Chapitre I

La théorie des graphes

1 Introduction

L'histoire de la théorie des graphes débute avec les travaux d'Euler au XVIIIe siècle et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Königsberg, les habitants de Königsberg se demandaient s'il était possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et de revenir à leur point de départ, la marche du cavalier sur l'échiquier ou le problème de coloriage de cartes.

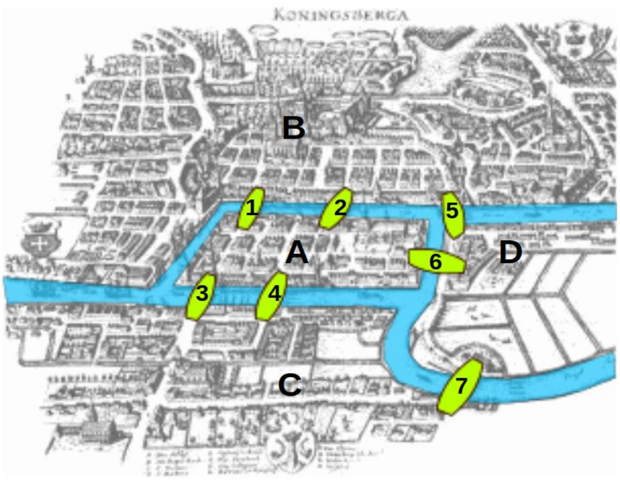


Figure 1.1: Problème des sept ponts de Königsberg.

Ce problème peut être modélisé par un graphe non orienté où les points seraient les surfaces terrestres (zones hors de l'eau) et les liens seraient les ponts. La représentation graphique de ce graphe G_1 est donné à la figure 1.2

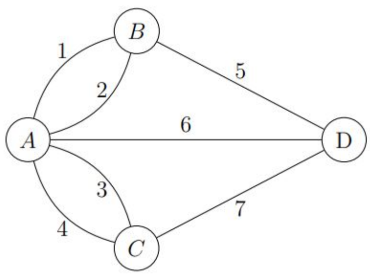


Figure 1.2: Graphe G_1 modélisant le problème des sept ponts de Königsberg.

La théorie des graphes s'est alors développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales. Depuis le début du XXe siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux de König, Menger, Cayley puis de Berge et d'Erdös.
De manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un ensemble

complexe en exprimant les relations entre ses éléments : réseau de communication, réseaux routiers, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques,. . .
Les graphes constituent donc une méthode de pensée qui permet de modéliser une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude de sommets et d'arcs.
Les derniers travaux en théorie des graphes sont souvent effectués par des informaticiens, du fait de l'importance qu'y revêt l'aspect algorithmique.

2 Graphes non orientés

Définition I.1
Un graphe non orienté $G = (X, U)$ est déterminé par deux ensembles X et U, avec :

- *X : ensemble des points appelés sommets,*
- *U : ensemble des liens non orientés entre les paires non ordonnées de sommets appelés arêtes.*

Exemple I.1
Le problème des sept ponts de Königsberg a été modélisé précédemment par un graphe non orienté $G_1 = (X_1, U_1)$ où :

- *l'ensemble des sommets $X_1 = \{A, B, C, D\}$ représente l'ensemble des surfaces terrestres,*
- *l'ensemble des arêtes $U_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ représente l'ensemble des sept ponts.*

Définition I.2
Si $N = |X|$, on dit que N est l'ordre du graphe.

Exemple I.2
Le graphe G_1 est d'ordre 4.

Définition I.3
Une arête u qui relie les deux sommets x et y est une paire non ordonnée de sommets et elle peut s'écrire donc u = (x, y). On dit que :

- *x et y sont les deux extrémités de u,*
- *u est incidente à x et à y,*
- *x et y sont adjacents.*

Deux arêtes sont dites parallèles si elles possèdent les mêmes extrémités.

Exemple I.3
L'arête 6 du graphe G_1 précédent peut également être écrite sous la forme (A, B). A et B sont donc les extrémités de cette arête qui est elle même incidente à ces deux sommets. A et B sont adjacents

Dans ce même graphe, les arêtes 1 et 2 sont parallèles car elles possèdent les mêmes extrémités A et B.

Remarque I.1
L'ensemble des sommets adjacents à un sommet x est noté par $\Gamma(x)$.

