



同濟大學
TONGJI UNIVERSITY

硕士学位论文

衰减介质的反射全波形反演方法研究

姓名：邹鹏

学号：1533006

所在院系：海洋与地球科学学院

学科门类：理学

学科专业：地球物理学

指导教师：程玖兵 教授

2018-06



同濟大學
TONGJI UNIVERSITY

A dissertation submitted to
**Tongji University in conformity with the requirements for
the Master of Philosophy**

Reflection Full Waveform inversion in Attenuation Media

Candidate: Peng Zou

Student Number: 1533006

School/Department: Ocean and Earth Science

Discipline: Natural Science

Major: Geophysics

Supervisor: Prof. Jiubing Cheng

May, 2017

学位论文版权使用授权书

本人完全了解同济大学关于收集、保存、使用学位论文的规定，同意如下各项内容：按照学校要求提交学位论文的印刷本和电子版本；学校有权保存学位论文的印刷本和电子版，并采用影印、缩印、扫描、数字化或其它手段保存论文；学校有权提供目录检索以及提供本学位论文全文或者部分的阅览服务；学校有权按有关规定向国家有关部门或者机构递交论文的复印件和电子版；在不以赢利为目的的前提下，学校可以适当复制论文的部分或全部内容用于学术活动。

学位论文作者签名：

年 月 日

学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人创作的、已公开发表或者没有公开发表的作品的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本学位论文原创性声明的法律责任由本人承担。

学位论文作者签名：

年 月 日

摘要

关键词： test test test

ABSTRACT

KEY WORDS: test, test, test,

目录

插图	viii
第一章 绪论	1
1.1 研究背景及意义	1
1.2 国内外研究现状	3
1.3 本文研究内容	6
第二章 衰减介质理论基础	7
2.1 衰减理论及其表征	7
2.1.1 复模量及耗散存储模量	7
2.1.2 品质因子与衰减系数	8
2.2 描述衰减性的基本模型	9
2.2.1 Maxwell 模型	11
2.2.2 Kelvin-Voigt 模型	12
2.2.3 Zener 模型或标准线性固体模型	15
2.2.4 广义 Zener 模型/近似常 Q 模型	17
2.2.5 常 Q 模型	19
2.3 衰减介质地震波传播模拟	20
2.3.1 SLS 模型波动方程模拟	20
2.3.2 常 Q 模型波动方程模拟	25
2.3.3 衰减模型在地震波偏移成像中的应用	26
第三章 基于粘声方程的反射全波形反演	31
3.1 引言	31
3.2 方法原理	32
3.2.1 反射波波形反演基本思路	32
3.2.2 基于粘声方程的反射全波形反演	36
3.3 数值实验	41

第四章 基于频移目标函数的反射全波形反演	47
4.1 引言	47
4.2 方法原理	49
4.3 多震相反射数据峰值频率提取	54
4.4 数值实验	57
总结与展望	59
附录 A 低秩近似求解 DCQ 方程	61
附录 B DCQ 方程反射全波形反演梯度推导	63
参考文献	65
致 谢	73
个人简历、在读期间发表的学术论文与研究	75
攻读学位期间参与的项目	77

插图

1-1 展示地震衰减效应的一维数值实验	1
1-2 衰减对成像的影响实验	2
2-1 介质应变蠕变回复曲线	10
2-2 介质应力松弛曲线	10
2-3 Maxwell 模型	11
2-4 Maxwell 模型的蠕变和弛豫函数	12
2-5 Maxwell 模型的相速度和耗散因子	13
2-6 Kelvin-Voigt 模型	13
2-7 Kelvin-Voigt 模型的蠕变和弛豫函数	14
2-8 Kelvin-Voigt 模型的相速度和耗散因子	14
2-9 标准线性固体模型	15
2-10 标准线性柜台模型的蠕变和弛豫函数	16
2-11 标准线性固体模型的相速度和耗散因子	16
2-12 广义 Zener 模型	17
2-13 广义 Zener 模型的相速度和耗散因子	19
2-14 广义 Zener 模型的弛豫函数	19
2-15 不同 Q 值在 $t = 0.35s$ 的波场快照	23
2-16 不同 Q 值在 $t = 0.35s, x = 1.7km$ 处的抽线信息	24
2-17 不同 Q 值在同一时刻波场快照整合图	24
2-18 波场快照抽线的振幅谱	24
2-19 近似常 Q 方程不同控制项产生的波前快照	26
2-20 层状模型	28
2-21 Q -RTM 结果	29
3-1 常规 FWI 梯度	33
3-2 常规 FWI 梯度分解	34
3-3 RWI 波场分解及波路径示意图	35
3-4 两层介质 Q -RWI 中背景 Q 的子梯度	39

3-5 两层介质 Poynting 矢量预条件梯度对比	40
3-6 层状模型	42
3-7 抽线对比结果	43
3-8 收敛曲线	43
3-9 数据残差对比结果	44
3-10 Q -RTM 成像结果	45
4-1 地震衰减效应	48
4-2 两类归一化的目标函数随 Q 变化的形态	49
4-3 短时 Fourier 变换	55
4-4 短时 Fourier 变换提取地震数据的峰值频率	56

第一章 绪论

1.1 研究背景及意义

地下介质普遍具有衰减性，其衰减性通常用品质因子 Q 来表征。地震衰减对地表反射地震数据有非常重要的影响，主要表现在如下两方面。首先，地震衰减会减弱地震波的振幅从而减低地震成像的分辨率；其次，地震衰减会使地震波的相位变形以及速度频散，以致于地震成像不聚焦、位置错位。图 (1-1a) 对比了在同一时刻接收的非衰减的地震波 (蓝色) 和在 $Q = 60$ 的介质中传播的地震波的波形。从图中可以看出，衰减介质中传播地震波的振幅被极大程度的吸收衰减。由于地震衰减导致速度频散，高频成分的地震波具有更快的传播速度，所以两列波具有不同的到达时。同时地震衰减会改造地震波的相位，从而破坏地震波波形的对称性。图 (1-1b) 对应地展示了图 (1-1a) 中两种波的振幅谱。从图中可以明显看出，高频成分的衰减要远远严重于低频成分，这也是造成图 (1-1a) 中振幅强衰减的主要原因。

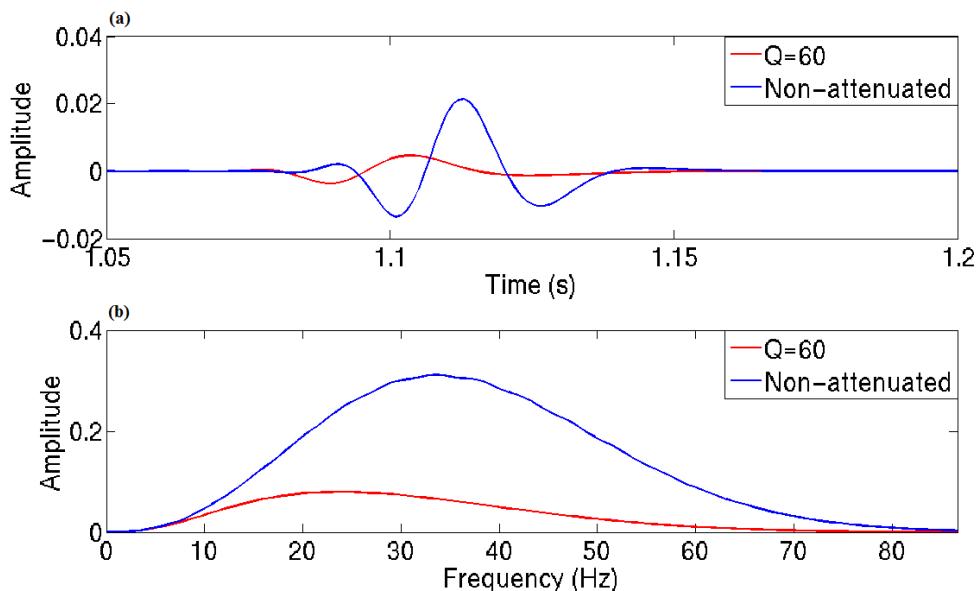


图 1-1 地震波在声介质和粘声介质 ($Q = 60$) 中传播的数值模拟实验：(a) 地震波波形图；(b) 对应的振幅谱。

Fig 1-1 1D example to numerically illustrate the attenuation impacts on the amplitudes spectra and phase of propagating wave: (a) the non-attenuated waveform (blue curve) and the attenuated waveform (red curve); (b) the corresponding amplitude spectral.

在地震波偏移成像中，如果不补偿 Q 的效应，同样会影响地震成像的质量。地震衰减通过吸收地震波的高频成分和改造地震波的相位来降低地震波成像的

质量。图 (2-21c) 展示了用准确 Q 补偿的逆时偏移 (Q -RTM) 成像结果。像被精确地成在了深度为 800m 的地方，并且像在强衰减区域下面有均衡的能量。图 (2-21d) 是没用 Q 补偿的 RTM 结果。由于频散的速度在成像中没有得到校正，成像的位置要稍微浅于 800m，并且在强衰减区域下方成像能量弱。在地震勘探过程，不考虑 Q 的影响可能会导致地震解释不准确，甚至导致钻井错位。

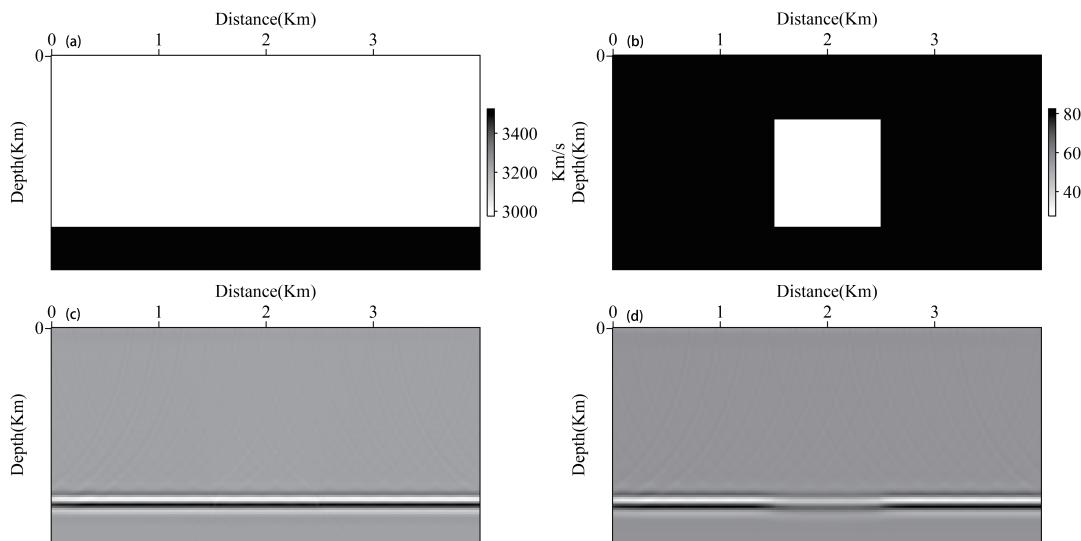


图 1-2 衰减对成像的影响实验：(a) 速度模型；(b) Q 模型；(c) Q -RTM 成像结果；(d) RTM 成像结果

Fig 1-2 (a) The velocity model. (b) The Q model. (c) The migrated image with a correct Q compensation. (d) The migrated image without Q compensation.

在实际勘探中，气云/包区的成像、储层识别和解释都面临巨大的挑战。气云/包区通常包含极低的 Q 值，这种强烈的衰减会吸收深部同相轴的能量，在储层的上方造成成像阴影区，严重影响地震解释的准确性。可靠的 Q 模型不仅可以提高成像的质量，而且可以更好解释振幅随偏移距变化 (AVO) 和各向异性这两种依赖于偏移距的效应。正确的 AVO 和各向异性解释可以提高油气勘探的成功率。另外， Q 模型可以作为一个表征岩石和流体属性的参数，例如在稀疏井约束下，可以用 Q 模型来检测岩性的边界 (Dasgupta 和 Clark, 1998^[1])。衰减量级是一个直接刻画储层的油气物理参数，例如可以直接利用 Q 模型来确定储层含油/气的饱和度 (Winkler 和 Nur, 1982^[2])。在油气开发过程中，衰减模型还可以用来指示储层裂缝的方位 (Maultzsch 等, 2007^[3]; Clark 等, 2009^[4]) 以及监控流体的运移能力，帮助优化注水过程 (Macrides 和 Kanasewich, 1987^[5])。因此，在油气勘探开发过程中，定量地评估衰减效应，构建一个可靠的衰减 (Q) 模型是非常重要的。本文主要的工作就是通过反射全波形反演来定量估计地震本征衰减 Q 模型。

1.2 国内外研究现状

国内外学者对 Q 模型估计做了大量的研究工作，其中大部分工作都是在数据域完成。数据域的反演方法可大致分为两类：基于高频近似的射线层析类和基于波动方程的波形反演类。

射线类方法中，Brzostowski 和 McMechan (1992)^[6] 首先用观测数据振幅与震源振幅比值的对数作为输入数据来实现 Q 层析成像。但是除了吸收衰减外，影响振幅的因素还有很多如几何扩散、透射/反射损失、散射损失等。为了区分衰减引起的振幅损失，Quan 和 Harris (1997)^[7] 将观测数据和计算数据间质心频率的移动作为匹配准则，用射线层析方程来更新 Q 模型。Hu 等 (2011)^[8] 用震源的振幅谱作为拟合函数来处理地震数据频谱非对称性的影响，并用多指数盒状约束法来消除非地震本征衰减的影响。质心频率移动类的方法相对于振幅匹配类方法对噪音不敏感，所以更适合于处理实际数据。射线类方法计算效率高，处理简单横向变化的地质构造有很好的效果。但是在上覆介质复杂时，地震波存在多路径，射线类方法由于不能处理多路径情况而造成误差。波动类层析方法可以有效的解决多路径问题。

波形反演 (FWI) 是一种通过求解波动方程来恢复地下介质参数的反演迭代方法 (Tarantola, 1984^[9])。尽管 FWI 是一个高度非线性的反演问题 (Mora, 1987^[10]; Sirgue 和 Pratt, 2004^[11])，由于需要大量的正演计算，全局寻优的解法 (Sen 和 Stoffa, 1991^[12]; Mosegaard 和 Tarantola, 1995^[13]) 所需的计算量仍是现在计算机所不能承受的。伴随状态法的引入 (Lailly, 1983^[14]; Tarantola, 1984^[9]; Pratt 和 Worthington, 1990^[15])，使得梯度的计算变得非常高效，目前基于梯度类的解法已趋于成熟。在勘探地震学中，各种应用实例证明粘声波形反演 (Q -FWI) 对于提供高分辨率的 P 波速度结构有非常重要的作用 (Song 等, 1995^[16]; Ravaut 等, 2004^[17]; Gao 等, 2006^[18]; Kamei 等, 2012^[19])。但是衰减的波形反演比速度的波形反演更具挑战性 (Song 等, 1995^[16]; Liao 和 McMechan, 1996^[20]; Smithyman 等, 2009^[21]; Hak 和 Mulder, 2011^[22]; Malinowski 等, 2011^[23]; Bai 等, 2014^[24]; Kamei 和 Pratt, 2013^[25])。

考虑衰减参数的波形反演第一次出现在 Tarantola (1988)^[26] 的时间域粘弹波形反演理论中。随后，Song 等 (1995)^[16] 在频率域提出了一种粘声波形反演方法。在频率域实现波形反演比时间域有如下优势，尤其是考虑衰减效应：首先，衰减参数 (例如 Q 值) 和频散速度关系很容易用随频率变化的复速度来表示，速度和衰减参数的梯度可以同时得到而不需要额外的计算量 (Song 等, 1995^[16])。另外，频率域反演方法可以自然的实现多尺度反演策略以降低波形反演的非线性 (Bunks 等, 1995^[27]; Sirgue 和 Pratt, 2004^[11])。从最低的频率成分开始反演，并逐渐增加高频成分，这样可以逐渐恢复地下模型的高波数成分。

在波形反演中，速度和衰减参数 Q 有很强的耦合性 (Song 等, 1995^[16];

Kamei 和 Pratt, 2008^[28]; Hak 和 Mulder, 2011^[22])。Ribodetti 等 (2000)^[29] 以及 Hak 和 Mulder (2010)^[30] 讨论了观测系统的重要性，他们指出，完美的地下照明可以解决这种参数串扰问题。Innanen 和 Weglein (2007)^[31] 用逆散射理论和一阶的频散反射系数来区分一维速度和衰减系数结构。Mulder 和 Hak (2009)^[32] 调查了线性 Born 反演的零空间情况，并且指出，在计算梯度时如果不考虑速度频散关系，对于给定的地表反射数据，地下许多速度/衰减对存在无解的情况。Hak 和 Mulder (2011)^[22] 指出，对于地表观测系统，考虑了频散关系的非线性波形反演可以较精确地反演简单二维合成模型的速度和衰减系数。然而，在早些阶段的反演中，串扰线性还是很明显，并且需要非常多（在他们的实验中大于 10000 次）的迭代次数来消除假象，因此该反演问题还是非常病态的。

在 Q-FWI 中，各种各样的预条件方法被用来减弱其反演的病态性。Liao 和 McMechan (1996)^[20] 用合成数据实验显示要获得好的衰减模型，必须要对模型参数进行一定的范围约束。Hak 和 Mulder (2011)^[22] 指出基于两种参数特征值的大小来惩罚梯度中衰减成分可以加速 Q-FWI 的收敛。Malinowski 等 (2011)^[23] 在波兰的盆地中成功的反演出了与可用的岩性信息一致的衰减模型。他们指出对地震数据时间方向强阻尼衰减和梯度大尺度平滑约束是反演 Q 参数的关键。

对于 Q 反演的另一类做法是顺序反演，先获取比较准确的速度模型然后再反演 Q 模型。如果我们认为前期的振幅变化主要是由于速度结构引起的，后续再反演 Q 时可以降低反演的串扰。初始的速度估计是通过固定衰减模型反演的 (Pratt 等, 2004^[33]; Kamei 和 Pratt, 2008^[28]; Rao 和 Wang, 2008^[34]; Smithyman 等, 2009^[21])。Pratt 等 (2004)^[33] 用顺序反演法来处理含碳水化合物的强衰减跨井数据。对于 Q 模型的反演，他们也用了较大的平滑约束，其反演结果与超声波形分析结果有很好的一致性。Watanabe 等 (2004)^[35] 在超声频段用实验室数据同样很好实现了顺序反演方法。Smithyman 等 (2009)^[21] 用顺序反演法来识别近地表目标。Watanabe 等 (2004)^[35] 以及 Kamei 和 Pratt (2008)^[28] 用合成跨井数据比对了同时反演和顺序反演的结果，在没有正则化项的情况下，顺序反演会得到更好的结果。Kamei 和 Pratt (2008)^[28] 认为地震数据中大部分振幅变化是由速度变化引起的。Kamei 和 Pratt (2013)^[25] 系统地调查了不同梯度预条件对 Q 反演的影响。

地震数据的走时信息主要受速度参数影响，地震衰减通过频散关系照样影响走时，但衰减主要影响地震的振幅信息。相较于走时信息，地震振幅很容易受噪音、震源检波器的耦合、震源的辐射模式以及弹性（非声学）效应。为了保证振幅信息的准确性，需要非常细心的前处理工作 (Pratt 等, 2004^[33]; Malinowski 等, 2011^[23])。Dutta 和 Schuster (2016)^[36] 通过将峰值频率移动引入到 Q-FWI 中来降低数据对前处理的依赖，从目标函数出发降低了 Q-FWI 的非线性程度。

FWI 需要低频全方位大孔径地震数据，但是这种高质量的数据采集往往需

要高昂的采集费用。通过不同观测孔径的观测系统照明分析可知，当缺少大孔径的折射波数据时，深部模型往往只被反射波照明，目前海上勘探最为普遍的拖缆数据（缆长一般 5 至 6 公里）正是这种情况。因此，利用反射波进行中深部的速度建模已成为地震成像的共识。但是，当利用反射数据进行常规的 FWI 时，其梯度中高频成分占主导，反射波的偏移响应与利用反射波反演背景模型的核函数相比，数值上往往高一个数量级。在常规的反射 FWI 中，往往只会得到一个高波数的成像结果，不易于更新背景模型 (Wu 和 Alkhalifah, 2016^[37]; Alkhalifah, 2015^[38]; Chi 等, 2015^[39]; Alkhalifah 和 Wu, 2016^[40])。因此，为增强对模型低频成分的更新，学者们提出了波场分解的方法 (Liu 等, 2011^[41]; Wang 等, 2013^[42]; Tang 等, 2013^[43])，目的是增强层析分量的贡献进而得到有效的长波长分量更新。

为了解决反射波数据应用 FWI 时的上述问题，Xu 等 (2012)^[44] 在全波形反演的框架下，提出了反射波波形反演方法 (RWI)。RWI 的思想在于：利用反射地震数据反演模型参数时，首先更新背景速度而非高波数的速度扰动，这样的反演策略更加有利于反演收敛，这是对常规 FWI 思路的很好补充。RWI 将速度模型分解为背景模型和扰动模型两部分，并分别给出了地震波场对于背景模型和扰动模型的 Frechet 导数。

但是，为了使 RWI 能够在实际地震资料反演中更好的恢复中深层背景速度，必须进行数据匹配和真振幅偏移（反射系数估计）。Ma 和 Hale (2013)^[45] 利用 DIW 算法 (Dynamic image warping) 提取反射波的走时时差，实现中深层背景速度建模，提高反演的稳定性。Alkhalifah (2016)^[46] 用反射角滤波的全模型反演方法来解决数据匹配问题。基于相关的反射波波形反演方法 (Chi 等, 2015^[39])，在一定程度上也避免了数据匹配的周期跳跃问题。即使在观测数据中缺乏有效低频信息、背景模型相对较差时，RWI 也可以较好的恢复模型中深部的低波数成分。在反射系数估计方面，最小二乘偏移 (Dai 和 Schuster, 2013^[47]; Zhang 等, 2014^[48]) 是目前比较有效的方法。但是，最小二乘偏移要求背景模型要足够准确 (Luo 和 Hale, 2014^[49])，否则当背景速度不准确时，其反演的高波数模型扰动也不正确，而这又与 RWI 反演背景速度的目标相矛盾。因此，在反射波波形反演中，如何以及何时引入最小二乘偏移将显得非常重要。

Shen 等 (2018)^[50] 在成像域建立起了模型扰动与像扰动的关系，通过 Q 偏移分析获取中深层的背景 Q 模型。在数据域，目前还没人探讨用地表地震数据恢复中深层背景 Q 模型。本文将研究如何把 RWI 引入到背景 Q 反演中。

1.3 本文研究内容

地震衰减参数 Q 对地震波振幅的影响类似于速度对走时信息的影响，是一种沿地震波路径累积叠加效应，并且主要与模型的低波数背景成分有关。在实际应用中，相对准确的低波数背景 Q 模型即可补偿成像中能量的损失，同时也能帮助储层、岩性解释。本文结合地震衰减的具体特点，将 RWI 引入到背景 Q 反演中，以实现中深层背景衰减模型的反演。具体研究内容包括：

