2005 年错题

(1) 设 $y=(1+\sin x)^x$，则 $dy|_{x=\pi}=$______ .

(1)【详解】先求出函数的导数,再求函数在某点的微分.

方法 1：利用恒等变形得 $y=(1+\sin x)^x=e^{x\ln(1+\sin x)}$，于是

$$y'=e^{x\ln(1+\sin x)}\cdot[\ln(1+\sin x)+x\cdot\frac{\cos x}{1+\sin x}],$$

从而 $\left.dy\right|_{x=\pi}=y'(\pi)dx=-\pi dx.$

方法 2：两边取对数，$\ln y=x\ln(1+\sin x)$，对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\ln(1+\sin x)+\frac{x\cos x}{1+\sin x},$$

于是 $y'=(1+\sin x)^x\cdot[\ln(1+\sin x)+x\cdot\frac{\cos x}{1+\sin x}],$

故 $\left.dy\right|_{x=\pi}=y'(\pi)dx=-\pi dx.$

(4) 微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\frac{1}{9}$ 的解为______ .

【详解】求方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 的解，有公式

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]\ (\text{其中 } C \text{ 是常数}).$$

将原方程等价化为 $y'+\frac{2}{x}y=\ln x$，于是利用公式得方程的通解

$$y=e^{-\int\frac{2}{x}dx}[\int\ln x\cdot e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+C]$$

$$=\frac{1}{x^2}\cdot[\int x^2\ln x dx+C]=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x+\frac{C}{x^2},(\text{其中 } C \text{ 是常数})$$

由 $y(1)=-\frac{1}{9}$ 得 $C=0$，故所求解为 $y=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x.$

(5) 当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小，则 k=____

(5)【详解】由题设，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}}{kx^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\arcsin x+1-\cos x}{kx^2(\sqrt{1+x\arcsin x}+\sqrt{\cos x})}$$

$$=\frac{1}{2k}\lim_{x\to 0}\frac{x\arcsin x+1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2k}\left[\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\right],$$

又因为 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$，$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}\underline{\underline{\arcsin x=u}}\lim_{u\to 0}\frac{u}{\sin u}=1$

所以 $\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\frac{1}{2k}(\frac{1}{2}+1)=\frac{3}{4k}$

由题设 $x\to 0$ 时 $\alpha(x)\sim\beta(x)$，所以 $\frac{3}{4k}=1$，得 $k=\frac{3}{4}$.

(8) 设 F(x)是连续函数 f(x)的一个原函数，"$\mathrm{M}\Leftrightarrow\mathrm{N}$"表示“M 的充分必要条件是 N”，则必有

(A) F(x)是偶函数 $\Leftrightarrow$ f(x)是奇函数.

(B) F(x)是奇函数 $\Leftrightarrow$ f(x)是偶函数.

(C) F(x)是周期函数 $\Leftrightarrow$ f(x)是周期函数.

(D) F(x)是单调函数 $\Leftrightarrow$ f(x)是单调函数.

方法 1：应用函数奇偶性的定义判定，

函数 $f(x)$ 的任一原函数可表示为 $F(x)=\int_0^x f(t)dt+C$，且 $F'(x)=f(x)$.

当 $F(x)$ 为偶函数时，有 $F(-x)=F(x)$，于是 $F'(-x)\cdot(-1)=F'(x)$，即 $-f(-x)=f(x)$，亦即 $f(-x)=-f(x)$，可见 $f(x)$ 为奇函数；

反过来，若 $f(x)$ 为奇函数，则 $F(-x)=\int_0^{-x}f(t)dt+C$，令 $t=-k$，则有 $dt=-dk$，

所以 $F(-x)=\int_0^{-x}f(t)dt+C=-\int_0^x f(-k)dk+C=\int_0^x f(k)dk+C=F(x)$，

从而 $F(x)=\int_0^x f(t)dt+C$ 为偶函数，可见(A)为正确选项.

方法 2：排除法，

令 $f(x)=1$，则取 $F(x)=x+1$，排除(B)、(C);

令 $f(x)=x$，则取 $F(x)=\frac{1}{2}x^2$，排除(D);

(9) 设函数 y=y(x)由参数方程 $\begin{cases}x=t^2+2t,\\ y=\ln(1+t)\end{cases}$ 确定，则曲线 y=y(x)在 x=3 处的法线与 x 轴交点的横坐标是

(A) $\frac{1}{8}\ln 2+3$.　　(B) $-\frac{1}{8}\ln 2+3$.

(C) $-8\ln 2+3$.　　(D) $8\ln 2+3$.

【详解】当 $x=3$ 时，有 $t^2+2t=3$，得 $t_1=1, t_2=-3$(舍去，此时 y 无意义)，

曲线 $y=y(x)$ 的导数为 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{1+t}}{2t+2}=\frac{1}{2(t+1)^2},$$

所以曲线 $y=y(x)$ 在 $x=3$(即 $t=1$)处的切线斜率为 $\frac{1}{8}$

于是在该处的法线的斜率为 -8，所以过点 $(3,\ln 2)$ 的法线方程为

$$y-\ln 2=-8(x-3),$$

令 y=0，得其与 x 轴交点的横坐标为：$\frac{1}{8}\ln 2+3$，故应(A).

(11) 设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$，其中函数 φ 具有二阶导数，ψ 具有一阶导数，则必有

(A) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　　(B) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　　(D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

【详解】因为 $\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(x+y)+\varphi'(x-y)+\psi(x+y)-\psi(x-y)$，

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(x+y)-\varphi'(x-y)+\psi(x+y)+\psi(x-y),$$

于是 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\varphi''(x+y)-\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)+\psi'(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y),$$

可见有 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，应选(B).

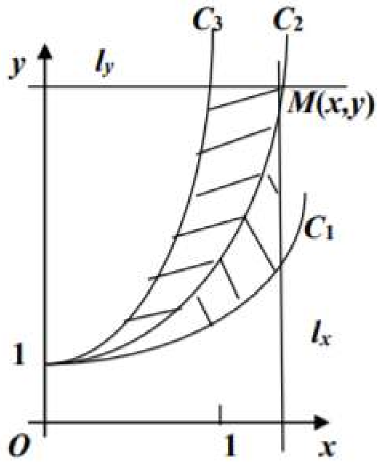
(16)（本题满分 11 分）

如图，C_1和C_2分别是$y=\frac{1}{2}(1+e^x)$和$y=e^x$的图象，过点(0,1)的曲线C_3是一单调增函数的图象. 过C_2上任一点 M(x,y)分别作垂直于 x 轴和 y 轴的直线l_x和l_y. 记C_1, C_2与l_x所围图形的面积为$S_1(x)$；C_2, C_3与l_y所围图形的面积为$S_2(y)$. 如果总有$S_1(x)=S_2(y)$，求曲线C_3的方程$x=\varphi(y)$.

(16) 【详解】由题设图形知，C_3在C_1的左侧，根据平面图形的面积公式得，

$$S_1(x)=\int_0^x[e^t-\frac{1}{2}(1+e^t)]dt=\frac{1}{2}(e^x-x-1),$$

$$S_2(y)=\int_1^y(\ln t-\varphi(t))dt,$$



由$S_1(x)=S_2(y)$，得

$$\frac{1}{2}(e^x-x-1)=\int_1^y(\ln t-\varphi(t))dt,$$

注意到$M(x,y)$是$y=e^x$的点，

于是 $$\frac{1}{2}(y-\ln y-1)=\int_1^y(\ln t-\varphi(t))dt$$

两边对y求导得 $$\frac{1}{2}(1-\frac{1}{y})=\ln y-\varphi(y),$$

整理上面关系式得函数关系为：$x=\varphi(y)=\ln y-\frac{y-1}{2y}$.

(17)（本题满分 11 分）

如图，曲线 C 的方程为 y=f(x)，点(3,2)是它的一个拐点，直线l_1与l_2分别是曲线 C 在点(0,0)与(3,2)处的切线，其交点为(2,4). 设函数 f(x)具有三阶连续导数，计算定积分$\int_0^3(x^2+x)f'''(x)dx$.

(17)【详解】由直线 l_1 过 $(0,0)$ 和 $(2,4)$ 两点知直线 l_1 的斜率为 2. 由直线 l_1 是曲线 C 在点(0,0)的切线，由导数的几何意义知 $f'(0)=2$. 同理可得 $f'(3)=-2$. 另外由点(3,2)是曲线 C 的一个拐点知 $f''(3)=0$.

由分部积分公式，

$$\int_0^3 (x^2+x)f'''(x)dx=\int_0^3 (x^2+x)df''(x)=(x^2+x)f''(x)\Big|_0^3-\int_0^3 f''(x)(2x+1)dx$$

$$=(3^2+3)f''(3)-(0^2+0)f''(0)-\int_0^3 f''(x)(2x+1)dx$$

$$=-\int_0^3 (2x+1)df'(x)=-(2x+1)f'(x)\Big|_0^3+2\int_0^3 f'(x)dx$$

$$=-(2\times 3+1)f'(3)+(2\times 0+1)f'(0)+2\int_0^3 f'(x)dx$$

$$=16+2[f(3)-f(0)]=20.$$

（22）（本题满分 9 分）

确定常数 a, 使向量组 $\alpha_1=(1,1,\mathrm{a})^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2=(1,\mathrm{a},1)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3=(\mathrm{a},1,1)^{\mathrm{T}}$ 可由向量组 $\beta_1=(1,1,\mathrm{a})^{\mathrm{T}}$, $\beta_2=(-2,\mathrm{a},4)^{\mathrm{T}}$, $\beta_3=(-2,\mathrm{a},\mathrm{a})^{\mathrm{T}}$ 线性表示, 但向量组 β_1,β_2,β_3 不能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

方法 1： 记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$. 由于 β_1,β_2,β_3 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，故

$r(A)<3$，(若 $r(A)=3$，则任何三维向量都可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出)，从而

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[\text{加到第1行}]{\text{把第2、3行}}\begin{vmatrix}2+a&2+a&2+a\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[\text{公因子}(2+a)]{\text{提取第1行的}}(2+a)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[3\text{行}-1\text{行}]{2\text{行}-1\text{行}}(2+a)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&a-1&0\\a-1&0&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第3列展开}}(2+a)\cdot(-1)^{1+3}\times1\times\begin{vmatrix}0&a-1\\a-1&0\end{vmatrix}=-(2+a)(a-1)^2=0$$

(其中 $(-1)^{1+3}$ 指数中的 1 和 3 分别是1所在的行数和列数)

从而得 $a=1$ 或 $a=-2$.