Exemple I.4

Dans le graphe précédant G_1, nous avons : $\Gamma(A) = \{B, C, D\}, \Gamma(B) = \{A, D\}, \Gamma(C) = \{A, D\}, \Gamma(D) = \{A, B, C\}$.

Définition I.4

Une arête dont les deux extrémités sont identiques est appelée boucle

Exemple I.5

La figure 2.1 représente un graphe G_2 comprenant un seul sommet et une boucle sur ce sommet.

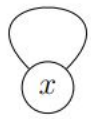


Figure 2.1: Graphe G_2 comprenant un sommet et une boucle.

Définition I.5

Le degré d'un sommet x est le nombre d'arêtes incidentes à x, avec les boucles comptées deux fois. On le note $d(x)$.

Exemple I.6

Dans le graphe G_1, $d(A) = 5$. Dans le graphe $G_2, d(x) = 2$.

Définition I.6

Un graphe non orienté simple est un graphe sans boucle et sans arêtes parallèles.

Exemple I.7

- *Le graphe précédant G_1 est un graphe qui est non simple, car il existe deux arêtes parallèles entre les sommets A et B, et aussi deux arêtes parallèles entre les sommets A et C.*
- *Le graphe précédant G_2 est également un graphe qui est non simple, car il comporte une boucle.*
- *Le graphe représentant le réseau social Facebook où les sommets sont les comptes des utilisateurs et les arêtes sont les liens d'amitié entre les comptes est un graphe simple car un compte ne peut pas être ami avec lui-même, et deux comptes ne peuvent pas être amis plus d'une seule fois.*

Définition I.7

Un graphe non orienté complet est un graphe simple où il existe une arête entre chaque paire de sommets. Un graphe non orienté complet d'ordre N est noté par K_N .

Exemple I.8

La figure 2.2 représente le graphe non orienté complet G_3 d'ordre 4, c.à.d. K_4.

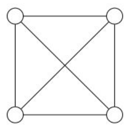


Figure 2.2: Graphe $G_3 = K_4$.

Définition I.8

- *Une chaîne est une séquence finie et alternée de sommets et d'arêtes, débutant et finissant par deux sommets appelés respectivement extrémité initiale et extrémité terminale, telle que chaque arête est incidente avec les sommets qui l'encadrent dans la séquence.*
- *La longueur d'une chaîne est égale au nombre d'arêtes qui la composent, en comptant les répétitions.*
- *Une chaîne élémentaire est une chaîne qui ne parcourt pas plus d'une fois le même sommet.*
- *Une chaîne simple est une chaîne qui ne parcourt pas plus d'une fois la même arête*

Remarque I.2

- *L'écriture complète d'une chaîne se fait en listant de manière ordonnée les sommets et les arêtes qui la composent.*
- *Une chaîne peut également être décrite uniquement par les arêtes qui la composent.*
- *De plus, dans le cas de graphes sans arêtes parallèles, une chaîne peut aussi être décrite uniquement par les sommets qui la composent.*

Exemple I.9

Dans le graphe précédant G_1, nous avons par exemple la chaîne $(A, 1, B, 5, D, 7, C)$, qui est de longueur 3. Cette chaîne est simple et élémentaire.
Son extrémité initiale est le sommet A et son extrémité terminale est le sommet C.
Cette même chaîne peut aussi être décrite par ses arêtes uniquement comme suit : $(1, 5, 7)$.

Par contre, puisque G_1 n'est pas simple, cette chaîne ne peut pas être décrite uniquement par ses sommets, car en écrivant (A, B, D), on ne saurait pas s'il s'agit de la chaîne (A, 1, B, 5, D, 7, C) ou bien (A, 2, B, 5, D, 7, C).

Définition I.9

Un cycle est une chaîne simple dont les extrémités sont identiques.
La longueur d'un cycle est égale au nombre d'arêtes qui le composent.

Exemple I.10

Dans le graphe G_1, nous avons par exemple le cycle $(A, 1, B, 5, D, 7, C, 4, A)$ qui est de longueur 4.

3 Graphes orientés

Les mêmes notions que pour les graphes non orientés sont reprises et adaptées au cas orienté dans cette section.

