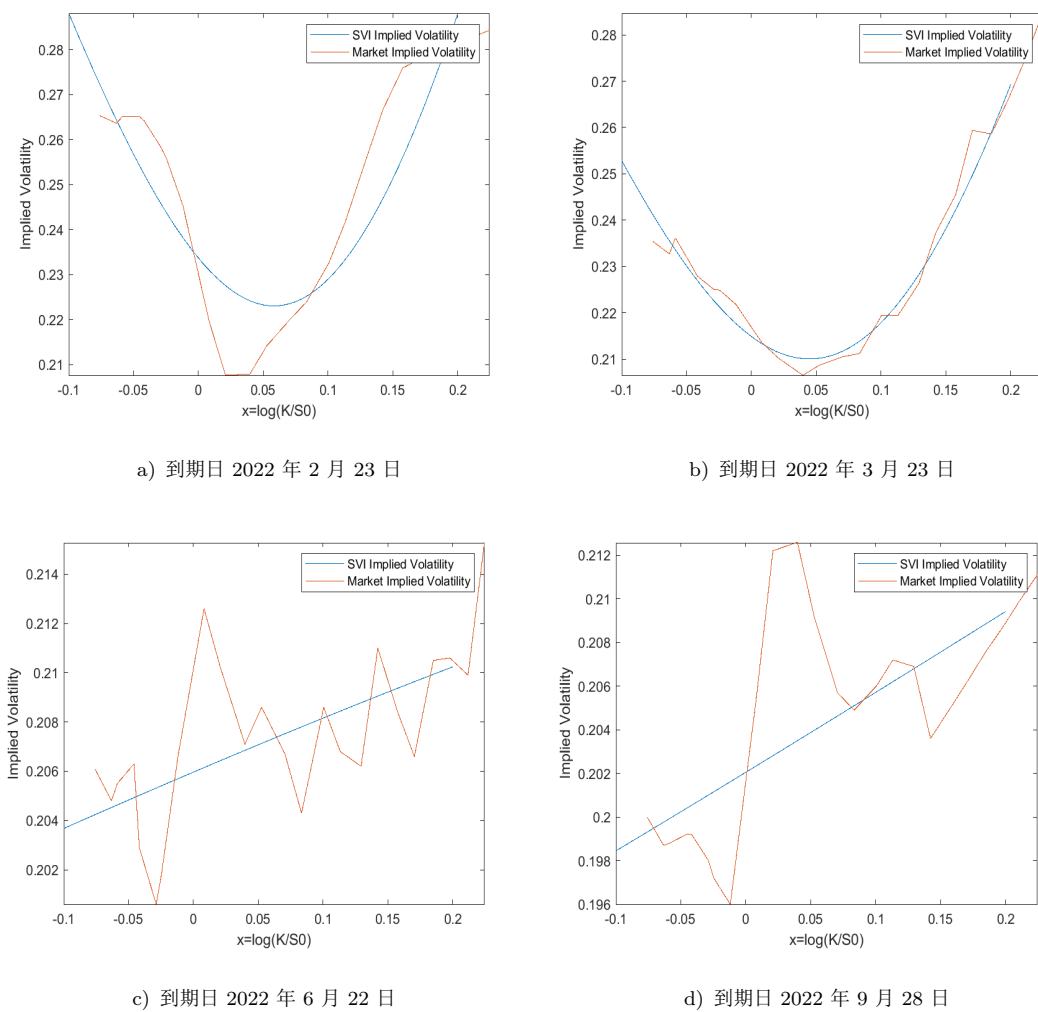


图 4.10 不同到期日的 SVI 拟合函数和实际波动率截面对比

两种算法在几组不同的到期日  $T$  和相关性系数  $\rho$  下的定价结果如表4.19-表4.22所示,结果说明隐含波动率曲面的截面形状不影响柳树法的定价效果.