在第二章中，首先简单回顾了地震衰减的基本理论，重述表征地震衰减的物理参数（品质因子和吸收系数）；其次系统地总结了描述地震衰减的不同力学模型，并重点讲述了勘探地震中常用的两类模型（标准线性固体模型和常 Q 模型）；然后推导了描述这两类衰减模型对应粘声波方程，并比较了这两种方程模拟的结果；最后较为完整的总结了 Q 补偿的逆时偏移（ Q -RTM）所遇到的问题及其解决办法，并比较了上述两类方程在 Q 偏移成像中的应用。

在第三章中，在顺序反演的背景下，提出了粘声反射全波形反演（ Q -RWI）方法。假定速度准确，将速度分解为背景和扰动两部分，基于标准线性固体模型粘声方程通过 Born 实现上下行波的分离。在 RWI 的框架下，用数据残差的目标函数更新中深层背景 Q 模型。

在第四章中，通过引入峰值频率移动的目标泛函来降低 Q -RWI 对高频扰动速度的依赖性。

最后，总结论文的主要结论和创新点，讨论不足之处以及未来的研究方向。

第二章 衰减介质理论基础

线性粘弹理论已趋于完善, Carcione (2007)^[51] 对其做了较为完整的总结。粘弹性介质的性质介于弹性固体与粘性流体之间, 可以定义为材料在一定的外力作用历史条件及其处于某一温度范围情况下所表现出来的同时具有弹性固体和粘性流体效应的性质。除了当时所受外力大小外, 外力加载时间、加载历史以及介质温度变化都会对粘性介质的形变产生影响。粘弹性介质的行为是介质的应变率决定的, 它随时间的变化逐渐表现出来。外力的加载过程和介质的形变历史决定了介质的应力-应变关系, 这也就是说介质是具有记忆性的, 而弹性介质的应力-应变关系是瞬时线性的。本章简要回顾衰减理论及其表征, 总结常用的描述衰减机制的物理模型, 并系统总结在地震学中常用的几类描述衰减性的粘声波动方程。

2.1 衰减理论及其表征

假定介质的性质不随时间变化, 在等温条件下本构方程描述的应力-应变关系是一种褶积关系。用等效力学模型可以描述一般化的非弹性现象, 这种模型一般用弹簧和阻尼器线性组合而成。能量储存在弹簧中而耗散在阻尼器中, 弹簧和阻尼器任意串联/并联即可以提供一个很好的现象学模型来研究聚合物、岩石等材料的粘弹性。

2.1.1 复模量及耗散存储模量

在弹性介质中, Hooke 定律表示为:

$$\sigma = M_e \epsilon, \quad (2-1)$$

其中 σ, ϵ, M_e 分别表示应力、应变和弹性模量。而根据定义, 粘弹介质中本构关系表示为:

$$\sigma = \varphi * \partial_t \epsilon, \quad (2-2)$$

其中 φ 为驰豫函数, $*$ 表示褶积运算。对方程 2-2 做 Fourier 变换有:

$$F[\sigma(\omega)] = M(\omega) F[\epsilon(\omega)], \quad (2-3)$$

其中 $F[\cdot]$ 为 Fourier 变换算子, 并且

$$M(\omega) = F[\partial_t \varphi(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} \partial_t \varphi(t) \exp(-i\omega t) dt, \quad (2-4)$$

为复模量。把复模量分解为实部和虚部 $M(\omega) = M_1(\omega) + M_2(\omega)$, 其中 $M_1(\omega)$ 为存储模量, $M_2(\omega)$ 为耗散模量, 且有:

$$\begin{cases} M_1(\omega) = \omega \int_0^{\infty} \sin(\omega t) dt \\ M_2(\omega) = \omega \int_0^{\infty} [\varphi(t) - \varphi(\infty)] \cos(\omega t) dt. \end{cases} \quad (2-5)$$

定义应变-应力关系为

$$\epsilon = \chi * \partial_t \sigma, \quad (2-6)$$

其中 χ 为蠕变函数, 由 $\sigma = \partial_t \varphi * \epsilon = \partial_t \varphi * (\partial_t \chi * \sigma) = (\partial_t \varphi * \partial_t \chi) * \sigma$ 有 $\partial_t \varphi(t) * \partial_t \chi(t) = \delta(t)$, 即: $M(\omega)J(\omega) = 1$, 其中 $J(\omega) = F[\partial_t \chi]$ 。

2.1.2 品质因子与衰减系数

频率域的应力-应变关系 (2-3) 跟弹性介质在时间域的应力-应变关系 (2-1) 有相同的表达式, 但是模量是复数并且与频率有关。用波动方程一维平面波解可以清晰显示这种关系, 其解的形式为:

$$u = u_0 \exp[i(\omega t - kx)], \quad (2-7)$$

其中 k 为波数, ω 为频率, 介质内部与表面力平衡满足如下关系:

$$\partial_x \sigma = \rho \partial_{tt}^2 u, \quad (2-8)$$

假定介质的性质恒定, 由 $\epsilon = \partial_t u$ 及公式 (2-3) 可以得出方程 (2-7) 的频散关系

$$M(\omega)k^2 = \rho \omega^2. \quad (2-9)$$

对于波在粘性介质中传播来说, k 是复数, ω 是实数, 可以得出波传播的复速度:

$$v_c(\omega) = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{M(\omega)}{\rho}} \quad (2-10)$$

把复波数表示为:

$$k = \kappa - i\alpha, \quad (2-11)$$

方程 (2-7) 可以重新表示为：

$$u = u_0 \exp(-\alpha x) \exp[i(\omega t - \kappa x)], \quad (2-12)$$

其中 κ 为波数， α 为衰减系数。定义相速度为：

$$v_p = \frac{\omega}{\kappa} = [Re(\frac{1}{v_c})]^{-1} \quad (2-13)$$

衰减系数为：

$$\alpha = -\omega Im(\frac{1}{v_c}), \quad (2-14)$$

其中 $Re(\cdot)$, $Im(\cdot)$ 分别为取实部和虚部运算。在弹性介质中频率对波数的导数即为群速度，在粘弹介质中，只考虑实波数 κ ：

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \kappa} = (\frac{\partial \kappa}{\partial \omega})^{-1} = [Re(\frac{\partial k}{\partial \omega})]^{-1}. \quad (2-15)$$

能量的耗散也可以用品质因子 Q 来定量表征， Q^{-1} 叫做耗散因子。品质因子可表示为模量的实部与模量的虚部的比值，

$$Q = \frac{M_1}{M_2} = \frac{Re(v_c^2)}{Im(v_c^2)} = -\frac{Re(k^2)}{Im(k^2)}. \quad (2-16)$$

因为 $k^2 = \kappa^2 - \alpha^2 - 2i\kappa\alpha$ ，品质因子跟衰减系数和波数之间的关系可表述为：

$$\alpha = (\sqrt{Q^2 + 1} - Q)\kappa, \quad (2-17)$$

在低衰减介质中， $Q \gg 1$ ，把 (2-13) 式跟 $f = \omega/(2\pi)$ 带入 (2-17) 中，并用 Taylor 级数展开有：

$$\alpha = \frac{\kappa}{2Q} = \frac{\omega}{2Qv_p} = \frac{\pi f}{Qv_p}. \quad (2-18)$$

衰减系数 α 与频率 f 呈线性关系，即所谓的线性衰减。

2.2 描述衰减性的基本模型

弹簧和阻尼器简单的串/并联可以组合成描述衰减的不同力学模型。Maxwell 在 1967 年提出了用来描述气体粘滞性问题的 Maxwell 模型；Meyer 和 Voigt 通过经典的弹性波方程总结出了所谓的 Voigt 应力-应变关系，由 Kelvin 在 1875 年提出了代表 Voigt 固体的力学模型— Kelvin-Voigt 模型；Poynting 和 Thomson 在 1902 年提出更能代表真实介质材料的 Zener 模型或标准线性固体模型。在油气勘探和地震学中，由于不知道衰减与频率的依赖关系，经常用多个 Zener 模型并联在一起表示近似常 Q 模型，并用气刻画岩石的衰减特性。在勘探地震频

段, Kjartansson (1979)^[52] 提出了理想的常 Q 线性衰减模型。

模型的驰豫函数可以通过对模型瞬间施加一个恒定的单位应变 $\epsilon = H(t)$, 然后测量其应力的变化, 即

$$\sigma(t) = \partial_t \varphi(t) * H(t) = \varphi(t) * \delta(t) = \varphi(t). \quad (2-19)$$

对模型瞬间施加一个恒定的单位应力 $\delta = H(t)$, 测定其应变随时间的变化即可得到模型的蠕变函数,

$$\epsilon(t) = \partial_t \chi(t) * H(t) = \chi(t) * \delta(t) = \chi(t). \quad (2-20)$$

在恒力的情况下, 应变不随时间变化而变化的是弹性固体, 应变以等应变速率随时间增加的是粘性流体。图2-1反应了在恒定应力作用下应变蠕变曲线, 图2-2反应了在恒定应变下的应力松弛曲线。

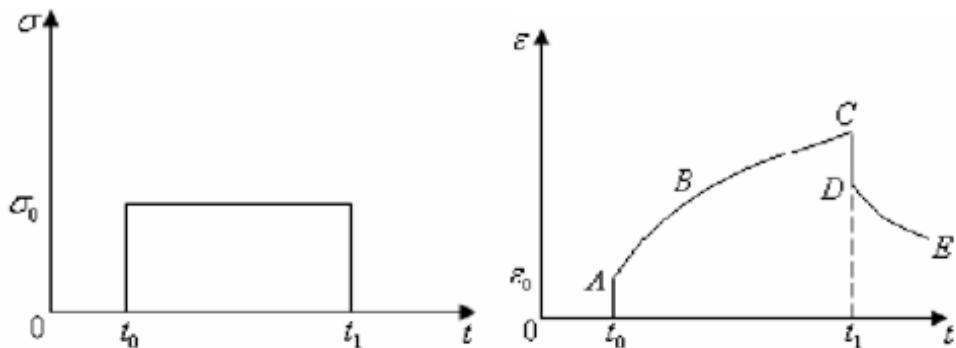


图 2-1 弹性和粘弹性固体的应变蠕变回复曲线
Fig 2-1 Creep function of elasticity and visco-elasticity

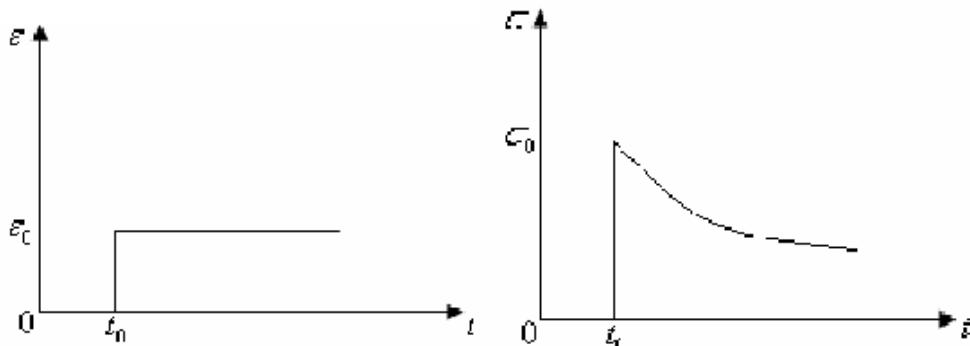


图 2-2 弹性和粘弹性固体的应力松弛曲线
Fig 2-2 Relaxation function of elasticity and visco-elasticity

2.2.1 Maxwell 模型

如图2-3所示，弹簧与阻尼器简单的串联即可得到 Maxwell 模型。对模型施加一个应力 σ ，就会在模型的弹簧中产生形变 ϵ_1 ，并在阻尼器中产生形变 ϵ_2 。弹簧中的应力-应变关系为：

$$\sigma = M_U \epsilon_1, \quad (2-21)$$

其中 M_u 是弹簧的弹性模量，下标 U 表示“无驰豫”。阻尼器中的应力-应变关系为：

$$\sigma = \eta \partial_t \epsilon_2, \quad \eta \geq 0, \quad (2-22)$$

其中 η 为粘滞系数。假设系统的总形变量为 $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$ ，则 Maxwell 模型对应

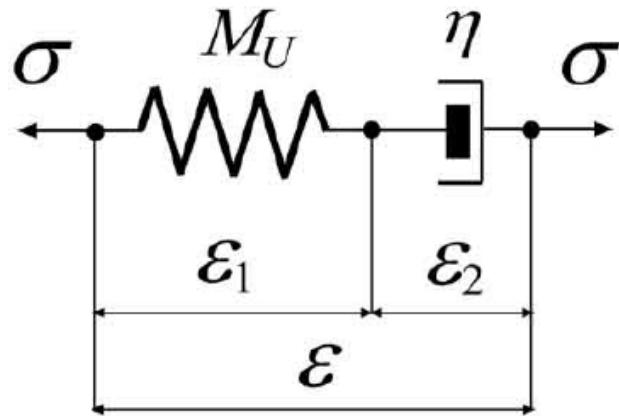


图 2-3 Maxwell 模型
Fig 2-3 Maxwell model

的应力-应变关系为：

$$\frac{\partial_t \sigma}{M_U} + \frac{\sigma}{\eta} = \partial_t \epsilon. \quad (2-23)$$

对方程 (2-23) 两边做 Fourier 变换有

$$\sigma = M \epsilon, \quad (2-24)$$

其中 $M(\omega) = \frac{\omega \eta}{\omega \tau - i}$ 是复模量，并且满足驰豫时间 $\tau = \frac{\eta}{M_U}$ 。由 (2-4) 式可得其相应的驰豫函数为：

$$\varphi(t) = M_U \exp(-t/\tau) H(t). \quad (2-25)$$

由 $M(\omega) J(\omega) = 1$ 可以推到出 Maxwell 模型的蠕变函数，

$$\chi(t) = \frac{1}{M_U} (1 + \frac{t}{\tau}) H(t). \quad (2-26)$$

Maxwell 模型 ($M_U = 2.16GP_a$, $\tau = 1/(2\pi f)$, $f = 25Hz$) 的蠕变和弛豫函数如图2-4 所示，蠕变函数并不能代表真实固体中的蠕变行为，而是类似于粘性流体的蠕变函数。在松弛实验中，弹簧和阻尼器受同样大小的力，由于阻尼器

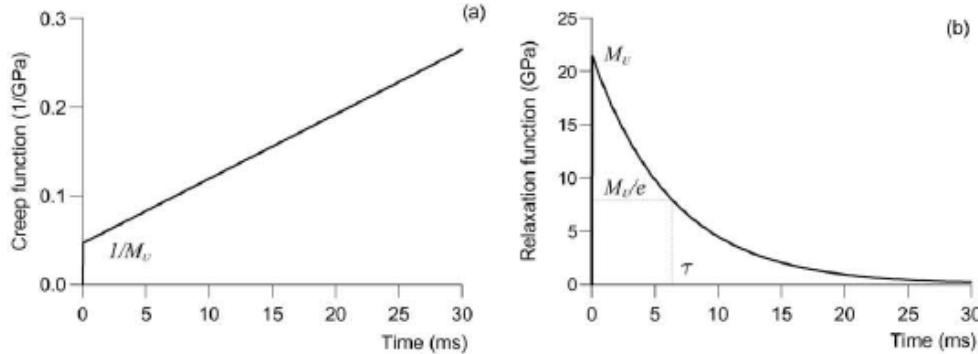


图 2-4 Maxwell 模型的蠕变 (a) 和弛豫 (b) 函数
Fig 2-4 The creep and relaxation function of Maxwell model

不能产生瞬间的形变，因此最初的伸展出现在弹簧中。阻尼器扩张而弹簧压缩，所以导致模型的总拉伸量相等。最后弹簧中的应力全部释放，而弛豫函数不像真实固体中的那样呈现双曲关系的剩余应力，所以 Maxwell 模型适合代表粘滞性流体模型。从图 2-4(a) 中可以看出 M_U 代表系统的瞬时响应，所以叫做无驰豫的模量。地震波的传播属性被介质的相速度、衰减系数以及品质因子所描述。Maxwell 模型的品质因子有如下简单的表达形式：

$$Q(\omega) = \frac{Re(M)}{Im(M)} = \omega\tau. \quad (2-27)$$

模型 ($M_U = \rho c^2$, $\rho = 2.4g/cm^3$, $c = 3km/s$, $\tau = 1/(2\pi f)$, $f = 25Hz$) 的相速度和耗散因子如图2-5所示。当 $\omega \rightarrow 0$ 时, $v_p = 0$, 当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, $v_p \rightarrow \sqrt{M_U/\rho}$ 即处于弹性状态。这表明波在 Maxwell 模型中的传播速度慢于在用弹簧代表的弹性固体中的传播速度。耗散因子在零频率成分时为无穷大，在高频时表现为无衰减特性。

2.2.2 Kelvin-Voigt 模型

在弹性力学中，通常用 Kelvin-Voigt 应力-应变关系来描述粘弹介质模型，其模型由弹簧和阻尼器并联而成（图2-6）总的应力可以分解成弹性应力与粘性应力：

$$\begin{cases} \sigma_1 = M_R\epsilon, \\ \sigma_2 = \eta\partial_t\epsilon, \end{cases} \quad (2-28)$$

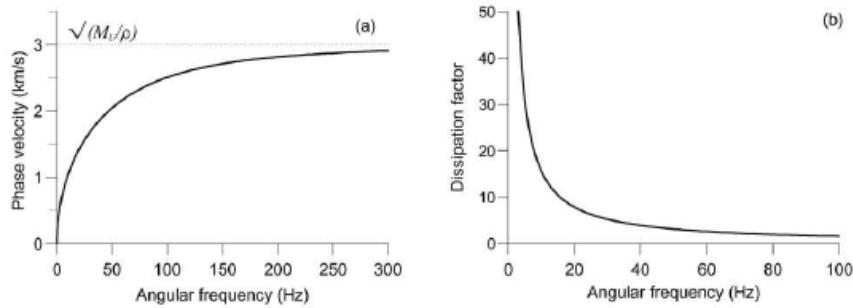


图 2-5 Maxwell 模型的相速度 (a) 和耗散因子 (b)
Fig 2-5 The phase velocity and dissipation factor of Maxwell model

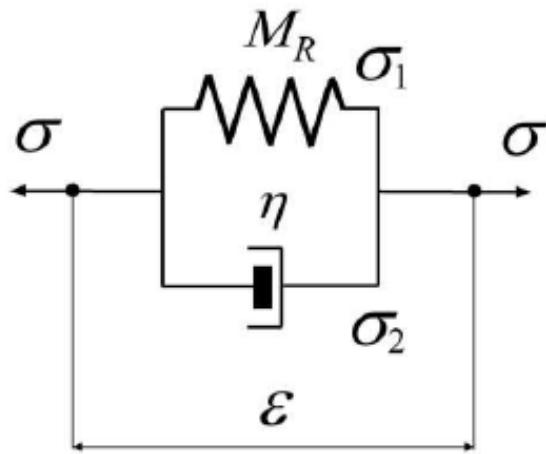


图 2-6 Kelvin-Voigt 模型
Fig 2-6 Kelvin-Voigt model

其中 M_R 为弹簧模量, 下标 R 表示“驰豫”, ϵ 为系统的总应变。其应力-应变关系为

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = M_R \epsilon + \eta \partial_t \epsilon. \quad (2-29)$$

对 (2-29) 式做 Fourier 变换有:

$$\sigma = (M_R + i\omega\eta)\epsilon, \quad (2-30)$$

即可得出复模量为 $M(\omega) = M_R + i\omega\eta$ 。Kelvin-Voigt 模型的驰豫函数为:

$$\varphi(t) = M_R H(t) + \eta \delta(t), \quad (2-31)$$

其蠕变函数为:

$$\chi(t) = \frac{1}{M_R} [1 - \exp(-t/\tau)] H(t), \quad (2-32)$$

其中 $\tau = \eta/M_R$ 。

Kelvin-Voigt 模型 ($M_R = 2.16GP_a$, $\tau = 1/(2\pi f)$, $f = 25Hz$) 的弛豫函数和蠕变函数如图2-7所示。弛豫函数与时间无关,这是一种纯弹性固体。 δ 函数表明在实际中对介质施加一个瞬时应变是不可能的。阻尼器最先开始拉伸然后转换成应力存储于弹簧中。最后,剩余应力都存储于弹簧中。阻尼器不能瞬间移动导致蠕变函数不能表示瞬时应变。这不是真实的固体介质,蠕变函数当时间趋于无穷时趋近于弛豫模量 M_R 。Kelvin-Voigt 模型的品质因子为:

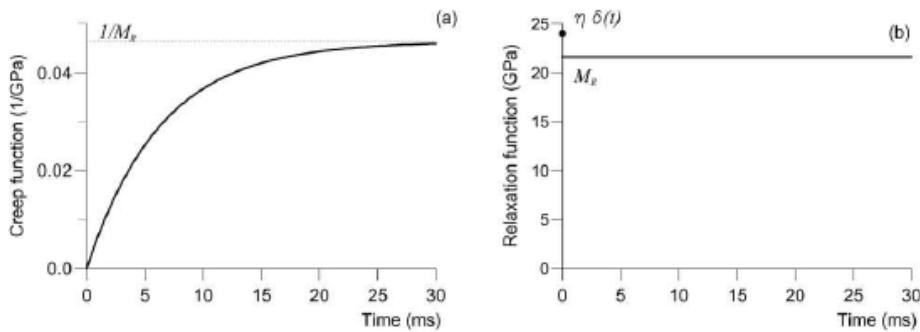


图 2-7 Kelvin-Voigt 模型的蠕变 (a) 和弛豫 (b) 函数
Fig 2-7 The creep and relaxation function of Kelvin-Voigt model

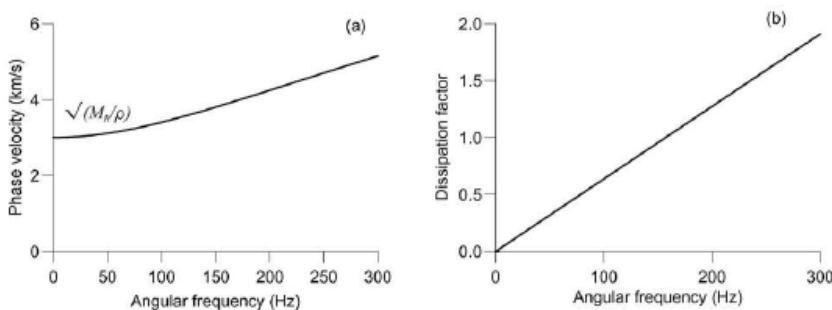


图 2-8 Kelvin-Voigt 模型的相速度 (a) 和耗散因子 (b)
Fig 2-8 The phase velocity and dissipation factor of Kelvin-Voigt model

$$Q(\omega) = (\omega\tau)^{-1}. \quad (2-33)$$

Kelvin-Voigt 模型的品质因子与 Maxwell 模型的品质因子互为倒数。Kelvin-Voigt 模型 ($M_R = \rho c^2$, $\rho = 2.4g/cm^3$, $c = 3km/s$, $\tau = 1/(2\pi f)$, $f = 25Hz$) 的相速度和耗散因子如图2-8所示。当 $\omega \rightarrow 0$ 时, $v_p \rightarrow \sqrt{M_R/\rho}$; 当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, $v_p \rightarrow \infty$ 。这表明波在 Kelvin-Voigt 模型中的传播速度比在相应的弹性介质中的速度大。