Définition I.10
Un graphe orienté $G = (X, U)$ est déterminé par les deux ensembles X et U, avec :

- *X : ensemble de points appelés sommets,*
- *U : ensemble de liens orientés entre des couples ordonnés de sommets appelés arcs.*

$N = |X|$ est l'ordre du graphe. Un arc u qui relie le sommet x au sommet y est un couple ordonné qui peut donc s'écrire $u = (x, y)$. On dit que :

- *x est l'extrémité initiale de u,*
- *y est l'extrémité terminale de u,*
- *y est successeur de x et x est prédécesseur de y,*
- *u est incident à x et à y.*

Deux arcs ayant la même extrémité initiale et la même extrémité terminale sont dits parallèles.
Un arc dont les deux extrémités sont identiques est appelé boucle

Remarque I.3
Un arc est une arête à laquelle on précise un sens/une orientation

Exemple I.11
Soit le graphe orienté $G_4 = (X_4, U_4)$ où l'ensemble des sommets est $X_4 = (1, 2, 3)$, l'ensemble des arcs est $U_4 = (a, b, c, d, e)$, et la représentation graphique est donnée à la figure 3.1.

G_4 est d'ordre 3 étant donné qu'il comporte 3 sommets.
L'arc $a = (1, 2)$ possède le sommet 1 comme extrémité initiale et le sommet 2 comme extrémité

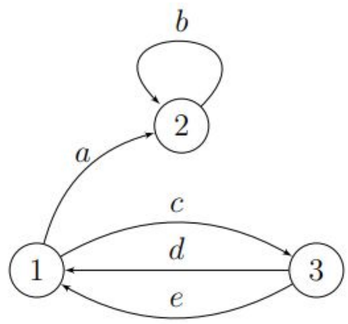


Figure 3.1: Graphe orienté G_4

terminale. Le sommet 2 est donc successeur du sommet 1 et le sommet 1 est prédécesseur du sommet 2.
Les deux arcs d et e sont des arcs parallèles puisqu'ils ont la même extrémité initiale 3 et la même extrémité terminale 1. Les arcs c et d ne le sont pas.
L'arc b est une boucle.

Remarque I.4
L'ensemble des successeurs d'un sommet x est noté par $\Gamma(x)$ ou bien $\Gamma^+(x)$ alors que l'ensemble des ses prédécesseurs est noté par $\Gamma^-(x)$.

Exemple I.12
Dans le graphe G_4, nous avons :

- $\Gamma^+(1) = 2, 3$ *et* $\Gamma^-(1) = 3$
- $\Gamma^+(2) = 2$ *et* $\Gamma^-(2) = 1, 2$
- $\Gamma^+(3) = 1$ *et* $\Gamma^-(3) = 1$

Définition I.11
Dans un graphe orienté :

Le demi-degré extérieur d'un sommet x est le nombre d'arcs ayant x comme extrémité initiale. Il est noté $d^+(x)$*,*

Le demi-degré intérieur d'un sommet x est le nombre d'arcs ayant x comme extrémité terminale. Il est noté $d^-(x)$

Le degré d'un sommet x est le nombre d'arcs incidents à x, avec les boucles comptées deux fois. Il est noté $d(x)$*. Nous avons* $d(x) = d^+(x) + d^-(x)$*.*

Exemple I.13
Dans le graphe précédant $G_4, d^+(2) = 1, d^-(2) = 2, d(2) = 3$*.*

Définition I.12
Un graphe orienté simple est un graphe sans boucle et sans arcs parallèles.
Un graphe orienté complet est un graphe orienté simple où il existe un arc entre chaque couple ordonné de sommets.

Exemple I.14

- *Le graphe précédant* G_4 *est un graphe orienté non simple car il comporte une boucle, de plus, il y a deux arcs parallèles d et e. Si les arcs b et e étaient retirés, alors le graphe obtenu serait simple.*
- *Le graphe* G_5 *représenté à la figure 3.2 est un graphe orienté complet d'ordre 4.*

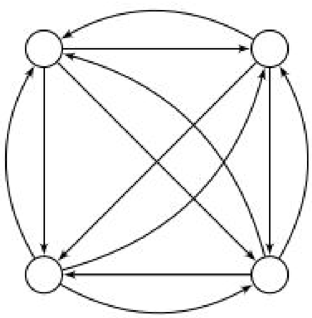


Figure 3.2: Graphe orienté complet G_5

Définition I.13

- *Un chemin est une chaîne où tous les arcs sont parcourus dans le bon sens.*
- *La longueur d'un chemin est égale au nombre d'arcs qui le composent, en comptant les répétitions.*
- *Un chemin élémentaire est un chemin qui ne parcourt pas plus d'une fois le même sommet.*
- *Un chemin simple est un chemin qui ne parcourt pas plus d'une fois le même arc.*