当 $a=1$ 时，$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\beta_1=[1,1,1]^T$，则 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\beta_1+0\cdot\beta_2+0\cdot\beta_3$，

故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可由 β_1,β_2,β_3 线性表出，但 $\beta_2=[-2,1,4]^T$ 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出(因

为方程组 $\beta_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，即 $\begin{cases}k_1+k_2+k_3=-2\\k_1+k_2+k_3=1\\k_1+k_2+k_3=4\end{cases}$ 无解)，故 $a=1$ 符

合题意.

当 $a=-2$ 时,由于

$$[B\vdots A]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&-2&1&1&-2\\1&-2&-2&1&-2&1\\-2&4&-2&-2&1&1\end{array}\right]\xrightarrow[3\text{行}+1\text{行}\times2]{2\text{行}-1\text{行},}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&-2&1&1&-2\\0&0&0&0&-3&-3\\0&0&-6&0&0&0\end{array}\right]$$

因 $r(B)=2\neq r(B\vdots\alpha_2)=3$，系数矩阵的秩和增广矩阵的秩不相等，故方程组

$BX=\alpha_2$ 无解，故 α_2 不能由 β_1,β_2,β_3 线性表出，这和题设矛盾，故 $a=-2$ 不合题意.

因此 $a=1$.

方法 2： 对矩阵 $\overline{A}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3\vdots\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 作初等行变换，有

$$\overline{A}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3\vdots\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&-2&1&1&a\\1&a&a&1&a&1\\a&4&a&a&1&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[3\text{行}-1\text{行}\times a]{2\text{行}-1\text{行},}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&-2&1&1&a\\0&a+2&a+2&0&a-1&0\\0&4+2a&3a&0&1-a&1-a\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{3\text{行}-2\text{行}\times 2}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&-2&1&1&a\\0&a+2&a+2&0&a-1&0\\0&0&a-4&0&3(1-a)&1-a\end{array}\right],$$

当 $a=-2$ 时，$\overline{A}\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&-2&1&1&-2\\0&0&0&0&-3&0\\0&0&-6&0&3&3\end{array}\right]$，不存在非零常数 k_1,k_2,k_3，

使得 $\begin{pmatrix}1\\-3\\3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}-2\\0\\-6\end{pmatrix}$，$\alpha_2$ 不能由 β_1,β_2,β_3 线性表示，因此 $a\neq-2$；

当 $a=4$ 时，

$$\overline{A}\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&-2&1&1&4\\0&6&6&0&3&0\\0&0&0&0&-9&-3\end{array}\right],$$

α_3 不能由 β_1,β_2,β_3 线性表示，不存在非零常数 k_1,k_2,k_3，使得

$\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2\\6\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}-2\\6\\0\end{pmatrix}$. 因此 $a\neq4$.

而当$a \neq -2$且$a \neq 4$时，秩$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=3$，此时向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可由向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表示. 又

$$\overline{B}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \vdots \beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{bmatrix}1 & 1 & a & \vdots & 1 & -2 & -2 \\ 1 & a & 1 & \vdots & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & \vdots & a & 4 & a\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[3\text{行}-1\text{行}\times a]{2\text{行}-1\text{行},}\begin{bmatrix}1 & 1 & a & \vdots & 1 & -2 & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & \vdots & 0 & a+2 & a+2 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & \vdots & 0 & 4+2a & 3a\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{3\text{行}+2\text{行}}\begin{bmatrix}1 & 1 & a & \vdots & 1 & -2 & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & \vdots & 0 & a+2 & a+2 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & \vdots & 0 & 6+3a & 4a+2\end{bmatrix},$$

由题设向量组β_1,β_2,β_3不能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，则方程组$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)x=\beta_1$或$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)x=\beta_2$或$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)x=\beta_3$无解，故系数矩阵的秩$\neq$增广矩阵的秩，故$r(\overline{B}) \neq r(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$.

又当$a \neq -2$且$a \neq 4$时，$r(\overline{B})=3$，则必有$a-1=0$或$2-a-a^2=0$，即$a=1$或$a=-2$.

综上所述，满足题设条件的a只能是：$a=1$.

方法3： 记$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3), B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，对矩阵$(A \vdots B)$作初等行变换，得

$$(A \vdots B)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \vdots \beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{bmatrix}1 & 1 & a & \vdots & 1 & -2 & -2 \\ 1 & a & 1 & \vdots & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & \vdots & a & 4 & a\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[3\text{行}-1\text{行}\times a]{2\text{行}-1\text{行},}\begin{bmatrix}1 & 1 & a & \vdots & 1 & -2 & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & \vdots & 0 & a+2 & a+2 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & \vdots & 0 & 4+2a & 3a\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{3\text{行}+2\text{行}}\begin{bmatrix}1 & 1 & a & \vdots & 1 & -2 & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & \vdots & 0 & a+2 & a+2 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & \vdots & 0 & 6+3a & 4a+2\end{bmatrix}.$$

由于β_1,β_2,β_3不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，故$r(A)<3$，(若$r(A)=3$，则任何三维向量都可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出)，从而

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[\text{加到第1行}]{\text{把第2、3行}}\begin{vmatrix}2+a&2+a&2+a\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[\text{公因子}(2+a)]{\text{提取第1行的}}(2+a)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[3\text{行}-1\text{行}]{2\text{行}-1\text{行}}(2+a)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&a-1&0\\a-1&0&0\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第3列展开}}(2+a)\cdot(-1)^{1+3}\times1\times\begin{vmatrix}0&a-1\\a-1&0\end{vmatrix}$$

$$=-(2+a)(a-1)^2=0$$

从而得 $a=1$ 或 $a=-2$．

当 $a=1$ 时，

$$(A\,\vdots\,B)=\begin{pmatrix}1&1&1&\vdots&1&-2&2\\0&0&0&\vdots&0&3&3\\0&0&0&\vdots&0&9&6\end{pmatrix},$$

则 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\beta_1+0\cdot\beta_2+0\cdot\beta_3$， $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可由 β_1,β_2,β_3 线性表出，但由于 $r(A)=1\neq r(A\vdots\beta_2)=2$，系数矩阵的秩和增广矩阵的秩不相等，方程组 $Ax=\beta_2$ 无解，$\beta_2=[-2,1,4]^T$ 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出．或由于 $r(A)=1\neq r(A\vdots\beta_3)=2$，系数矩阵的秩和增广矩阵的秩不相等，方程组 $Ax=\beta_3$ 无解，β_3 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，即 β_1,β_2,β_3 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，故 $a=1$ 符合题意．

当 $a=-2$ 时，

$$(A\,\vdots\,B)=\begin{pmatrix}1&1&-2&\vdots&1&-2&2\\0&-3&3&\vdots&0&0&0\\0&0&0&\vdots&0&0&-6\end{pmatrix},$$

因 $r(A)=2\neq r(A\vdots\beta_3)=3$,，系数矩阵的秩和增广矩阵的秩不相等，$\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，但 $r(B)=2\neq r(B\vdots\alpha_2)=3$（或 $r(B\vdots\alpha_3)=3$），系数矩阵的秩和增广矩阵的秩不相等，即 $BX=\alpha_2$（或 $BX=\alpha_3$）无解，即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 不能由 β_1,β_2,β_3 线性表出，与题设矛盾，故 $a=-2$ 不合题意．

故 $a=1$．

2006 年错题

（4）微分方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 的通解是________.

(4) 【答案】Cxe^{-x}．

【详解】分离变量，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y(1-x)}{x}\Rightarrow\frac{dy}{y}=\frac{(1-x)}{x}dx\Rightarrow\frac{dy}{y}=(\frac{1}{x}-1)dx\Rightarrow\int\frac{dy}{y}=\int\frac{1}{x}dx-\int dx$$

$$\Rightarrow\ln y=\ln x-x+c\ \Rightarrow e^{\ln y}=e^{\ln x-x+c}\ \Rightarrow y=Cxe^{-x}$$

（18）.

设数列$\{x_n\}$满足$0 < x_1 < \pi, x_{n+1} = \sin x_n (n = 0,1,2,\cdots)$

证明:（1） $\lim\limits_{x\to\infty} x_{n+1}$存在, 并求极限

(2) 计算$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$

(18)【详解】(I) 由于$0 < x < \pi$时，$0 < \sin x < x$，于是$0 < x_{n+1} = \sin x_n \le x_n$，说明数列$\{x_n\}$单调减少且$x_n > 0$. 由单调有界准则知$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在.记为$A$.

