



Département STPI

2ème année IC

Introduction aux Équations aux Dérivées Partielles

Étude théorique

Aude Rondepierre & Adeline Rouchon

Année 2012-2013

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappels. Équations différentielles ordinaires</b>	<b>5</b>
1.1	Equation différentielle linéaire du premier ordre	5
1.1.1	Equation homogène	5
1.1.2	Solution générale	6
1.1.3	Recherche de solution particulière	6
1.1.4	Exemples	6
1.2	Equation différentielle linéaire du second ordre	7
1.2.1	Solution de l'équation homogène	7
1.2.2	Cas particulier des EDO homogènes à coefficients constants	8
1.2.3	Recherche d'une solution particulière	8
<b>2</b>	<b>Introduction aux Équations aux Dérivées Partielles linéaires</b>	<b>11</b>
2.1	E.D.P. de type transport	11
2.1.1	Définition et exemples	11
2.1.2	Transport le long des courbes caractéristiques	13
2.1.3	Problème des conditions aux limites	15
2.2	E.D.P. linéaires du second ordre	17
2.2.1	Définitions	17
2.2.2	Éléments de classification : E.D.P. elliptiques, hyperboliques et paraboliques	18
<b>3</b>	<b>Outils pour la résolution des E.D.P. : les séries de fonctions</b>	<b>21</b>
3.1	Séries Numériques	21
3.1.1	Définitions	21
3.1.2	Nature d'une série	21
3.1.3	Condition nécessaire de convergence	22
3.1.4	Séries numériques à termes positifs	22
3.1.5	Séries à termes réels de signe quelconque	24
3.2	Séries de fonctions	24
3.3	L'espace $L^2_p(0, T_0)$	26
3.3.1	Définitions	26
3.3.2	Convergence en moyenne quadratique	27
3.3.3	Polynômes trigonométriques et meilleure approximation	27
3.3.4	Meilleure approximation	28

3.4	Séries de Fourier	28
3.4.1	Coefficients de Fourier	29
3.4.2	Séries de Fourier et premiers exemples	30
3.5	Convergence des séries de Fourier	32
3.5.1	Convergence en moyenne quadratique	32
3.5.2	Théorème de Dirichlet	33
3.5.3	Egalité de Parseval	34
<b>4</b>	<b>Quelques résolutions théoriques d'E.D.P.</b>	<b>35</b>
4.1	Préambule : modéliser des phénomènes impulsionnels	35
4.1.1	Convolution de deux fonctions et propriétés élémentaires	35
4.1.2	Impulsion de Dirac $\delta_0$	37
4.2	Equation de la chaleur	39
4.2.1	Solution fondamentale de l'équation de la chaleur	39
4.2.2	Résolution de l'équation de la chaleur par séparation des variables	42
4.3	Equations des ondes	45
4.3.1	Résolution de l'équation des cordes vibrantes par séparation des variables	46
4.3.2	Séparation des variables dans le cas 2D	48
4.4	Généralités sur la méthode de séparation des variables	49
4.4.1	Pour des conditions homogènes et sans terme source	49
4.4.2	Problèmes de Sturm-Liouville en dimension 1	50
4.4.3	La méthode de séparation des variables en présence d'un terme source	53
4.4.4	Méthode de séparation des variables avec des conditions aux limites non homogènes	54
<b>5</b>	<b>Transformée de Laplace et applications</b>	<b>55</b>
5.1	Définition de la transformée de Laplace	55
5.2	Transformée de Laplace de quelques fonctions élémentaires	56
5.3	Condition suffisante d'existence de la transformée de Laplace	57
5.4	Propriétés de la transformée de Laplace	59
5.5	Transformée de Laplace et convolution	63
5.6	Impulsion de Dirac à droite $\delta_0^+$	64
5.7	Fonction $\Gamma$	64
5.8	Résolution de problèmes grâce à la transformée de Laplace	65
5.8.1	Les équations différentielles ordinaires à coefficients constants	66
5.8.2	Original d'une fraction rationnelle	67

# Chapitre 1

## Rappels Équations différentielles ordinaires

### 1.1 Équation différentielle linéaire du premier ordre

Une équation différentielle linéaire du premier ordre est du type :

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x) \quad (1.1)$$

où les fonctions  $a$  et  $b$  sont données et s'appellent les coefficients de l'équation différentielle et la fonction  $f$  est donnée et s'appelle le second membre.

Une solution de (1.1) est une fonction  $y$  de classe  $C^1$  sur un intervalle  $I$  vérifiant (1.1) pour tout  $x \in I$ .

#### 1.1.1 Equation homogène

On appelle équation différentielle homogène associée à (1.1) l'équation :

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0. \quad (1.2)$$

##### Equation à coefficients constants

On se place dans le cas où  $a$  et  $b$  sont des constantes. Alors la solution générale de l'équation homogène (1.2) est

$$v(x) = Ce^{rx}$$

avec  $r = -\frac{b}{a}$  et  $C$  est une constante arbitraire.

##### Equation à coefficients variables

Soit  $I$  un intervalle où les fonctions  $a$  et  $b$  sont définies et continues et tel que  $a(x) \neq 0$ , pour tout  $x \in I$ . Alors la solution générale de (1.2) est

$$v(x) = Ce^{u(x)}$$

avec  $u'(x) = -\frac{b(x)}{a(x)}$  et  $C$  est une constante arbitraire.

#### 1.1.2 Solution générale

Soit  $v_0$  une solution particulière de (1.1) ; alors les solutions générales de (1.1) s'écrivent

$$y(x) = v(x) + v_0(x)$$

où  $v$  est la solution générale de l'équation homogène (1.2).

#### 1.1.3 Recherche de solution particulière

On commence toujours par regarder s'il n'y a pas de solution évidente, sinon on peut appliquer l'une des méthodes suivantes

**Second membre de la forme :**  $f(x) = e^{\lambda x}P_n(x)$

Pour une équation à coefficients constants, si le second membre est de la forme  $f(x) = e^{\lambda x}P_n(x)$  où  $P_n$  est un polynôme de degré  $n$  :

**1<sup>er</sup> cas :** si  $\lambda \neq r = -\frac{b}{a}$ ,

alors on cherche une solution sous la forme  $v_0(x) = e^{\lambda x}Q_n(x)$  où  $Q_n$  est un polynôme de degré  $n$ .

**2<sup>eme</sup> cas :** si  $\lambda = r = -\frac{b}{a}$ ,

on cherche une solution sous la forme  $v_0(x) = e^{\lambda x}xQ_n(x)$  où  $Q_n$  est un polynôme de degré  $n$ .

##### Méthode de variation de la constante

Si  $v(x)$  est une solution de l'équation homogène, on cherche une solution particulière sous la forme  $v_0(x) = C(x)v(x)$  et  $C'$  vérifie alors :  $C'(x) = \frac{f(x)}{a(x)v(x)}$ .

#### 1.1.4 Exemples

**Exemple 1** Résoudre  $xy'(x) + 2y(x) = 2 \cos x$ .

**Exemple 2** Résoudre  $xy'(x) + y(x) = x$  pour  $x \in \mathbb{R}^{++}$ .

## 1.2 Equation différentielle linéaire du second ordre

Une équation différentielle linéaire du second ordre est du type :

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = f(x) \quad (1.3)$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des fonctions données, appelées coefficients de l'équation différentielle et  $f$  est appelée second membre de l'équation différentielle. Une solution de (1.3) est une fonction  $y$  de classe  $C^2$  sur un intervalle  $I$  vérifiant (1.3) pour tout  $x \in I$ .

La solution générale de l'EDO de (1.3) s'écrivent :

$$y(x) = y_h(x) + y_0(x),$$

où  $y_h$  est solution de l'équation homogène associée et  $y_0$  une solution particulière de (1.3).

### 1.2.1 Solution de l'équation homogène

Soit :

$$(E_h) \quad a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0.$$

Contrairement aux EDO linéaires homogènes du premier ordre, on n'a pas d'expression explicite des solutions lorsque les coefficients sont non constants. Commençons par donner la structure des solutions d'une EDO linéaire homogène du second ordre :

**Proposition 1** Soit  $I$  un intervalle où les fonctions  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont définies et continues et tel que  $a(x) \neq 0$ , pour tout  $x \in I$ . Les solutions de l'équation homogène  $(E_h)$  sont de la forme :

$$y(x) = \lambda y_1(x) + \mu y_2(x),$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont des constantes arbitraires et  $y_1$ ,  $y_2$  deux solutions linéairement indépendantes. Autrement dit, l'ensemble des solutions de  $(E_h)$  est un espace vectoriel de dimension 2.

La solution de l'équation  $(E_h)$  dépend ainsi de deux constantes arbitraires, soit 2 degrés de liberté. Il suffit donc de connaître deux solutions linéairement indépendantes de  $(E_h)$  pour les connaître toutes. En réalité, grâce à la méthode de réduction d'ordre décrite ci-après, il suffit de connaître une solution de l'équation homogène pour pouvoir en construire une deuxième, linéairement indépendante, et ainsi les obtenir toutes :

**Méthode de réduction d'ordre.** C'est une variante de la méthode de la variation de la constante. Le principe est le suivant :

Étape 1. "Deviner" une solution  $y_1$  de l'équation  $(E_h)$  : regarder la forme de l'équation, essayer par exemple des polynômes :  $x$ ,  $x^2$ ,  $e^x$  (si  $a(x) + b(x) + c(x) = 0$ ,  $y(x) = e^x$  est solution !), etc.

Étape 2. On cherche une solution  $y_2$  de  $(E_h)$  sous la forme :  $y_2(x) = C(x)y_1(x)$  avec  $C$  fonction non constante.

Étape 3. La solution générale de  $(E_h)$  s'écrit alors :  $y(x) = \lambda y_1(x) + \mu y_2(x)$  avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$  si on cherche des solutions complexes).

**Exemple** Résoudre :  $x^2y'' + xy' - 4y = 1$ .

### 1.2.2 Cas particulier des EDO homogènes à coefficients constants

Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est du type :

$$(E_c) \quad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \quad (1.4)$$

où les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont donnés dans  $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

On appelle équation caractéristique associée à  $(E_c)$  :

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (1.5)$$

Notons  $\Delta = b^2 - 4ac$  son discriminant.

**Si  $\Delta > 0$**  alors l'équation caractéristique admet deux solutions  $r_1 \neq r_2$  réelles. La solution générale de  $(E_c)$  s'écrit :

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, \text{ avec : } C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ constantes arbitraires.}$$

**Si  $\Delta < 0$**  alors l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées  $r = \alpha + i\beta$  et  $\bar{r} = \alpha - i\beta$ . Comme précédemment on a donc :

$$y(x) = C_1 e^{rx} + C_2 e^{\bar{r}x}, \text{ avec } C_1, C_2 \in \mathbb{C}, \quad \textbf{solutions complexes}$$

ou bien si on veut les solutions réelles de  $(E_c)$  :

$$y(x) = e^{\alpha x} (A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)), \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}, \quad \textbf{solutions réelles}$$

**Si  $\Delta = 0$**  alors l'équation caractéristique admet une unique solution  $r = -\frac{b}{2a}$  (racine double) et les solutions de  $(E_c)$  s'écrivent :

$$y(x) = (A + Bx)e^{rx}, \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont deux constantes arbitraires réelles.}$$

### 1.2.3 Recherche d'une solution particulière

Revenons à l'EDO complète :

$$(E) \quad a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = f(x)$$

dont on cherche une solution particulière. On commence toujours par regarder s'il n'y a pas de solution évidente, sinon on peut appliquer l'une des méthodes suivantes.

**Cas d'une EDO à coefficients constants**

- Si le second membre est de la forme  $f(x) = \alpha \cos(x) + \beta \sin(x)$  alors on peut chercher une solution sous la forme :  $y_0(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$ .
- Si le second membre est de la forme  $f(x) = e^{\lambda x} P_n(x)$  avec  $P_n$  polynôme de degré  $n$  :
  - $1^{er}$  **cas** si  $a\lambda^2 + b\lambda + c \neq 0$  i.e.  $\lambda \neq r_1$  et  $\lambda \neq r_2$ , on cherche une solution sous la forme  $y_0(x) = e^{\lambda x} Q_n(x)$  où  $Q_n$  est un polynôme de degré  $n$ .
  - $2^{eme}$  **cas** si  $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$  et  $2a\lambda + b \neq 0$  i.e. si  $\lambda = r_1$  ou  $\lambda = r_2$  avec  $r_1 \neq r_2$ , on cherche une solution sous la forme  $y_0(x) = e^{\lambda x} x Q_n(x)$  où  $Q_n$  est un polynôme de degré  $n$ .
  - $3^{eme}$  **cas** si  $\lambda = r_1 = r_2$ , on cherche une solution sous la forme  $y_0(x) = e^{\lambda x} x^2 Q_n(x)$  où  $Q_n$  est un polynôme de degré  $n$ .

**Cas général - Méthode de variation des constantes** Le principe est le suivant : on a trouvé une solution de l'équation homogène de la forme :  $y_h(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$ . On va chercher une solution particulière sous la forme :

$$y_0(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x).$$

On va être amenés à chercher des fonctions  $A$  et  $B$  vérifiant le système suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} y_1(x)A'(x) + y_2(x)B'(x) = 0 \\ y_1'(x)A'(x) + y_2'(x)B'(x) = \frac{f(x)}{a(x)}. \end{cases}$$

Ce système est un système linéaire en  $(A'(x), B'(x))$  de déterminant :

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

appelé *Wronskien* de  $y_1$  et  $y_2$ . Le système (S) a-t-il des solutions ? oui car son déterminant  $W(x)$  est non nul :

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = y_1(x)^2 \left( \frac{y_2}{y_1} \right)'(x) \neq 0,$$

puisque  $y_1$  et  $y_2$  sont linéairement indépendants.

On calcule donc  $A'(x)$  et  $B'(x)$  solutions du système (S), puis on intègre pour trouver  $A(x)$  et  $B(x)$  et en déduire  $y_0(x)$ .

## Chapitre 2

### Introduction aux Équations aux Dérivées Partielles linéaires

On peut difficilement étudier les équations aux dérivées partielles (E.D.P.) dans une totale généralité comme on peut le faire pour les équation différentielles ordinaires (E.D.O.) le domaine étant trop vaste. Heureusement, les E.D.P. les plus intéressantes proviennent de la modélisation d'un nombre restreint de phénomènes :

- Le transport : convection de chaleur dans un liquide, convection d'un polluant dans l'atmosphère ...
- La diffusion : diffusion de la chaleur dans un solide ...
- Les vibrations : son dans l'air, vibration des structures ...
- L'équilibre : calcul de l'équilibre d'une structure soumise à des forces ...

Nous verrons qu'à chacun de ces phénomènes correspond une catégorie d'E.D.P.. L'étude est restreintes aux E.D.P. linéaires (en fait affines) d'ordre inférieur ou égal à 2.