2.2.3 Zener 模型或标准线性固体模型

Zener 或标准线性固体模型由弹簧跟 Kelvin-Voigt 模型串联形成 (图2-9)。该模型更能代表真实介质，如岩石、聚合物以及金属材料。标准线性固体模型

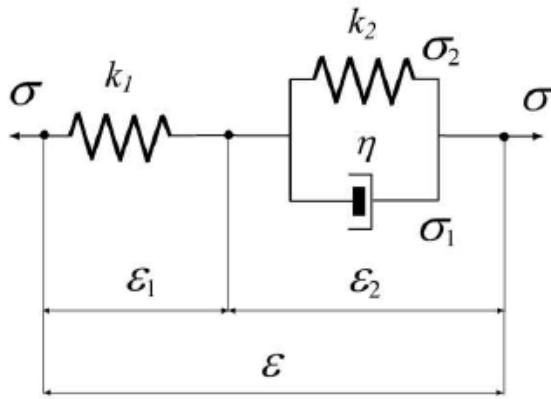


图 2-9 标准线性固体模型
Fig 2-9 Standard linear solid model

的应力-应变关系为：

$$\begin{cases} \sigma = \kappa_1 \epsilon_1, \\ \sigma_1 = \eta \partial_t \epsilon_2, \\ \sigma_2 = \kappa_2 \epsilon_2, \end{cases} \quad (2-34)$$

其中 $\kappa_1 \geq 0, \kappa_2 \geq 0, \eta \geq 0$, 并且

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \quad \epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2. \quad (2-35)$$

上述方程的解给出了标准线性固体模型的应力-应变关系：

$$\sigma + \tau_\sigma \partial_t \sigma = M_R (\epsilon + \tau_\epsilon \partial_t \epsilon), \quad (2-36)$$

其中 $M_R = \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2}$ 为拉伸模量，驰豫时间满足 $\tau_\sigma = \frac{\eta}{\kappa_1 + \kappa_2} \tau_\epsilon = \frac{\eta}{\kappa_2} \geq \tau_\sigma$ 。其中复模量为：

$$M(\omega) = M_R \frac{1 + i\omega\tau_\epsilon}{1 + i\omega\tau_\sigma} \quad (2-37)$$

驰豫模量 M_R 由 $\omega = 0$ 时得到，未驰豫模量 M_U 由 $\omega \rightarrow \infty$ 时得到，且为 $M_U = M_R \frac{\tau_\epsilon}{\tau_\sigma}$ 。标准线性固体模型的驰豫函数为：

$$\varphi(t) = M_R [1 - (1 - \frac{\tau_\epsilon}{\tau_\sigma}) \exp(-t/\tau_\sigma)] H(t), \quad (2-38)$$

其蠕变函数为：

$$\chi(t) = \frac{1}{M_R} [1 - (1 - \frac{\tau_\epsilon}{\tau_\sigma}) \exp(-t/\tau_\epsilon)] H(t). \quad (2-39)$$

标准线性固体模型 ($M_R = 2.16 \text{ GPa}$, $M_U = 29.4 \text{ GPa}$, $\tau_0 = 1/(2\pi f)$, $f = 25 \text{ Hz}$) 的驰豫函数和蠕变函数如图2-10所示。在蠕变实验中，蠕变由一个由弹簧常数

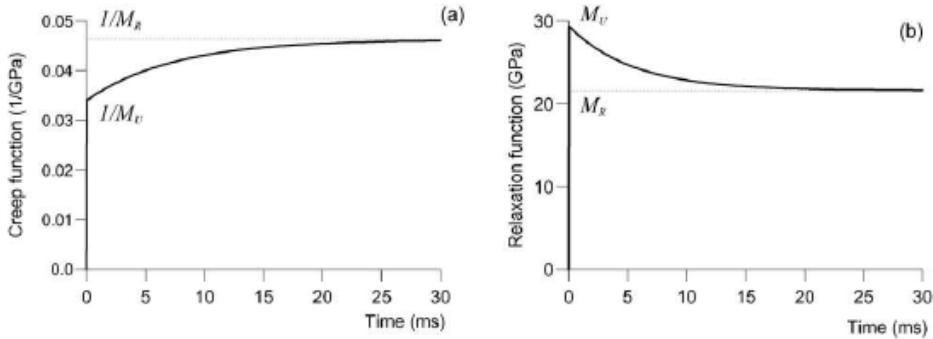


图 2-10 标准线性固体模型的蠕变 (a) 和驰豫 (b) 函数

Fig 2-10 The creep and relaxation function of standard linear solid model

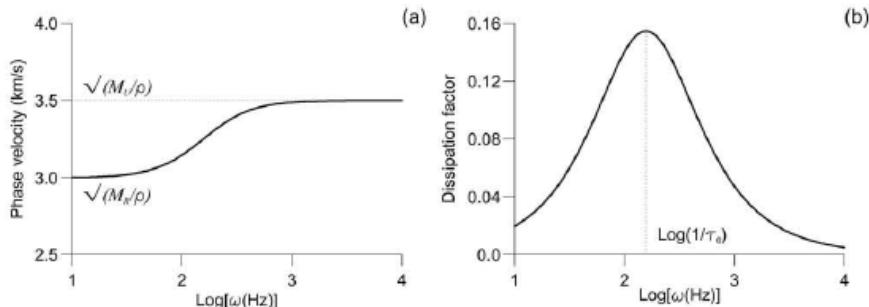


图 2-11 标准线性固体模型的相速度 (a) 和耗散因子 (b)

Fig 2-11 The phase velocity and dissipation factor of standard linear solid model

决定的瞬间初始值 $\chi(0^+) = M_U^{-1}$ 逐渐达到其渐进逼近值 $\chi(\infty) = M_R^{-1}$ 。经过一个初始位移后，应力由于阻尼器变形的增加而逐渐降低，最终使应变达到逼近值。类似地，驰豫函数经过短暂的处于拉伸状态的 M_U 后，最终达到拉伸模量 M_R 。标准线性固体模型的品质因子为：

$$Q(\omega) = \frac{1 + \omega^2 \tau_\epsilon \tau_\sigma}{\omega (\tau_\epsilon - \tau_\sigma)}. \quad (2-40)$$

标准线性固体模型 ($M_R = \rho c_R^2$, $\rho = 2.4 \text{ g/cm}^3$, $c_R = 3 \text{ km/s}$, $M_U = \rho c_U^2$, $c_U = 3.5 \text{ km/s}$, $f = 25 \text{ Hz}$) 的相速度和耗散因子 Q^{-1} 如图2-11所示。模型在 $\omega_0 = 1/\tau_0$ 处有拉伸峰值，其中 $\tau_0 = \sqrt{\tau_\epsilon \tau_\sigma}$ 。相速度随着频率的增加而增加，且在低频时

的 $\sqrt{M_R/\rho}$ 与高频时的 $\sqrt{M_U/\rho}$ 之间变化，当介质为纯弹性体 ($Q^{-1} = 0$) 时， $M_R = M_U$ 。

2.2.4 广义 Zener 模型/近似常 Q 模型

在油气勘探和地震学中，由于不知道衰减与频率的依赖关系，用常 Q 模型刻画岩石的吸收衰减会更方便。物理实验表明衰减系数在许多频率范围内与频率呈线性关系，即品质因子为常数。通常用多 (L) 个 Zener 模型单元并联在一起组成广义 Zener 模型来近似常 Q 模型（图2–12）。每个小 Zener 模型单元的应

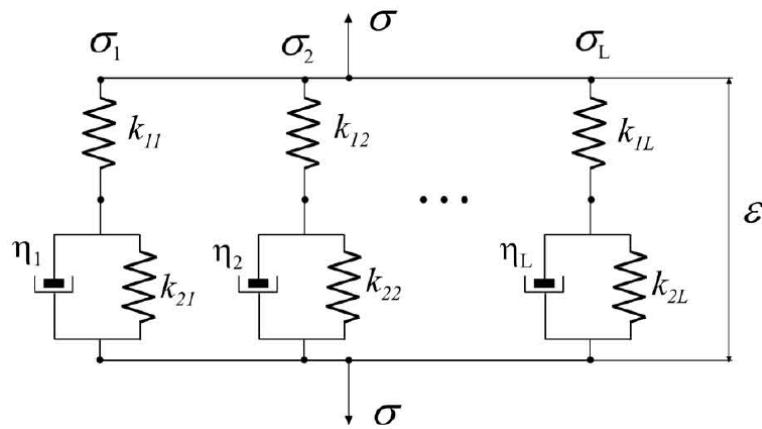


图 2–12 广义 Zener 模型
Fig 2–12 Generalized Zener model

力-应变关系为：

$$\sigma_l + \tau_{\sigma l} \partial_t \sigma_l = M_{Rl}(\epsilon + \tau_{\epsilon l} \partial_t \epsilon), \quad l = 1, \dots, L, \quad (2-41)$$

其中驰豫模量为：

$$M_{Rl} = \frac{\kappa_{1l}\kappa_{2l}}{\kappa_{1l} + \kappa_{2l}} \quad (2-42)$$

驰豫时间为：

$$\tau_{\sigma l} = \frac{\eta_l}{\kappa_{1l} + \kappa_{2l}} \quad \tau_{\epsilon l} = \frac{\eta_l}{\kappa_{2l}}. \quad (2-43)$$

每个小单元的复模量：

$$M_l(\omega) = M_{Rl} \frac{1 + i\omega\tau_{\epsilon l}}{1 + i\omega\tau_{\sigma l}} \quad (2-44)$$

弹性系统的总应力为 $\sigma = \sum_{l=1}^L \sigma_l$ ，频率域的应力-应变关系为

$$\sigma = \sum_{l=1}^L M_l \epsilon = \sum_{l=1}^L M_{Rl} \frac{1 + i\omega\tau_{\epsilon l}}{1 + i\omega\tau_{\sigma l}} \epsilon. \quad (2-45)$$

选择 $M_{Rl} = M_R/L$, 复模量可以表示成:

$$M(\omega) = \sum_{l=1}^L M_l(\omega), \quad M_l(\omega) = \frac{M_R}{L} \left(\frac{1 + i\omega\tau_{el}}{1 + i\omega\tau_{\sigma l}} \right) \quad (2-46)$$

由此可以把独立常数减少至 $2L + 1$ 个。驰豫函数很容易由时间域的本构关系得到,

$$\varphi(t) = M_R [1 - \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \left(1 - \frac{\tau_{el}}{\tau_{\sigma l}} \right) \exp(-t/\tau_{\sigma l})] H(t), \quad (2-47)$$

当 $t = 0$ 时, 未驰豫模量为:

$$M_U = M_R [1 - \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \left(1 - \frac{\tau_{el}}{\tau_{\sigma l}} \right)] = \frac{M_R}{L} \sum_{l=1}^L \frac{\tau_{el}}{\tau_{\sigma l}}. \quad (2-48)$$

单 Zener 元件的品质因子可以通过中心频率 $\omega_0 = \tau_0^{-1}$ 处的品质因子

$$Q_0 = \frac{2\tau_0}{\tau_\epsilon - \tau_\sigma} \quad (2-49)$$

表示:

$$Q(\omega) = Q_0 \frac{1 + \omega^2 \tau_0^2}{2\omega\tau_0}. \quad (2-50)$$

将 $\tau_0 = \sqrt{\tau_\epsilon\tau_\sigma}$ 代入方程 2-49 中有

$$\tau_\epsilon = \frac{\tau_0}{Q_0} (\sqrt{Q_0^2 + 1} + 1), \quad \tau_\sigma = \frac{\tau_0}{Q_0} (\sqrt{Q_0^2 + 1} - 1). \quad (2-51)$$

寻找一系列驰豫时间 τ_{el} 和 $\tau_{\sigma l}$, 使得在给定的中心频率 $\omega_{0l} = 1/\tau_{0l}$ 附近品质因子 Q 呈常数。单驰豫的峰值应均匀分布在 $\log(\omega)$ 尺度内, 整个系统的品质因子为:

$$Q(\omega) = \frac{Re(M)}{Im(M)} = \frac{Re(\sum_{l=1}^L M_l)}{Im(\sum_{l=1}^L M_l)}. \quad (2-52)$$

图 2-13 显示了 5 个 Zener 单元的相速度和衰减系数随频率的变化关系, 其品质因子为 30, 其中每个单元的品质因子参数为 $Q_0 = 15$ 。点划线表示每个单元的品质因子, 坚直点划线为第三个单元的驰豫峰值。该近似常 Q 模型的驰豫函数如图 2-14 所示。

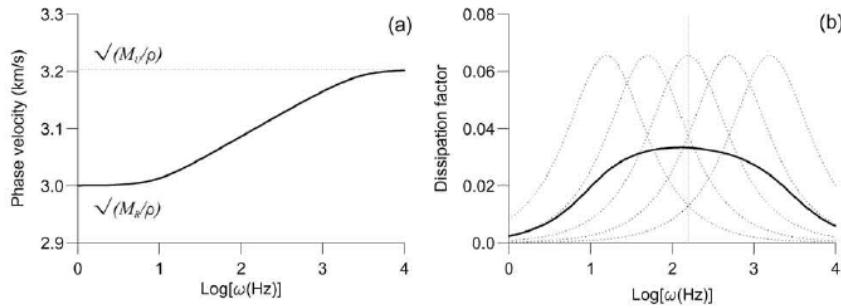


图 2-13 广义 Zener 模型的相速度 (a) 和耗散因子 (b)
Fig 2-13 The phase velocity and dissipation factor of generalized Zener model

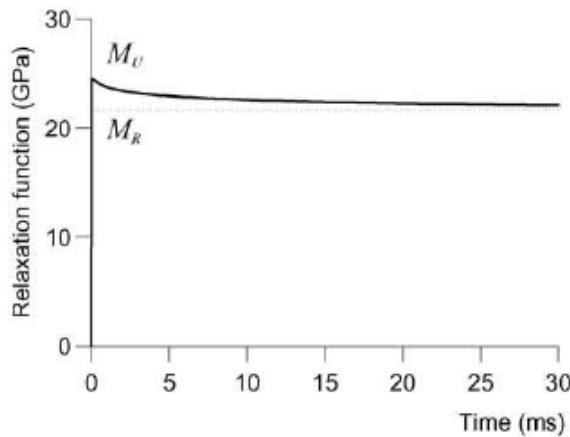


图 2-14 广义 Zener 模型的驰豫函数
Fig 2-14 The relaxation function of standard linear solid model

2.2.5 常 Q 模型

对所有的频率段,都可以设计出非常理想的常 Q 模型。在勘探地震频段 Kjartansson (1979)^[52] 提出了基于蠕变函数 $t^{2\gamma}$ 形式的常 Q 模型, 式中 t 是时间, 对于地震应用来说 $\gamma \ll 1$ 。这种模型完全可以用对应于参考频率的相速度和 Q 两个参数来描述。因此, 在数学表达上常 Q 模型要比任何近似常 Q 模型简单。由于其简单性, Kjartansson 常 Q 模型在地震勘探领域有许多应用, 尤其是在频率域。常 Q 模型的驰豫函数为:

$$\varphi(t) = \frac{M_0}{\Gamma(1 - 2\gamma)} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2\gamma} H(t), \quad (2-53)$$

其中 M_0 是体模量, Γ 是欧拉伽马函数, t_0 是参考时间, γ 是一个无量纲的参数。由 (2-4) 式可得复模量:

$$M(\omega) = M_0 \left(\frac{i\omega}{\omega_0}\right)^{2\gamma} \quad (2-54)$$

式中 $\omega_0 = 1/t_0$ 是参考频率。由 (2-10) 式可以得出复速度 $v_c = \sqrt{\frac{M}{\rho}}$, 其相速度可由 (2-13) 式得到 $v_p = c_0 |\frac{\omega}{\omega_0}|^\gamma$, 其中 $c_0 = \sqrt{\frac{M_0}{\rho}} [\cos(\frac{\pi\gamma}{2})]^{-1}$ 。由 (2-14) 式可得衰减系数为 $\alpha = \tan(\frac{\pi\gamma}{2}) sgn(\omega) \frac{\omega}{v_p}$, 并由 (2-16) 式可得其品质因子为:

$$Q = \frac{1}{\tan(\pi\gamma)}. \quad (2-55)$$

首先, 根据相速度表达式可得 c_0 是相速度在 $\omega = \omega_0$ (参考频率) 处的值, 并且有

$$M_0 = \rho c_0^2 \cos^2(\frac{\pi\gamma}{2}). \quad (2-56)$$

其次, Q 与频率无关,

$$\gamma = \frac{1}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{1}{Q}\right), \quad (2-57)$$

可以表征衰减等级。 $Q > 0$ 等同于 $0 < \gamma < 1/2$ 。

2.3 衰减介质地震波传播模拟

地下介质普遍存在粘滞性, 地震波对粘滞性的响应表现为振幅的衰减和速度频散。为了得到精确的成像结果以及可靠的振幅信息, 在进行成像和反演时必须要考虑衰减对地震波传播的影响。波动方程数值模拟是地震成像和反演的引擎, 所以波动方程的推导和求解至关重要。首先波动方程要能准确描述波在特定介质中的传播规律, 其次对波动方程的求解要稳定高效, 最后推导出的波动方程还要便于施加边界条件。本节主要推导两类常用的描述衰减性模型的粘声波动方程, 并给出相应的数值解, 最后比较这两类粘声波动方程在地震波偏移成像中的应用。

2.3.1 SLS 模型波动方程模拟

地震波在粘声介质中的传播方程是基于动量守恒以及描述介质流变力学关系的应力-应变关系推导的。标准线性固体模型的流变力学关系是描述驰豫函数响应的出发点。Fung (1965)^[53] 和Hudson (1980)^[54] 等对标准线性固体模型的驰豫响应函数给出了详细的描述, 并把其应用到了地球介质流变力学解释。

对于二维固体, 其动量守恒方程可描述为:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = \rho \ddot{u}_i + f_i \quad i, j = 1, 2, \quad (2-58)$$

式中 x_j 表示笛卡尔坐标, $u_i(x_k, t)$ 是位移矢量, $\sigma_{ji}(x_k, t)$ 是应力张量, $\rho(x_k)$ 是介质密度, $f_i(x_k, t)$ 表示体力。变量上的点表示对时间求偏导, 为了简化公式形式, 默认使用爱因斯坦求和准则。

在一般声学介质中，应力张量分量可以表示为：

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (2-59)$$

式中 $p(x_k, t)$ 是介质的压力场。把 (2-58) 式带入 (2-59) 式有：

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho \ddot{u}_i + f_i \quad (2-60)$$

方程 (2-60) 两边同时除以密度并求散度得：

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) = \ddot{e} + s, \quad (2-61)$$

其中

$$e = \frac{\partial u_i}{x_i} = e_{ii} \quad (2-62)$$

是应变张量的迹或者体应变，并且有：

$$s = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\rho} f_i \right). \quad (2-63)$$

Christensen (1982)^[55] 提出了含有多个驰豫力学模型的标准线性固体粘声介质的应力-应变关系：

$$\sum_{k=0}^m c_k \frac{d^k p}{dt^k} = \sum_{k=0}^m d_k \frac{d^k e}{dt^k} \quad m \in N, \quad (2-64)$$

式中 d^k/dt^k 表示 k 阶时间偏导数， c_k 和 d_k 是介质属性的系数，并且满足如下初始条件：

$$\sum_{k=0}^m c_r p^{r-k}(0) = \sum_{r=k}^m d_r e^{r-k}(0), \quad (2-65)$$

其中 $p^{r-k}(0)$ 和 $e^{r-k}(0)$ 分别表示压力和体应变在 $t = 0$ 时刻的 $(r - k)$ 阶时间偏导数。通过拉普拉斯变换求解方程 (2-64) 可得到压力场的显示表达式：

$$p(t) = -M_R \int_{-\infty}^t \dot{e}(\tau) \left[1 - \sum_{l=1}^L \left(1 - \frac{\tau_{el}}{\tau_{\sigma l}} \right) \exp \left(-\frac{t - \tau}{\tau_{\sigma l}} \right) \right] d\tau, \quad (2-66)$$

式中 $\tau_{\sigma l}(x_k)$ 和 $\tau_{el}(x_k)$ 表示材料第 l 个力学小单元的驰豫时间， L 是力学机制模型的个数， $M_R(x_k)$ 是介质的驰豫模量。方程 (2-66) 是 Boltzman 叠加原理的数学表达形式，它表示当前压力是先前所有时间压力影响的叠加。

方程 (2-61) 和 (2-66) 描述了粘声介质的形变，并且可以基于此方程来求取数值解。然而方程 (2-66) 中的褶积运算需要知道应变在整个时间上的值而

使得数值求解变得困难。而且，方程 (2-64) 很难直接应用。因此，Carcione 等 (1988)^[56] 提出了记忆变量方法来解决方程 (2-66) 中褶积运算遇到的问题。通过引入记忆变量，方程 (2-66) 中的褶积计算就可以避免。整合方程 (2-66) 得：

$$p(t) = -e(t)M_R[1 - \sum_{l=1}^L(1 - \frac{\tau_{el}}{\tau_{\sigma l}})] - \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^t e(\tau)\phi_l(t - \tau)d\tau, \quad (2-67)$$

式中 ϕ_l 表示为：

$$\phi_l(t) = \frac{M_R}{\tau_{\sigma l}}(1 - \frac{\tau_{el}}{\tau_{\sigma l}})e^{t/\tau_{\sigma l}}. \quad (2-68)$$

方程 (2-67) 是物理过程推导出的，不仅仅限于标准线性固体模型，对于其它模型只是 ϕ_l 不同而已。核函数 ϕ_l 必须满足如下微分方程：

$$\dot{\phi}_l(t) = -\phi_l(t)/\tau_{\sigma l}. \quad (2-69)$$

定义 L 个记忆变量 e_{1l} 为：

$$e_{1l}(t) = \int_{-\infty}^t e(\tau)\phi_l(t - \tau)d\tau \quad l = 1, \dots, L. \quad (2-70)$$

由 (2-68) 式得

$$\dot{e}_{1l}(t) = \frac{e_{1l}(t)}{\tau_{\sigma l}} + \phi_l(0)e(t). \quad (2-71)$$

应力-应变关系 (2-67) 可以表示为：

$$p(t) = -[M_U e(t) + \sum_{l=1}^L e_{1l}], \quad (2-72)$$

式中 M_U 为未驰豫变量，

$$M_U = M_R[1 - \sum_{l=1}^L(1 - \frac{\tau_{el}}{\tau_{\sigma l}})]. \quad (2-73)$$

方程 (2-61), (2-71) 和 (A-4) 完全控制了地震波在粘声介质中的传播规律。Blanch 等 (1995)^[57] 指出，在勘探地震频段内，一个力学驰豫模型即可满足实际

应用。因此，对于二维粘声介质，描述运动和形变的波动方程为：

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} - K \frac{\tau_\epsilon}{\tau_\sigma} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - r_p &= f(\mathbf{x}_s, t), \\ \frac{\partial r_p}{\partial t} + \frac{1}{\tau_\sigma} \left[r_p + K \left(\frac{\tau_\epsilon}{\tau_\sigma} - 1 \right) \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (2-74)$$

式中， v_x 和 v_z 表示质点在 x 方向和 z 方向的振动速度， K 是介质的体积模量，驰豫时间 τ_σ 和 τ_ϵ 与介质的品质因子 Q 以及参考频率 f_ω 有关，

$$\begin{aligned} \tau_\sigma &= \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}} - \frac{1}{Q}}{f_\omega} \\ \tau_\epsilon &= \frac{1}{f_\omega^2 \tau_\sigma}. \end{aligned} \quad (2-75)$$

方程 (2-74) 即为标准线性固体模型所描述的粘声波动方程，此方程可用交错网格有限差分法 (Virieux, 1984^[58]; Carcione, 1999^[59]) 进行数值求解。

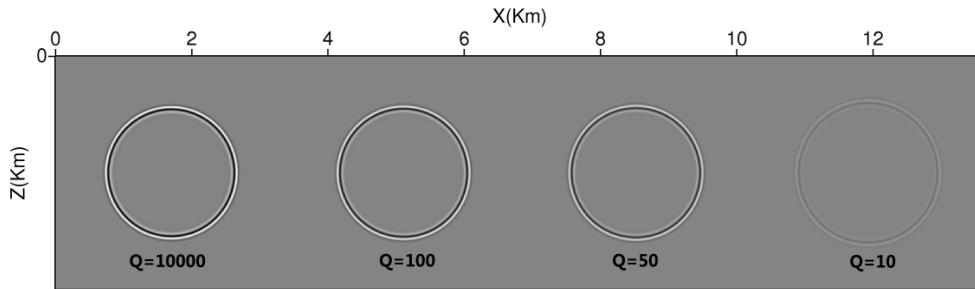


图 2-15 不同 Q 值在 $t = 0.35s$ 的波场快照
Fig 2-15 Snapshots of different Q models at $t = 0.35s$.

