2005 年错题

(1) 设 $y=(1+\sin x)^x$，则 $dy|_{x=\pi}=$_____ .

(4) 微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\frac{1}{9}$ 的解为_____ .

(5) 当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小，则 k= ___

(8) 设 F(x)是连续函数 f(x)的一个原函数，"$M\Leftrightarrow N$"表示 "M 的充分必要条件是 N"，则必有

(A) F(x)是偶函数$\Leftrightarrow$f(x)是奇函数.

(B) F(x)是奇函数$\Leftrightarrow$f(x)是偶函数.

(C) F(x)是周期函数$\Leftrightarrow$f(x)是周期函数.

(D) F(x)是单调函数$\Leftrightarrow$f(x)是单调函数.

(9) 设函数 y=y(x)由参数方程$\begin{cases} x=t^2+2t, \\ y=\ln(1+t) \end{cases}$确定，则曲线 y=y(x)在 x=3 处的法线与 x 轴交点的横坐标是

(A) $\frac{1}{8}\ln 2+3$. (B) $-\frac{1}{8}\ln 2+3$.

(C) $-8\ln 2+3$. (D) $8\ln 2+3$.

(11) 设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$，其中函数 φ 具有二阶导数，ψ 具有一阶导数，则必有

(A) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. (B) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. (D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

(16)（本题满分 11 分）

如图，C_1 和 C_2 分别是 $y=\frac{1}{2}(1+e^x)$ 和 $y=e^x$ 的图象，过点(0,1)的曲线 C_3 是一单调增函数的图象. 过 C_2 上任一点 M(x,y)分别作垂直于 x 轴和 y 轴的直线 l_x 和 l_y. 记 C_1, C_2 与 l_x 所围图形的面积为 $S_1(x)$；C_2, C_3 与 l_y 所围图形的面积为 $S_2(y)$. 如果总有 $S_1(x)=S_2(y)$，求曲线 C_3 的方程 $x=\varphi(y)$.

(17)（本题满分 11 分）

如图，曲线 C 的方程为 y=f(x)，点(3,2)是它的一个拐点，直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点(0,0)与(3,2)处的切线，其交点为(2,4). 设函数 f(x)具有三阶连续导数，计算定积分

$\int_0^3 (x^2+x) f'''(x) dx.$

（22）（本题满分 9 分）

确 定 常 数 a, 使 向 量 组 $\alpha_1=(1,1,a)^T$, $\alpha_2=(1,a,1)^T$, $\alpha_3=(a,1,1)^T$ 可 由 向 量 组 $\beta_1=(1,1,a)^T$, $\beta_2=(-2,a,4)^T$, $\beta_3=(-2,a,a)^T$ 线性表示, 但向量组 β_1,β_2,β_3 不能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

2006 年错题

（4）微分方程 $y'=\frac{y(1-x)}{x}$ 的通解是________.

（18）.

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi, x_{n+1}=\sin x_n (n=0,1,2,\cdots)$

证明:（1） $\lim_{x\to\infty} x_{n+1}$ 存在, 并求极限

(2) 计算 $\lim_{x\to\infty}(\frac{x_{n+1}}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}$

2007 年错题

(5) 曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$， 渐近线的条数为

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

(7) 二元函数 *f*(*x*, *y*)在点(0，0) 处可微的一个充分条件是

(A) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$.

(B) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$， 且 $\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$.

(C) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

(D) $\lim_{x\to 0}[f_x'(x,0)-f_x'(0,0)]=0$， 且 $\lim_{y\to 0}[f_y'(0,y)-f_y'(0,0)]=0$.

(14) 二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''-4y'+3y=2e^{2x}$ 的通解为

(17)（本题满分 10 分）

设 $f(x)$是区间$[0,\dfrac{\pi}{4}]$上的单调、可导函数，且满足

$$\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt=\int_0^x t\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}dt,$$

其中 f^{-1}是 f的反函数，求 $f(x)$.