Une référence bibliographique :

H. Reinhard, "équations aux dérivées partielles, introduction", Dunod Université.

#### 2.1 E.D.P. de type transport

##### 2.1.1 Définition et exemples

On appelle E.D.P. linéaire d'ordre 1 dans un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  et d'inconnue

$$\Phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},$$

une E.D.P. de la forme

$$F(x) \cdot \nabla \Phi(x) + g(x) \Phi(x) = h(x)$$

où  $\nabla \Phi(x)$  est le vecteur gradient de  $\Phi$ ,  $(\nabla \Phi(x))_i = \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_i}$  et  $F(x) = (f_1(x), \dots, f_N(x))$ ,

soit encore :

$$f_1(x) \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(x) + f_2(x) \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}(x) + \dots + f_N(x) \frac{\partial \Phi}{\partial x_N}(x) + g(x) \Phi(x) = h(x),$$

**Exemple :** L'équation de continuité de la mécanique des fluides :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(t, x) + \operatorname{div}(\rho(t, x)U(t, x)) = 0, \quad \text{pour}$$

pour une vitesse  $U(t, x) : [0, T] \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  connue, c'est à dire en considérant que l'inconnue est la densité

$$\begin{aligned} \rho(t, x) : \quad \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x_1, x_2, x_3) &\longmapsto \rho(t, x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

En effet l'équation se réécrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(t, x) + U(t, x) \cdot \nabla \rho(t, x) + \rho(t, x) \operatorname{div} U(t, x) = 0.$$

ATTENTION : Dans cette écriture que l'on rencontre en mécanique ou en physique, les notation  $\operatorname{div} U(t, x)$  ou  $\nabla \rho(t, x)$  concernent uniquement les dérivées en espace et non la dérivée en temps,

$$\operatorname{div} U(t, x) = \frac{\partial U_1}{\partial x_1}(t, x) + \frac{\partial U_2}{\partial x_2}(t, x) + \frac{\partial U_3}{\partial x_3}(t, x) \text{ et } \nabla \rho(t, x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial x_1}(t, x) \\ \frac{\partial \rho}{\partial x_2}(t, x) \\ \frac{\partial \rho}{\partial x_3}(t, x) \end{pmatrix}.$$

Il est facile de constater que l'on a

$$\operatorname{div}(\rho(t, x)U(t, x)) = U(t, x) \cdot \nabla \rho(t, x) + \rho(t, x) \operatorname{div} U(t, x).$$

Finalement, l'équation de continuité se met dans le cadre général avec :

$$\Phi = \rho, \quad F = \begin{pmatrix} 1 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}, \quad g = \operatorname{div} U,$$

Les E.D.P. linéaires d'ordre 1 sont des E.D.P. de type transport. Dans l'exemple précédent, il s'agit du transport de la masse par le champ de vitesse  $U(t, x)$ . Le terme  $h(x)$  est appelé terme source. Dans le cas de l'équation de continuité, il n'y a pas de terme source de masse.

##### Courbes caractéristiques

On considère les courbes paramétrées de  $\mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} x(s) : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ s &\longmapsto (x_1(s), x_2(s), \dots, x_N(s)) \end{aligned}$$

On note

$$\dot{x}(s) = \left( \frac{dx_1}{ds}(s), \frac{dx_2}{ds}(s), \dots, \frac{dx_N}{ds}(s) \right),$$

la tangente à la courbe dont on suppose qu'elle est partout non nulle.

**Définition 1** On dira que la courbe paramétrée  $x(s)$  est une courbe caractéristique de l'E.D.P.

$$F(x) \cdot \nabla \Phi(x) + g(x) \Phi(x) = h(x),$$

si et seulement si  $\dot{x}(s)$  est partout parallèle au champ de vecteur  $F(x)$ . En pratique, on cherchera les courbes paramétrées  $x(s)$  vérifiant :

$$\dot{x}(s) = F(x(s)).$$

Ces courbes sont appelées aussi lignes de courant du champ de vecteur  $F$ .

**Remarque 1** A partir d'une courbe  $x(s)$  vérifiant

$$\dot{x}(s) = \lambda(s) F(x(s)),$$

(avec  $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continu et  $\lambda(s) \neq 0$ ), il est toujours possible de fabriquer une courbe  $\bar{x}(t)$  telle que

$$\dot{\bar{x}}(t) = F(\bar{x}(t)),$$

(i.e. en prenant  $\lambda(t) \equiv 1$  dans la définition précédente) qui représente la même courbe. Il suffit pour cela de faire un changement de variable

$$t \mapsto s(t), \quad \text{tel que } \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\lambda(s)},$$

car alors

$$\frac{d}{dt} x(s(t)) = \dot{x}(s(t)) \frac{1}{\lambda(s(t))} = F(x(s(t))),$$

et on pose  $\bar{x}(t) = x(s(t))$ .

### 2.1.2 Transport le long des courbes caractéristiques

Soit  $x(s)$  une courbe caractéristique vérifiant

$$\dot{x}(s) = F(x(s)),$$

alors la solution  $\Phi(x)$  vérifie le long de cette courbe

$$\frac{d}{ds} \Phi(x(s)) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x(s)) \dot{x}_i(s) = \nabla \Phi(x(s)) \cdot \dot{x}(s) = \nabla \Phi(x(s)) \cdot F(x(s)) = h(x(s)) - g(x(s)) \Phi(x(s)).$$

– Cas  $g(x) \equiv h(x) \equiv 0$

On a alors  $\frac{d}{ds} \Phi(x(s)) = 0$ . Dans ce cas donc, la solution  $\Phi(x)$  est constante le long de la courbe caractéristique. On dit que  $\Phi$  est transportée le long des courbes caractéristiques.

– Cas général où  $g(x) \neq 0$  et  $h(x) \neq 0$

$s \mapsto \Phi(x(s))$  vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d}{ds} \Phi(x(s)) = \nabla \Phi(x(s)) \cdot F(x(s)) = h(x(s)) - g(x(s)) \Phi(x(s)),$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont on peut obtenir la solution par variation de la constante.

En conclusion, si la valeur de  $\Phi$  est connue en un point  $x(s_0)$  de la courbe caractéristique, on peut calculer sa valeur partout. Résoudre ce genre de problème consiste donc principalement à trouver les courbes caractéristiques.

Il est possible de montrer qu'en chaque point  $x$  du domaine où  $F \neq 0$ , il passe une et une seule courbe caractéristique. Les courbes caractéristiques "remplissent" tout le domaine.

**Exemple : Retour sur l'équation de continuité.**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(t, x) + \operatorname{div}(\rho(t, x) U(t, x)) = 0,$$

où la vitesse  $U(t, x)$  est supposée connue. On a vu que cette équation se met dans le cadre général avec  $F = \begin{pmatrix} 1 & U_1 & U_2 & U_3 \end{pmatrix}^\top$  et  $g = \operatorname{div}(U)$ .

Les courbes caractéristiques sont les courbes  $s \mapsto \begin{pmatrix} t(s) \\ x(s) \end{pmatrix}$ , qui sont telles que

$$\frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{dx_1}{ds} = U_1, \quad \frac{dx_2}{ds} = U_2, \quad \frac{dx_3}{ds} = U_3.$$

On prend ici  $t = s$  et on a  $\dot{x}(s) = U(s, x(s))$ . Les courbes qui vérifient ceci sont tout simplement les trajectoires des particules de fluide. Cette équation traduit le fait que la masse est transportée le long des trajectoires des particules. On a de plus le long des trajectoires

$$\rho(x(t)) = \rho(x(0)) \exp - \left( \int_0^t \operatorname{div} U(x(v)) dv \right).$$

En particulier la densité  $\rho$  augmente quand  $\operatorname{div} U < 0$  (il y a alors compression) et diminue lorsque  $\operatorname{div} U > 0$  (il y a alors dilatation). L'opérateur  $\operatorname{div} U$  mesure les changements de volume.

### Équations à coefficients constants

C'est le cas où  $F$  ne dépend pas de  $x$ . Mais alors les courbes caractéristiques sont de la forme  $\dot{x}(s) = F$ , c'est-à-dire

$$x(s) = x_0 + sF$$

Ce sont des droites de  $\mathbb{R}^N$  parallèles entre elles.

### 2.1.3 Problème des conditions aux limites

On a vu que pour toute courbe caractéristique  $x(s)$  de l'E.D.P., la connaissance de la valeur en un point de cette courbe suffit à connaître la solution sur toute la courbe caractéristique. On peut donc énoncer le principe suivant

Pour déterminer complètement une solution de l'E.D.P. il faut et il suffit de fixer la valeur de cette solution sur un point et un seul de chaque courbe caractéristique.

En pratique, on fixera la valeur de la solution sur une courbe/surface qui croise une et une seule fois chaque courbe caractéristique.

**Exemples.** a) Sur l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(t, x) + \operatorname{div}(\rho(t, x)U(t, x)) = 0,$$

on a vu que les courbes caractéristiques étaient les trajectoires des points du fluide continu. Or à chaque instant  $t$ , toutes les particules sont représentées. Donc pour déterminer  $\rho$  de manière unique, il suffit de connaître  $\rho$  à un instant donné, par exemple à l'instant initial  $t = 0$ .

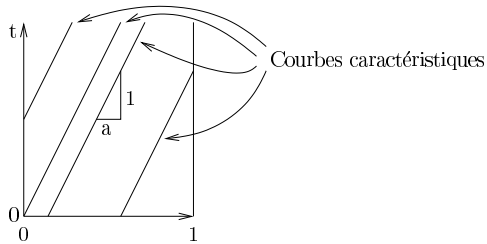
b) On considère l'équation à coefficients constants

$$\frac{\partial y}{\partial t}(t, x) + a \frac{\partial y}{\partial x}(t, x) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t \geq 0,$$

avec  $a \geq 0$  fixé. Dans ce cas, les caractéristiques sont les droites

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0 \\ x_0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix},$$

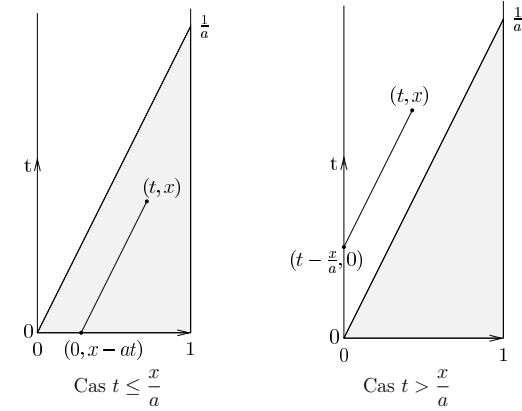
et la solution  $y(t, x)$  est constante sur ces droites caractéristiques.



Comme souvent dans les problèmes évolutif, supposons que l'on se donne une condition initiale

$$y(0, x) = y_0(x), \quad \text{où } y_0(x) \text{ est donnée.}$$

Alors la valeur de  $y(t, x)$  est fixée sur la partie  $(t, x)$  telle que  $t \leq \frac{x}{a}$ . Dans cette partie, on a  $y(t, x) = y(0, x - at) = y_0(x - at)$ .



Dans la partie  $t > \frac{x}{a}$  la solution n'est pas déterminée, il faut donc une autre condition aux limites. On ne peut pas prendre une condition sur  $\{x = 1\}$  sinon il y a conflit pour  $t \leq \frac{1}{a}$ .

On va imposer par exemple une condition aux limites en  $\{x = 0\}$

$$y(t, 0) = y_1(t), \quad \text{où } y_1(t) \text{ est donnée.}$$

Pour  $t > \frac{x}{a}$  on aura donc  $y(t, x) = y(t - \frac{x}{a}, 0) = y_1(t - \frac{x}{a})$ .

Globalement, la courbe sur laquelle on impose des conditions aux limites est

$$\{t = 0\} \times \{x \in [0, 1]\} \cup \{t \geq 0\} \times \{x = 0\},$$

elle respecte bien le principe de couper une et une seule fois chaque courbe caractéristique de l'E.D.P.



## 2.2 E.D.P. linéaires du second ordre

### 2.2.1 Définitions

**Définition 2** On appelle E.D.P. linéaire d'ordre inférieur ou égal à 2 dans un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  et d'inconnue

$$\Phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},$$

une équation du type

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ji}(x) \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i f_i(x) \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_i} + g(x) \Phi(x) = h(x)$$

Par convention, on supposera que  $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ .

$h(x)$  est souvent appelé terme source de l'équation.

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$  est le lieu où l'on étudie l'équation.  $N$  est la dimension, i.e. aussi le nombre de variables dont dépend  $\Phi$ . Il pourra varier de 2 à 4. Dans la suite, on écrira

$$\Phi(x),$$

où  $x \in \Omega$  admet  $N$  composantes, notées  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ . On écrira aussi indifféremment

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_N).$$

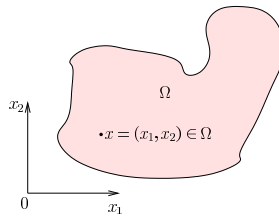


FIGURE 2.1 – Exemple de domaine dans  $\mathbb{R}^2$ .

**Écriture vectorielle** On introduit les notations suivantes :

- $A(x) = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$  la matrice  $N \times N$  symétrique des coefficients devant les termes d'ordre 2.
- $F(x) = (f_i(x))_{1 \leq i \leq N}$  le vecteur de taille  $N$  des coefficients devant les termes d'ordre 1.
- $H\Phi(x)$  la matrice Hessienne de  $\Phi$ ,  $(H\Phi(x))_{ij} = \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x_i \partial x_j}$ .
- $\nabla \Phi(x)$  le vecteur gradient de  $\Phi$ ,  $(\nabla \Phi(x))_i = \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_i}$ .

ainsi que la notation (appelée produit scalaire de Frobenius)

$$A : B = \sum_{i,j=1}^N a_{ij} b_{ij},$$

où  $A$  et  $B$  sont deux matrices de composantes respectivement  $a_{ij}$  et  $b_{ij}$ .

Avec ceci l'E.D.P. d'ordre 2 se réécrit

$$A(x) : H\Phi(x) + F(x) \cdot \nabla \Phi(x) + g(x) \Phi(x) = h(x).$$

**Exemple :** pour l'équation

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}(x, y) + \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) = \sin(x + y), \quad \text{pour } x, y \in \mathbb{R},$$

on aura

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g(x, y) = 0, \quad h(x, y) = \sin(x + y),$$

$$\nabla \Phi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}, \quad H\Phi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Pour les E.D.P. linéaires d'ordre 2, la matrice  $A$  est non nulle et est symétrique. Elle est donc diagonalisable à valeurs propres réelles et leur étude fournit des éléments de classification des E.D.P linéaires d'ordre 2.

### 2.2.2 Éléments de classification : E.D.P. elliptiques, hyperboliques et paraboliques

Pour les E.D.P. d'ordre 2, il n'existe pas de notion de courbe caractéristique comme au premier ordre. En revanche, on peut les classer en trois grandes familles : "elliptique", "hyperbolique" et "parabolique".

**Remarque 2** La terminologie “elliptique”, “hyperbolique” et “parabolique” vient du fait que lorsque la matrice  $A(x)$  est constante, les courbes  $x^T A x = \text{cte}$  sont respectivement des ellipsoïdes, des hyperboloïdes et des paraboloïdes.

### E.D.P. elliptiques

**Définition 3** Une E.D.P. linéaire du second ordre est dite elliptique en  $x \in \Omega$  si la matrice  $A(x)$  n'admet que des valeurs propres **non nulles** et qui sont **toutes de même signe**.

Si l'E.D.P. est elliptique sur tout le domaine d'étude  $\Omega$  elle modélise en général un problème d'équilibre ou un problème stationnaire.

#### Exemple d'applications :

- L'équation

$$\Delta \Phi(x) = f(x)$$

(où  $\Delta \Phi(x) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2}$  est le laplacien de  $\Phi(x)$ ) est elliptique, car la matrice  $A(x)$

correspondante est  $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$  matrice identité de  $\mathbb{R}^N$ . Toutes les valeurs

propres sont donc égales à 1.

- Plus généralement, les équations de la forme

$$\text{div}(k(x)\nabla \Phi(x)) = f(x),$$

avec  $k(x) > 0$  sont elliptiques.

### E.D.P. hyperboliques

**Définition 4** Une E.D.P. est dite hyperbolique en  $x \in \Omega$  si  $A(x)$  n'admet que des valeurs propres **non nulles** et qui sont **toutes de même signe sauf une de signe opposé**.