设置一个横向、纵向均为 $3.4km$ 的均匀介质模型，其中纵波速度为 $v_p = 3km/s$ ，密度为 $\rho = 2.0g/cm^3$ 。图 (2-15) 展示了在 $t = 0.35s$ 时刻不同 Q 值的波前快照，图 (2-16) 展示了在 $x = 1.7km$ 处的抽线信息，图 (2-17) 整合了不同 Q 值的波前快照，图 (2-18) 展示了 $Q = 50$ 和声介质波前快照抽线的振幅普。以上四图从不同的角度证明了粘性介质不仅对地震波振幅有衰减效应而且对相位有较强的改造作用。品质因子的值越小对地震波的振幅衰减越严重，而且相位有更强的超前效应。从振幅谱可以看出，对高频成分的衰减明显要强于

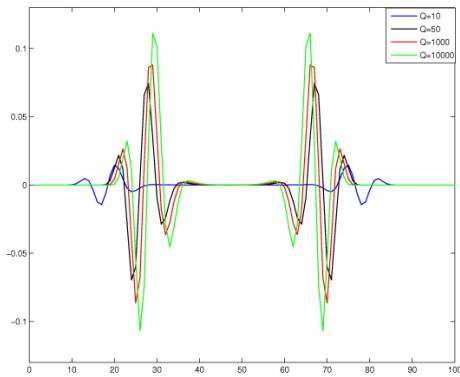


图 2-16 不同 Q 值在 $t = 0.35s, x = 1.7km$ 处的抽线信息
Fig 2-16 The extracted lines of different Q models at $t = 0.35s, x = 1.7km$

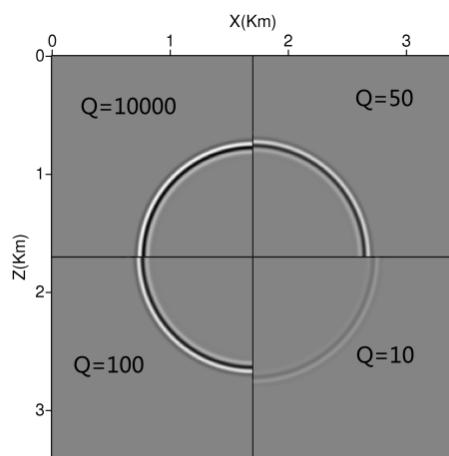


图 2-17 不同 Q 值在同一时刻波场快照整合图
Fig 2-17 Integrated snapshots of different Q model

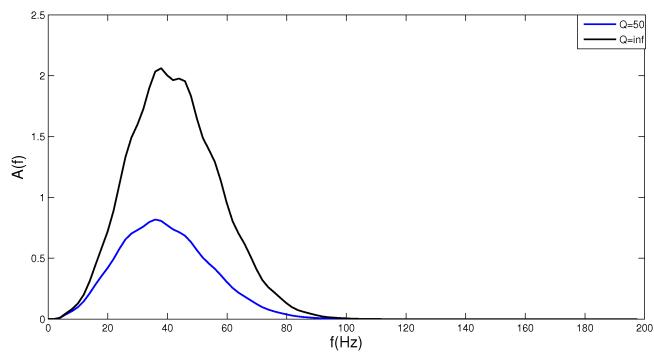


图 2-18 波场快照抽线的振幅谱
Fig 2-18 The amplitude spectrum of extracted lines.

对低频成分的衰减，这与线性粘弹理论（公式2–18）是一致的。

2.3.2 常 Q 模型波动方程模拟

在勘探地震频段内，认为衰减系数 ($\alpha \propto 1/Q$) 与频率呈近似线性关系，即 Q 在该频段内为常数。[Kjartansson \(1979\)](#)^[52] 推导出了常 Q 模型的相速度的频散关系：

$$c = c_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^\gamma = c_0^2 \cos^2(\pi\gamma/2), \quad (2-76)$$

和衰减系数：

$$\alpha = \tan\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right) \frac{\omega}{v_p} \quad (2-77)$$

式中 c_0 是在给定的参考频率 ω_0 处的速度。参数 $\gamma = 1/\pi \tan^{-1}(1/Q)$ 是一个无量纲的数，对于任意正 Q 其取值范围为 $0 < \gamma < 0.5$ 。[Carcione 等 \(2002\)](#)^[60] 推导出了常 Q 模型在时间域的粘声波动方程：

$$\frac{\partial^{2-2\gamma} p}{\partial t^{2-2\gamma}} = c^2 \omega_0^{-2\gamma} \nabla^2 p, \quad (2-78)$$

式中 ∇^2 是拉普拉斯算子， $p(\mathbf{x}t)$ 是压力波场。方程 (2–78) 涉及时问的分数阶偏导数，所以又叫分数阶偏导数方程。在均匀介质中，将波动方程的平面波解 $e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}$ 带入方程 (2–78) 中有如下频散关系：

$$\frac{\omega^2}{c^2} = (i)^{2\gamma} \omega_0^{-2\gamma} \omega^{2\gamma} \mathbf{k}^2. \quad (2-79)$$

[Zhu 和 Harris \(2014\)](#)^[61] 从方程 (2–79) 出发，推导了如下近似频散关系：

$$\frac{\omega^2}{c^2} = -\eta |\mathbf{k}|^{2\gamma+2} - i\omega\tau |\mathbf{k}|^{2\gamma+1} \quad (2-80)$$

对应的分数阶常 Q 波动方程为：

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \nabla^2 p + \{\eta(-\nabla^2)^{\gamma+1} - \nabla^2\}p + \tau \frac{\partial}{\partial t} (-\nabla^2)^{\gamma+\frac{1}{2}} p, \quad (2-81)$$

其中 $\eta = -c_0^{2\gamma} \omega_0^{-2\gamma} \cos(\pi\gamma)$ ， $\tau = -c_0^{2\gamma-1} \omega^{-2\gamma} \sin(\pi\gamma)$ 。方程 (2–81) 中的相速度 c_0 和分数阶指数 γ 依赖于空间变量 \mathbf{x} ，通常是非均匀的，这导致用传统方法求解该方程变得非常困难。近年来，低秩近似方法 ([Etgen 和 Brandsberg-Dahl, 2009](#)^[62]；[Cheng 和 Fomel, 2014](#)^[63]) 的发展应用使得求解此方程变得容易。用低秩近似求解方程 (2–81) 的具体实现可参见附录A。另外，[Yao 等 \(2017\)](#)^[64] 用埃尔米特分布逼近泛函来求解此方程。

方程 (2–81) 右边有三项，第一项为声波项，第二项控制频散，第三项控

制衰减。该方程与方程 (2-78) 最主要的区别是显示的把衰减项与频散项显示分开，这对地震波逆时偏移成像有重要意义。图 (2-19) 展示了均匀介质模型 ($Q = 10, c_0 = 2164\text{m/s}$)，不同控制项产生的波前快照。控制衰减项产生的波场与声波方程产生的波场具有相同的相位，但是其振幅明显较弱；控制频散项产生的波场与声波方程产生的波场具有相当的振幅，但是其相位有明显的移动。全粘声方程既衰减了地震波的振幅也改造了地震波的相位。

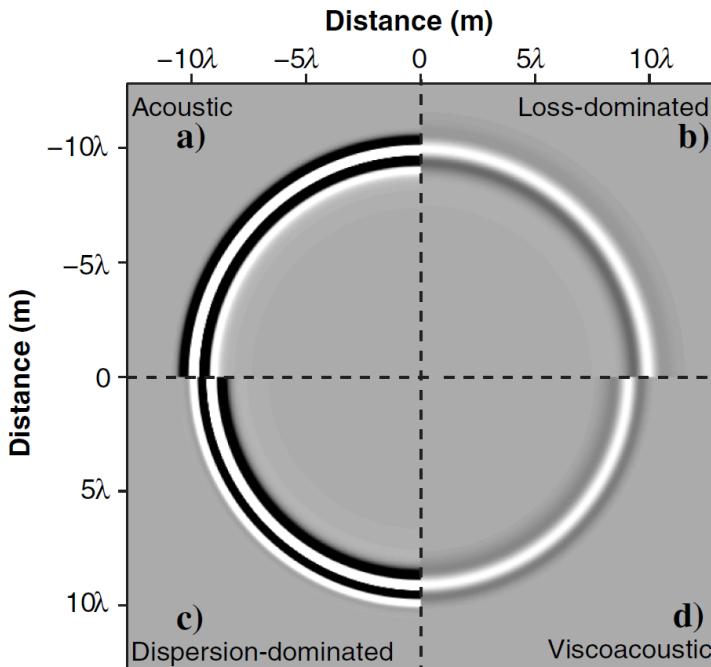


图 2-19 近似常 Q 方程不同控制项产生的波前快照 (引自 Zhu 等, 2014^[65])
Fig 2-19 Four wavefield parts split by the dashed lines are generated by different formulations.

2.3.3 衰减模型在地震波偏移成像中的应用

地下介质的强衰减不仅会减弱地震波的振幅，对地震波的相位也有较强的改造。在地震波偏移成像中，如果不考虑衰减效应会导致在强衰减区成像能量很弱，而且像的位置不聚焦。所以，地震波逆时偏移成像 (RTM) 中考虑地层衰减效应特别重要，尤其是在流体饱和的储层和气云区 (Muller 等, 2010^[66])。 Q 补偿的成像方法有很多，在数据域 Hargreaves 和 Calvert (1991)^[67] 通过反 Q 滤波来补偿地震记录。反 Q 滤波法基于一维假设，不适合复杂情况下的 Q 补偿。Fletcher 等 (2012)^[68] 匹配源端和检波点端的波场，通过匹配滤波在波的传播过程中补偿衰减效应。滤波器由匹配声波模拟和粘声模拟结果获得，并在每一步成像之前施加，所以严重依赖于 I/O。因为地震衰减是在波的传播过程中发生的，所以通过修改传播算子在传播过程中补偿 Q 效应是很直接的想法。常用考虑衰减的粘声波动方程有两种，一种是标准线性固体模型，另一种是常 Q 模型。本节对比这两类方程在 Q 补偿的 RTM (Q -RTM) 中的应用。

对于 SLS 粘声波动方程 (2–74)，衰减效应包含于记忆变量中。Deng 和 MeMechan (2008)^[69] 通过改变记忆变量在方程 (2–74) 中的正负号来补偿检波点端的振幅损失。这种方法对于弱衰减区域有效，衰减的振幅得以补偿。但是振幅的衰减和速度的频散都耦合于记忆变量中，通过改变记忆变量符号的方法不能正确校正速度频散效应从而使得在强衰减区域的成像位置不聚焦。Bai 等 (2013)^[70] 不使用记忆变量而是通过拟微分算子来补偿振幅衰减，忽略相位效应。以上两种基于 SLS 粘声波动方程的 Q-RTM 算法均会导致相位变形。

Zhang 等 (2010)^[71] 用拟微分算子推导出了一种常 Q 粘声方程把振幅衰减和速度频散项区分开来。同样地，Zhu 和 Harris (2014)^[61] 通过频散关系近似，用分数阶拉普拉斯算子推导了另一种常 Q 粘声方程以区分振幅衰减和速度频散。在 Q-RTM 实现中，这两种分离的常 Q (DCQ) 方程通过改变方程中振幅衰减项 (方程2–81右端第三项) 的符号来补偿振幅衰减，而速度频散项 (方程2–81右端第二项) 保持不变，从而保证震源端和检波点端波场传播速度相同。在 Q-RTM 中，波场反传是一个能量补偿过程，Zhang 等 (2010)^[71] 通过在方程中增加一个正则化项来阻止高频噪音的无限放大。而Zhu 等 (2014)^[65] 通过低通 Tukey 滤波来保持反传波场的稳定性。

设计一个简单的二维层状模型 (图2–20) 来展示两种方程的 Q-RTM 效果，模型具有五层结构，中间包含两个斜层，在模型的深部有一个强衰减区 (图2–20b)。用于偏移的合成地震记录是用粘声波方程 Born 正演产生的，从而去掉直达波对成像的影响。图 (2–21a) 显示了用声波方程偏移的结果，在强衰减区域的下方，由于没考虑衰减的影响其成像的能量很弱，并且成像位置轻微偏移正确位置。图 (2–21b) 是基于 SLS 方程的 Q-RTM 结果，强衰减区域下的成像能量得到了补偿，但由于没有正确处理相位的影响，成像不聚焦并且位置偏离正确位置严重。图 (2–21c) 是基于 DCQ 方程的 Q-RTM 结果，反传波场能量得到了补偿，因此强衰减区域下方的地层能量得到了补偿，由于没有改变方程的速度频散关系，正传和反传波场具有相同的速度，所以成像位置是准确的，像的连续性更好。因此，在存在强衰减的区域，为了得到正确的聚焦的成像结果， Q 补偿偏移成像是必然选择，并且 DCQ 方程的偏移结果明显优于 SLS 方程。

另外，在粘声最小二乘偏移 (Q-LSRTM) 中 (Dutta 和 Schuster, 2014^[72]; Sun 等, 2016^[73])，能量的衰减可以通过多次迭代来补偿，所以在 Q-LSRTM 中没有必要重新构造传播算子。根据伴随状态法，用伴随方程反传数据残差计算模型的更新量，无论用 SLS 方程还是 DCQ 方程均能得到很好的成像结果。

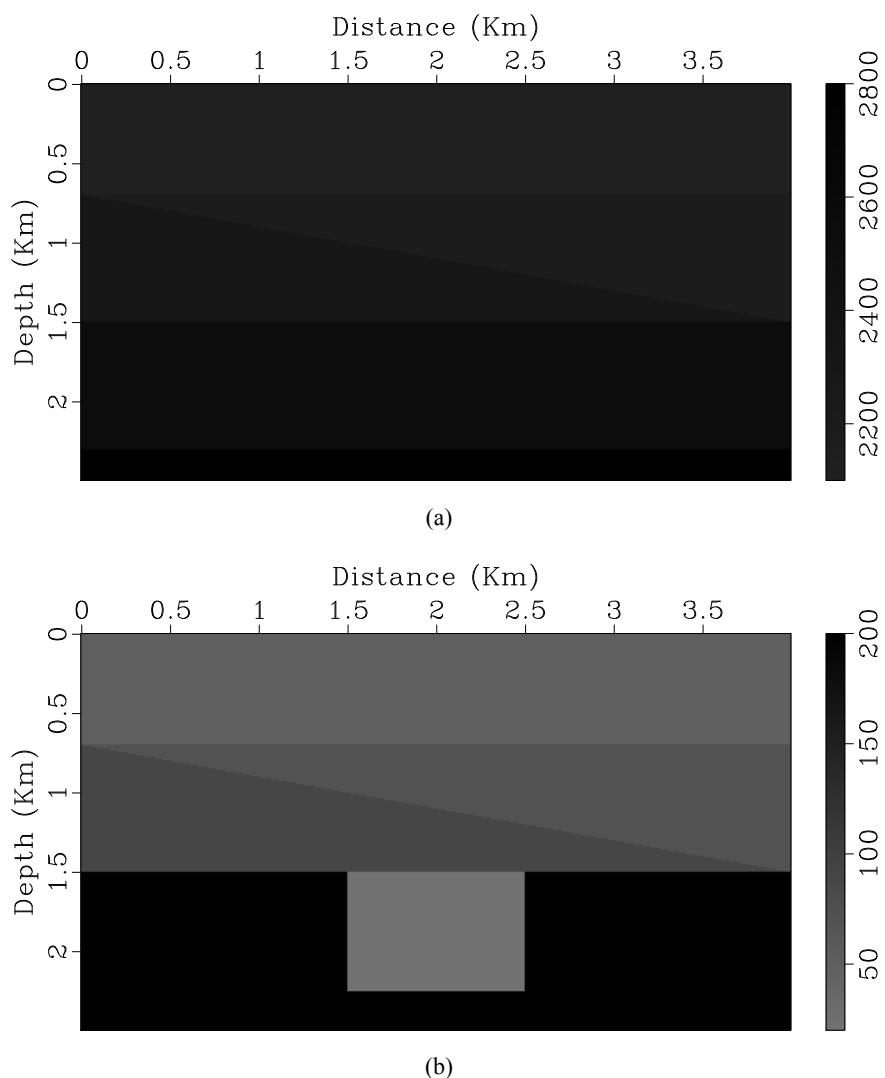


图 2-20 层状模型: (a) 速度模型; (b) Q 模型。
Fig 2-20 Layered model: (a) velocity model; (b) Q model.

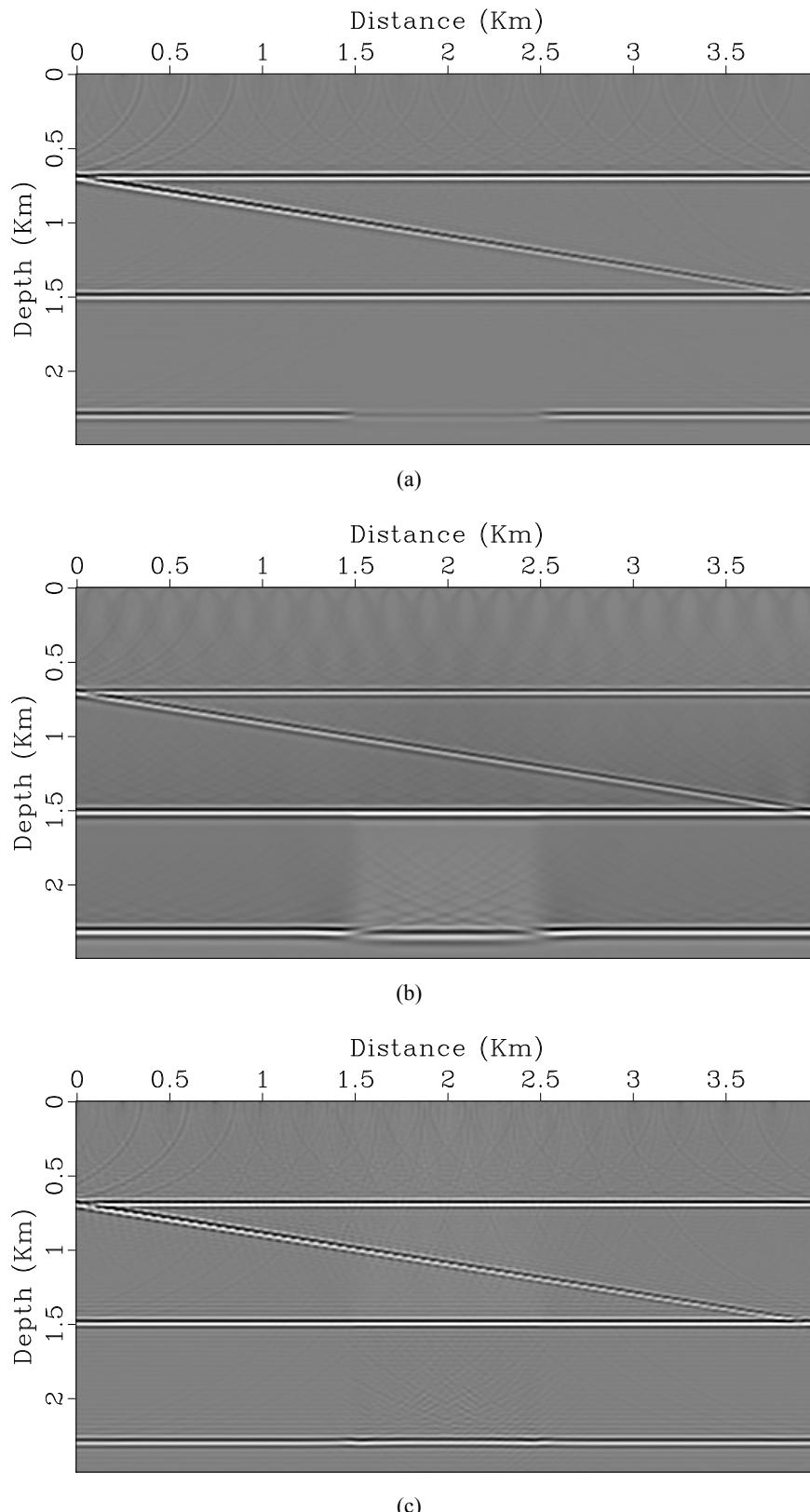


图 2-21 Q -RTM 结果: (a) 不补偿; (b) SLS 模型补偿结果; (c) 常 Q 模型补偿结果。
 Fig 2-21 RTM results with Q -compensation: (a) without Q -compensation; (b) using SLS equation;
 (c) using constant- Q equation.