递推公式两边取极限得$A = \sin A$, $\therefore A = 0$

(II) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$，为"$1^\infty$"型.

因为离散型不能直接用洛必达法则，先考虑$\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}}$

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}} = e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\ln\left(\frac{\sin t}{t}\right)} = e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{2t}\cdot\frac{1}{\frac{\sin t}{t}}\cdot\frac{(t\cos t - \sin t)}{t^2}}$$

$$= e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{t\cos t - \sin t}{2t^3}} = e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\cos t - t\sin t - \cos t}{6t^2}} = e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{-\sin t}{6t}} = e^{-\frac{1}{6}}$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$$

2007 年错题

(5) 曲线$y = \frac{1}{x} + \ln(1+e^x)$，渐近线的条数为

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

【详解】因为$\lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} + \ln(1+e^x)\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x} + \lim\limits_{x\to 0}\ln(1+e^x) = \infty$，

所以$x = 0$是一条铅直渐近线;

因为$\lim\limits_{x\to -\infty} y = \lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{x} + \ln(1+e^x)\right) = \lim\limits_{x\to -\infty}\frac{1}{x} + \lim\limits_{x\to -\infty}\ln(1+e^x) = 0 + 0 = 0$,

所以$y = 0$是沿$x \to -\infty$方向的一条水平渐近线;

令 $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(1+e^x)}{x}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}\ \underline{\underline{\text{洛必达法则}}}\ 0+\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{1+e^x}}{1}=1$$

令 $b=\lim\limits_{x\to+\infty}(y-a\cdot x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)-x\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(1+e^x)-x\right)\ \underline{\underline{x=\ln e^x}}\ 0+\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(1+e^x)-\ln e^x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln(\frac{1+e^x}{e^x})=\lim_{x\to+\infty}\ln(e^{-x}+1)=\ln 1=0$$

所以 $y=x$ 是曲线的斜渐近线，所以共有 3 条，选择(D)

(7) 二元函数 $f(x, y)$在点(0，0) 处可微的一个充分条件是

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$.

(B) $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$，且 $\lim\limits_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$.

(C) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

(D) $\lim\limits_{x\to0}[f_x'(x,0)-f_x'(0,0)]=0$，且 $\lim\limits_{y\to0}[f_y'(0,y)-f_y'(0,0)]=0$.

【详解】一般提到的全微分存在的一个充分条件是：设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处存在全微分，但题设的 $A.B.C.D.$ 中没有一个能推出上述充分条件，所以改用全微分的定义检查之. 全微分的定义是：设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某领域内有定义，且 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的全增量可以写成 $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，其中 A,B 为与

$\Delta x, \Delta y$ 无关的常数，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{o(\rho)}{\rho}=0$，则称 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，$A\Delta x+B\Delta y$ 称为 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的全微分，对照此定义，就可解决本题.

选项 A. 相当于已知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续；选项 B. 相当于已知两个一阶偏导数 $f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$ 存在，因此 A. B. 均不能保证 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微. 选项 D. 相当于已知两个一阶偏导数 $f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$ 存在，但不能推导出两个一阶偏导函数 $f_x'(x,y)$，$f_y'(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，因此也不能保证 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

由 C. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{[f(x,y)-f(0,0)]}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，推知

$$f(x,y)-f(0,0)=\alpha\sqrt{x^2+y^2}=0\cdot x+0\cdot y+o(\rho),$$

其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{o(\rho)}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0}\alpha=0$.对照全微分定义，相当于

$$x_0=0, y_0=0, \Delta x=x, \Delta y=y, A=0, B=0.$$

可见 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微，故选择(C).

(14) 二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''-4y'+3y=2e^{2x}$ 的通解为

【详解】这是二阶常系数非齐次线性微分方程，且函数 $f(x)$ 是 $P_m(x)e^{\lambda x}$ 型(其中 $P_m(x)=2, \lambda=2$).

所给方程对应的齐次方程为 $y''-4y'+3y=0$，它的特征方程为 $r^2-4r+3=0$，得特征根 $r_1=1, r_2=3$，对应齐次方程的通解 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}=C_1e^x+C_2e^{3x}$

由于这里 $\lambda=2$ 不是特征方程的根，所以应设该非齐次方程的一个特解为 $y^*=Ae^{2x}$，

所以 $(y^*)'=2Ae^{2x}$，$(y^*)''=4Ae^{2x}$，代入原方程：$4Ae^{2x}-4\cdot 2Ae^{2x}+3Ae^{2x}=2e^{2x}$，

则 $A=-2$，所以 $y^*=-2e^{2x}$. 故得原方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{3x}-2e^{2x}$.

(17)（本题满分 10 分）

设 $f(x)$是区间$[0,\dfrac{\pi}{4}]$上的单调、可导函数，且满足

$$\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = \int_0^x t\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}dt,$$

其中 f^{-1}是 f 的反函数，求 $f(x)$.

【详解】方程 $\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = \int_0^x t\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}dt$ 两边对 x 求导，得

$$f^{-1}[f(x)]\square f'(x) = x\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}，即 xf'(x) = x\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}$$

当 $x\neq 0$ 时，对上式两边同时除以 x，得 $f'(x)=\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}$，所以

$$f(x)=\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}=\ln|\sin x+\cos x|+C$$

在已知等式中令 $x=0$，得 $\int_0^{f(0)} f^{-1}(t)dt=0$. 因 $f(x)$ 是 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 上的单调可导函数，$f^{-1}(t)$ 的值域为 $[0,\frac{\pi}{4}]$，它是单调非负的，故必有 $f(0)=0$，从而两边对上式取 $x\to 0^+$ 极限

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=C=0$$

于是 $f(x)=\ln|\sin x+\cos x|$，因为 $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$，故 $f(x)=\ln(\sin x+\cos x), x\in[0,\frac{\pi}{4}]$.

(18)（本题满分 11 分）

设 D 是位于曲线 $y=\sqrt{x}a^{-\frac{x}{2a}}(a>1, 0\le x<+\infty)$ 下方、x 轴上方的无界区域。

(I) 求区域 D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积 $V(a)$;

(II) 当 a 为何值时，$V(a)$最小？并求此最小值.

(18)【详解】(I) $V(a)=\pi\int_0^{\infty} xa^{-\frac{x}{a}}dx=-\frac{a}{\ln a}\pi\int_0^{\infty} xd\left(a^{-\frac{x}{a}}\right)$

$$=-\frac{a}{\ln a}\pi[xa^{-\frac{x}{a}}]\Big|_0^{+\infty}+\frac{a}{\ln a}\pi\int_0^{\infty} a^{-\frac{x}{a}}dx=\pi\left(\frac{a}{\ln a}\right)^2$$

(II) $V'(a)=[\pi\left(\frac{a}{\ln a}\right)^2]'=\pi\square\frac{2a\ln^2 a-a^2\square 2\ln a\square\frac{1}{a}}{\ln^4 a}=\pi\square\frac{2a\ln a-2a}{\ln^3 a}=2\pi\left(\frac{a(\ln a-1)}{\ln^3 a}\right)$

令 $V'(a)=0$，得 $\ln a=1$，从而 $a=e$. 当 $1<a<e$ 时，$V'(a)<0$，$V(a)$ 单调减少；当 $a>e$ 时，$V'(a)>0$，$V(a)$ 单调增加. 所以 $a=e$ 时 V 最小，最小体积为 $V_{\min}(a)=\pi e^2$

(19)（本题满分 10 分）

求微分方程 $y''(x+y'^2)=y'$ 满足初始条件 $y(1)=y'(1)=1$ 的特解。

(19)【详解】令 $y'=p$，则 $y''=p'$，原方程化为 $p'(x+p^2)=p$.

两边同时除以 $p'p$，得 $\dfrac{x}{p}+p=\dfrac{1}{p'}$

将 $p'=\dfrac{dp}{dx}$ 带入上式，得 $\dfrac{dx}{dp}-\dfrac{x}{p}=p$

按一阶线性方程求导公式，得

$$x=e^{\int\frac{1}{p}dp}\left(\int pe^{\int-\frac{1}{p}dp}dp+C\right)=e^{\ln p+C}\left(\int pe^{\int-\frac{1}{p}dp}dp\right)=p[\int dp+C]=p(p+C)$$

带入初始条件得 $C=0$，于是 $p^2=x$. 由 $y'(1)=1$ 知 $p=\sqrt{x}$，即 $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{x}$

解得 $y=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C_1$，带入初始条件得 $C_1=\dfrac{1}{3}$，所以特解为 $y=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{3}$.

(24) (本题满分 11 分)

设 3 阶对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$, $\alpha_1=(1,-1,1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量,记 $B=A^5-4A^3+E$ 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(I) 验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量，并求 B 的全部特征值与特征向量 .

(II) 求矩阵 B .

(24)【详解】(I) 由 $A\alpha_1=\alpha_1$，可得 $A^k\alpha_1=A^{k-1}(A\alpha_1)=A^{k-1}\alpha_1=\cdots=\alpha_1$，$k$ 是正整数,故

$$B\alpha_1=(A^5-4A^3+E)\alpha_1=A^5\alpha_1-4A^3\alpha_1+E\alpha_1=\alpha_1-4\alpha_1+\alpha_1=-2\alpha_1$$

于是 α_1 是矩阵 B 的特征向量(对应的特征值为 $\lambda_1'=-2$).

若 $Ax=\lambda x$，则 $(kA)x=(k\lambda)x, A^m x=\lambda^m x$ 因此对任意多项式 $f(x)$，$f(A)x=f(\lambda)x$，即 $f(\lambda)$ 是 $f(A)$ 的特征值.