Si l'E.D.P. est hyperbolique sur tout le domaine d'étude  $\Omega$  elle modélise en général une propagation d'onde.

#### Exemples d'application.

- L'équation des ondes

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(t, x) - c^2 \Delta \Phi(t, x) = f(t, x), \quad \text{pour } t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N,$$

est de type hyperbolique ( $\Delta \Phi(t, x) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2}$  est le laplacien de  $\Phi(t, x)$  par rapport

à  $x$ ). En effet la matrice  $A(x)$  vaut dans ce cas  $A(t, x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -c^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -c^2 \end{pmatrix}$  dont une

valeur propre vaut 1 et toutes les autres  $-c^2$ .

- Plus généralement, les équations du type

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(t, x) - \text{div}(c(x)\nabla \Phi(t, x)) = f(t, x), \quad \text{pour } t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N,$$

sont hyperboliques pour  $c(x) > 0$ .

### E.D.P. paraboliques

**Définition 5** On dira que l'E.D.P. est parabolique en  $x \in \Omega$  si  $A(x)$  admet  $N-1$  valeurs propres **non nulles** de même signe et **une valeur propre nulle**. De plus, soit  $v(x)$  le vecteur propre associé à la valeur propre nulle, on doit avoir  $v(x).F(x) \neq 0$ .

Si la condition  $v(x).F(x) \neq 0$  n'est pas vérifiée, alors l'équation est dégénérée (c'est un couplage entre une E.D.P. est une équation algébrique) et on ne parle plus d'équation parabolique.

Si l'E.D.P. est parabolique sur tout le domaine d'étude  $\Omega$  elle modélise en général un phénomène de diffusion.

#### Exemples d'application

- L'équation de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, x) - k \Delta \Phi(t, x) = f(t, x), \quad \text{pour } t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N,$$

est de type parabolique. En effet, dans ce cas :  $A(t, x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -k \end{pmatrix}$  admet une

valeur propre nulle, toutes les autres valant  $-k$ . La valeur propre 0 correspond à

la valeur propre temporelle. De plus  $F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ , la condition  $v(t, x).F(t, x) \neq 0$  est

vérifiée.

- Plus généralement, les équations du type

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, x) - \text{div}(k(x)\nabla \Phi(t, x)) = f(t, x), \quad \text{pour } t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N,$$

sont paraboliques pour  $k(x) > 0$ .

## Chapitre 3

# Outils pour la résolution des E.D.P. : les séries de fonctions

Principales références bibliographiques : J. Combes, Suites et séries, *Presses Universitaires de France* et C. Gasquet, P. Witomski, Analyse de Fourier et applications, *Masson*.

## 3.1 Séries Numériques

### 3.1.1 Définitions

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels (ou complexes). On appelle suite des sommes partielles de  $u_n$  la suite  $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$  où pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,

$$S_N = u_0 + u_1 + \cdots + u_N = \sum_{k=0}^N u_k.$$

Cette suite  $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$  des sommes partielles s'appelle la série de terme général  $u_n, n \in \mathbb{N}$  ou encore la série  $\sum u_n$ .

### 3.1.2 Nature d'une série

Etudier la nature d'une série, c'est étudier la convergence de la suite des sommes partielles.

- Si la suite  $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$  admet une limite finie  $S$  ( $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = S$ ), on dit que la série

$\sum u_n$  converge ou est convergente et on écrit alors :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

$S$  s'appelle la somme de la série  $\sum u_n$ .

- Si la suite  $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$  n'admet pas de limite, on dit que la série  $\sum u_n$  diverge ou est divergente.

### 3.1.3 Condition nécessaire de convergence

La série  $\sum u_n$  converge  $\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

La condition  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  est nécessaire à la convergence de la série mais elle n'est **pas suffisante**.

#### Exemples

Série harmonique :

Etudions la série numérique de terme général  $\frac{1}{n}$ . On peut démontrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x}$$

alors, en sommant pour  $k$  allant de 1 à  $n$  on obtient

$$\ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln(n).$$

Ainsi la suite des  $S_n$  tend vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Donc la série de terme général  $\frac{1}{n}$  est divergente. Cependant, on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ .

Série géométrique :

Soit  $q \in \mathbb{R}$ , la série numérique de terme général  $q^n$  converge si et seulement si  $|q| < 1$ .

De plus, si  $|q| < 1$ , alors  $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ .

Série de Riemann :

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la série numérique de terme général  $\frac{1}{n^\alpha}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .

**Exercice :** Etudier la convergence des séries de terme général :

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad v_n = 2^n, \quad w_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

### 3.1.4 Séries numériques à termes positifs

**Définition 1** On dit qu'une série  $\sum u_n$  est à termes positifs si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$ .

**Théorème 1** Si la série  $\sum u_n$  est à termes positifs alors la série  $\sum u_n$  converge  $\iff (S_N)_{N \in \mathbb{N}}$  est majorée.

**Théorème 2 (Comparaison de séries à termes positifs)**

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles à termes positifs.  
Si  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$ , alors

1. Si la série  $\sum v_n$  converge alors la série  $\sum u_n$  converge et  

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = U \leq V = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$
2. Si la série  $\sum u_n$  diverge alors la série  $\sum v_n$  diverge.

**Exemple :** Etudier la nature de la série numérique de terme général  $u_n = \frac{\ln n}{n}$ .  
(Indication : Comparer  $u_n$  avec la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $v_n = \frac{1}{n}$ ).

**Théorème 3 (Règle de Cauchy)** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à termes positifs. Si il existe un réel positif ou nul  $l$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$  alors

- Si  $0 \leq l < 1$ , la série  $\sum u_n$  converge.
- Si  $l > 1$ , la série  $\sum u_n$  diverge.
- Si  $l = 1$ , la règle de Cauchy ne permet pas de conclure.

**Exemple :** Etudier la nature de la série numérique de terme général  $u_n = \left(\frac{n}{n+a}\right)^{n^2}$  avec  $a \in \mathbb{R}$ .

**Théorème 4 (Règle de d'Alembert)** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à termes strictement positifs. Si il existe un réel positif ou nul  $l$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$  alors

- Si  $0 \leq l < 1$ , la série  $\sum u_n$  converge.
- Si  $l > 1$ , la série  $\sum u_n$  diverge.
- Si  $l = 1$ , la règle de D'Alembert ne permet pas de conclure.

**Exemple :** Etudier la nature de la série numérique dont les termes généraux sont définis par  $u_n = \frac{a^n}{n!}$  avec  $a \in \mathbb{R}_+^*$ .

**Théorème 5 (séries de termes généraux équivalents)**

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles à termes positifs dont les termes généraux sont équivalents quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , i.e.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ . Alors les deux séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature.

**Cas des séries à termes tous négatifs.** Soit  $\sum u_n$  une série à termes négatifs (i.e. :  $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq 0$ ). Alors les séries  $\sum u_n$  et  $\sum (-u_n)$  sont de même nature. En particulier, la série  $\sum (-u_n)$  est à termes positifs et on peut utiliser les règles précédentes.

**3.1.5 Séries à termes réels de signe quelconque****Séries absolument convergentes**

**Définition 2** Une série  $\sum u_n$  est dite absolument convergente lorsque la série à termes positifs  $\sum |u_n|$  converge.

**Exemples :** étudier l'absolue convergence des séries numériques dont les termes généraux sont définis par  $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$  et  $v_n = \frac{(-1)^n}{n}$ .

**Théorème 6** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à termes réels alors

$$\sum u_n \text{ est absolument convergente} \Rightarrow \sum u_n \text{ est convergente et } \left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

**Séries alternées**

**Définition 3** La série numérique  $\sum u_n$  est dite alternée si  $u_n = (-1)^n v_n$  ou si  $u_n = (-1)^{n+1} v_n$  avec, dans chacun des cas,  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq 0$ .

**Théorème 7 (Théorème spécial des séries alternées)** Soit la série numérique alternée  $\sum u_n$ . Supposons par exemple que  $u_n = (-1)^n v_n$  avec  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq 0$ .

Si la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$  alors la série numérique  $\sum (-1)^n v_n$  converge.

**Exemple :** étudier la nature de la série  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**3.2 Séries de fonctions**

**Définition** Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de  $\Delta$  dans  $\mathbb{R}$ .

On appelle série de fonctions et on note  $\sum f_n$ , la suite de fonctions  $(\mathcal{S}_N)_{N \in \mathbb{N}}$  définie pour tout  $N \in \mathbb{N}$  et pour tout  $x \in \Delta$  par

$$\mathcal{S}_N(x) = \sum_{k=0}^N f_k(x).$$

**Convergence simple**

On dit que la série  $\sum f_n$  converge simplement sur  $\Delta$  vers la fonction  $S$  si

$$(\forall t \in \Delta) \left( \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N f_k(t) = S(t) \right).$$

Exemple : étudier la convergence simple de la série  $\sum x^n, n \in \mathbb{N}$  sur  $\Delta = [0, 1]$  et sur  $\Delta = [0, 1[$ .

**Convergence uniforme**

On dit que la série  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $\Delta$  vers  $f$  si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{t \in \Delta} \left| \sum_{k=0}^n f_k(t) - S(t) \right| = 0.$$

Exemple : étudier la convergence uniforme de la série  $\sum x^n, n \in \mathbb{N}$  sur  $\Delta = [0, a]$  avec  $a \in [0, 1[$ .

**Convergence normale**

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions définies sur  $\Delta$ . La série de fonctions  $\sum f_n$  converge normalement s'il existe une série numérique  $\sum u_n$  convergente telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \Delta \quad |f_n(t)| \leq u_n.$$

Exemple : Etudier la convergence normale de la série  $\sum \frac{\sin x e^{-nx}}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*$  sur  $\Delta = [0, \pi]$ .

**Théorème 8** Si  $\sum f_n$  converge uniformément alors  $\sum f_n$  converge simplement.  
Si  $\sum f_n$  converge normalement alors  $\sum f_n$  converge uniformément.

**Convergence uniforme et régularité**

**Théorème 9 (Limite et continuité)** Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions continues sur  $\Delta$ . Si la série  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $\Delta$  vers  $S$  alors  $S$  est continue sur  $\Delta$ .

**Théorème 10 (Limite et intégration)** Nous supposons ici que  $\Delta = [a, b]$ . Si la série  $\sum f_n$  converge uniformément vers  $S$  et si pour tout  $n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}_\Delta$  alors  $\forall [\alpha, \beta] \subset [a, b]$ ,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_\alpha^\beta f_n(t) dt \right) = \int_\alpha^\beta \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \int_\alpha^\beta S(t) dt.$$

**Théorème 11 (Limite et dérivation)** Nous supposons ici que  $\Delta = [a, b]$ . Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions continues et dérivables sur  $\Delta$ . Si  $\exists t_0 \in \Delta$  tel que  $\sum f_n(t_0)$  converge et si la série  $\sum f'_n$  converge uniformément vers  $g$  alors la série  $\sum f_n$  converge uniformément vers  $S$  avec  $S' = g$

$$\forall t \in \Delta \quad \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(t).$$

Exemple : Etudier le domaine de définition, de continuité et de dérivabilité de la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$$

**3.3 L'espace  $L_p^2(0, T_0)$** **3.3.1 Définitions**

**Définition 4** L'ensemble  $L_p^2(0, T_0)$  désigne les fonctions à valeurs réelles ou complexes, périodiques, de période  $T_0$ , telles que  $|s|^2$  est intégrable sur  $[0, T_0]$  ; c'est à dire :

$$L_p^2(0, T_0) = \left\{ s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ } s \text{ de période } T_0 \text{ et } \int_0^{T_0} |s(t)|^2 dt < +\infty \right\}.$$

Cet ensemble, muni de l'addition usuelle des fonctions et de la multiplication par un scalaire, est un espace vectoriel.

On définit sur l'ensemble  $L_p^2(0, T_0)$  un produit scalaire pour  $s$  et  $\sigma$  dans  $L_p^2(0, T_0)$  par :

$$\langle s, \sigma \rangle = \int_0^{T_0} s(t) \overline{\sigma(t)} dt.$$

On dit que deux fonctions  $s$  et  $\sigma$  de  $L_p^2(0, T_0)$  sont orthogonales si

$$\int_0^{T_0} s(t) \overline{\sigma(t)} dt = 0.$$

La norme associée à ce produit scalaire est définie pour  $s \in L_p^2(0, T_0)$  par :

$$\|s\|_2 = \sqrt{\langle s, s \rangle} = \sqrt{\int_0^{T_0} |s(t)|^2 dt}.$$

Cette norme est aussi appelée moyenne quadratique.

On remarque, que la norme de  $s$  peut être nulle sans que  $s$  soit nulle (par exemple si  $s$  est nulle sauf en un nombre fini de points). Pour obtenir une vraie norme, on va dire qu'une fonction est nulle presque partout lorsque l'intégrale de la valeur absolue de cette fonction est nulle, c'est à dire :

**Définition 5**

$$s = 0 \text{ presque partout} \iff \int_0^{T_0} |s(t)|^2 dt = 0 \iff \|s\|_2 = 0.$$

$$s = \sigma \text{ presque partout} \iff s - \sigma = 0 \text{ presque partout.}$$

On considérera comme nulle dans  $L_p^2(0, T_0)$  une fonction nulle presque partout et on considérera que deux fonction de  $L_p^2(0, T_0)$  sont égales lorsqu'elles sont égales presque partout.

**Proposition 2 (Intégrale sur une période d'une fonction périodique)** Soit  $s \in L_p^2(0, T_0)$ . Alors :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_a^{a+T_0} s(t) dt = \int_0^{T_0} s(t) dt.$$

### 3.3.2 Convergence en moyenne quadratique

#### Définition

Soit une suite de fonctions donnée par  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $f_n \in L_p^2(0, T_0)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On dit que cette suite de fonctions converge en moyenne quadratique (ou converge dans  $L_p^2(0, T_0)$ ) lorsqu'il existe  $f \in L_p^2(0, T_0)$  telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_2 = 0.$$

### 3.3.3 Polynômes trigonométriques et meilleure approximation

Considérons les fonctions  $e_n(t) = e^{2i\pi nt/T_0}$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ . Pour le produit scalaire défini précédemment, ces fonctions forment un système orthogonal c'est-à-dire :

$$\int_0^{T_0} e_n(t) \overline{e_m(t)} dt = 0, \quad \text{pour } n \neq m.$$

De plus, pour  $n = m$

$$\int_0^{T_0} |e_n(t)|^2 dt = T_0.$$

De même dans le cas réel, on démontre que la famille :

$$\left\{ \sin\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right), n \in \mathbb{N}^*; \cos\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right), n \in \mathbb{N} \right\}$$

forme une famille orthogonale de  $L_p^2(0, T_0)$  :

$$\begin{aligned} \forall (n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, \quad \int_0^{T_0} \sin\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T_0}\right) dt &= 0 \\ \forall (n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, \quad \int_0^{T_0} \sin\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) \sin\left(\frac{2\pi kt}{T_0}\right) dt &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq k \\ \frac{T_0}{2} & \text{si } n = k \end{cases} \\ \forall (n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, \quad \int_0^{T_0} \cos\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T_0}\right) dt &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq k \\ \frac{T_0}{2} & \text{si } n = k \end{cases} \end{aligned}$$

Remarquons que dans le cas réel, ces deux familles engendrent le même sous-espace vectoriel de  $L_p^2(0, T_0)$  :

$$\text{Vect}\left(e_n(t) = e^{\frac{2i\pi nt}{T_0}}\right)_{n \in \mathbb{Z}} = \text{Vect}\left\{\sin\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right), n \in \mathbb{N}^*; \cos\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right), n \in \mathbb{N}\right\},$$

appelé **espace des polynômes trigonométriques**.