(18)（本题满分 11 分）

设 D 是位于曲线 $y=\sqrt{x}a^{-\frac{x}{2a}}(a>1,0\le x<+\infty)$下方、$x$轴上方的无界区域。

(I) 求区域 D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积 $V(a)$;

(II) 当 a 为何值时，$V(a)$最小？并求此最小值.

(19)（本题满分 10 分）

求微分方程 $y''(x+y'^2)=y'$满足初始条件 $y(1)=y'(1)=1$的特解。

(24) (本题满分 11 分)

设 3 阶对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2,\ \ \alpha_1=(1,-1,1)^T$ 是 A

的属于 λ_1 的一个特征向量,记 $B=A^5-4A^3+E$ 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(I) 验证 α_1是矩阵 B的特征向量，并求 B的全部特征值与特征向量 .

(II) 求矩阵 B .

2008 年错题

(5)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是【　　】.

(A) 若$\{x_n\}$收敛，则$\{f(x_n)\}$收敛　　(B) 若$\{x_n\}$单调，则$\{f(x_n)\}$收敛

(C) 若$\{f(x_n)\}$收敛，则$\{x_n\}$收敛.　　(D) 若$\{f(x_n)\}$单调，则$\{x_n\}$收敛.

(7)设 A 为 n 阶非零矩阵，E 为 n 阶单位矩阵 . 若 $A^3=0$，则下列结论正确的是【　　】.

(A) $E-A$不可逆，则$E+A$不可逆.　　(B) $E-A$不可逆，则$E+A$可逆.

(C) $E-A$可逆，则$E+A$可逆.　　(D) $E-A$可逆，则$E+A$不可逆.

(17)（**本题满分 9 分**）计算$\displaystyle\int_0^1\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

(18)(本题满分 11 分)

计算$\displaystyle\iint_D \max\{xy,1\}dxdy$，其中 $D=\{(x,y),0\le x\le 2,0\le y\le 2\}$

(20)(本题满分 11 分)

(I) 证明积分中值定理 :若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则至少存在一点 $\eta\in[a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)dx = f(\eta)(b-a)$ ；

(II) 若函数 $\varphi(x)$ 具有二阶导数，且满足 $\varphi(2)>\varphi(1)$， $\varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)dx$， 则至少存在一点 $\xi\in(1,3)$， 使得 $\varphi''(\xi)<0$.

(22) (本题满分 12 分) .

设 n 元线性方程组 $Ax=b$， 其中

$$A=\begin{pmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

（I）证明行列式 $|A|=(n+1)a^n$ ；

（II）当 a 为何值时，该方程组有惟一解，并求 x_1 .

（III）当 a 为何值时，该方程组有无穷多解，并求其通解 .

2009 年错题

(1) 函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 的可去间断点的个数为

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 无穷多个

(3) 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $dz=xdx+ydy$, 则点 $(0,0)$

(A) 不是 $f(x,y)$ 的连续点 (B) 不是 $f(x,y)$ 的极值点

(C) 是 $f(x,y)$ 的极大值点 (D) 是 $f(x,y)$ 的极小值点

(5) 若 $f''(x)$ 不变号, 且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 上的曲率圆为 $x^2+y^2=2$, 则函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内

(A) 有极值点, 无零点 (B) 无极值点, 有零点

(C) 有极值点,有零点　　　　　　(D) 无极值点,无零点

(7) 设 A, B 均为 2 阶矩阵，A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵，若 $|A|=2, |B|=3$，则分块矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为

$(A)\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$.　　　　$(B)\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$.

$(C)\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$.　　　　$(D)\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$.

(9) 曲线 $\begin{cases} x=\int_0^{1-t} e^{-u^2} du \\ y = t^2 \ln(2-t^2) \end{cases}$ 在（0，0）处的切线方程为______

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-x}\sin nx dx =$______

(12) 设 $y=y(x)$ 是由方程 $xy+e^y=x+1$ 确定的隐函数，则 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}=$______

2010 年错题

(1) 函数 $f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为（　）

(A)　0.　　　(B)　1.　　　(C)　2.　　　(D)　3.