第三章 基于粘声方程的反射全波形反演

对于目前普遍缺乏可靠的低频（小于 4Hz）以及长偏移距信息的地震数据，中深层的参数信息主要包含在反射数据中，常规的 FWI 对于中深层参数的建模往往无能为力。因此，反射波波形反演 (RWI) 成为近几年国际地震勘探领域争相研究的课题。沿反射波波路径进行背景速度反演已经取得了很多成功的案例。

RWI 是处理 FWI 的强非线性问题的一种有效解决途径，虽然在背景速度建模中被广泛使用，但是目前为止，尚未有学者将其引入到背景 Q 的估计中。地震衰减对地震波传播的影响相较于速度对地震波传播的影响既有相似之处，也略有不同。本章将详细介绍如何把 RWI 引入到背景 Q 的反演中。

3.1 引言

用地震波信息来反演地下地层的衰减信息已有很多年的研究历史，其反演方法可大致分为射线层析和波形反演两类。射线层析类方法 (Brzostowski 和 McMechan, 1992^[6]; Quan 和 Harris, 1997^[7]; Hu 等, 2011^[8]) 用射线路径来构建层析矩阵，具有很高的计算效率，对于介质变化简单的情况有很好的应用效果。但当介质复杂时，地震波传播往往存在多路径，并且当介质存在高速或低速透镜体时，射线追踪会出现焦散现象，不能对其下覆地层进行很好的照明。波动类的反演方法以全波动方程为传播引擎，能较精确的刻画地震波在复杂介质中传播的各种波现象，理论上是目前精度最高的参数建模方法。自从 Lailly (1983)^[14] 和 Tarantola (1984)^[9] 等人建立起全波形反演的基本理论框架以来，越来越多的人关注该方法的研究与应用，尤其是在地震波速度反演方面。在地震品质因子反演方面，Tarantola (1988)^[26] 第一次提出了时间域粘弹波形反演理论。随后，Song 等 (1995)^[16] 在频率域提出了一种粘声波形反演方法 (Q -FWI)。在 Q -FWI 中，速度参数和品质因子有很强的耦合性 (Song 等, 1995^[16]; Kamei 和 Pratt, 2008^[28]; Hak 和 Mulder, 2011^[22])。在观测系统不完备的情况下，解决这种耦合性的思路有两种，一种是通过预条件模型参数的梯度 (Liao 和 McMechan, 1996^[20]; Hak 和 Mulder, 2011^[22]; Malinowski 等, 2011^[23]) 来减弱耦合。另一种是顺序反演法，先反演对地震数据影响较强的速度参数然后再反演 Q 模型 (Pratt 等, 2004^[33]; Rao 和 Wang, 2008^[34]; Smithyman 等, 2009^[21])。

Q -FWI 的成功需要低频长偏移距地震数据，但是这种高质量的数据采集需要高昂的采集费用。当缺少长偏移距的折射数据时，深部模型往往只被反射波照明。因此，利用反射波进行中深层的速度建模已成为地震成像的共识 (Xu 等, 2012^[44]; Ma 和 Hale, 2013^[45]; Chi 等, 2015^[39])。但是目前尚未有人用反射波

波路径来进行地震衰减建模。本章在顺序反演的思路下，先假设已获得准确的速度模型，然后引入 RWI 框架，用反射波来反演背景 Q 模型。

3.2 方法原理

当利用反射波进行反演时，常规 FWI 对模型的短波长结构更敏感，而地震衰减对地震数据的影响是一种沿地震波波路径的累加效应，因而，其长波长的背景模型显得更为重要。RWI 通过将数据残差投影到反射波波路径来构建模型的长波长成分，更加切合对地震衰减参数反演的需求。本节将介绍粘声反射全波形反演 (Q -RWI) 方法原理。

3.2.1 反射波波形反演基本思路

常规的 FWI 是通过匹配模拟数据和观测数据来推断介质的参数。设 \mathbf{x}_s 和 \mathbf{x}_g 分别为炮点和检波点的空间位置，时间域 FWI 最常用的最小平方目标函数为 (Virieux 和 Operto, 2009^[74])：

$$\mathcal{J}(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} \sum_{s,g} \int_t [d_{obs}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t) - d_{cal}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t)]^2 dt, \quad (3-1)$$

其中 $d_{cal}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t)$ 是模拟数据， $d_{obs}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t)$ 是观测数据。将目标函数 (方程 3-1) 在 \mathbf{m}_0 附近进行二阶 Taylor 展开有

$$\mathcal{J}(\mathbf{m}_0 + \Delta\mathbf{m}) = \mathcal{J}(\mathbf{m}_0) + \frac{\partial \mathcal{J}(\mathbf{m}_0)}{\partial \mathbf{m}} \Delta\mathbf{m} + \frac{\partial^2 \mathcal{J}(\mathbf{m}_0)}{\partial \mathbf{m}^2} \Delta\mathbf{m}^2 + \mathcal{O}(\Delta\mathbf{m}^3). \quad (3-2)$$

当目标函数对模型参数在 \mathbf{m}_0 处的一阶导数等于零时，目标函数取得极小值，即

$$\Delta\mathbf{m} = -[\frac{\partial^2 \mathcal{J}(\mathbf{m}_0)}{\partial \mathbf{m}^2}]^{-1} \frac{\partial \mathcal{J}(\mathbf{m}_0)}{\partial \mathbf{m}}, \quad (3-3)$$

式中 $\frac{\partial \mathcal{J}(\mathbf{m}_0)}{\partial \mathbf{m}}$ 为梯度方向， $[\frac{\partial^2 \mathcal{J}(\mathbf{m}_0)}{\partial \mathbf{m}^2}]^{-1}$ 为 Hessian 的逆。Hessian 的逆对反演通常起照明补偿、加快收敛的作用，但是其计算非常困难，在反演中通常对其做对角近似或常数近似。而一阶梯度作为目标函数的下降方向显得尤为重要。根据伴随状态法 (Plessix, 2006^[75])，目标函数的梯度可用正传波场与反传的残差波场进行零延迟的互相关得到，即

$$\frac{\partial \mathcal{J}(\mathbf{m}_0)}{\partial \mathbf{m}} = \lambda \otimes \mathbf{u}, \quad (3-4)$$

其中 \otimes 表示零延迟互相关， λ, \mathbf{u} 分别表示伴随波场和正传波场。图 3-1 展示了两层介质单炮单检波点的常规 FWI 梯度。其梯度包含四个不同的子梯度 (图 3-2)，

直达波梯度、源端反射波梯度、检波点端反射波梯度以及偏移响应。从图中可以看出不同类型的波对梯度的贡献量不一样，假设透射波场的振幅为 1，背向的反射波的振幅为反射系数的量级 R (譬如 0.1)。那么梯度中，透射波贡献的能量最强 (图 3-2a)，将折射波的数据沿透射波波路径反投影就可以很好地更新折射波波路径覆盖区域的背景参数，但是这部分能量在深层为零。在 FWI 的初期阶段中不合需要的分量是偏移响应 (图 3-2b)，其强度为 R ，是由反射波沿折射波波路径投影得到的。而反演中深部背景参数需要令反射波沿着类似透射形状的反射波路径进行背景参数更新 (图 3-2c 和 d)，其中兔耳状反射波梯度的强度仅为 R^2 。因此，最需要的兔耳状的反射波梯度比不合需要的偏移响应的强度还要小一个数量级，如果不采用梯度分解，需要的低波数能量会被不需要的高波数偏移响应所掩盖，这就是常规 FWI 通常难以用反射波来更新背景参数的最主要原因。

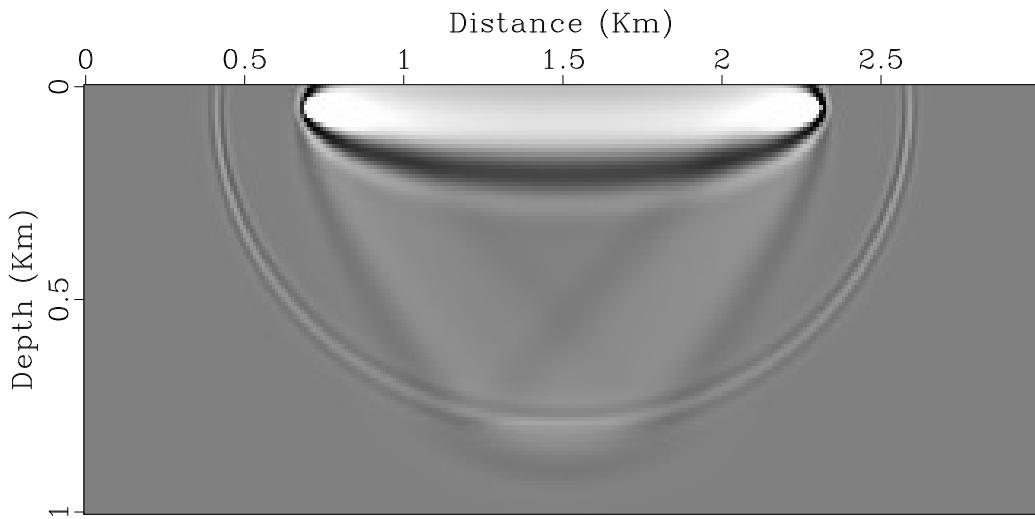


图 3-1 两层介质单炮单检波点的 FWI 梯度。

Fig 3-1 The gradient of FWI.

RWI 主要是通过上下行波分离来提取反射波在反射波路径上的梯度。目前在 RWI 中用于上下行波分离的方法主要两种，一种是在光滑的背景模型中加入参数扰动，用 Born 正演来获取上行的反射波 (Xu 等, 2012^[44]; Ma 和 Hale, 2013^[45]; Chi 等, 2015^[39])；另一种是在频率-波数域用方向分解来区分上下行波 (Wang 等, 2016^[76])。另外，单成波方程自然地考虑了波的传播方向，非常适合 RWI 的框架，已逐渐开始被学者用于 RWI 的研究中 (Dong 等, 2018^[77])。本节将用基于 Born 正演的方式来重述 RWI 的推导。

根据 Ma 和 Hale (2013)^[45] 的推导，将模型参数 \mathbf{m} 分解为光滑的低波数背景

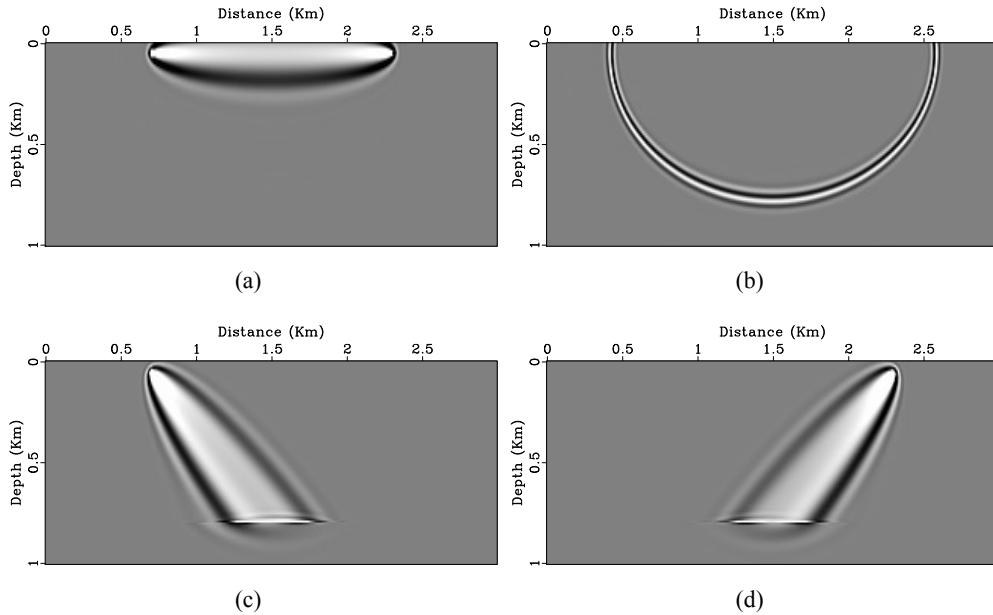


图 3-2 常规 FWI 梯度分解。(a) 直达波梯度; (b) 偏移响应; (c) 源端反射波梯度; (d) 检波点端反射波梯度。

Fig 3-2 The sub-gradients of FWI. (a) direct wave gradient; (b) migration-ellipse; (c) source side gradient; (d) receiver side gradient.

模型 \mathbf{m}^s 和高波数扰动 \mathbf{m}^r (图 3-3):

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}^s + \mathbf{m}^r. \quad (3-5)$$

其中光滑的背景参数 \mathbf{m}^s 控制波传播的运动学信息, 即背景波场 $\mathbf{p}_b \equiv p_b(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t)$:

$$\left(\mathbf{m}^s \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \mathbf{p}_b = f(t, \mathbf{x}_s), \quad (3-6)$$

高波数扰动 \mathbf{m}^r 对应于反射波场 $\mathbf{p}_c \equiv p_c(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t)$:

$$\left((\mathbf{m}^s + \mathbf{m}^r) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \mathbf{p}_c = -\mathbf{m}^r \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{p}_b, \quad (3-7)$$

式中 \mathbf{m}^r 和 \mathbf{m}^s 是慢度的平方, $f(t, \mathbf{x}_s)$ 表示震源子波。

根据伴随状态法 (Plessix, 2006^[75]), 低波数背景模型的梯度可以表示为 (Ma 和 Hale, 2013^[45]):

$$\partial_{\mathbf{m}^s} \mathcal{J} = - \int d\mathbf{x}_s dt \mathbf{q}_c \ddot{\mathbf{p}}_b - \int d\mathbf{x}_s dt \mathbf{q}_b \ddot{\mathbf{p}}_c, \quad (3-8)$$

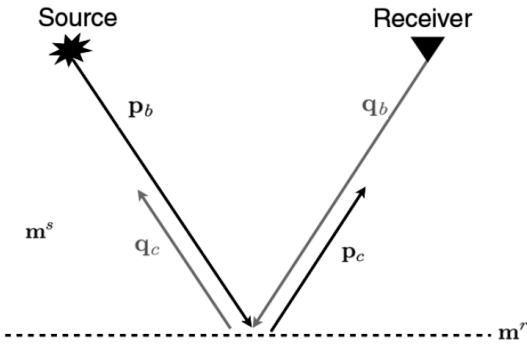


图 3-3 RWI 波场分解及波路径示意图，参数的高波数成分 (\mathbf{m}^r) 扰动背景场 \mathbf{p}_b 和 \mathbf{q}_b 产生背向散射场 \mathbf{p}_c 和 \mathbf{q}_c ，可以看作是“透射波“从震源出发沿波路径到达反射位置 \mathbf{m}^r 然后再返回接收点。

Fig 3-3 Schematic of RWI. The high-wavenumber component m^r perturbs wavefields \mathbf{p}_b and \mathbf{q}_b in the low-wavenumber background m^s and contributes to back-scattering wavefields \mathbf{p}_c and \mathbf{q}_c , which can be considered “transmission” waves propagating along the wave paths between m^r and the source and receiver.

高波数的扰动模型的梯度为：

$$\partial_{\mathbf{m}^r} \mathcal{J} = - \int d\mathbf{x}_s dt \mathbf{q}_b \ddot{\mathbf{p}}_b \quad (3-9)$$

式中 $\mathbf{q}_b \equiv q_b(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t)$ 和 $\mathbf{q}_c \equiv q_c(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t)$ 是伴随场，即伴随方程的解。方程 3-8 右端的第一项表示源端的正传波场 $\ddot{\mathbf{p}}_b$ 与反传波场 \mathbf{q}_c 的零延迟互相关（图 3-2c），同样地，第二项是正传波场 $\ddot{\mathbf{p}}_c$ 和检波点端反传波场 \mathbf{q}_b 的零延迟互相关（图 3-2d）。正如图 3-3 所示，模型的高波数成分 \mathbf{m}^r 散射源端的正传背景场 \mathbf{p}_b 和检波点端的反传背景场 \mathbf{q}_b ，换句话说， \mathbf{m}^r 中的每一点都可以看成是虚拟震源来产生散射波场 \mathbf{p}_c 和 \mathbf{q}_c 。背景模型的梯度 $\partial_{\mathbf{m}^s} \mathcal{J}$ 跟预想的一样，是沿反射波的波路径分布的，即从震源出发到达地下反射位置然后再返回接收点。这样的梯度携带了地下中深层的参数信息，用以更新中深层的背景模型是可靠的。相反， $\partial_{\mathbf{m}^r} \mathcal{J}$ 类似于 RTM 成像结果，主要分布在反射位置 \mathbf{m}^r 附近，用以产生反射数据。

3.2.2 基于粘声方程的反射全波形反演

根据第二章第二节的推导，对于给定的速度以及 Q 模型，压力波场可用如下 SLS 方程进行计算：

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} - K(\tau + 1) \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - r_p &= f(\mathbf{x}_s, t), \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial r_p}{\partial t} + \frac{1}{\tau_\sigma} \left[r_p + K\tau \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right] &= 0, \end{aligned} \quad (3-10)$$

式中 v_x 和 v_z 表示质点的振动速度， P 表示压力场， r_p 为记忆变量， K 表示介质的体积模量，为了简化表示我们假定密度是常数。应力以及应变的驰豫参数 τ_σ ， τ_ϵ 以及 τ 与品质因子 Q 和参考频率 f_ω 有关，在地震勘探应用中，通常选取震源子波的中心频率为其参考频率，即有：

$$\begin{aligned} \tau_\sigma &= \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}} - \frac{1}{Q}}{f_\omega}, \\ \tau_\epsilon &= \frac{1}{f_\omega^2 \tau_\sigma} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}} + \frac{1}{Q}}{f_\omega}, \end{aligned} \quad (3-11)$$

以及

$$\tau = \frac{\tau_\epsilon}{\tau_\sigma} - 1 = \frac{2}{Q} \left(\frac{1}{Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}} \right). \quad (3-12)$$

在 Q -RWI 中，主要反演背景的 Q ，我们认为衰减对宏观地震波的影响主要发生在波路径上，即是一种传播效应不是界面效应，所以不对 Q 进行波数成分的分解。为了描述波路径产生反射波，携带衰减信息，我们将体积模量 K 分解为光滑背景 K_0 和高波数扰动 δK ：

$$K = K_0 + \delta K. \quad (3-13)$$

根据 SLS 粘声波方程 3-10 以及 Born 近似假设， Q -RWI 的物理状态方程可写为如下矩阵向量乘的形式：

$$\mathbf{L}\mathbf{w} = \mathbf{f}, \quad (3-14)$$

其中

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & -K_0(\tau+1)\frac{\partial}{\partial x} & -K_0(\tau+1)\frac{\partial}{\partial z} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\tau}{\tau_\sigma}K_0\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\tau}{\tau_\sigma}K_0\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_\sigma} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta K(\tau+1)\frac{\partial}{\partial x} & -\delta K(\tau+1)\frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial t} & -K_0(\tau+1)\frac{\partial}{\partial x} & -K_0(\tau+1)\frac{\partial}{\partial z} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial t} & 0 \\ 0 & \frac{\tau}{\tau_\sigma}\delta K\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\tau}{\tau_\sigma}\delta K\frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\tau}{\tau_\sigma}K_0\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\tau}{\tau_\sigma}K_0\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_\sigma} \end{bmatrix}$$

以及

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} P \\ v_x \\ v_z \\ r_p \\ \delta P \\ \delta v_x \\ \delta v_z \\ \delta r_p \end{bmatrix}, \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

\mathbf{w} 表示状态变量, \mathbf{L} 表示正演模拟算子。在这种情况下, 正算子的伴随算子 \mathbf{L}^* 有如下表达式:

$$\mathbf{L}^* = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\rho} & \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}K_0(\tau+1) & -\frac{\partial}{\partial t} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\tau}{\tau_\sigma}K_0 & \frac{\partial}{\partial x}\delta K(\tau+1) & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\tau}{\tau_\sigma}\delta K \\ \frac{\partial}{\partial z}K_0(\tau+1) & 0 & -\frac{\partial}{\partial t} & -\frac{\partial}{\partial z}\frac{\tau}{\tau_\sigma}K_0 & \frac{\partial}{\partial z}\delta K(\tau+1) & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial z}\frac{\tau}{\tau_\sigma}\delta K \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_\sigma} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\rho} & \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x}K_0(\tau+1) & -\frac{\partial}{\partial t} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\tau}{\tau_\sigma}K_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z}K_0(\tau+1) & 0 & -\frac{\partial}{\partial t} & -\frac{\partial}{\partial z}\frac{\tau}{\tau_\sigma}K_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_\sigma} \end{bmatrix}, \quad (3-15)$$

式中 * 表示伴随。对于真实的地质模型, 驰豫参数 τ 比 τ_σ 和 τ_ϵ 有较宽的数值变化范围。因此我们选择 τ 作为参数化参数, 因为其对 Q 的变化更敏感 (Dutta 和 Schuster, 2016^[36])。用伴随状态法可推导出目标函数 $\mathcal{J}(\mathbf{m})$ 对驰豫参数 τ 的

梯度为：

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \tau} &= -\left\langle \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \tau} \mathbf{w}, \tilde{\mathbf{w}} \right\rangle \\
 &= K_0 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \left(-\delta \tilde{P} + \frac{1}{\tau_\sigma} \delta \tilde{r}_p \right) \\
 &\quad + K_0 \left(\frac{\partial \delta v_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta v_z}{\partial z} \right) \left(-\tilde{P} + \frac{1}{\tau_\sigma} \tilde{r}_p \right) \\
 &\quad + \delta K \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \left(-\tilde{P} + \frac{1}{\tau_\sigma} \tilde{r}_p \right),
 \end{aligned} \tag{3-16}$$

式中 $\tilde{\mathbf{w}} = [\delta \tilde{P}, \delta \tilde{v}_x, \delta \tilde{v}_z, \delta \tilde{r}_p, \tilde{P}, \tilde{v}_x, \tilde{v}_z, \tilde{r}_p]^T$ 是物理状态变量 \mathbf{w} 的伴随状态变量 (T 表示转置)，满足如下伴随方程：

$$\mathbf{L}^* \tilde{\mathbf{w}} = \Delta \mathbf{d}. \tag{3-17}$$

在实际勘探中，通常只接收到波场的压力分量，所以地震数据的残差只有一个分量，即：

$$\Delta \mathbf{d} = [0, 0, 0, 0, \Delta d, 0, 0, 0]^T. \tag{3-18}$$

本章主要是理论的角度来推导 Q -RWI 方法并证明其对反演深层背景衰减模型的有效性，所以我们假定介质的背景体积模量 K_0 和扰动 δK 都是已知的，并且地震数据是无噪的。在这中假设下选取振幅差作为目标函数（方程 3-1）是可行的，并且伴随方程的伴随源有最简单的形式即模拟数据与观测数据的残差。

Q -RWI 的梯度公式 (4-4) 共包含三项。如图 3-4 所示，“一二项”兔耳朵状的梯度，提供了沿反射波路径的低波数的背景 Q 的更新量。第三项对应于反射波在成像点的成像结果，对 RWI 来说是奇异的非光滑的分量。第三项会在反射界面位置更新高波数成分从而增加反演的非线性程度。在声波的 RWI 中，Wu 和 Alkhalifah (2015)^[78] 观察到第三项在反射界面处的值的符号与第一二项在反射界面处的值相反，但是数值不一样。他们将第三项加入反演中，通过求解一个内部优化问题，用第三项来减弱第一二项在反射界面处的影响以降低反演的非线性程度。为了不增加反演的计算量，在 Q -RWI 中我们省略掉第三项，同时用 Poynting 矢量来简单区分上下行波 (Yoon 和 Marfurt, 2006^[79])，以减弱梯度在反射界面处的奇异性。由图 3-5 可以看出，无论是单炮单道、单炮多道还是多炮多道叠加，用 Poynting 矢量来进行上下行波分离的预条件都减弱了 Q -RWI 中梯度在反射界面处的奇异性，从而增强了反演的稳定性。以上的 Q -RWI 梯度是基于 SLS 粘声方程推导的，这套推导方法同样适合于常 Q 粘声方程，其具体推导可参见附录 B。