$K$	2.7	2.8	2.9	3	3.1	3.2	3.3	3.4	$t$
上界	0.3743	0.2879	0.2101	0.1442	0.0927	0.0559	0.0319	0.0175	54.71s 60.86s
MC	0.3727	0.2864	0.2088	0.1430	0.0917	0.0551	0.0313	0.0171	
WT	0.3727	0.2864	0.2088	0.1432	0.0920	0.0555	0.0318	0.0176	
下界	0.3711	0.2849	0.2074	0.1419	0.0908	0.0544	0.0307	0.0166	

表 4.19  $T = 1/6, \rho = -0.6$  欧式看涨期权定价比较

$K$	20.5	21.1	21.7	22.3	22.9	23.5	24.1	24.7	$t$
上界	2.4287	1.8409	1.3347	0.9875	0.7490	0.5748	0.4464	0.3503	9h+ 52.95s
MC	2.3715	1.7839	1.2796	0.9364	0.7025	0.5328	0.4087	0.3165	
WT	2.3633	1.7752	1.2741	0.9325	0.7032	0.5368	0.4131	0.3196	
下界	2.3143	1.7270	1.2245	0.8852	0.6560	0.4909	0.3711	0.2828	

表 4.20  $T = 1/12, \rho = -0.6$  VIX 指数欧式看涨期权定价比较

$K$	2.7	2.8	2.9	3	3.1	3.2	3.3	3.4	$t$
上界	0.3967	0.3142	0.2398	0.1759	0.1237	0.0839	0.0553	0.0356	81.51s 80.18s
MC	0.3948	0.3124	0.2382	0.1744	0.1225	0.0828	0.0543	0.0349	
WT	0.3946	0.3122	0.2382	0.1746	0.1228	0.0832	0.0546	0.0351	
下界	0.3929	0.3106	0.2365	0.1729	0.1212	0.0817	0.0534	0.0341	

表 4.21  $T = 1/4, \rho = -0.4$  欧式看涨期权定价比较

$K$	19.4	20.2	21	21.8	22.6	23.4	24.2	25	$t$
上界	2.2266	1.6942	1.2873	1.0015	0.7937	0.6352	0.5134	0.4181	10h+ 73.39s
MC	2.1602	1.6291	1.2254	0.9440	0.7407	0.5866	0.4689	0.3774	
WT	2.1703	1.6119	1.2086	0.9359	0.7373	0.5865	0.4698	0.3783	
下界	2.0937	1.5640	1.1635	0.8864	0.6877	0.5380	0.4243	0.3367	

表 4.22  $T = 1/6, \rho = -0.4$  VIX 指数欧式看涨期权定价比较

## 4.5 其他模型数值实验

在这一小节中, 我们在表格4.1的参数下 (相关性  $\rho$  的取值为-0.5), 进行了基于 Heston-Dupire 两种变式模型的柳树法和蒙特卡洛罗法的定价数值实验, 实验结果如下所示.

$K$	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	$t$
上界	0.3726	0.2814	0.1985	0.1293	0.0785	0.0458	0.0261	0.0148	56.10s 45.85s
MC	0.3711	0.2800	0.1973	0.1282	0.0776	0.0450	0.0255	0.0143	
WT	0.3726	0.2812	0.1976	0.1275	0.0764	0.0442	0.0251	0.0141	
下界	0.3697	0.2787	0.1960	0.1271	0.0767	0.0443	0.0250	0.0139	

表 4.23 模型 (2.4) 下欧式看涨期权定价比较

$K$	15.5	16.1	16.7	17.3	17.9	18.5	19.1	20.7	$t$
上界	2.4213	1.8361	1.2526	0.8420	0.5866	0.4110	0.2868	0.1960	9h+ 57.31s
MC	2.3809	1.7957	1.2122	0.8050	0.5545	0.3839	0.2643	0.1776	
WT	2.3607	1.7632	1.1731	0.7954	0.5547	0.3881	0.2705	0.1869	
下界	2.3405	1.7553	1.1719	0.7680	0.5224	0.3568	0.2418	0.1593	

表 4.24 模型 (2.4) 下 VIX 指数欧式看涨期权定价比较

$K$	2.9	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	$t$
上界	0.5646	0.4654	0.3662	0.2671	0.1679	0.0709	0.0092	0.0002	53.76s 44.87s
MC	0.5643	0.4651	0.3659	0.2667	0.1676	0.0706	0.0091	0.0002	
WT	0.5645	0.4653	0.3661	0.2670	0.1678	0.0708	0.0090	0.0002	
下界	0.5639	0.4648	0.3656	0.2664	0.1673	0.0703	0.0090	0.0002	

表 4.25 模型 (2.5) 下欧式看涨期权定价比较

$K$	3.55	3.67	3.79	3.91	4.03	4.15	4.27	4.39	$t$
上界	0.4972	0.3802	0.2632	0.1461	0.0396	0.0062	0.0010	0.0002	9h+ 49.43s
MC	0.4954	0.3784	0.2613	0.1443	0.0380	0.0055	0.0008	0.0001	
WT	0.4946	0.3751	0.2556	0.1361	0.0312	0.0054	0.0008	0.0001	
下界	0.4936	0.3765	0.2595	0.1425	0.0365	0.0048	0.0005	0.0000	