(2)　设 y_1, y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解,若常数 λ，μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解, $\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解,则（　）

(A)　$\lambda=\frac{1}{2},\mu=\frac{1}{2}$.　　　　(B)　$\lambda=-\frac{1}{2},\mu=-\frac{1}{2}$.

(C)　$\lambda=\frac{2}{3},\mu=\frac{1}{3}$.　　　　(D)　$\lambda=\frac{2}{3},\mu=\frac{2}{3}$.

(4) 设 m,n 是正整数,则反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的收敛性（　）

(A)　仅与 m 的取值有关.　　　　(B)　仅与 n 的取值有关.

(C)　与 m,n 取值都有关.　　　　(D)　与 m,n 取值都无关.

(5) 设函数 $z=z(x,y)$，由方程 $F(\frac{y}{x},\frac{z}{x})=0$ 确定，其中 F 为可微函数，且 $F_2'\neq 0$，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$（　）

(A) x.　　(B) z.　　(C) $-x$.　　(D) $-z$.

(11) 函数 $y=\ln(1-2x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0)=$________.

(13) 已知一个长方形的长 l 以 2 cm/s 的速率增加，宽 w 以 3 cm/s 的速率增加. 则当 $l=12\text{cm}$，$w=5\text{cm}$ 时，它的对角线增加的速率为________.

(18)（本题满分 10 分）

一个高为 l 的柱体形贮油罐，底面是长轴为 $2a$，短轴为 $2b$ 的椭圆. 现将贮油罐平放，当油罐中油面高度为 $\frac{3}{2}b$ 时（如图），计算油的质量.（长度单位为 m，质量单位为 kg，油的密度为常数 ρ kg/m^3）

(19)（本题满分 11 分）

设函数 $u=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足等式 $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，确定 a，b 的值，使等式在变换 $\xi=x+ay,\eta=x+by$ 下化简为 $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$.

2011 年错题

(3) 函数 $f(x)=\ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的驻点个数为（　）

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

(5) 设函数 $f(x),g(x)$ 均有二阶连续导数，满足 $f(0)>0,g(0)<0$，且 $f'(0)=g'(0)=0$，则函数 $z=f(x)g(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是（　）

(A) $f''(0)<0,g''(0)>0.$　　(B) $f''(0)<0,g''(0)<0.$

(C) $f''(0)>0,g''(0)>0.$　　(D) $f''(0)>0,g''(0)<0.$

(12) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x>0,\\ 0, x\leq 0,\end{cases}$ $\lambda>0$，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=$________.

(13) 设平面区域 D 由直线 $y=x$，圆 $x^2+y^2=2y$ 及 y 轴围成，则二重积分 $\iint\limits_D xyd\sigma=$_____

（18）（本题满分 10 分）

设函数 $y(x)$ 具有二阶导数，且曲线 $l: y=y(x)$ 与直线 $y=x$ 相切于原点，记 α 为曲线 l 在点 (x,y) 处切线的倾角，若 $\frac{d\alpha}{dx}=\frac{dy}{dx}$，求 $y(x)$ 的表达式．

2012 年错题

(3) 设 $a_n>0$ $(n=1,2,3\cdots)$，$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$，则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的（　）

(A) 充分必要条件　　(B) 充分非必要条件

(C) 必要非充分条件　　(D) 非充分也非必要

(6) 设区域 D 由曲线 $y=\sin x, x=\pm\frac{\pi}{2}, y=1$ 围成，则 $\iint\limits_D (x^5y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$（　）

(A) π　　(B) 2　　(C) -2　　(D) $-\pi$

(18)（本题满分 10 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$，其中区域 D 为曲线 $r=1+\cos\theta\left(0\le\theta\le\pi\right)$ 与极轴围成.

(21)（本题满分 10 分）

(I) 证明方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$ $(n>1$ 的整数$)$，在区间 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内有且仅有一个实根；

(II) 记 (I) 中的实根为 x_n，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

(23)（本题满分 11 分）

已知 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$，二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x^T\left(A^TA\right)x$ 的秩为 2，

(I) 求实数 a 的值；

(II) 求利用正交变换 $x=Qy$ 化 f 为标准形.