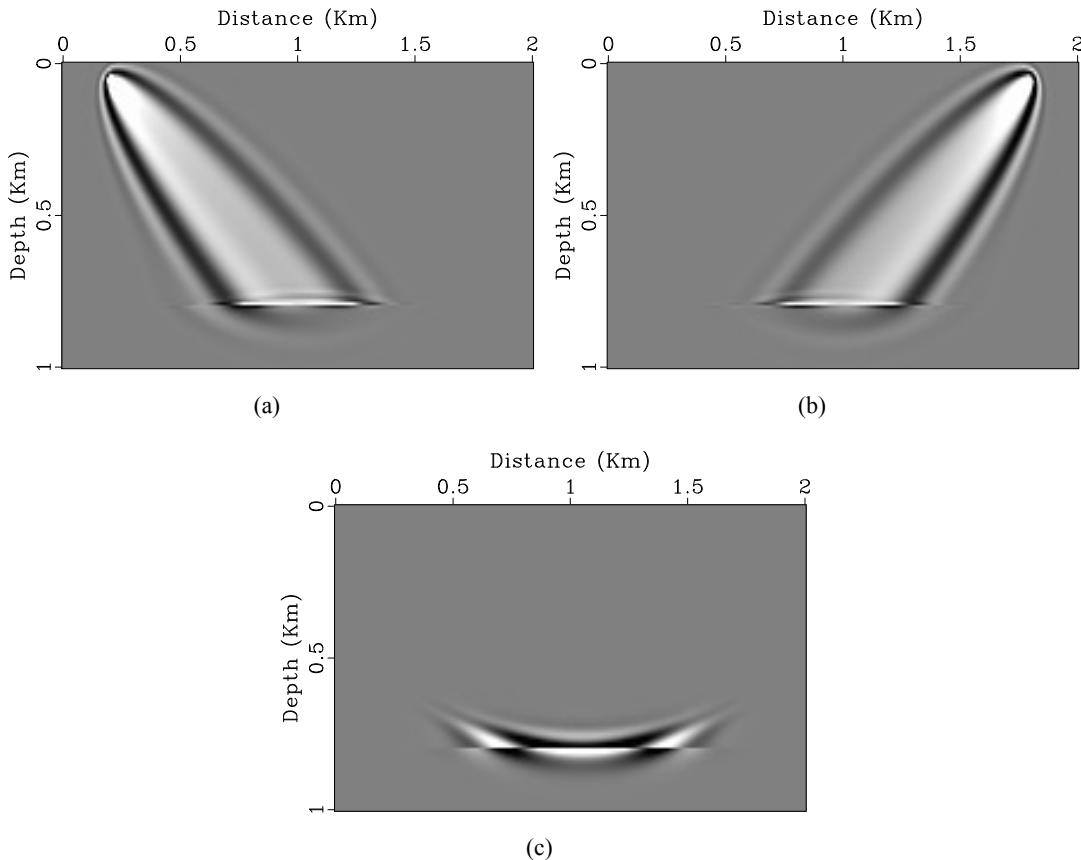


图 3-4 两层介质 Q -RWI 中背景 Q 的子梯度。(a) 源端梯度; (b) 检波点端梯度; (c) 高波数奇异分量。

Fig 3-4 Sub-gradients of Q -RWI for simple two-layer model: (a) source-side reflection gradient; (b) receiver-side reflection gradient; and singular component.

计算出梯度之后, $\tau(\mathbf{x})$ 可用最速下降法来迭代求解:

$$\tau(\mathbf{x})^{(k+1)} = \tau(\mathbf{x})^k - \alpha \mathbf{P}_c(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tau(\mathbf{x})}, \quad (3-19)$$

式中 k 是迭代次数, $\mathbf{P}_c(\mathbf{x})$ 是预条件算子, 步长 α 可通过任何反向追踪的线性搜索方法求解 (Nocedal 和 Wright, 1999^[80])。在每一个迭代步内, 当 $\tau(\mathbf{x})$ 更新之后可用方程 3-12 将其转换为 $Q(\mathbf{x})$ 。

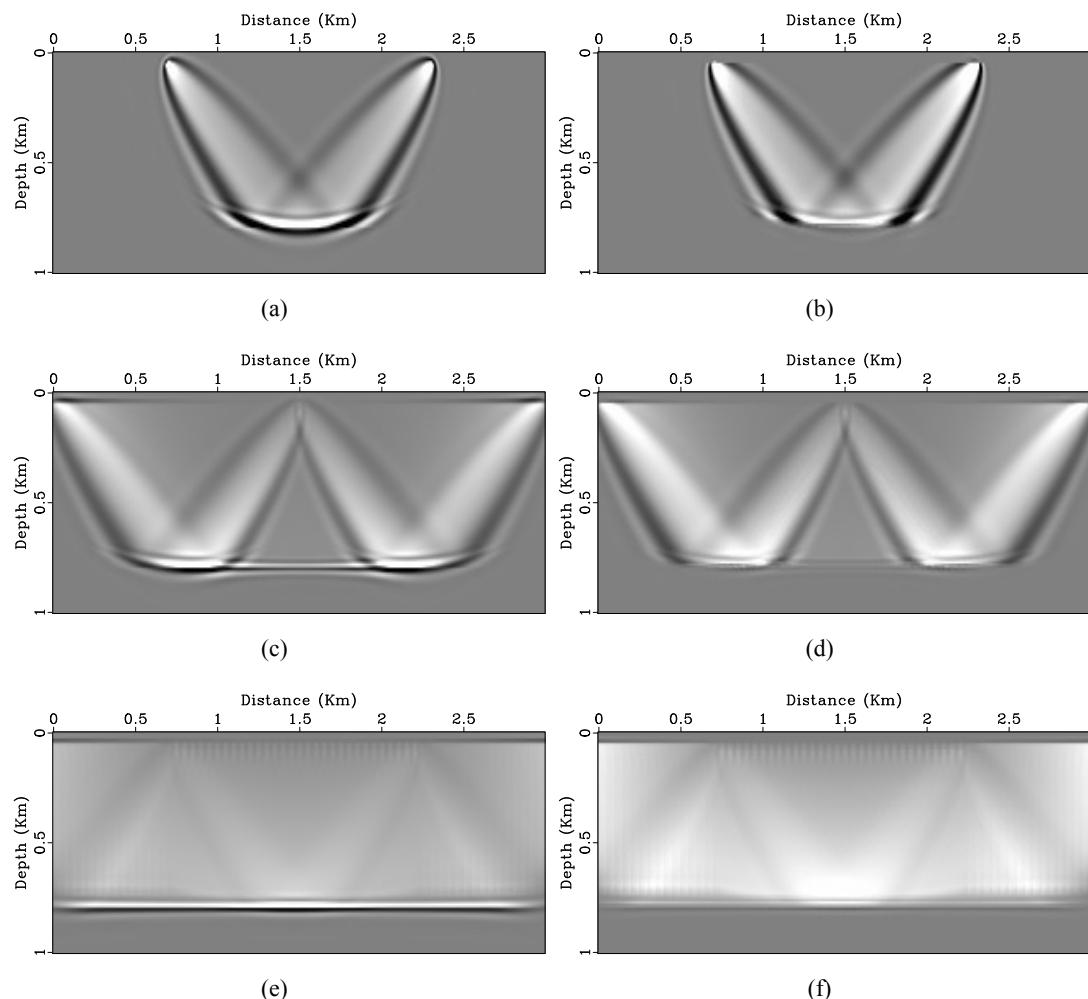


图 3-5 两层介质 Poynting 矢量预条件梯度对比，左边是没有预条件的梯度，右边是通过 Poynting 矢量上下行波分离预条件的梯度。(a, b) 单炮单道；(c, d) 单炮多道；(e, f) 多炮多道。

Fig 3-5 Comparison the gradients before and after using Poynting vector for preconditioning for simple two-layer model, the left column are before precondition gradients and the right column are after precondition results. (a, b) one shot and one trance; (c, d) one shot and multi-trances; (e, f) multi-shots and multi-trances.

3.3 数值实验

本节用一个层状模型(图 3-6)来验证 Q -RWI 的有效性。该模型宽 4km, 深 2.5km。在模型的表面均匀分布 20 炮, 炮间距为 200m, 检波器对称分布于震源的两端, 间距为 10m 且最大偏移距为 1km。用峰值频率为 30Hz 的雷克子波作为爆炸震源。在模型的中深部包含一个强的 Q 异常体, 最小 Q 值达到 30。在反演的过程中认为体积模量 K_0 和 δK 都是已知的, 并且密度为常数。用均匀模型 ($Q = 200$) 作为初始模型。

如图 3-6c 所示, 经过 30 次迭代之后, Q -RWI 基本恢复了中深部的 Q 异常。图 3-7 分别抽取了 $x = 1\text{km}$ 、 2km 、 3km 处的伪井曲线。抽线的结果进一步证明了 Q -RWI 对中深部异常 Q 的恢复能力。由于反射数据在浅层覆盖不够即波路径在近地表处变窄, 使得 Q -RWI 在浅层只能得到一个光滑的等效解。这也证实了地球物理反问题解的多解性, 要处理好这种多解性, 在反演时必需加入先验信息的约束或者多种反演方法相结合, 例如 Q -FWI 就能很好的反演浅层 Q 模型。在模型的最底部, 由于没有接收到反射数据, 反射波路径没有穿过该区域, 所以没法正确反演。图 3-8 展示了迭代过程中的收敛曲线, 在这种理想的合成数据中, 目标泛函下降了七八个数量级, 这也有力的证实了 Q -FWI 框架的合理性。图 3-9 展示了在 $x = 2\text{km}$ 处第 10 炮观测记录; 观测数据与初始模型模拟数据的残差以及观测记录与 30 次迭代之后模拟数据的残差。经过 30 次迭代之后模拟数据与观测数据之间的残差基本为零, 这也更好的证明了 Q -RWI 的有效性。

最后, 我们用 Q 补偿的 RTM 来验证反演结果的可靠性。图 3-10 分别展示了初始 Q 模型补偿的 RTM 成像结果、真实 Q 模型补偿的 RTM 成像结果以及反演 Q 模型补偿的 RTM 成像结果。从成像结果中可以看出, 初始 Q 模型补偿的 RTM (图 3-10a) 在强衰减区域能量损失严重, 并且由于速度频散的影响其成像位置不对。准确的 Q 模型不仅补偿了强衰减区损失的能量 (图 3-10b), 而且也保持衰减介质中的速度频散关系, 从而保证了成像位置的正确性。用 Q -RWI 反演的 Q 模型补偿的 RTM 结果 (图 3-10c) 与用真实 Q 模型补偿的 RTM 具有相当的成像结果。这也从 Q 补偿成像的角度证明了 Q -RWI 反演结果的可靠性。

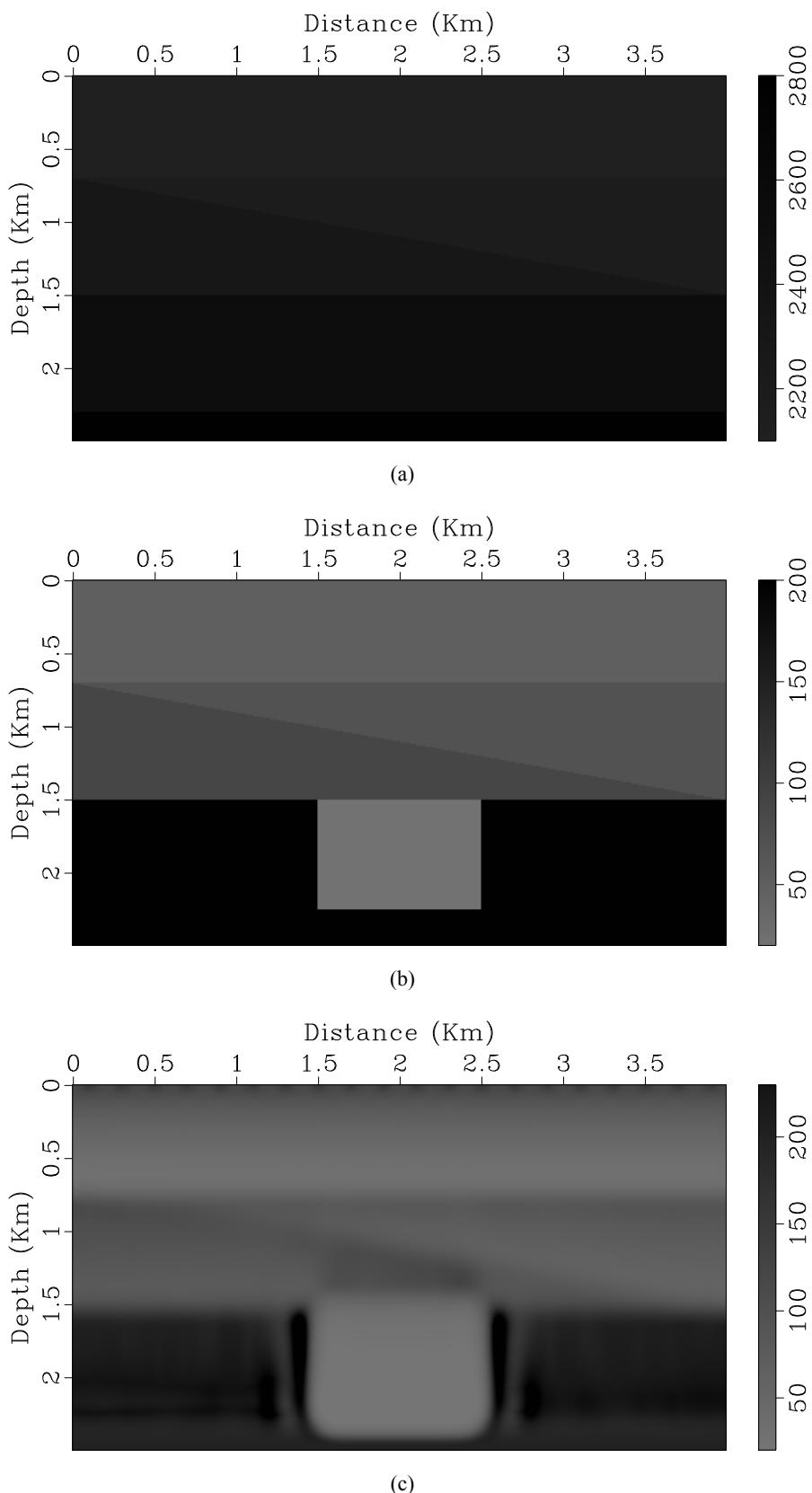


图 3-6 层状模型: (a) 速度模型; (b) 真实 Q 模型; (c) Q -RWI 反演结果。
Fig 3-6 The layered model:(a) the velocity model, (b) true Q model and (c) inverted Q model using Q -RWI.

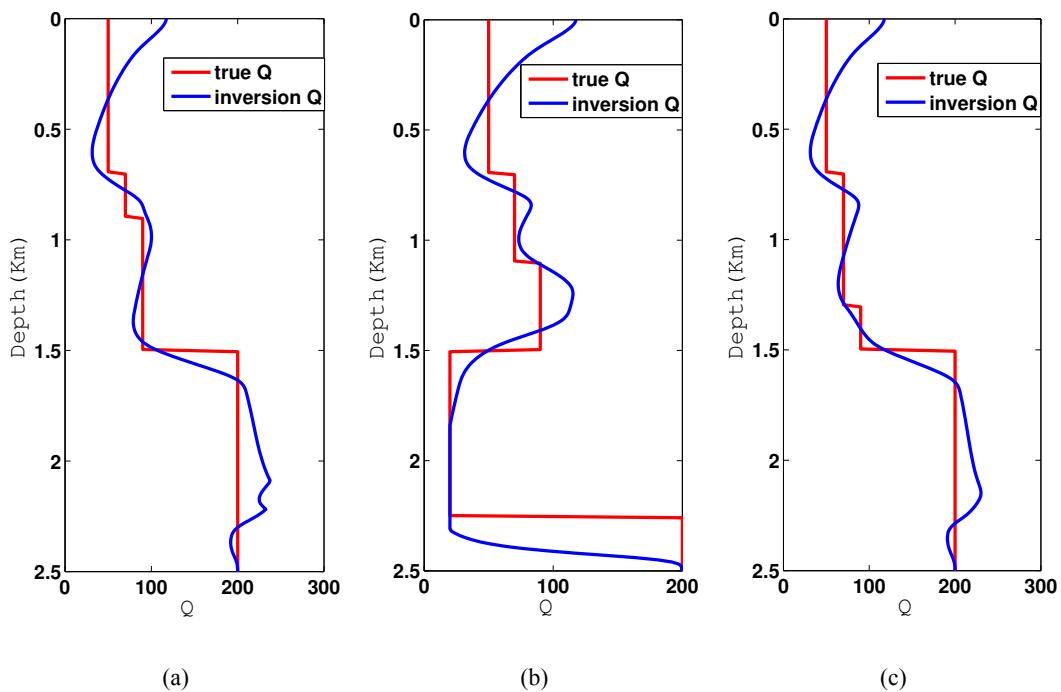
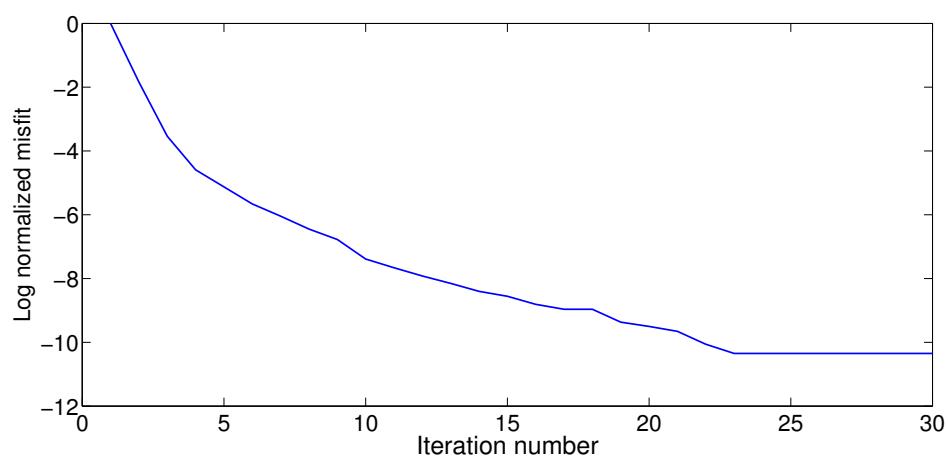


图 3-7 抽线对比: (a) 1km 处; (b) 2km 处; (c) 3km 处。

Fig 3-7 Pseudowell comparison at (a) 1km, (b) 2km and (c) 3km.

图 3-8 收敛曲线
Fig 3-8 The history of convergence.

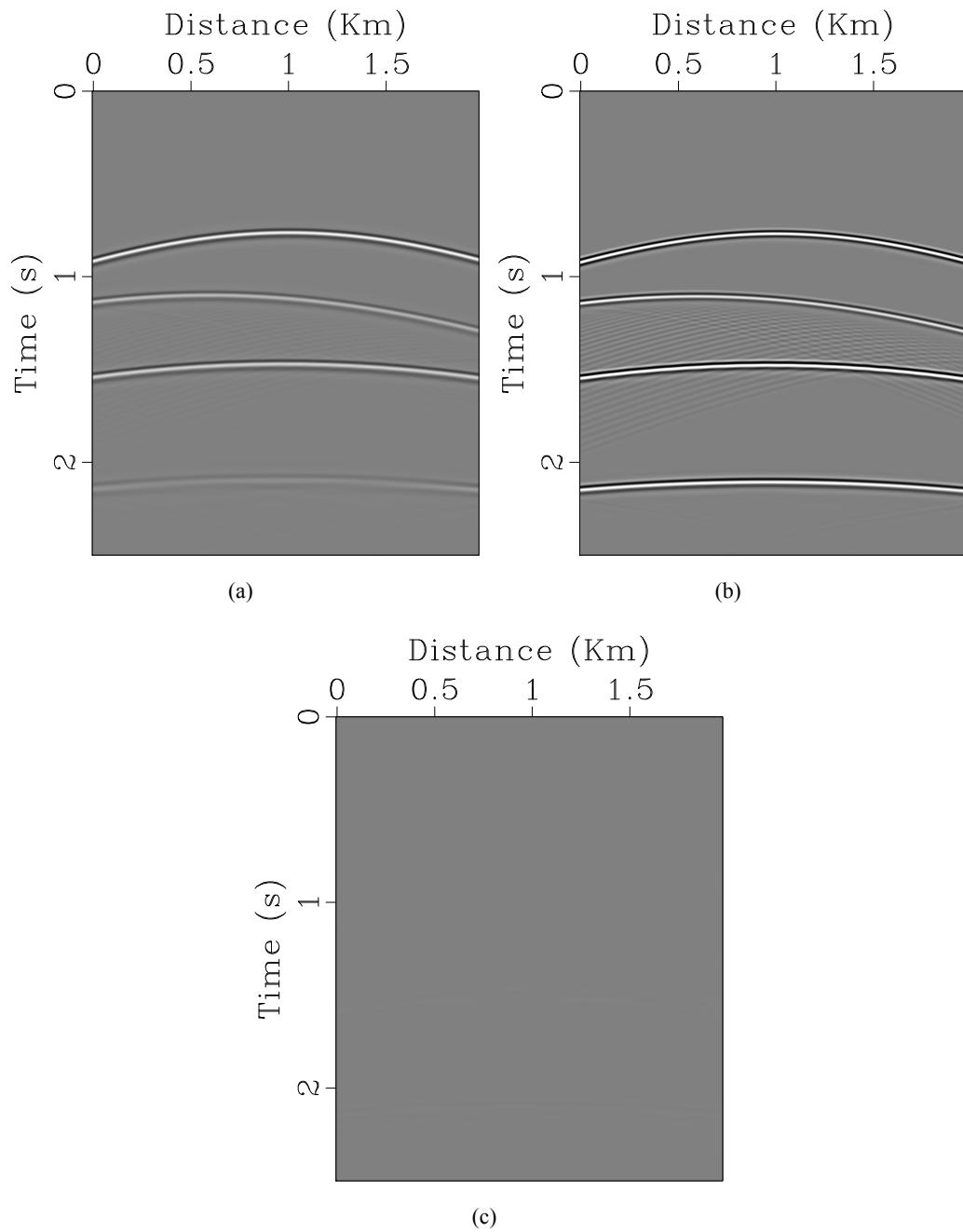


图 3-9 数据残差比较: (a) 在 1km 处的单炮记录; (b) 跟初始模型正演数据的残差; (c) 迭代 30 次后的数据残差。

Fig 3-9 (a) The observed data for the shot at 1km, (b) the residual with the initial Q , and (c) the residual with the Q -RWI inverted Q .