**Définition 6** On appelle polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à  $N$  les fonctions de la forme

$$p(t) = \sum_{n=-N}^N \gamma_n e^{\frac{2i\pi nt}{T_0}},$$

ou dans le cas réel :

$$p(t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^N \alpha_n \sin\frac{2\pi nt}{T_0} + \beta_n \cos\frac{2\pi nt}{T_0}.$$

Calculons la norme d'un polynôme trigonométrique, on obtient :

$$\|p\|_2^2 = T_0 \sum_{n=-N}^N |\gamma_n|^2.$$

### 3.3.4 Meilleure approximation

$N$  étant fixé, nous cherchons à approximer les fonctions de  $L_p^2(0, T_0)$  par des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à  $N$ . On cherche donc, pour  $s \in L_p^2(0, T_0)$ , des coefficients  $x_n$  tels que :

$$\left\| s - \sum_{n=-N}^N x_n e_n \right\|_2 \quad \text{soit minimum.}$$

On a le résultat suivant :

**Théorème 12** Il existe un polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à  $N$ , et un seul, tel que ce minimum soit réalisé. Ce polynôme est :

$$p_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{\frac{2i\pi nt}{T_0}}$$

où  $c_n$ ,  $-N \leq n \leq N$ , sont définies par :

$$c_n = \frac{1}{T_0} \langle s, e_n \rangle = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) e^{-\frac{2i\pi nt}{T_0}} dt.$$

On dit que  $p_N$  réalise la meilleure approximation de  $s$  en moyenne quadratique sur l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à  $N$ . Les coefficients du polynôme  $p_N$  sont uniques. Ces coefficients sont appelés coefficients de Fourier exponentiels de  $s$ .

## 3.4 Séries de Fourier

Soit  $s \in L_p^2(0, T_0)$ . L'objet de cette partie est de décomposer le signal périodique  $s$  dans les bases vues au paragraphe précédent.

### 3.4.1 Coefficients de Fourier

Ce sont les coefficients de la projection de  $s$  :

- dans la base des  $(e_n(t))_{n \in \mathbb{Z}}$  dans le cas complexe.
- dans la base des  $\left\{ \sin\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right), n \in \mathbb{N}^*; \cos\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right), n \in \mathbb{N} \right\}$  dans le cas réel.

**Définition 7** On appelle coefficients de Fourier exponentiels de  $s$  :

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_a^{a+T_0} s(t) e^{\frac{-2i\pi nt}{T_0}} dt \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z}$$

où  $a \in \mathbb{R}$  est quelconque car la fonction  $s$  est périodique.

Dans le cas où la fonction  $s$  est à valeurs réelles, on définit les coefficients de Fourier trigonométriques de  $s$  par

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_a^{a+T_0} s(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) dt \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{et } b_n = \frac{2}{T_0} \int_a^{a+T_0} s(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) dt \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

On définit aussi, dans le cas réel, l'amplitude et la phase, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par

$$\rho_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{et} \quad \phi_n \in [-\pi; \pi[ \text{ tel que } \cos \phi_n = \frac{a_n}{\rho_n} \text{ et } \sin \phi_n = \frac{b_n}{\rho_n}.$$

Les coefficients de Fourier exponentiels peuvent s'écrire en fonction des coefficients de Fourier trigonométriques dans le cas réel.

**Propriété 13** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :

$$c_0 = \frac{a_0}{2}; \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}; \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

et inversement :

$$a_0 = 2c_0; \quad a_n = c_n + c_{-n}; \quad b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

Selon la parité de la fonction  $s$ , on peut simplifier les expressions des coefficients de Fourier

**Propriété 14** Si  $s$  est une fonction impaire, alors :

$$a_n = 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} s(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) dt \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

Si  $s$  est une fonction paire, alors :

$$a_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} s(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) dt \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad b_n = 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

### 3.4.2 Séries de Fourier et premiers exemples

Nous pouvons maintenant définir la **série de Fourier** de la fonction  $s \in L_p^2(0, T_0)$  :

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{2i\pi nt}{T_0}} \quad \text{dans le cas complexe}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right). \quad \text{dans le cas réel}$$

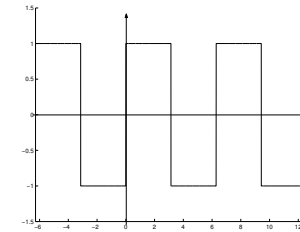
Admettons pour l'instant la convergence de ces deux séries (nous répondrons à cette question dans le prochain paragraphe 3.5). La question que l'on se pose ici sur deux exemples est de savoir si leur somme  $S(t)$  est une "bonne" approximation de  $s(t)$ . Introduisons pour cela les sommes partielles de la série de Fourier de la fonction  $s$  : pour tout  $N \in \mathbb{N}$  :

$$S_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{\frac{2i\pi nt}{T_0}}$$

$$\text{et dans le cas réel : } S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right).$$

#### Exemple 1

Soit  $s$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $s(t) = 1$  pour  $t \in [0, \pi[$ ,  $s(t) = -1$  pour  $t \in [\pi, 2\pi[$  et  $s$  est périodique de période  $2\pi$ . La fonction  $s$  est impaire et est représentée ci-dessous.



Le calcul des coefficients de Fourier réels de  $s$  donne, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$a_n = 0;$$

$$b_n = 0 \quad \text{si } n \text{ est pair}; \quad b_n = \frac{4}{n\pi} \quad \text{si } n \text{ est impair}.$$

Les premières sommes partielles sont :

$$\begin{aligned} S_1(t) &= \frac{4}{\pi} \sin t \\ S_3(t) &= \frac{4}{\pi} \left( \sin t + \frac{1}{3} \sin 3t \right) \\ S_5(t) &= \frac{4}{\pi} \left( \sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t \right) ; \end{aligned}$$

On représente ces fonctions ci-dessous :

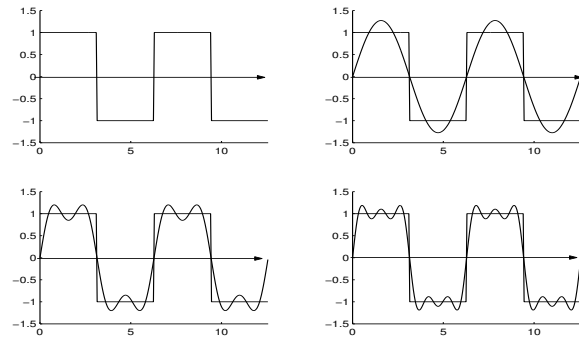
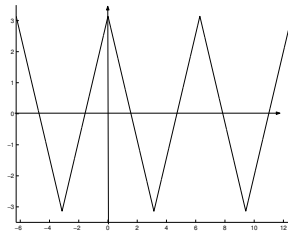


FIGURE 3.1 – Exemple 1 :  $s$ ,  $S_1$ ,  $S_3$ ,  $S_5$

### Exemple 2

Soit  $\sigma$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\sigma(t) = \pi - 2t$  pour  $t \in [0, \pi]$ , paire, et périodique de période  $2\pi$ . La fonction  $\sigma$  est représentée ci-dessous.



Le calcul des coefficients de Fourier de  $\sigma$  donne, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \text{ si } n \text{ est pair} ; \quad a_n = \frac{8}{n^2\pi} \text{ si } n \text{ est impair;} \\ b_n &= 0. \end{aligned}$$

Les premières sommes partielles sont :

$$\begin{aligned} S_1(t) &= \frac{8}{\pi} \cos t \\ S_3(t) &= \frac{8}{\pi} \left( \cos t + \frac{1}{9} \cos 3t \right) \\ S_5(t) &= \frac{8}{\pi} \left( \cos t + \frac{1}{9} \cos 3t + \frac{1}{25} \cos 5t \right). \end{aligned}$$

On représente ces fonctions ci-dessous :

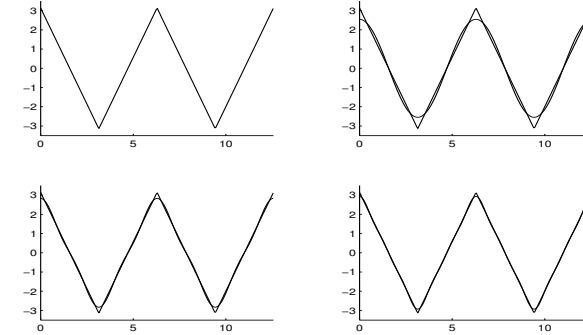


FIGURE 3.2 – Exemple 2 :  $\sigma$ ,  $S_1$ ,  $S_3$ ,  $S_5$

## 3.5 Convergence des séries de Fourier

### 3.5.1 Convergence en moyenne quadratique

On a le résultat de convergence suivant (admis) :

**Théorème 15** Soit  $s \in L_p^2(0, T_0)$ . Alors  $s$  est égale presque partout à sa série de Fourier, soit :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{2i\pi n t}{T_0}} \quad \text{presque partout.}$$



Avec les coefficients réels, on a :

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T_0}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T_0}\right) \quad \text{presque partout.}$$

Cela ne signifie pas que  $s$  est égal à sa série de Fourier mais seulement qu'elles sont égales presque partout. Il est important de remarquer que deux fonctions de  $L_p^2(0, T_0)$  ayant les mêmes coefficients de Fourier ne sont pas nécessairement égales, mais seulement égales presque partout (i.e. au sens de la définition 5).

### 3.5.2 Théorème de Dirichlet

Seul le théorème de Dirichlet nous dit exactement en quels points la fonction  $s$  est égale à sa série de Fourier.

**Théorème 16** - Soit  $s$  une fonction périodique, de période  $T_0$ , de classe  $C^1$  par morceaux alors la série de Fourier associée à  $s$  converge, pour tout  $t \in [0, T_0]$ , vers  $\frac{s(t_+) + s(t_-)}{2}$ .  
- Si, de plus  $s$  est continue alors la série de Fourier associée à  $s$  converge, pour tout  $t \in [0, T_0]$ , vers  $s(t)$ .

Rappel. On dit qu'une fonction  $s$  est continue par morceaux lorsque  $s$  est continue sur  $[0, T_0]$  sauf, au plus, en un nombre fini de points qui sont des discontinuités de première espèce (c'est à dire des points où la fonction  $s$  admet une limite à droite et une limite à gauche notées  $s(t_+)$  et  $s(t_-)$ ).

On dit que  $s$  est de classe  $C^1$  par morceaux sur  $[0, T_0]$  si  $s$  est continue par morceaux sur  $[0, T_0]$  et  $s$  est dérivable sur  $[0, T_0]$  sauf en un nombre fini de points avec  $s'$  continue par morceaux.

Les fonctions définies au paragraphe 3.4.2 sont de classe  $C^1$  par morceaux sur  $[0, 2\pi]$ .

**Retour aux exemples.** Les fonctions  $s$  et  $\sigma$  sont  $2\pi$ -périodiques, de carré intégrable et de classe  $C^1$  par morceaux sur  $[0, 2\pi]$ . D'après le théorème de Dirichlet, on a donc :

$$S(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)t) = \begin{cases} s(t) & \text{si } t \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\Sigma(t) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cos((2n+1)t) = s(t), \quad \text{quel que soit } t \in \mathbb{R}.$$

Dans l'exemple 1, on remarque que  $s(0) = 1$  mais la somme de la série de Fourier est nulle pour  $t = 0$ .

### 3.5.3 Egalité de Parseval

En utilisant le résultat d'approximation obtenu au paragraphe 3.3.4, on obtient l'égalité suivante, appelée égalité de Parseval :

**Propriété 17** Pour  $s \in L_p^2(0, T_0)$ ,

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |s(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

qui s'écrit dans le cas réel :

$$\frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{2} |a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2.$$

**Application.** Calculer  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ .

## Chapitre 4

### Quelques résolutions théoriques d'E.D.P.

#### 4.1 Préambule : modéliser des phénomènes impulsionnels

##### 4.1.1 Convolution de deux fonctions et propriétés élémentaires

**Définition 6** Soient deux fonctions  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}(\text{ ou } \mathbb{C})$ . On appelle convolution de  $f$  et  $g$  la fonction que l'on note  $f * g$ , si elle existe, définie par

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x-u)du.$$

L'application qui à la fonction  $f$  associe  $f * g$  est linéaire, c'est à dire que pour  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  on a

$$(\lambda f_1 + \mu f_2) * g = \lambda f_1 * g + \mu f_2 * g.$$

La convolution est une opération symétrique dans le sens où  $f * g = g * f$ .

Exemples

1. Prenons  $f = g = \chi_{[0,1]}$  où la fonction  $\chi_{[0,1]}$  est la fonction caractéristique de l'intervalle  $[0, 1]$  définie par

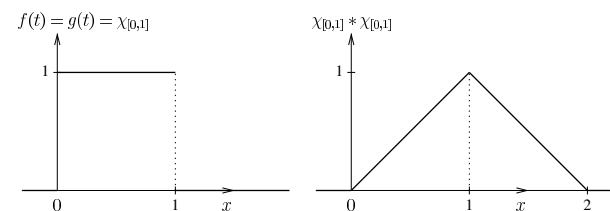
$$\chi_{[0,1]} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0, 1], \\ 1 & \text{si } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[0,1]}(x-t)\chi_{[0,1]}(t)dt = \text{longueur}([x-1, x] \cap [0, 1])$$

d'où

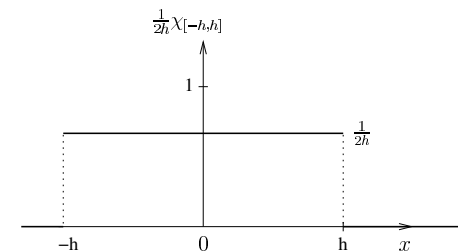
$$(\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]})(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$



**Remarque 3** Une des caractéristiques de la convolution est un effet régularisant. Ici le produit de convolution de deux fonctions discontinues donne une fonction continue.

2. Convolution d'une fonction par  $\frac{1}{2h}\chi_{[-h,h]}$ .

On pose  $g_h = \frac{1}{2h}\chi_{[-h,h]}$ . On a



$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_h(x)dx = 1, \quad \forall h > 0,$$

Le produit de convolution

$$(f * g_h)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\frac{1}{2h}\chi_{[-h,h]}(t)dt = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x-t)dt = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x+t)dt.$$

Quand  $h$  est petit,  $f * g_h(x)$  est proche de  $f(x)$  pourvu que  $f$  soit continue.

### Convolution et dérivation

Pour deux fonctions  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) avec  $g$  dérivable, on a

$$(f * g)'(x) = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g'(x-t)dt = (f * (g'))(x).$$

De la même manière, si  $f$  est dérivable, on aura

$$(f * g)'(x) = ((f') * g)(x).$$

Conclusion : Si  $f$  est  $n$  fois dérivable et  $g$  est  $p$  fois dérivable, alors  $f * g$  sera au moins  $n + p$  fois dérivable. C'est une propriété très intéressante de la convolution qui illustre aussi son effet régularisant.

#### 4.1.2 Impulsion de Dirac $\delta_0$

Reprenons l'exemple de la fonction  $g_h = \frac{1}{2h} \chi_{[-h,h]}$  de l'exemple 2 précédent. Que devient le produit de convolution  $f * g_h$  quand  $h$  tend vers 0? L'intervalle sur lequel on fait la moyenne de  $f$  autour de  $x$  devient de plus en plus petit, et si  $f$  est une fonction continue on aura

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f * g_h)(x) = f(x),$$

On se pose alors la question, puisque seule  $g_h$  dépend de  $h$  de ce qu'est la limite  $\lim_{h \rightarrow 0} g_h$ . Si cette limite a un sens, alors la "fonction" limite, que l'on note  $\delta_0 = \lim_{h \rightarrow 0} g_h$  est l'élément neutre pour la convolution

$$\delta_0 * f = f,$$

Comme  $\int_{-\infty}^{+\infty} g_h(x)dx = 1$  pour toute valeur de  $h$ , on s'attend à ce que  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(x)dx = 1$ .