Exemple I.15
Dans le graphe G_4 *:*

- *Nous avons le chemin simple (1, c, 3, d, 1, a, 2, b, 2). Sa longueur est égale à 4. Ce chemin est non élémentaire car le sommet 2 est parcouru deux fois.*
- *(2, a, 1, c, 3) est une chaîne mais pas un chemin car l'arc a est parcouru dans le mauvais sens.*
- *(1, c, 3, d, 1, c, 3) est un chemin non simple car l'arc c est parcouru 2 fois.*

Définition I.14

- *Un circuit est un chemin dont les deux extrémités sont identiques.*
- *La longueur d'un circuit est égale au nombre d'arcs qui le composent, en comptant les répétitions.*

Exemple I.16

Dans le graphe G_4 :

- *(1, c, 3, d, 1) est un circuit de longueur 2.*
- *(2, b, 2, b, 2) est également un circuit de longueur 2.*

3.1 Lemme des poignées de main

Lemme I.1

Dans un graphe $G = (X, U)$ nous avons toujours $\sum_{x \in X} d(x) = 2 \times |U|$.

Preuve

Chaque arête/arc $u \in U$ est compté(e) deux fois dans la somme $\sum_{x \in X} d(x)$: une fois par extrémité

Exemple I.17

Cette propriété est valide pour tout graphe. À titre d'exemple, dans le graphe G_1, $\sum_{x \in X} d(x) = d(A) + d(B) + d(C) + d(D) = 5 + 3 + 3 + 3 = 14$ et le nombre d'arêtes du graphe est $|U| = 7$. La propriété est donc bien vérifiée

Théorème I.1

Dans un graphe, il y a toujours un nombre pair de sommet à degré impair.

Exemple I.18

Dans le graphe G_1 il y a exactement 4 sommets de degré impair. Il y a donc bien un nombre pair de sommets à degré impair.

3.2 Sous-graphe, graphe partiel et graphe complémentaire

Définition I.15

Un sous-graphe du graphe $G = (X, U)$ est un graphe $G' = (X', U')$ tel que $X' \subset X$ et $U' \subset U$.
Un graphe partiel du graphe $G = (X, U)$ est un graphe $G' = (X, U')$ tel que $U' \subset U$.
Le graphe complémentaire du graphe simple $G = (X, U)$ est un graphe simple $\bar{G} = (X, \bar{U})$ tel que $(x, y) \in \bar{U}$ si et seulement si $(x, y) \notin U$.

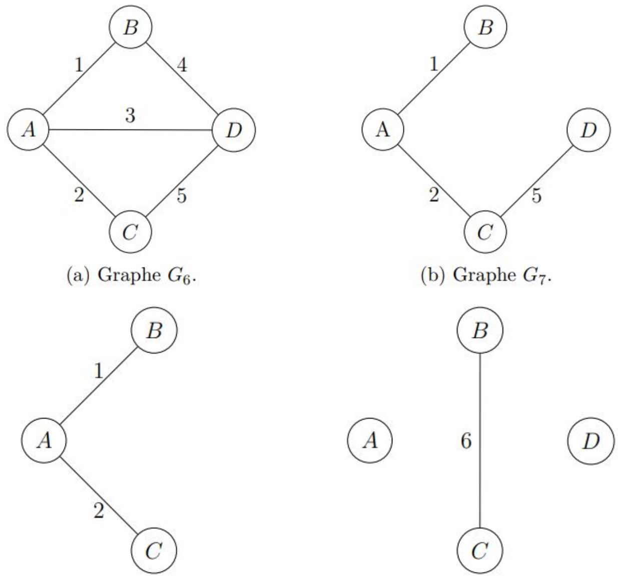
Exemple I.19

Soient les graphes G_6, G_7, G_8 et G_9 de la figure 3.3. Nous avons :

- *Le graphe G_7 est un graphe partiel du graphe G_6. Il est également sous-graphe du graphe G_6.*

- *Le graphe G_8 est sous-graphe du graphe G6 ainsi que sous-graphe du graphe G_7.*

- *Le graphe G_9 est le graphe complémentaire du graphe G_6*



(a) Graphe G_6. (b) Graphe G_7.