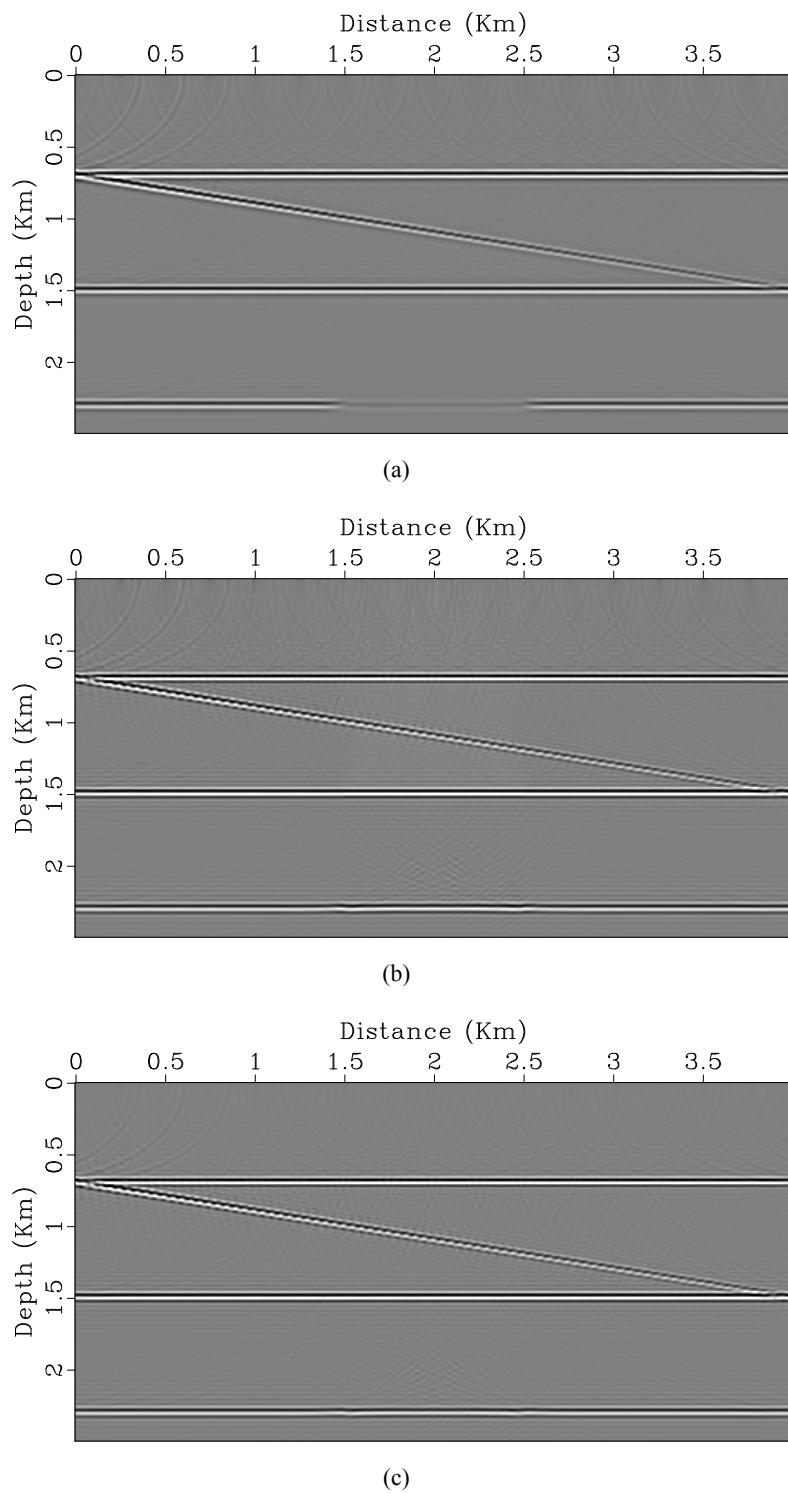


图 3-10 Q -RTM 成像结果: (a) 初始 Q 补偿结果; (b) 真实 Q 补偿结果; Q -RWI 反演 Q 补偿结果。

Fig 3-10 Q -compensated RTM images using initial Q model (a); true Q model (b) and Q -RWI inverted Q model (c).

第四章 基于频移目标函数的反射全波形反演

论文第三章提出的 Q -RWI 框架是基于数据残差的最小二乘目标函数来实现的，该目标泛函对于理论的合成数据有很理想的效果，那是因为在合成数据实验中我们假设已知了模型速度的高波数成分和低波数成分，即振幅的残差只由 Q 不准引起。在实际勘探地震数据处理中，要获取低波数的速度模型相对可行，高波数的速度模型很难精确获取，而高波数的速度成分又是影响地震波振幅的最大因素。此外，地震波振幅还受数据采集环境的影响，如环境噪音、检波器与地表耦合情况等。引起振幅残差的成因的不确定性给第三章提出的基于数据残差最小的 Q -RWI 法造成了致命的影响。

如何孤立地将地震衰减对地震数据的影响从数据中提取出来是 Q -RWI 法走向实用的关键。本章将从地震数据属性出发，寻找只与 Q 相关的地震数据属性，并将其应用到 Q -RWI 中。

4.1 引言

地震衰减不仅吸收地震波的振幅而且对地震波的相位有很强的改造作用（图 4-1a）。由第二章的线性粘弹理论知道，衰减系数 α 与地震波的频率 f 成线性关系（公式 2-18），即 $\alpha \propto f$ 。衰减介质对地震波高频成分的衰减要强于对低频成分的衰减（图 4-1b），这就导致了衰减介质中地震波的峰值频率往低频率处移动（图 4-1c）。几何扩散、透射损失等地震现象影响地震波的振幅但不影响地震波的峰值频率，地震波峰值频率的大小基本只与地下介质衰减强度有关。[Quan 和 Harris \(1997\)](#)^[7] 首次将模拟数据与观测数据间的质心频率差异作为匹配准则，用射线层析方程来更新 Q 模型。为了克服射线理论高频近似的局限性，[Dutta 和 Schuster \(2016\)](#)^[36] 将峰值频率移动目标函数引入到了波动层析当中，通过连接函数首次推导了压力波场对驰豫参数 $\tau(\mathbf{x})$ 的 Frechet 导数。同时也用伴随状态法推导出了峰值频率移动目标函数对模型参数 $\tau(\mathbf{x})$ 的梯度并给出了伴随源。他们的方法在理论合成数据和实际数据中都获得了很好的效果，但是[Dutta 和 Schuster \(2016\)](#)^[36] 的 Q 层析方法只用了直达波数据。

正如第三章所讲，相较于透射波，反射波能提供更深部的介质参数信息。相比于振幅匹配的目标函数（公式 3-1），峰值频率移动的目标函数具有如下表达式：

$$\mathcal{J}(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} \sum_{s,g} \int_t \Delta f^2(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t) dt, \quad (4-1)$$

其中 $\Delta f(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t) = f_{obs}^{peak}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t) - f_{cal}^{peak}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t)$, $f_{obs}^{peak}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t)$ 和 $f_{cal}^{peak}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t)$

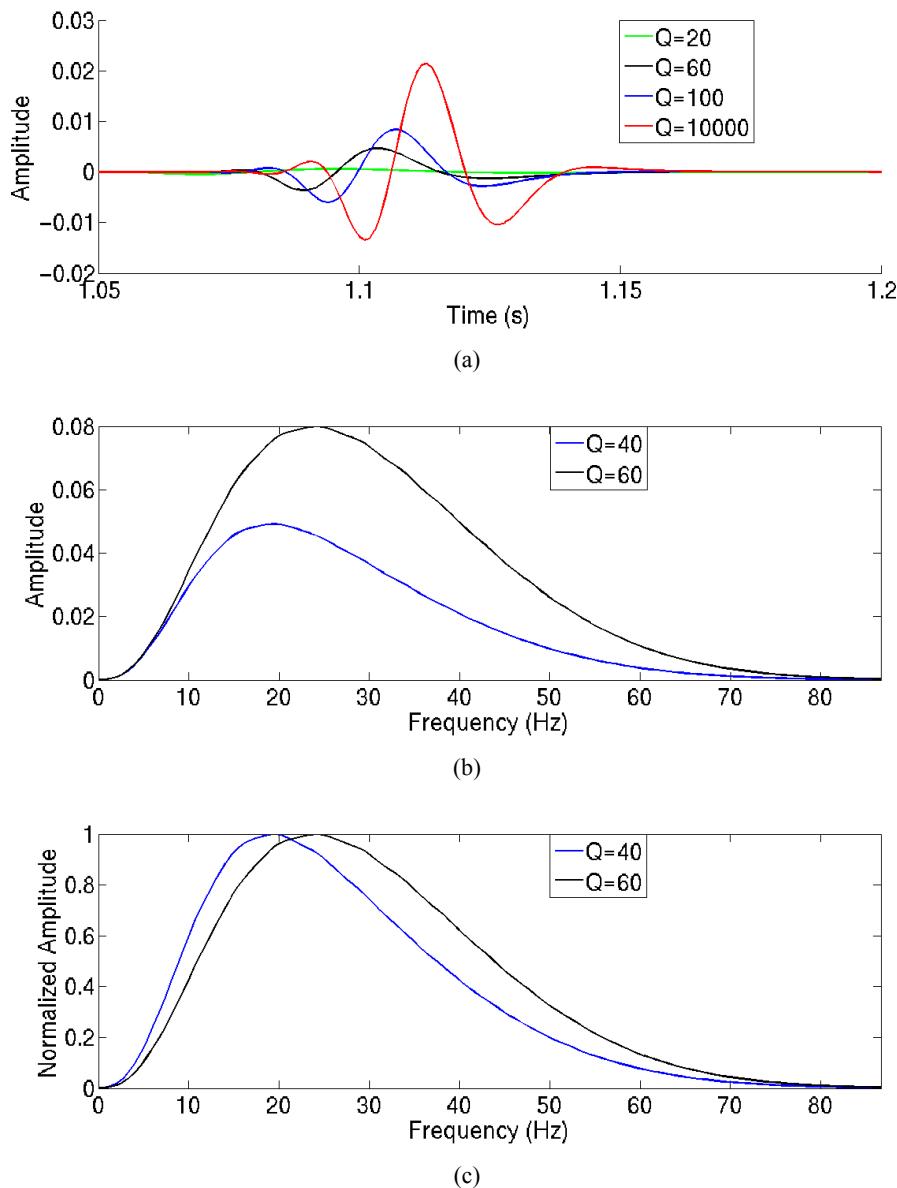


图 4-1 地震衰减效应: (a) 不同 Q 值对地震波波形的影响; (b) 不同 Q 值对地震波振幅谱的影响; (c) 归一化的振幅谱。

Fig 4-1 The effects of seismic attenuation: (a) the seismic waveforms propagated in different Q models; (b) the amplitude spectrum; (c) the normalized amplitude spectrum.

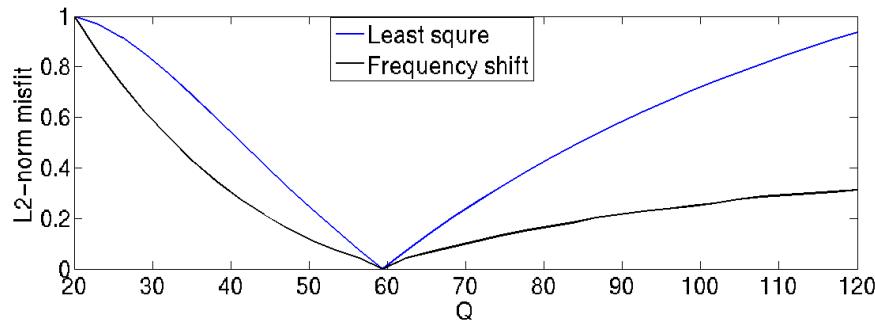


图 4-2 两类归一化的目标函数随 Q 变化的形态，蓝线表示数据残差匹配最小二乘目标泛函，黑线表示峰值频率移动最小二乘目标泛函。

Fig 4-2 Two types of misfit function vary with Q , blue line represents the least square of amplitude residual, and the black line represents the least square of the frequency shift.

分别是观测数据与模拟数据各震相的峰值频率。图 4-2 展示了两种目标函数随 Q 值变化的形态。从图中可以看出峰值频率移动的目标函数比波形残差目标函数具有更宽的收敛盆，更加适合背景 Q 模型的反演。另外，将峰值频率移动作为匹配准则引入 Q -RWI 中可以降低反演方法对高波数速度模型的依赖。反射波数据不同于直达波数据，通常具有多个震相。如何把反射波数据中各个震相的峰值频率提取出来是反演成功的关键。本章先介绍基于峰值频率移动目标函数的 Q -RWI 基本理论；然后给出提取多震相反射地震数据各个震相峰值频率的办法；最后通过数值实验来证明所提反演方法的可靠性。

4.2 方法原理

基于峰值频率移动目标函数的 Q -RWI 算法步骤跟波动方程走时反演 (Luo 和 Schuster, 1991^[81]; Ma 和 Hale, 2013^[45]) 类似。首先需要定义一个链接函数来连接峰值频率移动残差与声压波场的关系；其次需要定义与峰值频率移动相关的目标泛函；最后需要用粘声波方程以及链接函数来推导目标函数对 Q 的一阶导数即梯度方向。在这一章的推导中，我们假定地震波传播满足二维时间域 SLS 模型粘声波方程 3-14。

用 $\hat{P}_f(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t)$ 表示给定背景 Q 模型的模拟震相，下标 f 表示该震相的峰值频率，峰值频率从震相的振幅谱（图 4-1c 中黑线）中获取。类似地，用 $P_{f-f_1}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t)$ 表示同一震相峰值频率为 $f - f_1$ 的观测数据，其震相的振幅谱用图 4-1c 中的蓝线表示。其中， f_1 表示由于 Q 不准引起的模拟数据与观测数据间峰值频率的移动，为了方便表达，这一节我们假设地震数据中只含有单一震相，多震相的峰值频率提取方法将在下一节中给出。

给定一个足够准确的背景速度模型，模拟数据与观测数据之间相似性可以

定义为：

$$F_{f_1}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t) = \int dt P_{f-f_1}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t) \hat{P}_f(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t). \quad (4-2)$$

在这一章的 *Q-RWI* 算法中，主要是寻求最小的峰值频率移动。对于准确的背景 *Q* 模型，观测数据和模拟数据具有相同的峰值频率。换句话说，就是寻求一个移动值 $f_1 = \Delta f$ ，使其最大化方程 4-2 中的互相关函数。如果 $\Delta f = 0$ ，表明我们找到了正确的背景 *Q* 模型。

因为 $f_1 = \Delta f$ 最大化了互相关函数 4-2，所以 $F_{f_1}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t)$ 对 f_1 的导数在 $f_1 = \Delta f$ 处为零，即：

$$\begin{aligned} \dot{F}_{\Delta f}(\Delta f, \tau(\mathbf{x})) &= \left[\frac{\partial F_{f_1}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t)}{\partial f_1} \right]_{f_1=\Delta f}, \\ &= \int dt \dot{P}_{f-\Delta f}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t) \hat{P}_f(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t) = 0, \end{aligned} \quad (4-3)$$

式中 $\dot{F}_{\Delta f}(\Delta f, \tau(\mathbf{x})) = [\partial P_{f-f_1}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t)/\partial f_1]_{f_1=\Delta f}$ 。方程 4-3 即为链接函数，链接函数作为一个中间方程来连接基础数据（声压波场）与骨架数据（频率移动残差）。因为波动方程不能直接建立起骨架数据与模型参数的关系，所以在推导梯度时链接函数是必需的。

本章中，目标函数的定义如 4-1 式。其梯度 $\gamma(\mathbf{x})$ 表示如下：

$$\gamma(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \tau(\mathbf{x})} = - \sum_{s,g} \frac{\partial \Delta f}{\partial \tau(\mathbf{x})} \Delta f(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t). \quad (4-4)$$

从方程 4-3 出发，可以得到如下三个方程：

$$\begin{aligned} \dot{F}_{\Delta f}(\Delta f, \tau(\mathbf{x})) &= 0, \\ \Rightarrow \frac{\partial \dot{F}_{\Delta f}}{\partial \Delta f} \frac{\partial \Delta f}{\partial \tau(\mathbf{x})} + \frac{\partial \dot{F}_{\Delta f}}{\partial \tau(\mathbf{x})} &= 0, \\ \Rightarrow \frac{\partial \Delta f}{\partial \tau(\mathbf{x})} &= - \frac{\frac{\partial \dot{F}_{\Delta f}}{\partial \tau(\mathbf{x})}}{\frac{\partial \dot{F}_{\Delta f}}{\partial \Delta f}}, \end{aligned} \quad (4-5)$$

$$\frac{\partial \dot{F}_{\Delta f}}{\partial \Delta f} = \int dt \ddot{P}_{f-\Delta f}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t) \hat{P}_f(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t) = 0, \quad (4-6)$$

$$\frac{\partial \dot{F}_{\Delta f}}{\partial \tau(\mathbf{x})} = \int dt \dot{P}_{f-\Delta f}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t) \frac{\partial \hat{P}_f(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t)}{\partial \tau(\mathbf{x})} \quad (4-7)$$

利用方程 4-5 可以把方程 4-4 的梯度可以表示为：

$$\gamma(\mathbf{x}) = \sum_{s,g} \frac{\frac{\partial \dot{F}_{\Delta f}}{\partial \tau(\mathbf{x})}}{\frac{\partial \dot{F}_{\Delta f}}{\partial \Delta f}} \Delta f(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t). \quad (4-8)$$

Dutta 和 Schuster (2016)^[36] 显示地推导出了 Frechet 导数 $[\partial \hat{P}_f(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t) / \partial \tau(\mathbf{x})]$ ，其推导过程略微麻烦。本节用伴随状态法来推导梯度 $\gamma(\mathbf{x})$ ，两种方法推导的结果一致。

基于峰值频率移动目标函数的 Q-RWI 满足的物理状态方法跟第三章所用的物理方程（方程 3-14）一致，即 $\mathbf{L}(\mathbf{m})\mathbf{w}(\mathbf{m}) = \mathbf{f}$ 。物理状态变量 \mathbf{w} 与模型参数 \mathbf{m} 的偏导数有如下关系：

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\mathbf{m})\mathbf{w}(\mathbf{m}) &= \mathbf{f} \\ \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{L}(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}} \mathbf{w}(\mathbf{m}) + \mathbf{L}(\mathbf{m}) \frac{\partial \mathbf{w}(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{w}(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}} &= -\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{m}) \frac{\partial \mathbf{L}(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}} \mathbf{w}(\mathbf{m}). \end{aligned} \quad (4-9)$$

链接函数 4-3 可以重新写成如下表达式：

$$\dot{F}_{\Delta f} = \langle \hat{\mathbf{w}}_f(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t), \mathbf{w}_{f-\Delta f}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t) \rangle, \quad (4-10)$$

式中 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ 表示向量 \mathbf{x} , \mathbf{y} 之间的标量积。 $\hat{\mathbf{w}}_f$ 和 $\mathbf{w}_{f-\Delta f}$ 分别表示同一震相的模拟数据与观测数据。目标函数 \mathcal{J} 的梯度满足如下推导：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \tau(\mathbf{x})} &= - \sum_s \sum_g \frac{\partial \Delta f}{\partial \tau(\mathbf{x})} \Delta f(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t), \\
&= \sum_s \sum_g \frac{1}{\mathbf{E}} \frac{\partial \dot{F}_{\Delta f}}{\partial \tau(\mathbf{x})} \Delta f(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t), \\
&= \sum_s \sum_g \frac{1}{\mathbf{E}} \frac{\partial}{\partial \tau(\mathbf{x})} \langle \hat{\mathbf{w}}_f(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t), \dot{\mathbf{w}}_{f-\Delta f}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t) \rangle \Delta f(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t), \\
&= \sum_s \sum_g \left\langle \frac{\partial \hat{\mathbf{w}}_f(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t)}{\partial \tau(\mathbf{x})}, \dot{\mathbf{w}}_{f-\Delta f}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t) \Delta f(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t) \frac{1}{\mathbf{E}} \right\rangle, \\
&= - \sum_s \sum_g \left\langle \mathbf{L}^{-1} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \tau(\mathbf{x})} \hat{\mathbf{w}}_f(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t), \dot{\mathbf{w}}_{f-\Delta f}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t) \Delta f(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t) \frac{1}{\mathbf{E}} \right\rangle, \\
&= - \sum_s \left\langle \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \tau(\mathbf{x})} \hat{\mathbf{w}}_f(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t), (\mathbf{L}^{-1})^* \sum_g \left(\dot{\mathbf{w}}_{f-\Delta f}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t) \Delta f(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t) \frac{1}{\mathbf{E}} \right) \right\rangle, \\
&= - \sum_s \left\langle \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \tau(\mathbf{x})} \hat{\mathbf{w}}_f(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t), \mathbf{w}^*(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t) \right\rangle.
\end{aligned} \tag{4-11}$$

上式中

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int dt \ddot{P}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t)_{obs} P(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t)_{calc} \\ \int dt \ddot{v}_x(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t)_{obs} v_x(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t)_{calc} \\ \int dt \ddot{v}_z(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t)_{obs} v_z(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t)_{calc} \\ \int dt \ddot{r}_p(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t)_{obs} r_p(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t)_{calc} \end{bmatrix}, \tag{4-12}$$

$\mathbf{w}^* = [\delta \tilde{P}, \delta \tilde{v}_x, \delta \tilde{v}_z, \delta \tilde{r}_p, \tilde{P}, \tilde{v}_x, \tilde{v}_z, \tilde{r}_p]^T$ 是物理变量 $\mathbf{w} = [P, v_x, v_z, r_p, \delta P, \delta v_x, \delta v_z, \delta r_p]^T$ 对应的伴随状态变量，并且满足如下伴随状态方程：

$$\mathbf{L}^* \mathbf{w}^* = \mathbf{f}^*, \tag{4-13}$$

式中 \mathbf{L}^* 是粘声波方程正传算子 \mathbf{L} 的伴随算子且满足 3-15 式； \mathbf{f}^* 为伴随源，满

足如下关系式：

$$\mathbf{f}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\sum_g \left(\dot{P}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t)_{obs} \Delta f(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t) \frac{1}{E_1} \right) \\ -\sum_g \left(\dot{v}_x(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t)_{obs} \Delta f(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t) \frac{1}{E_2} \right) \\ -\sum_g \left(\dot{v}_z(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t)_{obs} \Delta f(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t) \frac{1}{E_3} \right) \\ -\sum_g \left(\dot{r}_p(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t)_{obs} \Delta f(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t) \frac{1}{E_4} \right) \end{bmatrix}. \quad (4-14)$$

在实际勘探中，假设我们只接收到压力波场，伴随源简化为

$\mathbf{f}^* = [0, 0, 0, 0, \Delta P(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t), 0, 0, 0]^T$, 其中 $\Delta P(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t) = (1/E_1)\dot{P}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t)_{obs}$ $\Delta f(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t)$ 表示为残差道，对应于常规波形反演的数据残差伴随源。由方程 4-11 可以得到目标函数对模型参数的梯度：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \tau} &= -\langle \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \tau} \mathbf{w}, \mathbf{w}^* \rangle \\ &= K_0 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) (-\delta \tilde{P} + \frac{1}{\tau_\sigma} \delta \tilde{r}_p) \\ &\quad + K_0 \left(\frac{\partial \delta v_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta v_z}{\partial z} \right) (-\tilde{P} + \frac{1}{\tau_\sigma} \tilde{r}_p) \\ &\quad + \delta K \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) (-\tilde{P} + \frac{1}{\tau_\sigma} \tilde{r}_p). \end{aligned} \quad (4-15)$$