故 B 的特征值可以由 A 的特征值以及 B 与 A 的关系得到，A 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$，则 B 有特征值 $\lambda_1'=f(\lambda_1)=-2,\lambda_2'=f(\lambda_2)=1,\lambda_3'=f(\lambda_3)=1$，所以 B 的全部特征值为－2，1，1.

由 A 是实对称矩阵及 B 与 A 的关系可以知道，B 也是实对称矩阵，属于不同的特征值

的特征向量正交. 由前面证明知 α_1 是矩阵 B 的属于特征值 $\lambda_1'=-2$ 的特征向量，设 B 的属于 1 的特征向量为 $(x_1,x_2,x_3)^T$，α_1 与 $(x_1,x_2,x_3)^T$ 正交，所以有方程如下：

$$x_1-x_2+x_3=0$$

选 x_2,x_3 为自由未知量，取 $x_2=0,x_3=1$ 和 $x_2=1,x_3=0$，于是求得 B 的属于 1 的特征向量为

$$\alpha_2=k_2(-1,0,1)^T,\alpha_3=(1,1,0)^T$$

故 B 的所有的特征向量为：对应于 $\lambda_1'=-2$ 的全体特征向量为 $k_1\alpha_1$，其中 k_1 是非零任意常数，对应于 $\lambda_2'=\lambda_3'=1$ 的全体特征向量为 $k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，其中 k_2,k_3 是不同时为零的任意常数.

(II) 方法 1： 令矩阵 $P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$，求逆矩阵 P^{-1}.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\-1&0&1&0&1&0\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{1行+2行}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&-1&2&1&1&0\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{1行+3行}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&-1&2&1&1&0\\0&2&-1&-1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{2行\times2+3行}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&-1&2&1&1&0\\0&0&3&1&2&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{3行\div3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&-1&2&1&1&0\\0&0&1&1/3&2/3&1/3\end{array}\right]\xrightarrow{3行\times(-2)+2行}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&-1&0&1/3&-1/3&-2/3\\0&0&1&1/3&2/3&1/3\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{3行\times(-1)+1行}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&2/3&-2/3&-1/3\\0&-1&0&1/3&-1/3&-2/3\\0&0&1&1/3&2/3&1/3\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2行\times(-1)+1行}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/3&-1/3&1/3\\0&-1&0&1/3&-1/3&-2/3\\0&0&1&1/3&2/3&1/3\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2行\times(-1)}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/3&-1/3&1/3\\0&1&0&-1/3&1/3&2/3\\0&0&1&1/3&2/3&1/3\end{array}\right]$$

则 $P^{-1}=\begin{bmatrix}1/3&-1/3&1/3\\-1/3&1/3&2/3\\1/3&2/3&1/3\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&2\\1&2&1\end{bmatrix}$

由 $P^{-1}BP=diag(-2,1,1)$，所以

$$B=P\cdot diag(-2,1,1)\cdot P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&2\\1&2&1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&2&-2\\-1&1&2\\1&2&1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0&3&-3\\3&0&3\\-3&3&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{bmatrix}$$

方法 2： 由(I)知 α_1 与 α_2,α_3 分别正交，但是 α_2 和 α_3 不正交，现将 α_2,α_3 正交化：

取 $\beta_2=\alpha_2,\beta_3=\alpha_3+k_{12}\beta_2=(1,1,0)+(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})=(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})$

其中，$k_{12}=-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=-\frac{1\times(-1)}{(-1)\times(-1)+1\times1}(-1,0,1)^T=(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$

再对 α_1,β_2,β_3 单位化：

$\xi_1=\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\frac{1}{\sqrt3}(1,-1,1),\xi_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\frac{1}{\sqrt2}(-1,0,1)=,\xi_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=\frac{\sqrt2}{\sqrt3}(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})$

其中：$\|\alpha_1\|=\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt3,\|\beta_2\|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt2,\|\beta_3\|=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+1^2+(\frac{1}{2})^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}$

合并成正交矩阵，

记 $$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{-1}{\sqrt2}&\frac{\sqrt2}{2\sqrt3}\\\frac{-1}{\sqrt3}&0&\frac{\sqrt2}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{\sqrt2}{2\sqrt3}\end{bmatrix}$$

由 $Q^{-1}BQ=diag(-2,1,1)$，有 $B=Q\cdot diag(-2,1,1)\cdot Q^{-1}$. 又由正交矩阵的性质，$Q^{-1}=Q^T$，得

2008 年错题

(5)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是【 】.

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛　　(B) 若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛.　　(D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛.

【详解】因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，且 $\{x_n\}$ 单调. 所以 $\{f(x_n)\}$ 单调且有界. 故 $\{f(x_n)\}$ 一定存在极限.

(7)设 A 为 n 阶非零矩阵，E 为 n 阶单位矩阵．若 $A^3=0$，则下列结论正确的是【　　】.

(A) $E-A$不可逆，则$E+A$不可逆.　　(B) $E-A$不可逆，则$E+A$可逆.

(C) $E-A$可逆，则$E+A$可逆.　　(D) $E-A$可逆，则$E+A$不可逆.

【详解】$(E-A)(E+A+A^2)=E-A^3=E$，$(E+A)(E-A+A^2)=E+A^3=E$

故 $E-A,E+A$ 均可逆.

(17)（**本题满分 9 分**）计算 $\int_0^1 \frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

方法一： 由于 $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=+\infty$，故 $\int_0^1\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 是反常积分.

令 $\arcsin x=t$，有 $x=\sin t$，$t\in[0,\pi/2)$

$$\int_0^1\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\sin^2 t}{\cos t}\cos tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin^2 tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{t}{2}-\frac{t\cos 2t}{2})dt$$

$$=\frac{t^2}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}td\sin 2t=\frac{\pi^2}{16}-\frac{t\sin 2t}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2tdt$$

$$=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{8}\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}$$

方法二： $\int_0^1\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 d(\arcsin x)^2$

$$=\frac{1}{2}x^2(\arcsin x)^2\Big|_0^1-\int_0^1 x(\arcsin x)^2dx=\frac{\pi^2}{8}-\int_0^1 x(\arcsin x)^2dx$$

令 $\arcsin x=t$，有 $x=\sin t$，$t\in[0,\pi/2)$

$$\int_0^1 x(\arcsin x)^2dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\sin 2tdt=-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2d\cos 2t$$

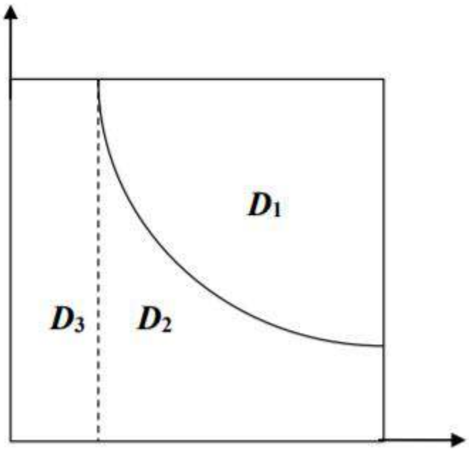
$$=-\frac{1}{4}(t^2\cos 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos 2tdt=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{4}$$

故，原式$=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}$

(18)(本题满分 11 分)

计算$\iint\limits_D \max\{xy,1\}dxdy$，其中$D=\{(x,y),0\le x\le 2,0\le y\le 2\}$

(18)【详解】 曲线$xy=1$将区域分成两个区域D_1和D_2+D_3，为了便于计算继续对区域分割，最后为



$$\iint\limits_D \max(xy,1)dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_1} xydxdy+\iint\limits_{D_2} dxdy+\iint\limits_{D_3} dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_0^2 1dy+\int_{\frac{1}{2}}^2 dx\int_0^{\frac{1}{x}}1dy+\int_{\frac{1}{2}}^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^2 xydy$$

$$=1+2\ln 2+\frac{15}{4}-\ln 2=\frac{19}{4}+\ln 2$$

(20)(本题满分 11 分)

(I) 证明积分中值定理:若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则至少存在一点$\eta\in[a,b]$,使得$\int_a^b f(x)dx=f(\eta)(b-a)$；

(II) 若函数$\varphi(x)$具有二阶导数，且满足$\varphi(2)>\varphi(1)$，$\varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)dx$，则至少存在一点$\xi\in(1,3)$，使得$\varphi''(\xi)<0$.