Il est facile de voir sur la figure 4.1 qu'aucune fonction usuelle ne vérifie ces conditions, car à la limite on devrait avoir  $\delta_0(x) = 0$ , pour tout  $x \neq 0$ ,  $\delta_0(0) = +\infty$ , mais cette fonction est d'intégrale indéfinie, voire nulle et non d'intégrale 1.

En conclusion, la notion de limite dans  $\delta_0 = \lim_{h \rightarrow 0} g_h$  ne peut pas être une limite ponctuelle et  $\delta_0$  n'est pas une fonction. On parle de distribution, qui est un concept généralisant les fonctions et d'une limite au sens des distributions.

L'objectif du cours n'étant pas de présenter la théorie des distributions, ce qui serait un cours en soi, nous définirons la distribution (ou impulsion ou encore masse) de Dirac d'après ses propriétés à travers l'intégrale. La masse de Dirac en 0, notée  $\delta_0$  sera pour nous la "fonction" en un sens généralisé qui vérifie la propriété suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(x)f(x)dx = f(0), \quad \text{pourvu que } f \text{ soit continue en } 0. \quad (4.1)$$

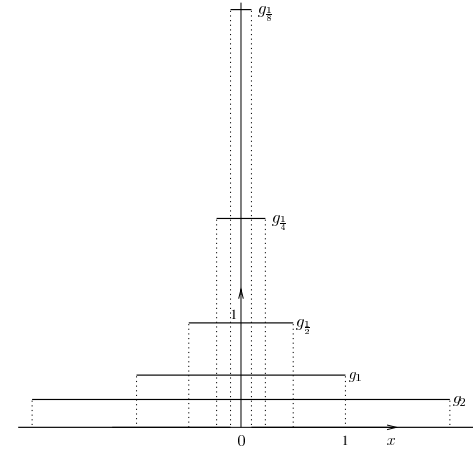


FIGURE 4.1 – La fonction  $g_h$  pour différentes valeurs de  $h$

et en conséquence

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(x)dx = 1,$$

$$\delta_0 * f = f, \quad \text{pourvu que } f \text{ soit continue.}$$

Par translation, on peut définir aussi la masse de Dirac en  $x$  par

$$\delta_x(t) = \delta_0(t - x).$$

Une propriété importante de cette masse de Dirac est qu'elle est la dérivée, au sens des distributions (i.e. de l'intégrale) de la fonction de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

En effet on a

$$H(x) = \int_{-\infty}^x \delta_0(t)dt,$$

au moins pour  $x \neq 0$ . Une difficulté vient du fait que

$$\int_{-\infty}^0 \delta_0(t)dt,$$

est indéterminée (c'est une valeur comprise entre 0 et 1). En effet

$$\int_{-\infty}^0 \delta_0(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{]-\infty, 0]}(t) \delta_0(t) dt,$$

ce qui d'après (4.1) voudrait dire que  $\int_{-\infty}^0 \delta_0(t) dt = \chi_{]-\infty, 0]}(0)$  mais qui ne marche pas car  $\chi_{]-\infty, 0]}$  n'est pas continue en 0. Il est donc recommandé la plus grande prudence dans la manipulation de la masse de Dirac.

On verra en T.D. les applications de la masse de Dirac. En particulier, elle sert à représenter une impulsion de durée infiniment petite.

De la même manière que l'on vient de voir que la suite de fonctions  $g_h$  tend vers la masse de Dirac en un sens particulier (au sens des distributions), on dira qu'une suite de fonctions  $t_h$  tend vers la masse de Dirac au sens des distributions si et seulement si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} t_h(t) f(t) dt = f(0),$$

pour toute fonction  $f$  continue en 0.

## 4.2 Equation de la chaleur

Les équations paraboliques sont de type équation de dissipation, on les rencontre la plupart du temps sous la forme d'une équation évolutive du type

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, x) - \operatorname{div}(q(x) \nabla_x \Phi(t, x)) = h(t, x),$$

où  $q(x) > 0$ . Le terme  $\operatorname{div}(q(x) \nabla_x \Phi(t, x))$  est un terme elliptique par rapport à la variable  $x$ .

Nous allons étudier l'équation unidimensionnelle, avec  $q(x) = k$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = h(t, x), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

### 4.2.1 Solution fondamentale de l'équation de la chaleur

On considère l'équation de la chaleur sur  $\mathbb{R}$  sans terme source

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, & t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x), & \text{où } u_0(x) \text{ est donnée.} \end{cases}$$

On voudrait voir l'évolution d'une quantité de chaleur unitaire concentrée en  $x = 0$ .

La quantité de chaleur portée par  $u_0$  (en supposant que la capacité calorifique est  $C_\rho = 1$ ) est donnée par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x) dx,$$

que l'on veut égale à 1 avec une concentration autour de 0. On pourrait prendre une concentration sur un petit intervalle autour de 0, mais on aurait à choisir la taille de ce petit intervalle. On préfère idéaliser cela en prenant

$$u_0(x) = \delta_0(x),$$

la masse de Dirac en  $x = 0$ . On a alors le résultat suivant

**Proposition 3** *La solution de l'équation de la chaleur*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, & t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = \delta_0(x), \end{cases}$$

est  $u(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \exp(-\frac{x^2}{4kt})$ . On appelle cette solution, la solution élémentaire de l'équation de la chaleur. On la note  $\theta_k(t, x)$ .

**Preuve.** La fonction  $\theta_k(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \exp(-\frac{x^2}{4kt})$  est appelée distribution gaussienne autour de 0 (elle a une grande importance en statistique). Elle vérifie

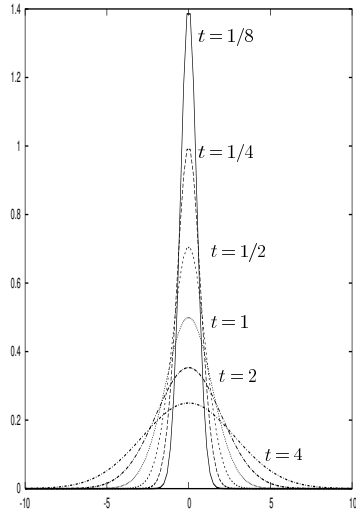
$$\int_{\mathbb{R}} \theta_k(t, x) dx = 1,$$

ce qui est compatible avec la conservation de la quantité de chaleur. On peut le vérifier par le calcul suivant

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{x^2}{l}) dx &= \left( \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-\frac{x^2 + y^2}{l}) dx dy \right)^{1/2} = \left( \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \exp(-\frac{r^2}{l}) r dr d\theta \right)^{1/2} \\ &= \left( 2\pi l \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{t}} dt \right)^{1/2} = \sqrt{\pi l}. \end{aligned}$$

On remarque que la fonction  $\theta_k(t, x)$  admet son maximum en 0 qui vaut  $\theta_k(t, 0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}$  et qui tend vers 0 lorsque  $t$  augmente. Il y a étalement de la solution (cf figure ci-contre).

La fonction  $\theta_k(t, x)$  a des propriétés très similaires à la fonction  $g_h = \chi_{[-h, h]}$  vue au paragraphe 4.1.2. En effet comme  $g_h$  la fonction  $\theta_k(t, x)$  est d'intégrale 1 et concentrée autour de 0. Pour une fonction continue  $f(x)$ , l'intégrale  $\int_{\mathbb{R}} f(x) \theta_k(t, x) dx$  est une moyenne



pondérée autour de 0 de la fonction  $f(x)$  et donc  $\lim_{t \rightarrow 0+} \int_{\mathbb{R}} f(x) \theta_k(t, x) dx = f(0)$ . On a donc  $\lim_{t \rightarrow 0+} \theta_k(t, x) = \delta_0(x)$  (au sens des distributions). La condition initiale est donc vérifiée.

Vérifions maintenant que  $\theta_k(t, x)$  est solution de l'équation de la chaleur. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_k}{\partial t}(t, x) &= -\frac{1}{4\sqrt{\pi k}} t^{-3/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right) + \frac{1}{2\sqrt{\pi k}} t^{-1/2} \left(\frac{x^2}{4kt^2}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right) \\ &= \frac{1}{4\sqrt{\pi k}} t^{-3/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right) \left(-1 + \frac{x^2}{2kt}\right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_k}{\partial x}(t, x) &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi k}} t^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right) \left(\frac{2x}{4kt}\right), \\ \frac{\partial^2 \theta_k}{\partial x^2}(t, x) &= \frac{1}{4k\sqrt{\pi k}} t^{-3/2} \left(-\exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right) + x \exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right) \left(\frac{2x}{4kt}\right)\right) \\ &= \frac{1}{k} \frac{\partial \theta_k}{\partial t}(t, x). \end{aligned}$$

■

L'étalement, ou la dissipation, est un comportement typique des équations paraboliques.

**Remarque 4** On voit que l'effet de l'apport d'une masse de Dirac en  $x = 0$  et  $t = 0$  fait que la solution vérifie

$$\theta_k(t, x) > 0, \quad \text{pour } t > 0, \quad \text{et } x \in \mathbb{R},$$

autrement dit, il y a un effet instantané à une distance arbitraire de la source de chaleur. Heureusement cet effet décroît exponentiellement.

**Proposition 4** La solution de l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, & t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases}$$

est

$$u(t, x) = u_0(x) * \theta_k(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4kt}\right) u_0(y) dy.$$

**Preuve.** On a

$$\lim_{t \rightarrow 0+} u(t, x) = u_0(x) * \lim_{t \rightarrow 0+} \theta_k(t, x) = u_0(x) * \delta_0(x) = u_0(x),$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &= u_0(x) * \frac{\partial \theta_k}{\partial t}(t, x), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) &= u_0(x) * \frac{\partial^2 \theta_k}{\partial x^2}(t, x) = u_0 * \frac{1}{k} \frac{\partial \theta_k}{\partial t}(t, x) = \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x). \end{aligned}$$

■

Des résultats similaires existent en dimensions supérieures. Pour les domaines bornés, on peut adapter la méthode mais c'est plus délicat. C'est pourquoi nous allons voir la méthode de séparation des variables.

#### 4.2.2 Résolution de l'équation de la chaleur par séparation des variables

On cherche à résoudre l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, & t \geq 0, \quad x \in [0, L] \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0, \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases}$$

avec les relations de compatibilité entre la condition initiale et les conditions aux limites

$$u_0(0) = u_0(L) = 0.$$

**1<sup>ère</sup> étape :** La méthode de séparation des variables consiste à poser

$$u(t, x) = \psi(t)\varphi(x),$$

dans l'équation et de "séparer les variables". L'équation devient

$$\psi'(t)\varphi(x) = k\psi(t)\varphi''(x).$$

On divise alors formellement par  $u(t, x) = \psi(t)\varphi(x)$

$$\frac{1}{k} \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}.$$

Comme le membre de gauche ne dépend que de  $t$  et le membre de droite que de  $x$  on en déduit qu'ils sont constants, c'est à dire qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  avec

$$\psi'(t) = \lambda k \psi(t),$$

$$\varphi''(x) = \lambda \varphi(x).$$

On a bien obtenu deux équations à variables séparées.

**2<sup>ème</sup> étape :** On cherche les solutions non nulles de l'équation en  $\varphi(x)$  avec les conditions aux limites, soit

$$\begin{cases} \varphi''(x) = \lambda \varphi(x), \\ \varphi(0) = \varphi(L) = 0. \end{cases}$$

Les solutions dépendent de la constante  $\lambda$

– Si  $\lambda > 0$  alors les solutions de l'équation différentielle sont

$$\varphi(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x},$$

Si on cherche maintenant à tenir compte des conditions aux limites, il vient

$$\begin{aligned} \varphi(0) = 0 &\implies A + B = 0, \\ \varphi(L) = 0 &\implies A(e^{\sqrt{\lambda}L} - e^{-\sqrt{\lambda}L}) = 0, \\ &\implies 2A \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}L) = 0, \\ &\implies A = B = 0. \end{aligned}$$

Il n'y a donc pas de solutions non nulles dans ce cas.

– Si  $\lambda = 0$  alors

$$\varphi(x) = Ax + B,$$

$$\varphi(0) = 0 \implies B = 0,$$

$$\varphi(L) = 0 \implies AL = 0 \implies A = 0.$$

Il n'y a donc pas de solutions non nulles dans ce cas non plus.

– Si  $\lambda < 0$  alors

$$\varphi(x) = A \sin(\sqrt{-\lambda}x) + B \cos(\sqrt{-\lambda}x),$$

$$\varphi(0) = 0 \implies B = 0,$$

$$\varphi(L) = 0 \implies A \sin(\sqrt{-\lambda}L) = 0,$$

$$\implies \text{ou bien } A = 0 \text{ ou bien } \sqrt{-\lambda}L = n\pi, \quad n > 0 \text{ entier.}$$

Il existe donc des solutions non nulles dans ce cas qui sont

$$\varphi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n > 0,$$

associées aux valeurs de  $\lambda$  suivantes

$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}.$$

Au total, on a obtenu une suite infinie de solutions associées chacune à une valeur de  $\lambda$ . On appelle les solutions  $\varphi_n(x)$  les fonctions propres du problème et les  $\lambda_n$  les valeurs propres associées. La fonction propre, comme les vecteurs propre en algèbre linéaire, sont définis à un scalaire multiplicatif près.

**3<sup>ème</sup> étape :** On remarque que le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^L f(x)g(x)dx,$$

orthogonalise la suite des  $\varphi_n(x)$ , dans le sens où

$$\langle \varphi_n(x), \varphi_m(x) \rangle = 0, \quad \text{pour } n \neq m.$$

Ceci indique que la suite des  $\varphi_n(x)$  est une base sur laquelle on va pouvoir développer la solution en la projetant grâce au produit scalaire.

**4<sup>ème</sup> étape :** On résout l'équation en  $\psi(t)$  pour les valeurs de  $\lambda_n$  trouvées précédemment et sans se préoccuper de la condition initiale. On a à résoudre l'équation

$$\psi'_n(t) = \lambda_n k \psi_n(t),$$

qui a pour solutions

$$\psi_n(t) = c_n e^{k\lambda_n t} = c_n e^{-k \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t},$$

étant donné qu'il n'y a pas de condition initiale à cette équation différentielle d'ordre 1 on trouve un espace vectoriel de dimension 1 de solutions.  $c_n$  est une constante arbitraire pour le moment.

A ce stade, les fonctions

$$\psi_n(t)\varphi_n(x),$$

sont solutions de l'E.D.P. et des conditions aux limites mais pas de la condition initiale.

**5<sup>ème</sup> étape :** L'équation étant linéaire, la somme de plusieurs solutions à l'équation est toujours solution de l'équation. On écrit donc la solution  $u(t, x)$  comme somme de toutes les solutions élémentaires

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(t)\varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-k \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Il faut maintenant déterminer les coefficients  $c_n$  pour que la solution  $u(t, x)$  vérifie la condition initiale. Cette condition initiale s'écrit

$$u(0, x) = u_0(x),$$

ce qui donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(0)\varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \varphi_n(x) = u_0.$$

Ici, les  $c_n$  peuvent s'interpréter directement comme étant les coordonnées de la décomposition de  $u_0$  dans la base des  $\varphi_n(x)$ . Comme les  $\varphi_n(x)$  sont orthogonales pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  défini précédemment, on a

$$c_n = \frac{\langle u_0(x), \varphi_n(x) \rangle}{\langle \varphi_n(x), \varphi_n(x) \rangle} = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

On obtient donc la solution sous la forme d'une série. Ici il s'agit d'une série de Fourier où seules les composantes en  $\sin(\frac{n\pi}{L}x)$  sont présentes, puisqu'on a imposé :  $u(0) = u(L) = 0$ .