(c) Graphe G_8. (d) Graphe G_9.

Figure 3.3: Exemples de sous-graphe, graphe partiel et graphe complémentaire

3.3 Connexité

Définition I.16

- *Un graphe non orienté $G = (X, U)$ est dit connexe s'il existe au moins une chaîne entre chaque paire de sommets distincts $x, y \in X$.*

- *Un sous-graphe est maximal par rapport à la connexité s'il n'est pas inclus dans un autre sous-graphe connexe.*

- *Une composante connexe est un sous-graphe connexe maximal .*

- *Le nombre de connexité d'un graphe est le nombre de ses composantes connexes. Il est noté p.*

- *Un sous-graphe est maximal par rapport à la connexité s'il n'est pas inclus dans un autre sous-graphe connexe*

Exemple I.20

- *Parmi les graphes de la figure 3.3, G_6, G_7 et G_8 sont des graphes connexes. Ils comportent donc une seule composante connexe et leur nombre de connexité $p = 1$.*

- *Le graphe G_9 est quant à lui non connexe, et il comporte 3 composantes connexes composées respectivement des sommets $\{A\}, \{B, C\} et \{D\}$. Son nombre de connexité $p = 3$*

Définition I.17

- *Un graphe orienté est dit fortement connexe si pour toute paire de sommets $x, y \in X$, il existe au moins un chemin de x vers y et au moins un chemin de y vers x.*

- *Une composante fortement connexe est un sous-graphe fortement connexe maximal.*

Exemple I.21

- *Le graphe orienté G_4 vu précédemment est non fortement connexe car il n'existe par exemple, aucun chemin du sommet 2 au sommet 3. G4 comporte deux composantes fortement connexe* $\{1, 3\}$ *et* $\{2\}$.

- *La modification de ce graphe en rajoutant un arc du sommet 2 au sommet 3 produirait le graphe G_{10} donné à la figure qui est un graphe fortement connexe.*

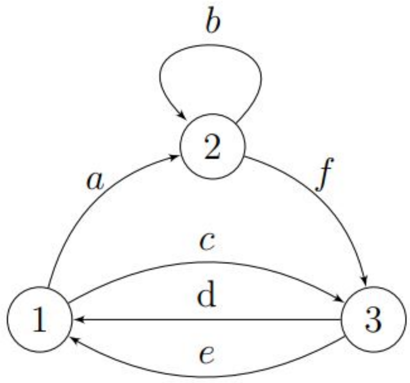


Figure 3.4: Graphe fortement connexe G_{10}.

3.4 Graphe eulérien

Définition I.18

- *Une chaîne eulérienne est une chaîne qui parcourt toutes les arêtes d'un graphe une et une seule fois.*

- *Un cycle eulérien est une chaîne eulérienne qui forme un cycle.*

Exemple I.22

Le graphe G_{11}, ci-dessous, contient la chaîne eulérienne : (a, b, d, i, e, f, h, g, c). Cette chaîne forme un cycle, c'est donc également un cycle eulérien.

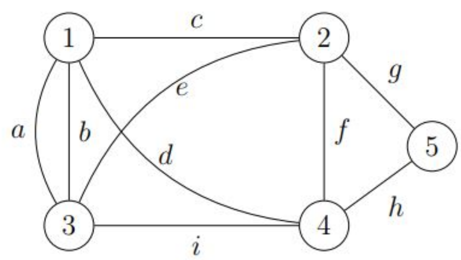


Figure 3.5: Graphe G_{11} avec cycle eulérien

Définition I.19

Un graphe semi-eulérien est un graphe qui contient une chaîne eulérienne.
Un graphe eulérien est un graphe qui contient un cycle eulérien.