(20)【详解】(I) 设M与m是连续函数$f(x)$在$[a,b]$上的最大值与最小值，即

$$m\le f(x)\le M \qquad x\in[a,b]$$

由定积分性质，有 $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$，即 $m\le\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}\le M$

由连续函数介值定理，至少存在一点$\eta\in[a,b]$，使得 $f(\eta)=\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$

即 $$\int_a^b f(x)dx=f(\eta)(b-a)$$

(II) 由(I)的结论可知至少存在一点$\eta\in[2,3]$，使 $\int_2^3\varphi(x)dx=\varphi(\eta)(3-2)=\varphi(\eta)$

又由 $\varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)dx=\varphi(\eta)$，知 $2<\eta\le3$

对$\varphi(x)$在$[1,2][2,\eta]$上分别应用拉格朗日中值定理，并注意到$\varphi(1)<\varphi(2)$，$\varphi(\eta)<\varphi(2)$得

$$\varphi'(\xi_1)=\frac{\varphi(2)-\varphi(1)}{2-1}>0 \qquad 1<\xi_1<2$$

$$\varphi'(\xi_2)=\frac{\varphi(\eta)-\varphi(2)}{\eta-2}<0 \qquad 2<\xi_1<\eta\le3$$

在$[\xi_1,\xi_2]$上对导函数$\varphi'(x)$应用拉格朗日中值定理，有

$$\varphi''(\xi)=\frac{\varphi'(\xi_2)-\varphi'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0 \qquad \xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(1,3)$$

(22) (本题满分 12 分)．

设n元线性方程组$Ax=b$，其中

$$A=\begin{pmatrix}2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}.$$

(I) 证明行列式$|A|=(n+1)a^n$；

(II) 当a为何值时，该方程组有惟一解，并求x_1．

(III) 当a为何值时，该方程组有无穷多解，并求其通解．

(22)【详解】(I)**证法一**：

$$|A|=\begin{vmatrix}2a&1&&&&\\a^2&2a&1&&&\\&a^2&2a&\ddots&&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&&\ddots&\ddots&1\\&&&&a^2&2a\end{vmatrix}\overline{\overline{r_2-\frac{1}{2}ar_1}}\begin{vmatrix}2a&1&&&&\\0&\frac{3a}{2}&1&&&\\&a^2&2a&\ddots&&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&&\ddots&\ddots&1\\&&&&a^2&2a\end{vmatrix}=\cdots$$

$$\overline{\overline{r_n-\frac{n-1}{n}ar_{n-1}}}\begin{vmatrix}2a&1&&&&\\0&\frac{3a}{2}&1&&&\\&0&\frac{4a}{3}&\ddots&&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&&\ddots&\ddots&1\\&&&&0&\frac{(n+1)a}{n}\end{vmatrix}=2a\cdot\frac{3a}{2}\cdot\frac{4a}{3}\cdots\cdot\frac{(n+1)a}{n}=(n+1)a^n$$

证法二：记 $D_n=|A|$，下面用数学归纳法证明 $D_n=(n+1)a^n$．

当 $n=1$ 时，$D_1=2a$，结论成立．

当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix}2a&1\\a^2&2a\end{vmatrix}=3a^2$，结论成立．

假设结论对小于 n 的情况成立．将 D_n 按第 1 行展开得

$$D_n=2aD_{n-1}-\begin{vmatrix}a^2&1&&&&\\0&2a&1&&&\\&a^2&2a&1&&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&&\ddots&\ddots&1\\&&&&a^2&2a\end{vmatrix}$$

$$=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}=2ana^{n-1}-a^2(n-1)a^{n-2}=(n+1)a^n$$

故 $|A|=(n+1)a^n$

证法三：记 $D_n=|A|$，将其按第一列展开得 $D_n=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}$，

所以 $D_n-aD_{n-1}=aD_{n-1}-a^2D_{n-2}=a(D_{n-1}-aD_{n-2})$

$$=a^2(D_{n-2}-aD_{n-3})=\cdots=a^{n-2}(D_2-aD_1)=a^n$$

即 $D_n=a^n+aD_{n-1}=a^n+a(a^{n-1}+aD_{n-2})=2a^n++a^2D_{n-2}$

$$=\cdots=(n-2)a^n+a^{n-2}D_2=(n-1)a^n+a^{n-1}D_1$$

$$=(n-1)a^n+a^{n-1}\cdot 2a=(n+1)a^n$$

(II)因为方程组有唯一解，所以由 $Ax=B$ 知 $|A|\neq 0$，又 $|A|=(n+1)a^n$，故 $a\neq 0$.

由克莱姆法则，将 D_n 的第 1 列换成 b，得行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 0 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{n\times n}=\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}=D_{n-1}=na^{n-1}$$

所以 $x_1=\dfrac{D_{n-1}}{D_n}=\dfrac{n}{(n+1)a}$

(III)方程组有无穷多解，由 $|A|=0$，有 $a=0$，则方程组为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

此时方程组系数矩阵的秩和增广矩阵的秩均为 $n-1$，所以方程组有无穷多解，其通解为

$k\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}^T+\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}^T$, k 为任意常数.

2009 年错题

(1) 函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 的可去间断点的个数为

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 无穷多个

【解析】

$$f(x)=\frac{x-x^3}{\sin \pi x}$$

则当x取任何整数时，$f(x)$均无意义

故$f(x)$的间断点有无穷多个，但可去间断点为极限存在的点，故应是$x-x^3=0$的解

$$x_{1,2,3}=0,\pm 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-x^3}{\sin \pi x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-3x^2}{\pi\cos \pi x}=\frac{1}{\pi}$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{x-x^3}{\sin \pi x}=\lim_{x\to 1}\frac{1-3x^2}{\pi\cos \pi x}=\frac{2}{\pi}$$
$$\lim_{x\to -1}\frac{x-x^3}{\sin \pi x}=\lim_{x\to -1}\frac{1-3x^2}{\pi\cos \pi x}=\frac{2}{\pi}$$

故可去间断点为3个，即$0,\pm 1$

(3) 设函数$z=f(x,y)$的全微分为$dz=xdx+ydy$，则点$(0,0)$

(A) 不是$f(x,y)$的连续点　　(B) 不是$f(x,y)$的极值点

(C) 是$f(x,y)$的极大值点　　(D) 是$f(x,y)$的极小值点

【解析】因$dz=xdx+ydy$可得$\frac{\partial z}{\partial x}=x,\frac{\partial z}{\partial y}=y$

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=1, B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=0, C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=1$$

又在（0，0）处，$\frac{\partial z}{\partial x}=0,\frac{\partial z}{\partial y}=0$

$$AC-B^2=1>0$$

故（0，0）为函数$z=f(x,y)$的一个极小值点.

(5) 若$f''(x)$不变号，且曲线$y=f(x)$在点$(1,1)$上的曲率圆为$x^2+y^2=2$，则函数$f(x)$在区间$(1,2)$内

(A) 有极值点，无零点　　(B) 无极值点，有零点

(C) 有极值点, 有零点　　　　　　　(D) 无极值点, 无零点

【解析】由题意可知，$f(x)$ 是一个凸函数，即 $f''(x)<0$，且在点 $(1,1)$ 处的曲率

$\rho=\dfrac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，而 $f'(1)=-1$，由此可得，$f''(1)=-2$

在 $[1,2]$ 上，$f'(x)\le f'(1)=-1<0$，即 $f(x)$ 单调减少，没有极值点.

对于 $f(2)-f(1)=f'(\zeta)<-1$ ，$\zeta\in(1,2)$，（拉格朗日中值定理）

$\therefore$ $f(2)<0$ 而 $f(1)=1>0$

由零点定理知，在 $[1,2]$ 上，$f(x)$ 有零点.　故应选（B）.

(7) 设 A, B 均为 2 阶矩阵，A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵，若 $|A|=2, |B|=3$，则分块矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为

(A) $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$.　　　　(B) $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$.　　　　(D) $\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$.

【解析】根据 $CC^*=|C|E$ 若 $C^*=|C|C^{-1}, C^{-1}=\dfrac{1}{|C|}C^*$

分块矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ 的行列式 $\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{2\times 2}|A||B|=2\times 3=6$ 即分块矩阵可逆

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^*=\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix}\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1}=6\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}=6\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{|B|}B^* \\ \dfrac{1}{|A|}A^* & 0 \end{pmatrix}$$

$$=6\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{3}B^* \\ \dfrac{1}{2}A^* & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2B^* \\ 3A^* & 0 \end{pmatrix}$$

（9）曲线$\begin{cases} x=\int_0^{1-t} e^{-u^2}du \\ y=t^2\ln(2-t^2) \end{cases}$在（0，0）处的切线方程为______

【解析】$\dfrac{dy}{dt}=2t\ln(2-t^2)-t^2\cdot\dfrac{2t}{2-t^2}\Big|_{t=1}=-2$

$\dfrac{dx}{dt}=e^{-(1-t)^2}\cdot(-1)\Big|_{t=1}=-1$

所以 $\dfrac{dy}{dx}=2$

所以 切线方程为$y=2x$.

（11）$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-x}\sin nxdx=$______

【解析】令$I_n=\int e^{-x}\sin nxdx=-e^{-x}\sin nx+n\int e^{-x}\cos nxdx$

$=-e^{-x}\sin nx-ne^{-x}\cos nx-n^2I_n$

所以$I_n=-\dfrac{n\cos nx+\sin nx}{n^2+1}e^{-x}+C$

即$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-x}\sin nxdx=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{n\cos nx+\sin nx}{n^2+1}e^{-x}\Big|_0^1\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{n\cos n+\sin n}{n^2+1}e^{-1}+\dfrac{n}{n^2+1}\right)$

$=0$

（12）设$y=y(x)$是由方程$xy+e^y=x+1$确定的隐函数，则$\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}=$______

【解析】对方程$xy+e^y=x+1$两边关于x求导有$y+xy'+y'e^y=1$，得$y'=\dfrac{1-y}{x+e^y}$

对$y+xy'+y'e^y=1$再次求导可得$2y'+xy''+y''e^y+(y')^2e^y=0$，

得$y''=-\dfrac{2y'+(y')^2e^y}{x+e^y}$ (*)

当$x=0$时，$y=0$，$y'_{(0)}=\dfrac{1-0}{e^0}=1$，代入(*)得

$y''(0)=-\dfrac{2y'(0)+(y'(0))^2e^0}{(0+e^0)^3}=-(2+1)=-3$

2010 年错题

(1) 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为( )

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

【解析】因为$f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$有间断点$x=0,\pm1$，又因为

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}},$$

其中$\lim\limits_{x\to0^+}x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=1,\lim\limits_{x\to0^-}=x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=-1$，所以$x=0$为跳跃间断点.