### 4.3 Equations des ondes

Les équations hyperboliques sont de type équation de propagation d'ondes, on les rencontre la plupart du temps sous la forme d'une équation évolutive du type

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(t, x) - \operatorname{div}(q(x)\nabla_x \Phi(t, x)) = h(t, x), \text{ où } q(x) > 0.$$

Le terme  $\operatorname{div}(q(x)\nabla_x \Phi(t, x))$  est un terme elliptique par rapport à la variable  $x$ .

Comme dans le cas des équations paraboliques, nous allons regarder dans un premier temps l'équation unidimensionnelle, avec  $q(x) = c^2$ , qui est ici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = h(t, x), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}.$$

#### 4.3.1 Résolution de l'équation des cordes vibrantes par séparation des variables

On cherche à résoudre l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, & t \geq 0, x \in [0, L] \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0, \\ u(0, x) = u_0(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = v_0(x). \end{cases}$$

avec les relations de compatibilité entre les conditions initiales et les conditions aux limites

$$u_0(0) = u_0(L) = v_0(0) = v_0(L) = 0.$$

**1<sup>ère</sup> étape :** On pose encore

$$u(t, x) = \psi(t)\varphi(x),$$

et on porte dans l'E.D.P. L'équation devient

$$\psi''(t)\varphi(x) = c^2 \psi(t)\varphi''(x).$$

On divise alors formellement par  $u(t, x) = \psi(t)\varphi(x)$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}.$$

Comme le membre de gauche ne dépend que de  $t$  et le membre de droite que de  $x$  on en déduit qu'ils sont constant, c'est à dire qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  avec

$$\psi''(t) = \lambda c^2 \psi(t),$$

$$\varphi''(x) = \lambda \varphi(x).$$

Et on a obtenu deux équations à variables séparées.

**2<sup>ème</sup> étape :** On cherche les solutions non nulles de l'équation en  $\varphi(x)$  avec les conditions aux limites, soit

$$\begin{cases} \varphi''(x) = \lambda \varphi(x), \\ \varphi(0) = \varphi(L) = 0. \end{cases}$$

C'est exactement la même équation et les mêmes conditions aux limites que pour l'équation de la chaleur unidimensionnelle. On a donc les mêmes solutions

$$\varphi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n > 0,$$

associées aux valeurs de  $\lambda$  suivantes

$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}.$$

**3<sup>ème</sup> étape :** Le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^L f(x)g(x)dx,$$

orthogonalise toujours la suite des  $\varphi_n(x)$ .

**4<sup>ème</sup> étape :** On résout l'équation en  $\psi(t)$  pour les valeurs de  $\lambda_n$  trouvées précédemment et sans se préoccuper de la condition initiale. On a à résoudre l'équation

$$\psi_n''(t) = \lambda_n c^2 \psi_n(t),$$

qui a pour solutions, étant donné que  $\lambda_n < 0$

$$\psi_n(t) = c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}ct\right) + d_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}ct\right),$$

étant donné qu'il n'y a pas de condition initiale à cette équation différentielle d'ordre 2 on trouve un espace vectoriel de dimension 2 de solutions.  $c_n$  et  $d_n$  sont des constantes arbitraires.

A ce stade, les fonctions

$$\left(c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}ct\right) + d_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}ct\right)\right)\varphi_n(x),$$

sont solutions de l'E.D.P. et des conditions aux limites mais pas de la condition initiale.

**5<sup>ème</sup> étape :** On écrit à nouveau la solution  $u(t, x)$  comme somme de toutes les solutions élémentaires

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(t)\varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}ct\right) + d_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}ct\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Il faut maintenant déterminer les coefficients  $c_n$  et  $d_n$  grâce aux conditions initiales, ce qui donne pour  $u(0, x) = u_0(x)$  :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} d_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = u_0.$$

Les  $d_n$  peuvent donc s'interpréter comme étant les coordonnées de la décomposition de  $u_0$  dans la base des  $\varphi_n(x)$ , soit

$$d_n = \frac{\langle u_0(x), \varphi_n(x) \rangle}{\langle \varphi_n(x), \varphi_n(x) \rangle} = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

Quand à la condition  $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = v_0(x)$ , elle donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \frac{n\pi}{L} c \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = v_0.$$

On obtient donc

$$c_n = \frac{L}{n\pi c} \frac{\langle v_0(x), \varphi_n(x) \rangle}{\langle \varphi_n(x), \varphi_n(x) \rangle} = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L v_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

### 4.3.2 Séparation des variables dans le cas 2D

Si  $\Omega$  est un domaine représentant la forme d'un objet dont on veut étudier les vibrations (mur en béton, pièce mécanique, châssis de voiture, pont ...) On étudie l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - c^2 \Delta u(t, x) = 0, \quad \text{pour } x \in \Omega, \quad t \geq 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(t, x) = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

(En réalité, la plupart de ces objets sont élastiques et réagissent à deux équations des ondes : ondes de cisaillement et ondes de compression).

On pose de la même manière

$$u(t, x) = \psi(t)\varphi(x),$$

On se retrouve avec

$$\psi''(t) = \lambda c^2 \psi(t),$$

$$\Delta \varphi(x) = \lambda \varphi(x),$$

Le problème en  $\psi(t)$  ne change pas par rapport aux cas 1D. Le problème aux valeurs propres à résoudre est

$$\begin{cases} \Delta \varphi(x) = \lambda \varphi(x), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n}(t, x) = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Là aussi on trouve une suite infinie  $\lambda_n, \varphi_n$  de solutions. Les valeurs  $\frac{c\sqrt{-\lambda_n}}{2\pi}$  correspondent aux fréquences propres de la structure étudiée.



## 4.4 Généralités sur la méthode de séparation des variables

### 4.4.1 Pour des conditions homogènes et sans terme source

Comme dans les deux cas vus précédemment, on considère une terme source nul et des conditions aux limites (Neumann ou Dirichlet) nulles. On suppose que l'inconnue  $u$  dépend de deux variables,  $t$  et  $x$  avec  $t \in [0, T]$  et  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ .

Les étapes suivante sont nécessaires :

1. On pose  $u(t, x) = \psi(t)\varphi(x)$  et on porte cela dans l'équation. On doit alors obtenir deux équations à variables séparées en opérant une division formelle de l'équation par  $u(t, x) = \psi(t)\varphi(x)$ . Il apparaît de plus un paramètre réel que l'on note  $\lambda$ .
2. On résout l'équation en  $\varphi(x)$  avec les conditions aux limites correspondantes. Il faut alors obtenir une suite infinie de couples de solutions  $\lambda_n, \varphi_n(x)$  dits valeurs et fonctions propres du problème.
3. Il faut trouver un produit scalaire qui orthogonalise la suite des  $\varphi_n(x)$ .
4. On résout l'équation en  $\psi(t)$  pour les valeurs de  $\lambda_n$  trouvées. Ce qui donne une suite de solutions  $\psi_n(t)$ , chaque  $\psi_n(t)$  étant défini à un certain nombre de constante près (qui dépend de l'ordre de l'équation en  $\psi(t)$ ).
5. On écrit la solution générale de l'équation sous la forme  $u(t, x) = \sum_n \psi_n(t)\varphi_n(x)$  et on applique les conditions initiales pour déterminer les coefficients présents dans  $\psi_n(t)$ .

L'objet du paragraphe suivant est de justifier cette méthode et de donner un moyen de trouver le produit scalaire de l'étape 3.

### 4.4.2 Problèmes de Sturm-Liouville en dimension 1

**Définition 7** On appelle problème régulier de Sturm-Liouville le problème d'inconnues  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\mu \in \mathbb{R}$  suivant

$$\frac{d}{dx}(p(x)\varphi'(x)) + (q(x) + \mu s(x))\varphi(x) = 0,$$

avec les conditions aux limites suivantes

$$a_1\varphi(a) + a_2\varphi'(a) = 0,$$

$$b_1\varphi(b) + b_2\varphi'(b) = 0,$$

avec

$$a_1^2 + a_2^2 \neq 0, \quad b_1^2 + b_2^2 \neq 0,$$

et  $p(x)$ ,  $q(x)$  et  $s(x)$  continues et

$$p(x) > 0, \quad s(x) > 0, \quad \text{pour } x \in ]a, b[,$$

L'intérêt de ce problème en ce qui nous concerne est que dans le cas d'une E.D.P. d'inconnue  $u(x, t)$  avec  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \geq 0$ , la méthode de séparation des variables mène à la résolution d'une équation du type

$$a(x)\varphi''(x) + f(x)\varphi'(x) + (g(x) + \mu)\varphi(x) = 0.$$

Cette équation se met sous la forme d'un problème de Sturm-Liouville si on pose

$$p(x) = \exp\left(\int_c^x \frac{f(u)}{a(u)} du\right), \quad c \in [a, b] \text{ quelconque}$$

$$q(x) = \frac{g(x)}{a(x)}p(x),$$

$$s(x) = \frac{p(x)}{a(x)},$$

pourvu que  $p(x) > 0$  et  $a(x) > 0$ . On le vérifie de la manière suivante

$$\frac{d}{dx}(p(x)\varphi'(x)) + (q(x) + \mu s(x))\varphi(x) = 0,$$

$$\iff p(x)\frac{f(x)}{a(x)}\varphi'(x) + p(x)\varphi''(x) + (q(x) + \mu\frac{p(x)}{a(x)})\varphi(x) = 0$$

$$\iff \frac{p(x)}{a(x)}(a(x)\varphi''(x) + f(x)\varphi'(x) + (g(x) + \mu)\varphi(x)) = 0.$$

Les couples  $(\lambda = -\mu, \varphi)$  solutions de ce problème sont encore appelés respectivement valeurs propres et fonctions propres du problème.

Le produit scalaire qui orthogonalise les solutions est donné par le résultat suivant.

**Théorème 1** *Pourvu que le problème de Sturm-Liouville soit régulier avec  $p, q$  et  $s$  continues sur  $[a, b]$ , deux fonctions propres  $\varphi_i$  et  $\varphi_j$  de classe  $C^1$  correspondant à deux valeurs propres distinctes  $\lambda_i$  et  $\lambda_j$  sont orthogonales pour le produit scalaire défini par*

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle_s = \int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) s(x) dx.$$

**Preuve.** Pour  $\varphi_i$  et  $\varphi_j$  on respectivement

$$\frac{d}{dx}(p(x)\varphi_i'(x)) + (q(x) + \lambda_i s(x))\varphi_i(x) = 0,$$

$$\frac{d}{dx}(p(x)\varphi_j'(x)) + (q(x) + \lambda_j s(x))\varphi_j(x) = 0.$$

En multipliant la première équation par  $\varphi_j$  et la deuxième par  $\varphi_i$  et en les soustrayant on obtient

$$\varphi_j(x) \frac{d}{dx}(p(x)\varphi_i'(x)) - \varphi_i(x) \frac{d}{dx}(p(x)\varphi_j'(x)) + (\lambda_i - \lambda_j)s(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x) = 0,$$

soit

$$\frac{d}{dx}(p(x)(\varphi_i'(x)\varphi_j(x) - \varphi_j'(x)\varphi_i(x))) + (\lambda_i - \lambda_j)s(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x) = 0,$$

En intégrant, on obtient

$$\begin{aligned} (\lambda_i - \lambda_j) \int_a^b s(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x) dx &= p(b)((\varphi_i'(b)\varphi_j(b) - \varphi_j'(b)\varphi_i(b))) \\ &\quad - p(a)((\varphi_i'(a)\varphi_j(a) - \varphi_j'(a)\varphi_i(a))), \end{aligned}$$

On fait la même chose avec les conditions aux limites en  $x = a$ . On a

$$a_1\varphi_i(a) + a_2\varphi_i'(a) = 0,$$

$$a_1\varphi_j(a) + a_2\varphi_j'(a) = 0.$$

En multipliant la première équation par  $\varphi_j(a)$  et la deuxième équation par  $\varphi_i(a)$  et en soustrayant, on obtient

$$a_2(\varphi_i'(a)\varphi_j(a) - \varphi_j'(a)\varphi_i(a)) = 0,$$

Donc ou bien  $a_2 = 0$  et alors  $\varphi_i(a) = \varphi_j(a) = 0$  ou bien  $a_2 \neq 0$  et  $\varphi_i'(a)\varphi_j(a) - \varphi_j'(a)\varphi_i(a) = 0$ . Dans les deux cas on a

$$\varphi_i'(a)\varphi_j(a) - \varphi_j'(a)\varphi_i(a) = 0,$$

On peut bien sûr faire le même raisonnement pour la condition en  $x = b$ , et donc finalement on obtient

$$(\lambda_i - \lambda_j) \int_a^b s(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x) dx = 0,$$

et par suite le résultat annoncé du fait que  $\lambda_i \neq \lambda_j$  par hypothèse. ■

On peut montrer d'autres propriétés intéressantes des problèmes de Sturm-Liouville.

**Théorème 2** *Un problème de Sturm-Liouville régulier n'admet que des valeurs propres réelles.*

**Preuve.** Admettons que  $\lambda_j = \alpha + i\beta$  soit valeur propre avec  $\beta \neq 0$  du problème de Sturm-Liouville avec  $\varphi_j = u + iv$  comme fonction propre. Alors

$$\frac{d}{dx}(p(x)(u'(x) + iv'(x))) + (q(x) + (\alpha + i\beta)s(x))(u(x) + iv(x)) = 0.$$

Si on prend la complexe conjuguée de l'équation on obtient

$$\frac{d}{dx}(p(x)(u'(x) - iv'(x))) + (q(x) + (\alpha - i\beta)s(x))(u(x) - iv(x)) = 0,$$

qui implique que  $\lambda_k = \alpha - i\beta$  est valeur propre avec  $\varphi_k = u - iv$  comme fonction propre. Si on reprend la preuve du théorème précédent on arrive à

$$(\lambda_j - \lambda_k) \int_a^b s(x)\varphi_j(x)\varphi_k(x) dx = 0,$$

ce qui implique  $\lambda_j - \lambda_k = 0$  soit  $\beta = 0$ . Autrement dit, la valeur propre n'est pas complexe. ■

**Théorème 3** *Pour un problème de Sturm-Liouville régulier, à chaque valeur propre correspond une unique fonction propre (à un coefficient multiplicatif près).*

**preuve.** Soit  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  deux fonctions propres associées à la même valeur propre  $\lambda$ . Alors

$$\frac{d}{dx}(p(x)\varphi_1'(x)) + (q(x) + \lambda s(x))\varphi_1(x) = 0,$$

$$\frac{d}{dx}(p(x)\varphi_2'(x)) + (q(x) + \lambda s(x))\varphi_2(x) = 0.$$

En multipliant la première équation par  $\varphi_2$  et la deuxième par  $\varphi_1$  et en les soustrayant on obtient

$$\varphi_2(x) \frac{d}{dx}(p(x)\varphi_1'(x)) - \varphi_1(x) \frac{d}{dx}(p(x)\varphi_2'(x)) = 0,$$

Soit

$$\frac{d}{dx}(p(x)(\varphi_1'(x)\varphi_2(x) - \varphi_2'(x)\varphi_1(x))) = 0,$$

Soit encore

$$p(x)(\varphi_1'(x)\varphi_2(x) - \varphi_2'(x)\varphi_1(x)) = cte = p(a)(\varphi_1'(a)\varphi_2(a) - \varphi_2'(a)\varphi_1(a)) = 0,$$

d'après la démonstration du théorème 1. Donc

$$\varphi_1'(x)\varphi_2(x) - \varphi_2'(x)\varphi_1(x) = 0,$$

et par suite :  $\varphi_1(x) = cte \times \varphi_2(x)$ . ■

**Théorème 4** (admis) Soit un problème de Sturm-Liouville régulier pour lequel  $q(x) \leq 0$ . Alors ce problème admet une infinité de valeurs propres

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_i < \dots$$

avec  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \lambda_i = +\infty$ .