表 4.26 模型 (2.5) 下 VIX 指数欧式看涨期权定价比较

注意到在这两个模型下, 柳树法的定价结果也基本上落在了 MC 方法的 95% 置信区间以内. 模型 (2.5) 下 VIX 期权的定价结果太小, 蒙特卡罗法会存在较大的偏差, 柳树法的部分结果超出了置信区间. 实验表明, 不同模型下, 相同执行价格对应的期权定价结果有很大的差异, 在之后的研究中, 我们可以通过实证检验的方式, 得出更加符合市场实际情况的模型, 用于波动率指数期权的定价.



## 第五章 总结与展望

本文主要研究了随机局部波动率模型下 VIX 期权定价的相关理论.

本文前半部分介绍了各种随机局部波动率模型, 主要是 Heston-Dupire 随机局部波动率模型及相关变式, 详细推导了该模型中杠杆函数的计算公式. 其中分子部分为局部波动率, 可以通过 SVI 函数和插值方法拟合出隐含波动率曲面后, 代入相关公式求得. 分母部分为当前时刻波动率的条件期望, 目前比较常用的方法是条件蒙特卡罗方法, 在后半部分, 本文详细介绍了此种方法并且在蒙特卡罗对照实验中使用了该方法, 同时提出了柳树框架下新的计算方法.

在后半部分, 本文分别使用柳树法和作为对照的蒙特卡罗算法两种方法进行定价研究并且进行了多种数值实验. 首先搭建波动率的一维柳树, 根据理论表达式求出 CEV 过程的前四阶矩, 用 Johnson Curve 变换求出节点值, 并由 Fokker-Planck 方程, 计算出转移概率矩阵. 之后, 需要构建同时考虑资产价格和波动率的二维柳树, Dynkin 公式的变式可以用来近似计算前四阶矩, 以解决无法求出理论表达式的问题. 分别在考虑相关性和不考虑两种情形下计算转移概率, 并在此基础上推导了欧式看涨期权和 VIX 欧式看涨期权定价的数值计算公式及前者收敛性的证明. 需要注意的是杠杆函数分母部分的期望的计算, 本章具体介绍了条件蒙特卡罗法并且创新地基于柳树框架对其进行了推导和计算. 通过数值实验, 包括 Dupire 局部波动率的计算, 改变多种模型和期权参数时两种算法的对比实验, 柳树法收敛性的数值实验和几个不同模型下的定价实验等, 证实了柳树法具有准确性及高效性, 特别是大大缩短了波动率指数期权的定价时间.

柳树法的显著优点以及本文中对柳树框架的一些新用途比如求杠杆函数期望等启发我们可以将其应用在更多不同的模型和期权中, 研究更加复杂的模型和问题. 除了本文中使用的 Heston-Dupire 模型及变式外, 还有很多种不同的随机局部波动率模型, 特别是各种无参的模型, 都可以尝试用柳树法去构建. 除了最经典的 VIX 期权外, 各种波动率指数产品层出不穷, 关于它们的定价理论也可以参考文中的方法进一步研究.

最后, 本文存在一些局限性, 比如没有能够证明 Heston-Dupire 模型下柳树法 VIX 期权定价的收敛性, 仍需要更多的理论推导. 尽管文章中构造了两种模型变式, 但是都是依据过往经验猜测其优势, 因此在后续的研究中还需根据市场数据校准参数, 进行实证, 以确认模型的价值. 除此之外, 本文中的模型和算法还有很多可以提高和改进的地方, 值得进一步的思考和研究.