显然$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以$x=1$为连续点.

而$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=\infty$，所以$x=-1$为无穷间断点，故答案选择B.

(2) 设 y_1,y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解，若常数λ，μ使$\lambda y_1+\mu y_2$是该方程的解，$\lambda y_1-\mu y_2$是该方程对应的齐次方程的解，则( )

(A) $\lambda=\dfrac{1}{2},\mu=\dfrac{1}{2}$. (B) $\lambda=-\dfrac{1}{2},\mu=-\dfrac{1}{2}$.

(C) $\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{1}{3}$. (D) $\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{2}{3}$.

【解析】因 $\lambda y_1-\mu y_2$ 是 $y'+P(x)y=0$ 的解，故 $(\lambda y_1-\mu y_2)'+P(x)(\lambda y_1-\mu y_2)=0$，所以

$$\lambda\left[y_1'+P(x)y_1\right]-\mu\left[y_2'+p(x)y_2\right]=0.$$

而由已知 $y_1'+P(x)y_1=q(x),y_2'+P(x)y_2=q(x)$，所以

$$(\lambda-\mu)q(x)=0, \qquad ①$$

又由于一阶次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 是非齐的，由此可知 $q(x)\neq 0$，所以 $\lambda-\mu=0$。

由于 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是非齐次微分方程 $y'+P(x)y=q(x)$ 的解，所以

$$(\lambda y_1+\mu y_2)'+P(x)(\lambda y_1+\mu y_2)=q(x),$$

整理得 $$\lambda\left[y_1'+P(x)y_1\right]+\mu\left[y_2'+P(x)y_2\right]=q(x),$$

即 $(\lambda+\mu)q(x)=q(x)$，由 $q(x)\neq 0$ 可知 $\lambda+\mu=1$， ②

由①②求解得 $\lambda=\mu=\dfrac{1}{2}$，故应选(A)。

(4) 设 m,n 是正整数，则反常积分 $\int_0^1 \dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的收敛性（ ）

(A) 仅与 m 的取值有关.　　(B) 仅与 n 的取值有关.

(C) 与 m,n 取值都有关.　　(D) 与 m,n 取值都无关.

【解析】$x=0$ 与 $x=1$ 都是瑕点. 应分成

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx,$$

用比较判别法的极限形式, 对于 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$, 由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}}{\dfrac{1}{x^{\frac{1}{n}-\frac{2}{m}}}}=1$.

显然, 当 $0<\frac{1}{n}-\frac{2}{m}<1$, 则该反常积分收敛.

当 $\frac{1}{n}-\frac{2}{m}\le0$, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}$ 存在, 此时 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 实际上不是反常积分, 故收敛.

故不论 m,n 是什么正整数, $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 总收敛. 对于 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$, 取 $0<\delta<1$, 不论 m,n 是什么正整数,

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\dfrac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}}{\dfrac{1}{(1-x)^{\delta}}}=\lim_{x\to1^-}\ln^2(1-x)^{\frac{1}{m}}(1-x)^{\delta}=0,$$

所以 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 收敛, 故选(D).

(5) 设函数 $z=z(x,y)$, 由方程 $F(\frac{y}{x},\frac{z}{x})=0$ 确定, 其中 F 为可微函数, 且 $F_2'\neq0$, 则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$ (　)

(A) x.　　(B) z.　　(C) $-x$.　　(D) $-z$.

【解析】$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}=-\dfrac{F_1'\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)+F_2'\left(-\dfrac{z}{x^2}\right)}{F_2'\cdot\dfrac{1}{x}}=\dfrac{F_1'\cdot\dfrac{y}{x}+F_2'\cdot\dfrac{z}{x}}{F_2'}=\dfrac{yF_1'+zF_2'}{xF_2'}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{F_1'\cdot\dfrac{1}{x}}{F_2'\cdot\dfrac{1}{x}}=-\frac{F_1'}{F_2'},$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{yF_1'+zF_2'}{F_2'}-\frac{yF_1'}{F_2'}=\frac{F_2'\cdot z}{F_2'}=z.$$

(11) 函数 $y=\ln(1-2x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0)=$________.

【解析】由高阶导数公式可知 $\ln^{(n)}(1+x)=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$,

所以 $\ln^{(n)}(1-2x)=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1-2x)^n}\cdot(-2)^n=-2^n\dfrac{(n-1)!}{(1-2x)^n}$,

即 $y^{(n)}(0)=-2^n\dfrac{(n-1)!}{(1-2\cdot 0)^n}=-2^n(n-1)!$.

(13) 已知一个长方形的长 l 以 2 cm/s 的速率增加，宽 w 以 3 cm/s 的速率增加. 则当 $l=12\text{cm}$ ，$w=5\text{cm}$ 时，它的对角线增加的速率为________.

【解析】设 $l=x(t),w=y(t)$，由题意知，在 $t=t_0$ 时刻 $x(t_0)=12,y(t_0)=5$，且 $x'(t_0)=2$，$y'(t_0)=3$，设该对角线长为 $S(t)$，则 $S(t)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}$，所以

$$S'(t)=\frac{x(t)x'(t)+y(t)y'(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}.$$

所以

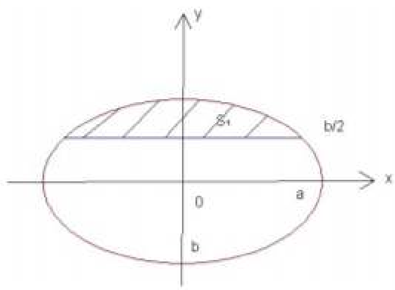
$$S'(t_0)=\frac{x(t_0)x'(t_0)+y(t_0)y'(t_0)}{\sqrt{x^2(t_0)+y^2(t_0)}}=\frac{12\cdot 2+5\cdot 3}{\sqrt{12^2+5^2}}=3.$$

(18)（本题满分 10 分）

一个高为 l 的柱体形贮油罐，底面是长轴为 2a，短轴为 2b 的椭圆. 现将贮油罐平放，当油罐中油面高度为 $\dfrac{3}{2}b$ 时（如图），计算油的质量.（长度单位为 m，质量单位为 kg，油的密度为常数 ρ kg/m³）

(18)【解析】油罐放平，截面如图建立坐标系之后，边界椭圆的方程为：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



阴影部分的面积

$$S=\int_{-b}^{\frac{b}{2}}2xdy=\frac{2a}{b}\int_{-b}^{\frac{b}{2}}\sqrt{b^2-y^2}dy$$

令 $y = b\sin t, y = -b$ 时 $t = -\dfrac{\pi}{2}; y = \dfrac{b}{2}$ 时 $t = \dfrac{\pi}{6}$.

$$S = 2ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t dt = 2ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t)dt = (\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4})ab$$

所以油的质量 $m = (\dfrac{2}{3}\pi + \dfrac{\sqrt{3}}{4})abl\rho$.

(19)(本题满分 11 分)

设函数 $u = f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足等式 $4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 确定 a , b 的值, 使等式在变换 $\xi = x + ay, \eta = x + by$ 下化简为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$.

(19)【解析】由复合函数链式法则得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot a+b\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$=a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+(a+b)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(a\frac{\partial u}{\partial \xi}+b\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=a(a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta})+b(a\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta})$$

$$=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+b^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+2ab\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta},$$

故 $4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\dfrac{\partial u^2}{\partial x\partial y}+5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$$=(5a^2+12a+4)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+(5b^2+12b+4)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\left[12(a+b)+10ab+8\right]\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0,$$

所以
$$\begin{cases}5a^2+12a+4=0\\5b^2+12b+4=0\\12(a+b)+10ab+8\neq 0\end{cases},$$

则 $a=-\dfrac{2}{5}$ 或 -2，$b=-\dfrac{2}{5}$ 或 -2. 又因为当 (a,b) 为 $(-2,-2),(-\dfrac{2}{5},-\dfrac{2}{5})$ 时方程(3)不满足，所以当 (a,b) 为 $(-\dfrac{2}{5},-2)$，$(-2,-\dfrac{2}{5})$ 满足题意.

2011 年错题

(3) 函数 $f(x)=\ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的驻点个数为（　　）

(A) 0 .　　(B) 1 .　　(C) 2 .　　(D) 3 .

【解析】$f(x)=\ln|x-1|+\ln|x-2|+\ln|x-3|$

$$f'(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}$$

$$=\frac{3x^2-12x+11}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

令 $f'(x)=0$，得 $x_{1,2}=\dfrac{6\pm\sqrt{3}}{3}$，故 $f(x)$ 有两个不同的驻点.

(5) 设函数 $f(x),g(x)$ 均有二阶连续导数，满足 $f(0)>0,g(0)<0,$ 且 $f'(0)=g'(0)=0$，则函数 $z=f(x)g(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是（　　）

(A) $f''(0)<0,g''(0)>0.$　　(B) $f''(0)<0,g''(0)<0.$

(C) $f''(0)>0,g''(0)>0.$　　(D) $f''(0)>0,g''(0)<0.$

【解析】由题意有 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(x)g(y)$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f(x)g'(y)$

所以，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=f'(0)g(0)=0$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}=f(0)g'(0)=0$，即 $(0,0)$ 点是可能的极值点.