**Théorème 5** (admis) Soit un problème de Sturm-Liouville régulier pour lequel  $q(x) \leq 0$  et soient  $\lambda_n$  la suite des valeurs propres et  $\varphi_n$  la suite des fonctions propres correspondantes. Alors toute fonction continue

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},$$

telle que

$$\int_a^b f^2(t) dt < +\infty,$$

et qui se décompose en

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \varphi_n(x),$$

avec

$$a_n = \frac{\int_a^b f(x) \varphi_n(x) s(x) dx}{\int_a^b \varphi_n^2(x) s(x) dx}.$$

#### 4.4.3 La méthode de séparation des variables en présence d'un terme source

Par exemple

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = t \sin(\pi x), & \text{pour } 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, x) = \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0, \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0. \end{cases}$$

Les trois premières étapes se font en oubliant le terme source  $h(t, x) = t \sin(\pi x)$  (i.e. sur l'équation homogène). Dans cet exemple on trouve la suite de valeurs propres  $\lambda_n = -n^2 \pi^2$  associées aux fonctions propres  $\phi_n(x) = \sin(n\pi x)$  qui sont orthogonalisées par le produit scalaire  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ .

**Nouvelle étape 4 :** On fait le produit scalaire de l'équation avec le terme source par une fonction propre  $\phi_n(x)$  en considérant que la solution  $u(t, x)$  s'écrit  $u(t, x) = \psi_n(t)\phi_n(x)$ .

On arrive à

$$\psi_n''(t) \langle \phi_n(x), \phi_n(x) \rangle - \psi_n(t) \langle \phi_n''(x), \phi_n(x) \rangle = \langle h(t, x), \phi_n(x) \rangle,$$

et donc

$$\psi_n''(t) - \lambda_n \psi_n(t) = \frac{\langle h(t, x), \phi_n(x) \rangle}{\langle \phi_n(x), \phi_n(x) \rangle}.$$

On arrive en fait à la résolution de la même équation que dans le cas sans terme source mais avec un second membre qui vaut  $h_n(t) = \frac{\langle h(t, x), \phi_n(x) \rangle}{\langle \phi_n(x), \phi_n(x) \rangle}$ .

Dans l'exemple, on obtient

$$h_1(t) = t, \quad \text{et} \quad h_n(t) = 0, \quad \text{pour } n \geq 2.$$

– Pour  $n = 1$  on a donc à résoudre

$$\psi_1''(t) + \pi^2 \psi_1(t) = t.$$

Les solutions sont :  $\psi_1(t) = c_1 \sin(\pi t) + d_1 \cos(\pi t) + \frac{t}{\pi^2}$ .

– Pour  $n \geq 2$  on a à résoudre

$$\psi_n''(t) + n^2 \pi^2 \psi_n(t) = 0.$$

Les solutions sont :  $\psi_n(t) = c_n \sin(n\pi t) + d_n \cos(n\pi t)$ .

Par la suite l'étape 5 se déroule comme dans le cas sans terme source.

#### 4.4.4 Méthode de séparation des variables avec des conditions aux limites non homogènes

Par exemple

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, & \text{pour } 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, x) = \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0, \\ u(t, 0) = f(t), \quad u(t, 1) = g(t). \end{cases}$$

Une méthode est de relever les conditions aux limites. Pour cela on cherche une fonction  $\theta(t, x)$ , *a priori* quelconque vérifiant les conditions aux limites (dans la pratique, il faut essayer de choisir la fonction la plus simple possible). Dans l'exemple, on peut prendre

$$\theta(t, x) = (1 - x)f(t) + xg(t),$$

puis on fait un changement d'inconnue :  $\tilde{u}(t, x) = u(t, x) - \theta(t, x)$ , de telle manière à ce que  $\tilde{u}(t, x)$  vérifie des conditions aux limites homogènes. Dans l'exemple, le problème en  $\tilde{u}(t, x)$  s'écrit

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}(t, x) = -\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}(t, x), & \text{pour } 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ \tilde{u}(0, x) = -\theta(0, x), \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(0, x) = -\frac{\partial \theta}{\partial t}(0, x), \\ \tilde{u}(t, 0) = 0, \quad \tilde{u}(t, 1) = 0. \end{cases}$$

## Chapitre 5

### Transformée de Laplace et applications

La transformée de Laplace est un outil de résolution de problèmes, principalement évolutifs, modélisés par des équations différentielles ou intégrales linéaires ou des équations aux dérivées partielles linéaires.

Principale référence bibliographique : M.R. Spiegel, “Transformées de Laplace, cours et problèmes”, Série Schaum.

#### 5.1 Définition de la transformée de Laplace

Soit une application

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\text{ou } \mathbb{C}),$$

telle que

$$f(t) = 0, \quad \text{pour } t < 0.$$

Pour  $p > 0$ , on définit

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt,$$

lorsque cette intégrale existe.  $F$  est appelée **transformée de Laplace** de  $f$ . Par rapport à  $F$  on dira aussi que  $f$  est l'**original** de  $F$  par la transformée de Laplace. On note

$$F = \mathcal{L}[f],$$

$$f = \mathcal{L}^{-1}[F].$$

#### 5.2 Transformée de Laplace de quelques fonctions élémentaires

Attention, implicitement, la valeur de la fonction  $f(t)$  est 0 pour  $t < 0$ . Bien que cela n'intervienne pas pour le moment, il faut garder cela à l'esprit pour certains résultats (translations par exemple).

- Pour  $f(t) = 1 \times H(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0, \\ 1 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$  :

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)](p) = \frac{1}{p}, \quad \text{pour } p > 0.$$

- Pour  $f(t) = tH(t)$  :

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)](p) = \frac{1}{p^2}, \quad \text{pour } p > 0.$$

- Pour  $f(t) = t^n H(t)$ ,  $n > 1$  : On établit par récurrence que

$$\mathcal{L}[t^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad \text{pour } p > 0.$$

- Pour  $f(t) = e^{at} H(t)$  :

$$\mathcal{L}[e^{at}](p) = \frac{1}{p-a}, \quad \text{pour } p > a.$$

Cette fois-ci, on voit que le domaine de définition est plus réduit, au moins si  $a > 0$ .

- Pour  $f(t) = e^{(\lambda+i\omega)t} H(t)$  :

$$\mathcal{L}[e^{(\lambda+i\omega)t}](p) = \frac{1}{p-\lambda-i\omega}, \quad \text{pour } p > \lambda.$$

- Pour  $f(t) = \sin(\omega t) H(t)$  :

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)](p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad \text{pour } p > 0.$$

- Pour  $f(t) = \cos(\omega t) H(t)$  :

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)](p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \quad \text{pour } p > 0.$$

- Pour  $f(t) = \text{sh}(\omega t) H(t)$  :

$$\mathcal{L}[\text{sh}(\omega t)](p) = \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}, \quad \text{pour } p > |\omega|.$$

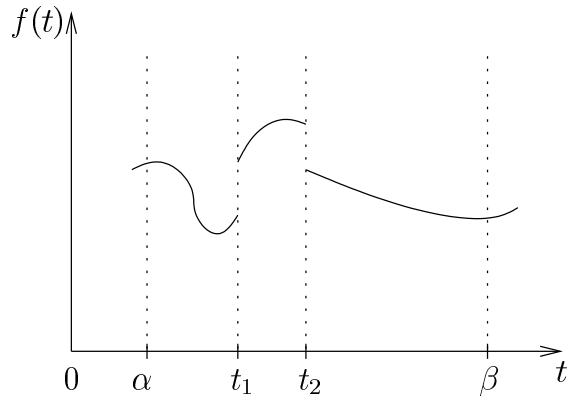
- Pour  $f(t) = \text{ch}(\omega t) H(t)$  :

$$\mathcal{L}[\text{ch}(\omega t)](p) = \frac{p}{p^2 - \omega^2}, \quad \text{pour } p > |\omega|.$$

### 5.3 Condition suffisante d'existence de la transformée de Laplace

**Définition 8** On dit que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ), est continue par morceaux sur  $]0, +\infty[$  si pour tout  $0 < \alpha < \beta$ , l'intervalle  $[\alpha, \beta]$  peut être découpé en un nombre fini d'intervalles (fermés) sur lesquels  $f$  est continue.

Ceci assure que  $f(t^-)$  et  $f(t^+)$  existent pour tout  $t$ , et donc que la fonction  $f(t)$  n'admet que des singularités de première espèce, en dehors de 0.



**Définition 9** On dit que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ), est une fonction exponentielle d'ordre  $\gamma$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$  s'il existe deux constantes  $a > 0$  et  $t_0 \geq 0$  telles que

$$|f(t)| \leq ae^{\gamma t}, \quad \text{pour } t \geq t_0.$$

Exemples :

- Toutes les fonctions bornées sont exponentielles d'ordre 0 ( $\sin(\omega t)$ ,  $\cos(\omega t)$  ...)
- $F(t) = t^2$  est exponentielle d'ordre  $\gamma$  pour tout  $\gamma > 0$ .
- $F(t) = e^{t^3}$  n'est pas d'ordre exponentielle.

**Théorème 6** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ), avec  $f(t) = 0$  pour  $t < 0$ . Si les conditions suivantes sont réunies :

- $f$  est continue par morceaux sur  $]0, +\infty[$ ,
- $f$  est exponentielle d'ordre  $\gamma$ ,
- pour tout  $t_0 > 0$ ,  $\int_0^{t_0} |f(t)| dt$  existe (soit  $\int_0^{t_0} |f(t)| dt < +\infty$ ),

alors  $F(p) = \mathcal{L}[f(t)](p)$  existe pour  $p > \gamma$ . Le domaine de définition de  $F(p)$  contient donc l'intervalle  $]\gamma, +\infty[$ .

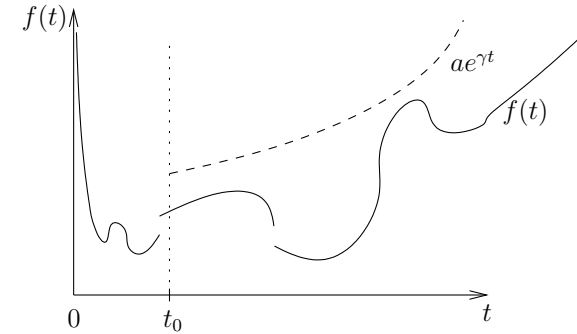


FIGURE 5.1 – La fonction  $f(t)$  doit être intégrable entre 0 et  $t_0$ , elle peut donc avoir une singularité en  $\frac{1}{t^\alpha}$  pour  $\alpha < 1$  par exemple. Elle peut avoir des singularités de première espèce et son graphe doit se situer en dessous de  $ae^{\gamma t}$  pour  $t > t_0$ .

**Preuve du Théorème.** On doit vérifier que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-pt} f(t) dt$$

existe. Une condition suffisante est que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-pt} |f(t)| dt < +\infty.$$

Mais on a

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{-pt} |f(t)| dt &= \int_0^{t_0} e^{-pt} |f(t)| dt + \int_{t_0}^x e^{-pt} |f(t)| dt \\ &\leq \int_0^{t_0} |f(t)| dt + \int_{t_0}^x ae^{\gamma t} e^{-pt} dt, \end{aligned}$$

ce qui permet d'établir la preuve car on a supposé que  $\int_0^{t_0} |f(t)|dt$  existe et on a  $\int_{t_0}^x ae^{\gamma t} e^{-pt} dt = \frac{a}{\gamma - p} [e^{(\gamma-p)t}]_{t_0}^x$  et bien sûr  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(\gamma-p)x} = 0$ .

■

## 5.4 Propriétés de la transformée de Laplace

Dans la suite,  $f(t)$  et  $g(t)$  sont deux fonctions convenables de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ), dans le sens où l'on suppose qu'elles satisfont aux conditions du théorème 6.

### Linéarité de la transformée de Laplace

Soit  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , alors on a

$$\mathcal{L}[\lambda f + \mu g] = \lambda \mathcal{L}[f] + \mu \mathcal{L}[g],$$

sur l'intersection des domaines de définition de  $\mathcal{L}[f]$  et  $\mathcal{L}[g]$ .

### Première propriété de translation

Pour  $a \in \mathbb{R}$ , on a

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)](p) = \mathcal{L}[f(t)](p - a).$$

Attention au domaine de définition de  $\mathcal{L}[e^{at} f(t)](p)$ . Exemples :

$$\mathcal{L}[t^2] = \frac{2}{p^3} \text{ pour } p > 0, \quad \text{donc} \quad \mathcal{L}[e^{t^2}] = \frac{2}{(p-1)^3} \text{ pour } p > 1.$$

### Deuxième propriété de translation

Pour  $a > 0$  on a

$$\mathcal{L}[f(t-a)](p) = e^{-ap} \mathcal{L}[f(t)](p).$$

ATTENTION : On utilise le fait que  $f(t)$  est supposée nulle pour  $t < 0$ . C'est donc une hypothèse importante si on veut appliquer cette règle. La propriété ne marche pas pour  $a < 0$ .

Exemple d'utilisation

$$\mathcal{L}[\sin(t-1)H(t-1)](p) = \frac{e^{-p}}{p^2 + 1}.$$

### Propriété de changement d'échelle

Pour  $a > 0$  on a

$$\mathcal{L}[f(at)](p) = \frac{1}{a} \mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{p}{a}\right).$$

Exemple : retrouver  $\cos(at)$  à partir de  $\cos(t)$

$$\mathcal{L}[\cos(at)](p) = \frac{1}{a} \left( \frac{p/a}{p^2/a^2 + 1} \right) = \frac{p}{p^2 + a^2}.$$

### Transformée de Laplace de dérivées

Si  $f'(t)$  satisfait aux conditions du théorème 6, et si  $f(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$  existe alors

$$\mathcal{L}[f'(t)](p) = p \mathcal{L}[f(t)](p) - f(0+).$$

Exemple : retrouver  $\mathcal{L}[\cos(at)]$  à partir de  $\mathcal{L}[\sin(at)]$

$$a \mathcal{L}[(\cos(at))'](p) = \mathcal{L}[(\sin(at))'](p) = p \mathcal{L}[\sin(at)](p) = p \frac{a}{p^2 + a^2} = a \frac{p}{p^2 + a^2}.$$

Par récurrence on obtient la formule pour une dérivée nième :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f^{(n)}(t)](p) &= p^n \mathcal{L}[f(t)](p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-1-k} f^{(k)}(0+) \\ &= p^n \mathcal{L}[f(t)](p) - p^{n-1} f(0+) - p^{n-2} f'(0+) - \dots - f^{(n-1)}(0+), \end{aligned}$$

toujours sous réserve de régularité de la fonction et des dérivées.

### Transformée de Laplace de primitives

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(s)ds\right](p) = \frac{1}{p} \mathcal{L}[f(t)](p),$$

En utilisant le résultat précédent.