## 参考文献

- [1] Whaley R E. Derivatives on market volatility: Hedging tools long overdue[J]. The journal of Derivatives, 1993, 1(1): 71-84.
- [2] Aramian F. Modeling VIX Futures and Pricing VIX Options in the Jump Diffusion Modeling[J]. 2014.
- [3] Zhu Y, Zhang J E. Variance term structure and VIX futures pricing[J]. International Journal of Theoretical and Applied Finance, 2007, 10(01): 111-127.
- [4] Lin Y N. Pricing VIX futures: Evidence from integrated physical and risk-neutral probability measures[J]. Journal of Futures Markets: Futures, Options, and Other Derivative Products, 2007, 27(12): 1175-1217.
- [5] Wang Z, Daigler R T. The performance of VIX option pricing models: empirical evidence beyond simulation[J]. Journal of Futures Markets, 2011, 31(3): 251-281.
- [6] Drimus G, Farkas W. Local volatility of volatility for the VIX market[J]. Review of derivatives research, 2013, 16(3): 267-293.
- [7] Papanicolaou A, Sircar R. A regime-switching Heston model for VIX and S&P 500 implied volatilities[J]. Quantitative Finance, 2014, 14(10): 1811-1827.
- [8] White A D, Hull J C. The pricing of options on assets with stochastic volatilities[J]. The Journal of Finance, 1987, 42(2): 281-30.
- [9] Stein E M, Stein J C. Stock price distributions with stochastic volatility: an analytic approach[J]. Review of Financial Studies, 1991, 4(4): 727-752.
- [10] Heston S L. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options[J]. Review of Financial Studies, 1993, 6(2): 327-343.
- [11] Dupire B. Pricing with a smile[J]. Risk, 1994, 1: 18-20.
- [12] Rubinstein M. Implied binomial trees[J]. Journal of Finance, 1994, 49: 771-818.
- [13] Derman E, Kani I. The volatility smile and its implied tree[J]. Risk, 1994, 7(2): 139-145.

- [14] Mark J, Robert H, David W. Pricing Exotics under the Smile[J]. Derivatives Research, JP Morgan, London, 1999.
- [15] Hagan P S, Kumar D, Lesniewski A S. Smile risk[J]. Wilmott, 2002, 1(1): 84-108.
- [16] Lipton. The vol smile problem[J]. Risk Magazine, 2002, 2: 61-65.
- [17] Curran M. Willow power: optimizing derivative pricing trees[J]. Algo Research Quarterly, 2001, 4(4): 15.
- [18] Xu W, Hong Z W, Qin C X. A new sampling strategy willow tree method with application to path-dependent option pricing[J]. Quantitative Finance, 2013, 13(6): 861-872.
- [19] Ma J M, Huang S H, Xu W. An Efficient Convergent Willow Tree Method for American and Exotic Option Pricing under Stochastic Volatility Models[J]. Journal of Derivatives, 2020, 27 (3): 75-98.
- [20] Dong B, Wang J, Xu W. Risk metrics evaluation for variable annuity with various guaranteed benefits[J]. Journal of Derivatives, 2020, in press.
- [21] Lu L, Xu W, Qian Z. Efficient willow tree method for European-style and American-style moving average barrier options pricing[J]. Quantitative Finance, 2016, 17: 889-906
- [22] Lu L, Xu W, Qian Z H. Efficient convergent lattice method for Asian options pricing with superlinear complexity[J]. Journal of Computational Finance, 2016, 24: 1-38.
- [23] S.L\_Heston.A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options[J].Review of financial studies,1993,6(2):327-343.
- [24] A.L.Lewis.Option valuation under stochastic Volatility[M].Option Valuation under Stochastic Volatility,2000.
- [25] Gatheral J. The Volatility Surface: A Practitioner's Guide. John Wiley Sons, Hoboken, 2006.
- [26] Feng J, Forde M, Fouque J P. Short maturity asymptotics for a fast mean reverting Heston stochastic volatility model[J]. SIAM Journal on Financial Mathematics, 2010, 1(1): 126-141.