又因为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(x)g(y)$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'(x)g'(y)$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=g''(y)f(x)$，

所以，$A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}|_{(0,0)}=f''(0)\cdot g(0)$，$B=\dfrac{\alpha^2 z}{\partial x\partial y}|_{(0,0)}=f'(0)\cdot g'(0)=0$，

$C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}|_{(0,0)}=f(0)\cdot g''(0)$，

根据题意由 $(0,0)$ 为极小值点，可得 $AC-B^2=A\cdot C>0,$ 且 $A=f''(0)\cdot g(0)>0$，所以有 $C=f(0)\cdot g''(0)>0.$ 由题意 $f(0)>0,g(0)<0$，所以 $f''(0)<0,g''(0)>0$，故选(A).

(12) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x>0,\\ 0, x\le 0,\end{cases}$ $\lambda>0,$ 则 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=$ ________ .

【解析】原式$=\int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx=-\int_0^{+\infty} xde^{-\lambda x}$

$$=-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{\lambda x}}+0-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\lambda e^{\lambda x}}-\frac{1}{\lambda}\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{\lambda x}}-e^0\right)=\frac{1}{\lambda}.$$

（13）设平面区域 D 由直线 $y=x$, 圆 $x^2+y^2=2y$ 及 y 轴围成，则二重积分 $\iint\limits_D xyd\sigma=$ _____

【解析】原式$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2\sin\theta} r\cos\theta\cdot r\sin\theta rdr=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos\theta\cdot\sin\theta d\theta\int_0^{2\sin\theta} r^3dr$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot\frac{1}{4}\cdot16\sin^4\theta d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}4\cos\theta\cdot\sin^5\theta d\theta=4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta d\sin\theta$$

$$=\frac{4}{6}\sin^6\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{7}{12}.$$

（18）（本题满分 10 分）

设函数 $y(x)$ 具有二阶导数，且曲线 $l: y=y(x)$ 与直线 $y=x$ 相切于原点，记 α 为曲线 l 在点 (x,y) 处切线的倾角，若 $\frac{d\alpha}{dx}=\frac{dy}{dx}$, 求 $y(x)$ 的表达式．

【解析】由题意可知当 $x=0$ 时，$y=0$，$y'(0)=1$，由导数的几何意义得 $y'=\tan\alpha$，

即 $\alpha=\arctan y'$，由题意 $\frac{d}{dx}(\arctan y')=\frac{dy}{dx}$，即 $\frac{y''}{1+y'^2}=y'$．

令 $y'=p$，$y''=p'$，则 $\frac{p'}{1+p^2}=p$，$\int\frac{dp}{p^3+p}=\int dx$，即

$\int\frac{dp}{p}-\int\frac{p}{p^2+1}dp=\int dx$，$\ln|p|-\frac{1}{2}\ln(p^2+1)=x+c_1$，即 $p^2=\frac{1}{ce^{-2x}-1}$．

当 $x=0$，$p=1$，代入得 $c=2$，所以 $y'=\frac{1}{\sqrt{2e^{-2x}-1}}$．

则 $y(x)-y(0)=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{2e^{-2t}-1}}=\int_0^x\frac{e^tdt}{\sqrt{2-e^{2t}}}$

$$=\int_0^x\frac{d\left(\frac{e^t}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{1-(\frac{e^t}{\sqrt{2}})^2}}=\arcsin\frac{e^t}{\sqrt{2}}\Big|_0^x=\arcsin\frac{e^x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}.$$

又因为 $y(0)=0$，所以 $y(x)=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}e^x-\frac{\pi}{4}$．

2012 年错题

(3) 设$a_n>0\ (n=1,2,3\cdots)$，$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$，则数列$\{S_n\}$有界是数列$\{a_n\}$收敛的 ( )

(A) 充分必要条件 (B) 充分非必要条件

(C) 必要非充分条件 (D) 非充分也非必要

(6) 设区域D由曲线$y=\sin x, x=\pm\frac{\pi}{2}, y=1$围成，则$\iint\limits_D (x^5y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ( )

(A) π (B) 2 (C) -2 (D) $-\pi$

【解析】: 由二重积分的区域对称性，

$$\iint (x^5y-1)dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{\sin x}^{1}(x^5y-1)dy=-\pi$$

(18)（本题满分 10 分）

计算二重积分$\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$，其中区域$D$为曲线$r=1+\cos\theta\,(0\le\theta\le\pi)$与极轴围成.

【解析】:
$$\iint\limits_D xyd\sigma=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{1+\cos\theta}r\cos\theta\cdot r\sin\theta\cdot rdr$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot(1+\cos\theta)^4d\theta$$
$$=16\int_0^{\pi}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1)\cos^8\frac{\theta}{2}d\frac{\theta}{2}$$
$$=32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos^{11}tdt-16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos^9tdt$$
$$=\frac{8}{3}-\frac{8}{5}$$
$$=\frac{16}{15}$$

(21)（本题满分 10 分）

(I) 证明方程$x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$ ($n>1$的整数)，在区间$\left(\frac{1}{2},1\right)$内有且仅有一个实根；

(II) 记(I)中的实根为x_n，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求此极限.

【解析】：(I) 由题意得：令 $f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$，则 $f(1)>0$，再由

$f(\frac{1}{2})=\dfrac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}}-1=-(\frac{1}{2})^n<0$，由零点定理得在 $(\frac{1}{2},1)$ 肯定有解 x_0，假设在此区间还有另外一根 x_1，

所以 $x_0^n+x_0^{n-1}+\cdots+x_0-1=x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n-1$，由归纳法得到 $x_1=x_0$，即唯一性得证

（2）假设根为 x_n，即 $f(x_n)=x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n-1=0$，所以 $f(x_n)=\dfrac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n}-1=0,(\frac{1}{2}<x_n<1)$，

由于 $x_{n+1}^{n+1}+x_{n+1}^n+\cdots+x_{n+1}-1=0$，可知 $x_{n+1}^n+x_{n+1}^{n-1}+\cdots+x_{n+1}-1<0$，由于 $x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n-1=0$，可知 $x_{n+1}<x_n$。又由于 $\frac{1}{2}<x_n<1$，也即 $\{x_n\}$ 是单调的。则由单调有界收敛定理可知 $\{x_n\}$ 收敛，假设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，可知 $a<x_2<x_1=1$。

当 $n\to\infty$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n}-1=\dfrac{a}{1-a_n}-1=0$，得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{2}$

(23)（本题满分 11 分）

已知 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^T(A^TA)x$ 的秩为 2，

(I) 求实数 a 的值；

(II) 求利用正交变换 $x=Qy$ 化 f 为标准形.

【解析】：1）由$r(A^TA)=r(A)=2$可得，

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & a\end{vmatrix}=a+1=0\Rightarrow a=-1$$

2）$f=x^TA^TAx=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$

$=2x_1^2+2x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2+4x_2x_3$

则矩阵$B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}$

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & -2\\ 0 & \lambda-2 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6)=0$$

解得B矩阵的特征值为：$\lambda_1=0;\lambda_2=2;\lambda_3=6$

对于$\lambda_1=0$,解$(\lambda_1E-B)X=0$得对应的特征向量为：$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$

对于$\lambda_2=2$,解$(\lambda_2E-B)X=0$得对应的特征向量为：$\eta_2=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$

对于$\lambda_3=6$,解$(\lambda_3E-B)X=0$得对应的特征向量为：$\eta_3=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$

将η_1,η_2,η_3单位化可得：

$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$

$Q=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

2013 年错题

4．设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}},1<x<e\\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x},x\ge e\end{cases}$ **，且反常积分** $\int^{+\infty}f(x)dx$ **收敛，则（ ）**

（A）$\alpha<-2$　　（B）$a>2$　　（C）$-2<a<0$　　（D）$0<\alpha<2$

【解析】$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1<x<e\\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}, & x\ge e\end{cases}$

因为 $\int_1^{+\infty}f(x)dx=\int_1^e f(x)dx+\int_e^{+\infty}f(x)dx$，

当 $1<x<e$ 时，$\int_1^e f(x)dx=\int_1^e\frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}dx=\lim\limits_{\varepsilon\to1+}\int_\varepsilon^e\frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}dx=\lim\limits_{\varepsilon\to1+}[\frac{1}{2-\alpha}\frac{1}{(\varepsilon-1)^{\alpha-2}}]-\frac{1}{2-\alpha}\frac{1}{(e-1)^{\alpha-2}}$，

要使 $\lim\limits_{\varepsilon\to1+}[\frac{1}{2-\alpha}\frac{1}{(\varepsilon-1)^{\alpha-2}}]$ 存在，需满足 $\alpha-2<0$；

当 $x\ge e$ 时，$\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}dx=\int_e^{+\infty}\frac{d\ln x}{\ln^{\alpha+1}x}=\lim\limits_{\lambda\to\infty}(-\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\ln^\alpha\lambda})+\frac{1}{\alpha}$，

要使 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}(-\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\ln^\alpha\lambda})$ 存在，需满足 $\alpha>0$；所以 $0<\alpha<2$。

5．设函数 $z=\frac{y}{x}f(xy)$**，其中** f **可微，则** $\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=$ **（　　）**

（A）$2yf'(xy)$　（B）$-2yf'(xy)$（C）$\frac{2}{x}f(xy)$　（D）$-\frac{2}{x}f(xy)$

【解析】已知 $z=\frac{y}{x}f(xy)$，所以 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}f(xy)+\frac{y^2}{x}f'(xy)$，

所以 $\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=[-\frac{1}{x}f(xy)+yf'(xy)]+(\frac{1}{x}f(xy)+yf'(xy))=2yf'(xy)$。

8．矩阵 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ **与矩阵** $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ **相似的充分必要条件是**

（A）$a=0,b=2$　　（B）$a=0$，b **为任意常数**

（C）$a=2,b=0$　　（D）$a=2$，b **为任意常数**

【解析】由于$\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$为实对称矩阵，故一定可以相似对角化，从而$\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$相似的充分必要条件为$\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$的特征值为$2,b,0$。

又$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-a&-1\\-a&\lambda-b&-a\\-1&-a&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda[(\lambda-b)(\lambda-2)-2a^2]$，从而$a=0,b$为任意常数。

11．设封闭曲线 L 的极坐标方程为$r=\cos 3\theta\left(-\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{6}\right)$ t为参数，则 L 所围成的平面图形的面积为____________.