**Multiplication par  $t^n$** 

Pour  $n > 0$  on a

$$\mathcal{L}[t^n f(t)](p) = (-1)^n (\mathcal{L}[f(t)])^{(n)}(p),$$

**Division par  $t$** 

Si  $\frac{f(t)}{t}$  satisfait aux conditions du théorème 6 on a

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](p) = \int_p^{+\infty} \mathcal{L}[f(t)](u) du,$$

car

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \int_p^{+\infty} e^{-ut} f(t) du dt.$$

Exemple, à partir de  $\mathcal{L}[\sin(t)](p) = \frac{1}{p^2 + 1}$ , on a

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin(t)}{t}\right] = \int_p^{+\infty} \frac{du}{u^2 + 1} = \text{Arctg}\left(\frac{1}{p}\right).$$

**Transformée de Laplace d'une fonction périodique**

On suppose que  $f(t)$  est périodique de période  $T$  pour  $t > 0$ , autrement dit

$$f(t + T) = f(t), \quad \text{pour } t > 0.$$

Alors on a

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t) dt.$$

C'est à dire que l'on utilise la transformée sur la première période. En effet, on a

$$\mathcal{L}[f(t)] = \sum_{n \geq 0} \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-pt} f(t - nT) dt = \sum_{n \geq 0} \int_0^T e^{-p(u+nT)} f(u) du = \left( \sum_{n \geq 0} e^{-pnT} \right) \int_0^T e^{-pu} f(u) du.$$

**Limite quand  $p \rightarrow +\infty$** 

En posant  $F = \mathcal{L}[f]$  on a

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} F(p) = 0,$$

ceci vient du fait que la fonction vérifie les hypothèses du théorème 1.

**Théorème de la valeur initiale**

On a

$$f(0+) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \mathcal{L}[f(t)](p).$$

**Théorème de la valeur finale**

Si  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) \in \mathbb{R}$  alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \mathcal{L}[f(t)](p),$$

**Équivalence en 0 et  $+\infty$** 

Quand  $\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$  on dit que  $f$  et  $g$  sont équivalentes quand  $t$  tend vers  $a$ .

Si  $g(t) > 0$  (ou  $g(t) < 0$ ) pour  $t$  assez petit, et  $f$  et  $g$  sont équivalentes quand  $t$  tend vers 0, alors  $\mathcal{L}[f]$  et  $\mathcal{L}[g]$  sont équivalentes quand  $p$  tend vers  $+\infty$ .

**Unicité de l'original**

Si  $F = \mathcal{L}[f]$  et  $F = \mathcal{L}[g]$  alors  $f = g$ , au moins aux points de continuité de  $f$  et  $g$  (en fait presque partout, cf la suite).

## 5.5 Transformée de Laplace et convolution

**Définition 10 (Rappel.)** Soient deux fonctions  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}(\text{ ou } \mathbb{C})$ . On appelle convolution de  $f$  et  $g$  la fonction que l'on note  $f * g$ , si elle existe, définie par

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x-u)du.$$

Pour  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}(\text{ ou } \mathbb{C})$  convenables, en particulier telles que  $f(t) = g(t) = 0$  pour  $t < 0$ . On pose

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)du = \int_0^t f(u)g(t-u)du,$$

alors

$$\mathcal{L}[h](p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}h(t)dt = \int_0^{+\infty} \int_0^t e^{-pt}f(u)g(t-u)dudt,$$

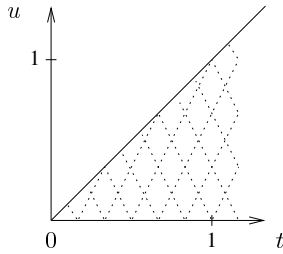


FIGURE 5.2 – Domaine d'intégration

$$\mathcal{L}[h](p) = \int_0^{+\infty} \int_u^{+\infty} e^{-pt}f(u)g(t-u)dtdu,$$

et en posant  $v = t - u$

$$\mathcal{L}[h](p) = \int_0^{+\infty} f(u) \int_0^{+\infty} e^{-p(v+u)}g(v)dvdu = \int_0^{+\infty} e^{-pu}f(u)du \int_0^{+\infty} e^{-pv}g(v)dv.$$

Et donc

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g],$$

Autrement dit, la transformée de Laplace transforme un produit de convolution en produit simple des transformées de Laplace.

## 5.6 Impulsion de Dirac à droite $\delta_0^+$

La définition que l'on a donné de l'impulsion de Dirac correspond à des fonctions qui ne sont pas nulles pour  $t < 0$  ce qui est le cas des fonctions que l'on manipule avec la transformée de Laplace. On a vu que  $\int_0^{+\infty} \delta_0(t)dt$  est indéfini. On définit donc l'impulsion de Dirac à droite  $\delta_0^+$  ayant les propriétés suivantes pour toute fonction  $f$  nulle pour  $t < 0$  et ayant une limite à droite en  $t = 0$  :

$$\int_0^{+\infty} \delta_0^+(t)f(t)dt = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t),$$

$$\delta_0^+ * f = f,$$

$$\mathcal{L}[\delta_0^+] = 1.$$

Cette impulsion de Dirac à droite est la limite au sens des distributions des fonctions  $\bar{g}_h$  définies par

$$\bar{g}_h(t) = \frac{1}{h} \chi_{[0, h]},$$

Cette définition nous permettra de modéliser des phénomènes de type impulsionnel tout en rendant possible la résolution via la transformée de Laplace.

## 5.7 Fonction $\Gamma$

La fonction  $\Gamma$  est définie pour  $x > 0$  par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-u} du,$$

On a

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

De plus

$$\Gamma(1) = 1.$$

Et donc pour  $n$  entier strictement positif on a

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

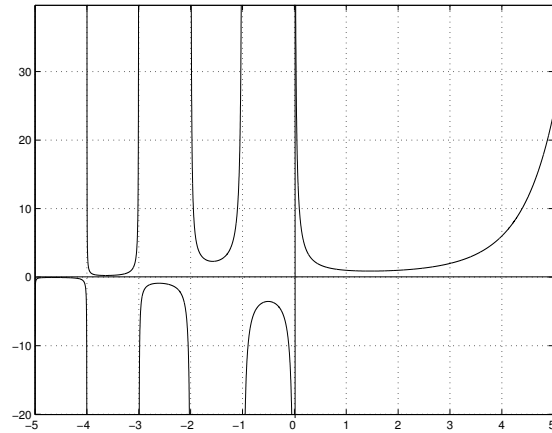
La fonction  $\Gamma(x+1)$  est donc une fonction qui interpole  $n!$ .

Quelques autres propriétés :

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \Gamma(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \Gamma(x) = +\infty,$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$



FIGURE 5.3 – Allure de la fonction  $\Gamma$ 

On montre alors que

$$\mathcal{L}[t^s](p) = \frac{\Gamma(s+1)}{p^{s+1}}, \text{ pour } s > -1,$$

ce qui interpole une formule déjà trouvée pour  $s$  entier positif.

**Exemple :** Calculer la transformée de Laplace de  $f$  lorsque  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}H(t)$ .

## 5.8 Résolution de problèmes grâce à la transformée de Laplace

Étant donnée une équation à résoudre (e.d.o. ou e.d.p.) on va récrire l'équation équivalente sur la transformée de Laplace en faisant la transformée de Laplace de l'équation elle-même et en utilisant les propriétés vues précédemment.

Si on veut résoudre, par exemple, le problème suivant

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = f(t), & \text{pour } t > 0, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -2, \end{cases}$$

On va poser :  $Y = \mathcal{L}[y]$ , et on aura alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y'](p) &= pY(p) - 1, \\ \mathcal{L}[y''](p) &= p^2Y(p) - p + 2, \end{aligned}$$

d'après la propriété établie sur la transformée de Laplace de dérivées. On effectue alors la transformée de Laplace de l'équation

$$\mathcal{L}[y'' + y] = \mathcal{L}[f].$$

Soit en utilisant en plus la linéarité de la transformée de Laplace

$$p^2Y(p) - p + 2 + Y(p) = \mathcal{L}[f].$$

On obtient donc

$$Y(p) = \frac{\mathcal{L}[f] + p - 2}{p^2 + 1}.$$

On a donc résolu le problème dans le sens où on a l'expression de la transformée de Laplace de la solution. Il reste bien sûr, en fonction de  $f$ , à retrouver  $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(p)](t)$ . Pour cela on pourra utiliser toutes les propriétés établies précédemment ainsi qu'un glossaire de transformées de Laplace connues.

### 5.8.1 Les équations différentielles ordinaires à coefficients constants

Plus généralement, soit le problème d'inconnue  $y(t)$

$$\begin{cases} a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = f(t), & \text{pour } t > 0, \\ y(0+) = y_0, \quad y'(0+) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(0+) = y_{n-1}. \end{cases}$$

En posant  $Y = \mathcal{L}[y]$ , on a

$$\mathcal{L}[y^{(n)}] = p^n Y(p) - p^{n-1} y_0 - p^{n-2} y_1 - \dots - y_{n-1},$$

On applique alors la transformée de Laplace à toute l'équation, ce qui donne en utilisant la linéarité

$$\sum_{i=0}^n a_i \mathcal{L}[y^{(i)}] = \mathcal{L}[f],$$

puis, avec  $F(p) = \mathcal{L}[f]$

$$a_0 Y(p) + a_1 (pY(p) - y_0) + a_2 (p^2 Y(p) - p y_0 - y_1) + \dots + a_n (p^n Y(p) - p^{n-1} y_0 - \dots - y_{n-1}) = F(p),$$

soit

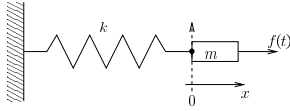
$$\alpha(p)Y(p) - \beta(p) = F(p),$$

où  $\alpha(p)$  et  $\beta(p)$  sont les deux polynômes en  $p$  suivant

$$\alpha(p) = \sum_{i=0}^n a_i p^i, \quad \beta(p) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=k+1}^n a_i p^{i-k-1} y_k.$$

Donc :  $Y(p) = \frac{F(p)}{\alpha(p)} + \frac{\beta(p)}{\alpha(p)}$ . La partie  $\frac{\beta(p)}{\alpha(p)}$  représente la transformée de Laplace de la solution de l'équation différentielle pour  $f = 0$ . C'est aussi la partie qui dépend des conditions initiales. C'est une fraction rationnelle ; on verra dans le paragraphe suivant comment en trouver l'original.

**Exemple.** On considère le système masse ressort. Un ressort linéaire de raideur  $k$  est



attaché par une de ses extrémités à une fondation fixe et par l'autre à une masselotte de masse  $m$  qui subit elle-même l'influence d'une force  $f(t)$ . La position de la masselotte est représentée par  $x(t)$  avec une position au repos  $x = 0$ . L'évolution de  $x(t)$  est donnée par

$$\begin{cases} m \frac{d^2}{dt^2} x(t) + kx(t) = f(t), & \text{pour } t > 0, \\ x(0) = x_0, \quad x'(0+) = x_1. \end{cases}$$

Transformée de Laplace de l'équation :

$$m(p^2 X(p) - px_0 - x_1) + kX(p) = F(p),$$

où l'on a posé  $X = \mathcal{L}[f]$  et  $F = \mathcal{L}(f)$ . Il vient donc  $X(p) = \frac{F(p)}{mp^2 + k} + \frac{m(px_0 + x_1)}{mp^2 + k}$ .

Supposons pour simplifier que  $x_0 = x_1 = 0$ , on sait que

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{km}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)\right] = \frac{1}{mp^2 + k} = \frac{1}{m} \frac{1}{p^2 + k/m}.$$

On peut donc en conclure que

$$x(t) = (f(s) * \frac{1}{\sqrt{km}} \sin(\sqrt{\frac{k}{m}} s))(t) H(t).$$

### 5.8.2 Original d'une fraction rationnelle

On a vu que la résolution des équations différentielle ordinaires linéaires à coefficients constants par la transformée de Laplace mène à la recherche d'originaux de la forme

$$\mathcal{L}[y(t)](p) = \frac{F(p)}{\alpha(p)} + \frac{\beta(p)}{\alpha(p)},$$

où  $\frac{1}{\alpha(p)}$  et  $\frac{\beta(p)}{\alpha(p)}$  sont des fractions rationnelles, avec  $\beta(p)$  un polynôme de degré au plus  $n-1$  et  $\alpha(p)$  un polynôme de degré au plus  $n$ .

La stratégie est de décomposer ces fractions rationnelles en éléments simples puis d'utiliser les transformées de Laplace connues.

Rappels sur la décomposition en éléments simples :

- Si le degré de  $\gamma(p)$  est supérieur à celui de  $\delta(p)$  alors pour décomposer  $\frac{\gamma(p)}{\delta(p)}$  il faut d'abord effectuer la division euclidienne de  $\gamma(p)$  par  $\delta(p)$ .
- $\frac{\gamma(p)}{(p-a)\delta(p)} = \frac{c}{p-a} + \dots$ ,
- $\frac{\gamma(p)}{(p-a)^2\delta(p)} = \frac{c_1}{p-a} + \frac{c_2}{(p-a)^2} + \dots$ ,
- $\frac{\gamma(p)}{(p-a)^j\delta(p)} = \frac{c_1}{p-a} + \frac{c_2}{(p-a)^2} + \dots + \frac{c_j}{(p-a)^j} + \dots$ ,
- $\frac{\gamma(p)}{(p^2+a^2)\delta(p)} = \frac{cp+d}{p^2+a^2} + \dots$
- $\frac{\gamma(p)}{(p^2+a^2)^j\delta(p)} = \frac{c_1p+d_1}{p^2+a^2} + \frac{c_2p+d_2}{(p^2+a^2)^2} + \dots + \frac{c_jp+d_j}{(p^2+a^2)^j} + \dots$

Quand on a obtenu la forme de la décomposition appropriée à l'aide de ces règles, on identifie les constantes en prenant des valeurs de  $p$  appropriées.

**Exemple.** Avec  $F(p) = \frac{p+3}{(p^2+1)(p-2)^2}$  on a

$$F(p) = \frac{c_1}{p-2} + \frac{c_2}{(p-2)^2} + \frac{c_3p+c_4}{p^2+1}.$$

- On multiplie par  $(p-2)^2$  puis on fait  $p=2$  et on obtient  $c_2 = 1$ .
- On multiplie par  $p-2$  puis on fait  $p \rightarrow +\infty$  et on obtient  $c_1 + c_3 = 0$ .
- On fait  $p=0$ , on obtient  $c_4 = \frac{1}{2}(1+c_1)$ .
- On fait  $p=1$ , on obtient  $-2c_1 + c_3 + c_4 = 2$ .

On arrive donc à

$$F(p) = \frac{1}{5} \left( -\frac{3}{p-2} + \frac{5}{(p-2)^2} + \frac{3p+1}{p^2+1} \right).$$

On utilise alors les transformées de Laplace connues

$$\mathcal{L}[t^n e^{at}] = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}},$$

$$\mathcal{L}[\alpha \cos(at) + \frac{\beta}{a} \sin(at)] = \frac{\alpha p + \beta}{p^2 + a^2},$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\alpha}{2a} t \sin(at) + \beta \left(\frac{\sin(at)}{2a^3}\right) - t \frac{\cos(at)}{2a^2}\right] = \frac{\alpha p + \beta}{(p^2 + a^2)^2}.$$

Ce qui donne ici

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p+3}{(p^2+1)(p-2)^2}\right] &= \frac{1}{5} \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{3}{p-2} + \frac{5}{(p-2)^2} + \frac{3p+1}{p^2+1}\right] \\ &= \frac{1}{5} (-3e^{2t} + 5te^{2t} + 3\cos(t) + \sin(t))H(t). \end{aligned}$$