- [27] B.Dupire.Pricing and hedging with smiles[M].Mathematics of derivative securities. Dempster and Pliska eds.,Canlbridge Uni.Press,1997.
- [28] E.Dennan and I.Kanj.Stochastic implied trees:Arbitrage pricing with stochastic term and strike strucmre of Vo1atility[J].International Journal of Theroretical and Applied Finance,1998,1(1):61-110.
- [29] E.Deman,I.Kani,and J.Z.Zou.The local Vo1atility surface:Unlochnng the information in index option pnces[J].Fiancial Analysts Journal,1996, 25-36.
- [30] M.Rubinstein.Implied binomial trees[J].Journal of finance,1994, 771-818.
- [31] Hagan P S, Kumar D,Lesniewski A S. Smile risk[J]. Wilmott, 2002, 1(1): 84-108.
- [32] Mark J, Robert H, David W. Pricing Exotics under the Smile[J]. Derivatives Research, JP Morgan, London, 1999.
- [33] Schobel R, Zhu J. Stochastic volatility with an Ornstein-Uhlenbeck process: an extension[J]. European Finance Review, 1999, 3: 23-46.
- [34] Tanaka H. Note on Continuous Additive Functionals of the 1-Dimensional Brownian Path[J]. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, 1963, 1: 251-257.
- [35] Feng J, Forde M, Fouque J P. Short-maturity asymptotics for a fast mean reverting Heston stochastic volatility model[J]. SIAM Journal on Financial Mathematics, 2010, 1(1): 126-141.
- [36] Van Der Stoep A W, Grzelak L, Oosterlee C. The Heston stochastic-local volatility model: Efficient Monte Carlo simulation[J]. Int. J. Theor. Appl. Finance, 2014, 17: 1-30.
- [37] Henry-Labordere P. Calibration of local stochastic volatility models to market smiles: A Monte-Carlo approach[J]. Risk Magazine, 2009, 112-117.
- [38] Piterbarg V. Markovian projection method for volatility calibration[J]. Available at SSRN 906473, 2006.
- [39] Engelmann B, Koster F, Oeltz D. Calibration of the Heston Stochastic Local Volatility Model: A Finite Volume Scheme[J]. Available at SSRN 1823769, 2011.

- [40] Deelstra G, Rayee G. Local Volatility Pricing Models for Long-dated FX Derivatives[J]. Applied Mathematical Finance, 2012, 20(4): 380-402.
- [41] Gatheral J. A parsimonious arbitrage-free implied volatility parametrization with application to the valuation of volatility derivatives[J]. Presentation at Global Derivatives, 2004.
- [42] Rebbonato R. Volatility and Correlation [J]. Jone Wiley and Sons, 2004, 99(2): 454-458(5).
- [43] Sepp A. Pricing Barrier Options Under Local Volatility [R]. Working Paper, 2002.
- [44] Andreasen J, Huge B. Volatility Interpolation[J]. Risk Magazine, 2011, 3: 86-89.
- [45] Coleman T, Li Y, Verma A. Reconstructing the Unknown Local Volatility Function[J]. Journal of Computational Finance, 1998, 2: 77-102.
- [46] De Marco S, Friz P, Gerhold S. Rational Shapes of Local Volatility[J]. Risk Magazine, 2013, 2: 82-87.
- [47] Lee R. The moment formula for implied volatility at extreme strikes[J]. Mathematical Finance, 2004, 14(3): 469-480.
- [48] Johnson N L . SYSTEMS OF FREQUENCY CURVES GENERATED BY METHODS OF TRANSLATION[J]. Biometrika, 1949(1-2):1-2.
- [49] Guangguang W, Wei X. A unified willow tree framework for one-factor short rate models[J]. The Journal of Derivatives, 2018, 25(3): 33-54.
- [50] Hill I, Holder R. Algorithm as 99: Fitting Johnson curves by moments. Applied Statistics, 1976, 25: 180-189.
- [51] Xu W, Hong Z W, Qin C X. A new sampling strategy willow tree method with application to path-dependent option pricing[J]. Quantitative Finance, 2013, 13(6): 861-872.
- [52] Li C, Li X. A closed-form expansion approach for pricing discretely monitored variance swaps[J]. Operations Research Letters, 2015, 43: 450-455.
- [53] X. Luo, J.E. Zhang, and W. Zhang. Instantaneous squared vix and vix derivatives[J]. Journal of Futures Market, 2019, 39:1193-1213.

## 致 谢

首先,我要感谢我的论文指导老师——马俊美老师. 在去年的十二月初,马老师就为我选定了论文的研究方向,并且提供了丰富的资料和充足的机会让我学习和讨论. 每当遇到疑难问题,进度停滞的时候,马老师不仅会提供许多思考的角度,让我拨开迷雾找到方向,还会鼓励和安慰我,让我保持信心和热情,最终攻克难关.

我还要感谢我的父母和朋友王柯琪,在我完成论文的过程中不断给予我精神上的支持,让我始终保持愉快的心情,从而能够更好地专注于解决问题.

最后,我要感谢所有的论文评阅老师和答辩老师,是你们的辛勤工作让我们能够顺利进行毕业活动.

# 声 明

本人郑重声明所呈交的论文是我个人在指导老师的指导下进行的研究工作及取得的研究成果，不存在任何剽窃、抄袭他人学术成果的现象。我同意( )/不同意( )本论文作为学校的信息资料使用。

论文作者（签名）\_\_\_\_\_

年 月 日