【解析】所围图形的面积是$S=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos 6\theta}{2}d\theta=\frac{\pi}{12}$

14．设$A=(a_{ij})$是三阶非零矩阵，$|A|$为其行列式，A_{ij}为元素a_{ij}的代数余子式，且满足$A_{ij}+a_{ij}=0(i,j=1,2,3)$，则$|A|$=____________.

【详解】由条件$A_{ij}+a_{ij}=0(i,j=1,2,3)$可知$A+A^{*T}=0$，其中$A^*$为 A 的伴随矩阵，从而可知

$|A^*|=|A^{*T}|=|A|^{3-1}=-|A|$，所以$|A|$可能为$-1$或 0.

但由结论$r(A^*)=\begin{cases}n,r(A)=n\\1,r(A)=n-1\\0,r(A)<n-1\end{cases}$可知，$A+A^{*T}=0$可知$r(A)=r(A^*)$,伴随矩阵的秩只能为 3，所以

$|A|=-1.$

【解析】

由$a_{ij}+A_{ij}=0$可知，$A^T=-A^*$

$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}$

$=-\sum_{j=1}^{3}a_{ij}^2=-\sum_{i=1}^{3}a_{ij}^2<0$

从而有$|A|=|A^T|=|-A^*|=-|A|^2$,故$|A|$=-1.

21.（本题满分 11）

设曲线 L 的方程为 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x(1\le x\le e)$.

（1）求 L 的弧长.

（2）设 D 是由曲线 L，直线 $x=1,x=e$ **及** x **轴所围成的平面图形，求 D 的形心的横坐标.**

【解析】（1）由弧长的计算公式得 L 的弧长为

$$\int_1^e\sqrt{1+\left[\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x\right)'\right]^2}dx=\int_1^e\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)^2}dx$$

$$=\int_1^e\sqrt{1+\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4x}-\frac{1}{2}}dx$$

$$=\int_1^e\sqrt{\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)^2}dx$$

$$=\frac{e^2+1}{4}$$

（2）由形心的计算公式可得，D 的形心的横坐标为

$$\frac{\int_1^e x\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x\right)dx}{\int_1^e\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x\right)dx}=\frac{3\left(e^4-2e^2-3\right)}{4\left(e^3-7\right)}$$

23（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$. **记** $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$.

（1）证明二次型 f **对应的矩阵为** $2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$；

（2）若 α,β **正交且为单位向量，证明** f **在正交变换下的标准形为** $2y_1^2+y_2^2$.

【详解】证明：(1)

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3)&=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2\\
&=2(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\\
&=(x_1,x_2,x_3)(2\alpha\alpha^T)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+(x_1,x_2,x_3)(\beta\beta^T)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\\
&=(x_1,x_2,x_3)(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

所以二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$。

证明（2）设 $A=2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$，由于 $|\alpha|=1,\beta^T\alpha=0$

则 $A\alpha=(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\alpha=2\alpha|\alpha|^2+\beta\beta^T\alpha=2\alpha$，所以 α 为矩阵对应特征值 $\lambda_1=2$ 的特征向量；

$A\beta=(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\beta=2\alpha\alpha^T\beta+\beta|\beta|^2=\beta$，所以 β 为矩阵对应特征值 $\lambda_2=1$ 的特征向量；

而矩阵 A 的秩 $r(A)=r(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\le r(2\alpha\alpha^T)+r(\beta\beta^T)=2$，所以 $\lambda_3=0$ 也是矩阵的一个特征值.

故 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$。

2014 年错题

5、设函数 $f(x)=\arctan x$，若 $f(x)=xf'(\xi)$，则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\xi^2}{x^2}=$ （ ）

（A）1　　（B）$\frac{2}{3}$　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）$\frac{1}{3}$

$\frac{f(x)}{x}=\frac{\arctan x}{x}=\frac{1}{1+\xi^2}\Rightarrow\xi^2=\frac{x-\arctan x}{\arctan x}$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\xi^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\arctan x}{x^2\cdot\arctan x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\arctan x}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{3x^2(1+x^2)}=\frac{1}{3}$.

6、设函数$u(x,y)$在有界闭区域D上连续，在D的内部具有2阶连续偏导数，且满足$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0$及$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，则　　　　　　　　　　　　（　）

（A）$u(x,y)$的最大值和最小值都在D的边界上取得

（B）$u(x,y)$的最大值和最小值都在D的内部取得

（C）$u(x,y)$的最大值在D的内部取得，$u(x,y)$的最小值在D的边界上取得

（D）$u(x,y)$的最小值在D的内部取得，$u(x,y)$的最大值在D的边界上取得

排除法当$B=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}>0$，因为$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，故$A=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$与$B=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$异号。

$AC-B^2<0$，函数$u(x,y)$在区域D内没有极值。

连续函数在有界闭区域内有最大值和最小值，故最大值和最小值在D的边界点取到。

11、设$z=z(x,y)$是由方程$e^{2yz}+x^2+y^2+z=\dfrac{7}{4}$确定的函数，则$dz|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=$________.

11、解：方程两边对x求偏导：

$e^{2yz}(2y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x})+2x+\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$

代入$x=\dfrac{1}{2},y=\dfrac{1}{2}$解得：

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{e^{z(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}+1}$

两边对y求偏导

$e^{2yz}(2z+2y\dfrac{\partial z}{\partial y})+2y+\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$

代入$x=\dfrac{1}{2},y=\dfrac{1}{2}$解得：

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1-z(\frac{1}{2},\frac{1}{2})e^{z(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}}{e^{z(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}+1}$

12、曲线L的极坐标方程是$r=\theta$，则L在点$(r,\theta)=(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$处的切线的直角坐标方程是________.

$\begin{cases}x=r\cos\theta=\theta\cos\theta\\ y=r\sin\theta=\theta\sin\theta\end{cases}$

则$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\dfrac{\sin\theta+\theta\cos\theta}{\cos\theta-\theta\sin\theta}$

$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\dfrac{1+\frac{\pi}{2}\cdot 0}{0-\frac{\pi}{2}\cdot 1}=-\dfrac{2}{\pi}$

当$\theta=\dfrac{\pi}{2}$时，$\begin{cases}x=\theta\cos\theta=0\\ y=\theta\sin\theta=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

则切线方程为

$(y-\dfrac{\pi}{2})=-\dfrac{2}{\pi}(x-0)$

化简为

$y=-\dfrac{2}{\pi}x+\dfrac{\pi}{2}$

14、设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1，则 a 的取值范围是__________.

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2a\,x_1x_3+4\,x_2x_3$

$\qquad\qquad\quad=(x_1+a\,x_3)^2-(x_2-2\,x_3)^2+4\,x_3^2-a^2\,x_3^2$

$\because$ f的负惯性指数为1

$\therefore$ $4-a^2\geq 0$

$\therefore$ $-2\leq a\leq 2$

19、（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 单调增加，$0\leq g(x)\leq 1$.

证明：（Ⅰ）(I) $0\leq\int_a^x g(t)dt\leq x-a$，$x\in[a,b]$；

（II） $\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx\leq\int_a^b f(x)g(x)dx$

证明：1）因为 $0\leq g(x)\leq 1$，所以有定积分比较定理可知，$\int_a^x 0dt\leq\int_a^x g(t)dt\leq\int_a^x 1dt$，即

$0\leq\int_a^x g(t)dt\leq x-a$。

2）令

$F(x)=\int_a^x f(t)g(t)dt-\int_a^{a+\int_a^x g(u)du} f(t)dt$

$F(a)=0$

$F'(x)=f(x)g(x)-f[a+\int_a^x g(t)dt]g(x)$

$=g(x)[f(x)-f[a+\int_a^x g(t)dt]]$

由1）可知 $\int_a^x g(t)dt\leq x-a$，

所以 $a+\int_a^x g(t)dt\leq x$，

由 $f(x)$ 是单调递增，可知

$f(x)-f[a+\int_a^x g(t)dt]\geq 0$

由因为 $0\leq g(x)\leq 1$，所以 $F'(x)\geq 0$，$F(x)$ 单调递增，所以 $F(b)\geq F(a)=0$，得证。

21、（本题满分 11 分）

已知函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$，且 $f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y$. 求曲线 $f(x,y)=0$ 所围图形绕直线 $y=-1$ 旋转所成旋转体的体积.

因 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$ 则

$f(x,y)=y^2+2y+\varphi(x)$

$\begin{cases} f(y,y)=(y+1)^2-(2-y) \\ f(y,y)=y^2+2y+\varphi(y) \end{cases}$

则 $\varphi(x)=x-1$

由 $f(x,y)=y^2+2y+x-1$

$f(x,y)=0\Rightarrow x=-y^2-2y+1$

$V=\int_0^2\pi(f(x)+1)^2dx=\int_0^2\pi[f^2(x)+2f(x)+1]dx=\int_0^2\pi(2-x)dx=\pi\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2=2\pi$