Exemple I.23

Le graphe précédent G_{11} contient un cycle eulérien. Ce graphe est donc un graphe eulérien. Il est également semi-eulérien

Théorème I.2
Théorème d'Euler:

- *Un graphe connexe est semi-eulérien si et seulement s'il contient exactement 0 ou 2 sommets de degré impair.*
- *Un graphe est eulérien si et seulement s'il contient 0 sommet de degré impair.*

Exemple I.24

- *Si on vérifie le degré de tous les sommets du graphe eulérien précédent G_{11}, on peut remarquer que tous ses sommets sont bien de degré pair.*
- *Si on supprime l'arête c, on obtient un nouveau graphe avec exactement 2 sommets à degré impair. Ce nouveau graphe serait donc non eulérien mais il serait semi-eulérien.*
- *Si on revient au problème introductif de notre cours, qui est le problème des ponts de Königsberg, et qui consiste à déterminer s'il est possible de trouver un promenade qui parcourt tous les ponts de la ville une et une seule fois et qui revient au point de départ, on peut constater qu'il s'agit finalement de déterminer si le graphe correspondant, le graphe G_1, est eulérien, ou non.*
- *On peut constater que G_1 possède des sommets à degré impair (ses 4 sommets sont tous à degré impair). Ce graphe n'est donc pas eulérien. On peut donc en déduire que la promenade recherchée n'existe pas.*

3.5 Matrice d'adjacence

Définition I.20
Pour un graphe $G = (X, U)$ d'ordre N et sans arêtes/arcs parallèles, une matrice d'adjacence A est une matrice booléenne carrée de taille $N \times N$ et qui est construite de la manière suivante :

$$\forall i, j...N, a_{i,j} = \begin{cases} 1 & si\ \{x_i, x_j\} \in U \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Exemple I.25
Soit le graphe non orienté G_{12} représenté graphiquement à la figure 3.6.
La matrice d'adjacence de G_{12} est donnée comme suit :

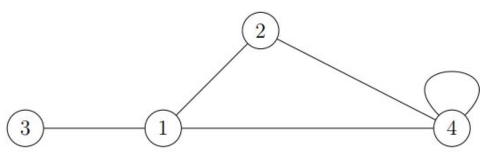


Figure 3.6: Graphe G_{12}.

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

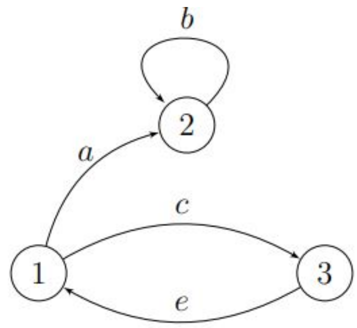


Figure 3.7: Graphe G_{13} sans arcs parallèles

Soit maintenant le graphe orienté G_{13} obtenu en retirant l'arc d du graphe G4 afin d'éliminer les arcs parallèles et dont la représentation graphique est donnée à la figure 3.7
Sa matrice d'adjacence est la suivante :

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Remarque I.5

- *Pour les graphes non orientés :*
  - *A est symétrique*
  - $\forall i \in 1...N : 2a_{ii} + \sum_{\substack{i \neq j \\ i=1...N}} a_{ij} = 2a_{ii} + \sum_{\substack{i \neq j \\ i=1...N}} a_{ji} = d(x_i)$
  - $\sum_{i=1...N} a_{ii} =$ *nombre de boucles dans le graphe*
- *Pour les graphes orientés :*
  - *A n'est pas nécessairement symétrique*
  - $\forall i \in 1...N \sum_{i=1...N} a_{ij} = d^+(x_i)$
  - $\forall i \in 1...N \sum_{i=1...N} a_{ji} = d^-(x_i)$
  - $\forall i \in 1...N \sum_{i=1...N} (a_{ji} + a_{ij}) = d(x_i)$
  - $\sum_{i=1...N} a_{ii} =$ *nombre de boucles dans G*

Exemple I.26
En ce qui concerne le graphe orienté G_{13}, on remarque que pour sa matrice d'adjacence, la somme des éléments de la ligne du sommet 1 donne bien son demi-degré extérieur $\left(\sum_{i=1...N} a_{1j} = d^+(1) = 2\right)$. *De même que la somme des éléments de la colonne du sommet 1 donne bien son demi-degré intérieur* $\left(\sum_{i=1...N} a_{j1} = d^-(1) = 1\right)$. *Le degré de ce sommet est la somme des deux valeurs précédentes.*
Le nombre de boucles de ce graphe est égal à 1 et il correspond bien à la somme des éléments de la diagonale de A.

4 Problème des plus courts chemins

Pour le problème des plus courts chemins, la notion de longueur modélisée peut représenter différentes notions : distance physique, durée de temps, coût budgétaire, etc.