基于振幅匹配的 Q -RWI 梯度 (4-4式) 与基于峰值频率移动目标函数的 Q -RWI 的梯度有相同的表达式。而且伴随方程的形式也相同，只是伴随源不同，前者为波形数据的残差，后者为峰值频率残差与观测数据对频率导数的加权。由于没有显示的表达式来求取观测数据对频率的导数 $\dot{P}_{f-\Delta f}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t)$ 和 $\ddot{P}_{f-\Delta f}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_g, t)$ ，在伴随方程的实际求解过程中，Dutta 和 Schuster (2016)^[36] 用峰值频率移动残差加权观测数据作为伴随源，从而忽略了 $\dot{P}_{f-\Delta f}$ 以及除数因子 E_1 。理论数据和实际数据实验都证实了上述近似的合理性 (Dutta 和 Schuster, 2016^[36])，本文也将采样上述近似来处理伴随源。

计算出梯度之后，用第三章的迭代流程即可更新背景 Q 模型。

4.3 多震相反射数据峰值频率提取

在实际地震勘探中，接收到的反射数据往往具有多个反射震相，而用常规 Fourier 变换计算出的振幅谱是所有地震相特征的总体体现。用反射数据进行反演时，反射震相的匹配一直是一个研究点。在反射波层析中，Wang 和 Rao (2009)^[82] 用层剥离的方法来求取各反射层的走时。在波动方程反射走时反演中，Zhang 等 (2011)^[83] 用局部相关法，而 Ma 和 Hale (2013)^[45] 用波形动态解缠 (dynamic warping) 法来提取反射波各震相的走时差。多震相反射数据峰值频率的提取首先需要知道沿时间方向的局部频率信息即时频谱。

时频谱的求取方法有很多大致可分为两类，一类基于瞬时频率求取，另一类是通过各频率分量分解来获取时频谱。基于瞬时频率的方法是将一维时间序列的地震道变为一维频率序列数据，而频率分量分解法是把一维时间序列地震道变换到二维的时间—频率域中。Taner 等 (1979)^[84] 首次用 Hilbert 变换来求取瞬时频率，Poggiagliolmi 和 Vesnauer (2014)^[85] 同样基于 Hilbert 变换提出了不依赖人为定义参数的瞬时频率求取方法。另外，Fomel (2007)^[86] 在正则化反演的框架下定义了局部频率。

地震道频率分量分解法在时频分析中被广泛应用，其中最简单、被广泛应用的方法就是短时 Fourier 变换 (STFT)。然而 STFT 产生的时频谱在整个时间频率空间的分辨率是固定的 (Cohen, 1995^[87])。为了获得可变的分辨率，Pinnegar 和 Mansinha (2003)^[88] 用任意的可变形状的窗函数进行 S 变换来处理地震数据。除了 Fourier 基函数，连续小波变换 (CWT) 用小波基函数来分析地震数据的时频信息 (Chakraborty 和 Okaya, 1995^[89]; Sinha 等, 2005^[90]; Kazemeini 等, 2009^[91])。为了通过匹配地震小波的时频信息来灵活地表示信号的结构，学者们提出了匹配追踪法并将其应用到了含气储层的检测 (Wang, 2007^[92]) 和古河道检测 (Liu 和 Marfurt, 2007^[93]) 中。在匹配追踪法中，用户需要自定义许多地震小波参数如振幅、时间延迟、尺度、频率等，过多的参数选择使得匹配追踪法的迭代非常缓慢。Liu 和 Fomel (2013)^[94] 在正则化最小二乘反演的框架下提出了一种用 Fourier 基函数来匹配目标信号的频率分量分解方法。其分解方法是可逆的，且比传统的 S 变换更灵活，在地震数据面波去噪方面有很好的运用效果。

本文提取的是各震相的峰值频率，对时间-频率的分辨率要求不是很高。用简单的滑动时窗 Fourier 变换即短时 Fourier 变换 (Allen, 1977^[95]) 即可满足要求。时窗的选取需要四个参数：时窗长度、每一段重叠样本数、做 Fourier 变换的长度以及窗函数。时窗长度、样本重叠数和窗函数是对完整地震道震相截取参数，Fourier 变换长度决定了频谱的分辨率。

图 4-3a 是分别用振幅为 4 主频为 30Hz 以及振幅为 1 主频为 10Hz 的 Ricker

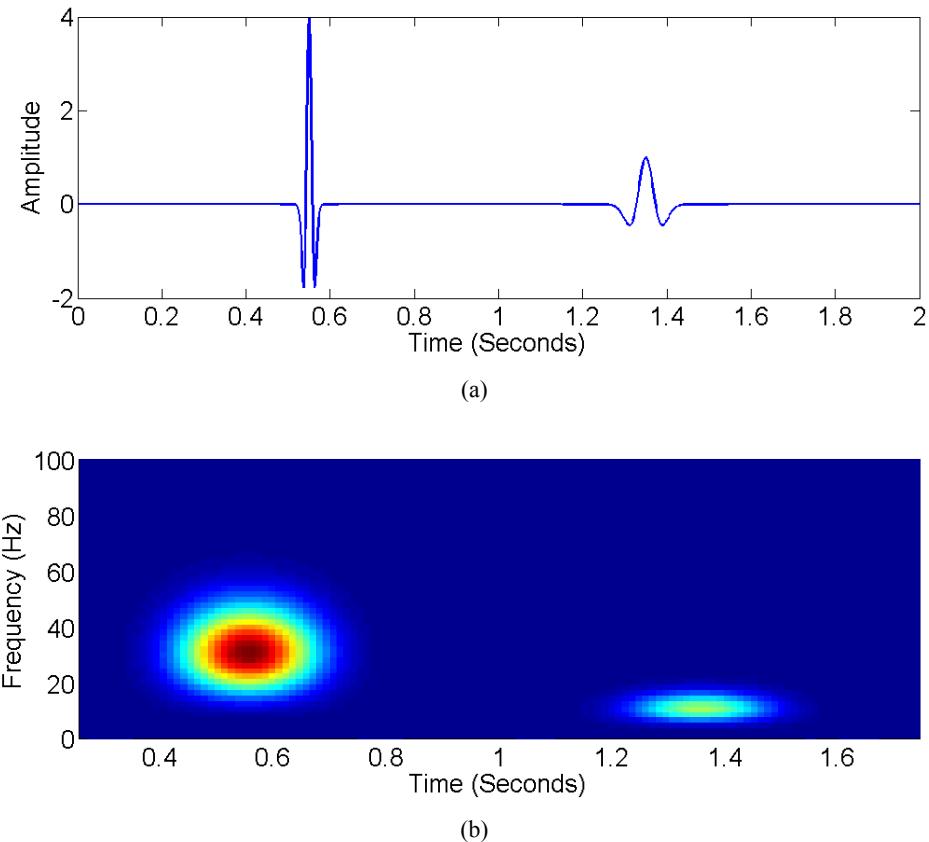


图 4-3 短时 Fourier 变换: (a) 分别在 0.55s、1.35s 处用振幅为 4 主频为 30Hz 以及振幅为 1 主频为 10Hz 的 Ricker 子波合成地震道数据; (b) 合成地震道对于的短时 Fourier 谱。

Fig 4-3 The effects of STFT: (a) Sythetic seismic trace with Ricker wavelet of 30Hz peak frequency at 0.55s and 10Hz peak frequency at 1.35s, the amplitudes of wavelet are 4 and 1, respectively; (b) the STFT spetrum.

子波在 0.55s 和 1.35s 处合成的地震记录。图 4-3b 展示了其对应的 STFT 谱，从图中可以看出 STFT 很好的刻画了地震道的时频信息，而且从谱中可以很容易的拾取出两地震相的峰值频率。

图 4-4 是用第三章所用的层状模型（图 3-6）所做的单炮实验。其中图 4-4a 是用真实 Q 模型计算出的观测炮记录，图 4-4b 是用背景 Q 模型计算的模拟炮记录。由于深部强衰减的影响，观测炮记录第四个同相轴的能量明显弱于对应的模拟数据，同时观测数据的峰值频率（图 4-4c）相较于模拟数据的峰值频率（图 4-4d）有明显的下移。图 4-4e 展示了模拟数据与观测数据的峰值频率残差，图 4-4f 展示了其基于峰值频率移动目标函数的伴随源。在该实验中，速度的低波数成分是准确的，而高波数成分是由拾取成像剖面获取的。因此只保证了高波数速度位置的准确性，而其扰动量的大小以及分布形状是不准确的。从伴随源的形状和能量分布以及残差道信息可以看出用 STFT 提取峰值频率是可行的，且峰值频率目标函数确实可以降低 Q -RWI 对速度高波数成分的依赖性。

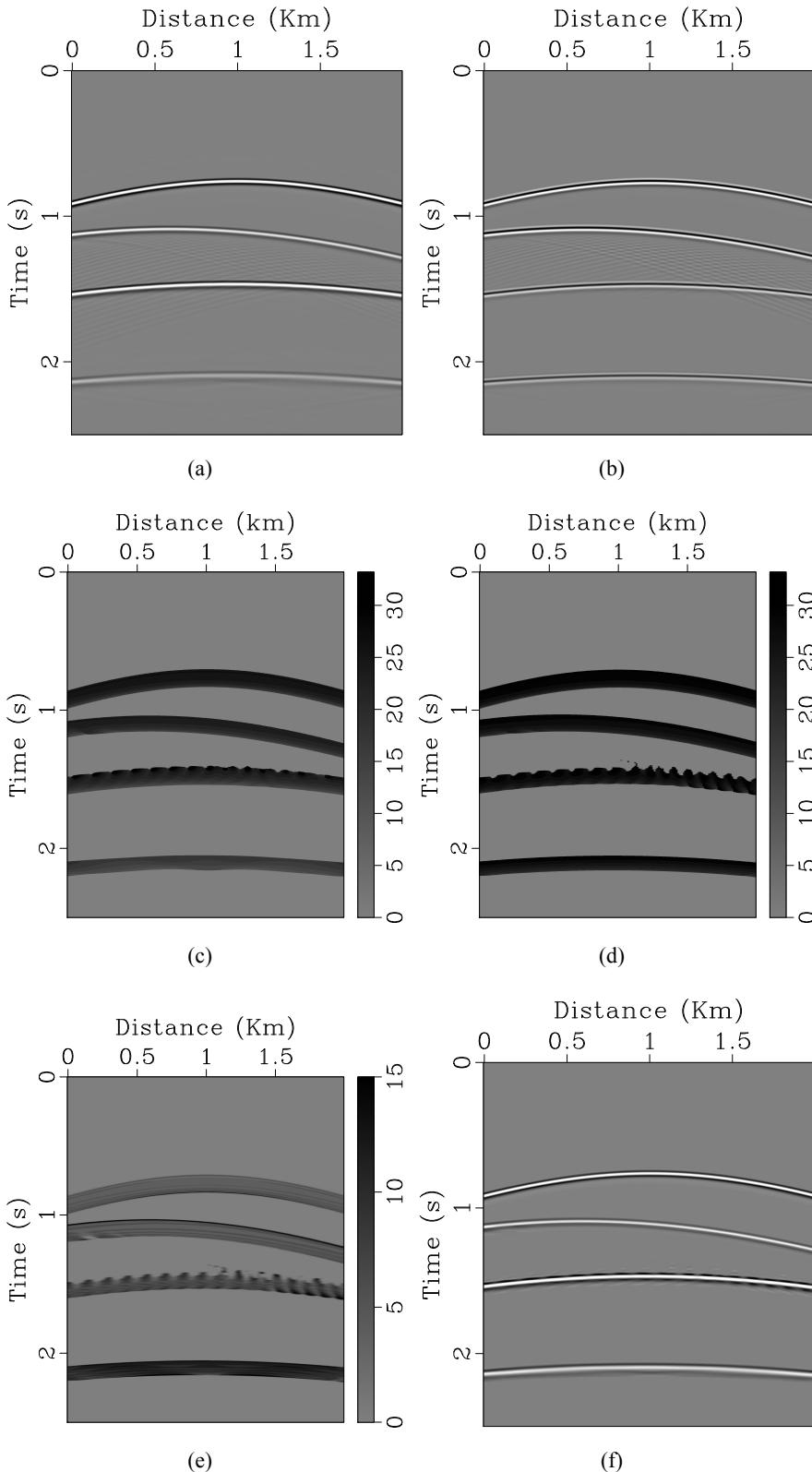


图 4-4 短时 Fourier 变换提取地震数据的峰值频率: (a) 观测数据; (b) 模拟数据; (c) 观测数据的峰值频率; (d) 模拟数据的峰值频率; (e) 峰值频率残差; (f) 伴随源。

Fig 4-4 Extracting the peak frequency of seismic data using STFT: (a) observed seismic data; (b) calculated seismic data; (c) peak frequency of observed data; (d) peak frequency of calculated data; (e) the residual frequency trace; (f) the corresponding adjoint source.

4.4 数值实验

总结与展望

本文主要工作

本文主要贡献

下一步工作展望

附录 A 低秩近似求解 DCQ 方程

Zhu 和 Harris (2014)^[61] 推导的 DCQ 方程有如下的频散关系:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = -\eta|\mathbf{k}|^{2\gamma+2} - i\omega\tau|\mathbf{k}|^{2\gamma+1}, \quad (\text{A-1})$$

求解方程 (A-1) 的 ω 有,

$$\omega = \frac{-ip_1 + p_2}{2}, \quad (\text{A-2})$$

其中

$$p_1 = \tau c^2 |\mathbf{k}|^{2\gamma+1}, \quad (\text{A-3})$$

$$p_2 = \sqrt{-\tau^2 c^4 |\mathbf{k}|^{4\gamma+2} - 4\eta c^2 |\mathbf{k}|^{2\gamma+2}}. \quad (\text{A-4})$$

在时间域决定波传播的相移函数可以定义为:

$$\phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \Delta t) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \frac{-ip_1 + p_2}{2} \Delta t, \quad (\text{A-5})$$

在 Q -RTM 中, 通过改变方程 (A-1) 右端第二项的符号来补偿振幅衰减, 而频散控制项的符号必须保持不变。因此, 衰减补偿常 Q 方程对应的频散关系为:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = -\eta|\mathbf{k}|^{2\gamma+2} + i\omega\tau|\mathbf{k}|^{2\gamma+1}, \quad (\text{A-6})$$

其对应的复共轭相位函数为:

$$\phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \Delta t) = \bar{\phi}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \Delta t) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \frac{ip_1 + p_2}{2} \Delta t, \quad (\text{A-7})$$

相位函数 ϕ_1 和 ϕ_2 都包含波数的分数阶指数, 同时是空间位置 \mathbf{x} 和波数 \mathbf{k} 的函数。Sun 等 (2015)^[96] 用这种相位函数来延拓粘声波场, 并允许分数阶指数 $\gamma(\mathbf{x})$ 随空间变化。单步混合域算子可以整合成如下的 Fourier 积分算子:

$$p(\mathbf{x}, t + \Delta t) = \int \hat{p}(\mathbf{k}, t) e^{i\phi(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \Delta t)} d\mathbf{k}, \quad (\text{A-8})$$

其中 \hat{p} 是 p 的空间 Fourier 变换。方程 (A-8) 的伴随形式为:

$$\hat{p}(\mathbf{k}, t) = \int p(\mathbf{x}, t + \Delta t) e^{-i\bar{\phi}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \Delta t)} d\mathbf{k}, \quad (\text{A-9})$$

式中 $\bar{\phi}$ 是 ϕ 的共轭。将方程 (A-5) 带入方程 (A-8) 中可以显示得到粘声方程

的正传算子

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}, t + \Delta t) &= \int \hat{p}(\mathbf{k}, t) e^{i\phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \Delta t)} d\mathbf{k}, \\ &= \int \hat{p}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + (p_1 + ip_2)\Delta t/2} d\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (\text{A-10})$$

其对应的伴随算子为：

$$\begin{aligned} \hat{p}_{adj}(\mathbf{k}, t) &= \int p(\mathbf{x}, t + \Delta t) e^{-i\bar{\phi}_1(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \Delta t)} d\mathbf{k}, \\ &= \int \hat{p}(\mathbf{x}, t + \Delta t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + (p_1 - ip_2)\Delta t/2} d\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (\text{A-11})$$

伴随算子 (A-11) 作为反传算子补偿了 Q-RTM 中的速度频散，但是会二次衰减波场的能量，所以不适合 Q-RTM。在 Q-RTM 中，正传和反传波场都应该补偿能量的衰减，其对应的正传和反传算子如下：

$$\begin{aligned} p_{comp}(\mathbf{x}, t + \Delta t) &= \int \hat{p}(\mathbf{k}, t) e^{i\phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \Delta t)} d\mathbf{k}, \\ &= \int \hat{p}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + (-p_1 + ip_2)\Delta t/2} d\mathbf{k}, \end{aligned} \quad (\text{A-12})$$

和

$$\begin{aligned} \hat{p}_{comp-adj}(\mathbf{k}, t) &= \int p(\mathbf{x}, t + \Delta t) e^{-i\bar{\phi}_2(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \Delta t)} d\mathbf{k}, \\ &= \int \hat{p}(\mathbf{x}, t + \Delta t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + (-p_1 - ip_2)\Delta t/2} d\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (\text{A-13})$$

以上方程中的混合域算子 $e^{i\phi(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \Delta t)}$ 统一用 $W(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ 来表示，由于其涉及空间-波数域的相互变换，直接计算的计算量是 $\mathcal{O}(N_X^2)$ ， N_X 是模型大小维度，所以直接求解的计算量是不可承受的。Fomel 等 (2013)^[97] 用低秩近似来降低混合域算子的计算量。其形式可以表示为如下形式：

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \approx \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N W(\mathbf{x}, \mathbf{k}_m) a_{mn} W(\mathbf{x}_n, \mathbf{k}) \quad (\text{A-14})$$

因此 $p(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ 的计算有如下的形式：

$$p(\mathbf{x}, t + \Delta t) \approx \sum_{m=1}^M W(\mathbf{x}, \mathbf{k}_m) \sum_{n=1}^N a_{mn} \int e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}} W(\mathbf{x}_n, \mathbf{k}) p(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k}. \quad (\text{A-15})$$

方程 (A-15) 的计算量相当于每个时间步做 N 次反 Fourier 变换，在实际中， $N < 10$ 。

附录 B DCQ 方程反射全波形反演梯度推导

根据第二章的常 Q 理论以及附录 A 中的单步低秩延拓方法，衰减介质中的压力波场是复数并且满足如下一阶偏微分方程：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\varphi\right)P_b(\mathbf{x}, t) = f(t; \mathbf{x}_s), \quad (\text{B-1})$$

式中 $\varphi = \frac{-ip_1+p_2}{2}$ 是相移符号，并且 p_1 、 p_2 满足 A-3、A-4 式。在 Born 近似下，扰动波场可由如下方程计算：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\varphi\right)P_c(\mathbf{x}, t) = \delta c P_b = I(\mathbf{x})P_b, \quad (\text{B-2})$$

式中 δc 表示速度扰动，在实际计算过程中通常用最小平方偏移的像 $I(\mathbf{x})$ 来代替。用波场残差的最小二乘目标函数（方程 3-1），伴随状态法的增广函数可定义为：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{p}_b, \mathbf{p}_c, \mathbf{q}_b, \mathbf{q}_c) &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{x}_s d\mathbf{x}_r dt \Delta p^2(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s) \\ &\quad - \int d\mathbf{x}_s d\mathbf{x}_r dt \mathbf{q}_b \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\varphi\right) P_c - \delta c P_b \right) \\ &\quad - \int d\mathbf{x}_s d\mathbf{x}_r dt \mathbf{q}_c \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\varphi\right) P_b - f(t; \mathbf{x}_s) \right). \end{aligned} \quad (\text{B-3})$$

伴随方程可表示为：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_c} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\bar{\varphi}\right) \mathbf{q}_b - \Delta p = 0, \quad (\text{B-4})$$

以及

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_b} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\bar{\varphi}\right) \mathbf{q}_c + \delta c \mathbf{q}_b = 0. \quad (\text{B-5})$$

最终，梯度可以表示为：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} = - \int d\mathbf{x}_s dt \mathbf{q}_b \frac{i\partial\varphi}{\partial Q} P_c - \int d\mathbf{x}_s dt \mathbf{q}_c \frac{i\partial\varphi}{\partial Q} P_b, \quad (\text{B-6})$$

其中

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial Q} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p_1}{\partial Q} + i \frac{\partial p_2}{\partial Q} \right) \\
&= \frac{1}{4} \omega_0^{-4\gamma} c_0^{2\gamma+1} |k|^{2\gamma+1} \left(-2\pi \omega_0^{2\gamma} \cos^2(\pi\gamma/2) \cos(\pi\gamma) \right. \\
&\quad - 2\omega_0^{2\gamma} (1 + \cos(\pi\gamma)) \sin(\pi\gamma) \log \frac{c_0|k|}{\omega_0} + \pi \omega_0^{2\gamma} \sin^2(\pi\gamma) \\
&\quad - \left(2ic_0|k| \left(2c_0^{2\gamma} |k|^{2\gamma} \cos^5(\pi\gamma/2) \sin(\pi\gamma/2) [-\pi + 2\pi \cos(\pi\gamma)] \right. \right. \\
&\quad + 2 \log \frac{c_0|k|}{\omega_0} \sin(\pi\gamma)] - \omega_0^{2\gamma} [\log \frac{c_0|k|}{\omega_0} (2 \cos(\pi\gamma) + \cos(2\pi\gamma)) \log \frac{c_0|k|}{\omega_0} \\
&\quad \left. \left. - \pi (\sin \pi\gamma + \sin(2\pi\gamma)) \right) \right) / p_2 \right) \frac{-1}{\pi + \pi Q^2}.
\end{aligned} \tag{B-7}$$

参考文献

- [1] Dasgupta R, Clark R A. Estimation of Q from surface seismic reflection data[J]. *Geophysics*, 1998, 63:2120–2128.
- [2] Winkler K W, Nur A. Seismic attenuation: Effects of pore fluids and frictional sliding[J]. *Geophysics*, 1982, 47:1–15.
- [3] Maultzsch S, Chapman M, Liu E, et al. Modelling and analysis of attenuation anisotropy in multi-azimuth VSP data from the clair field[J]. *Geophysical Prospecting*, 2007, 55:627–642.
- [4] Clark R A, Benson P M, Carter A J, et al. Anisotropic P-wave attenuation measured from a multi-azimuth surface seismic reflection survey[J]. *Geophysical Prospecting*, 2009, 57:835–845.
- [5] Macrides C G, Kanasewich E R. Seismic attenuation and Poisson’s ratios in oil sands from crosshole measurements[J]. *Journal of the Canadian Society of Exploration Geophysicsts*, 1987, 23:46–55.
- [6] Brzostowski M A, McMechan G A. 3D tomographic imaging of near-surface seismic velocity and attenuation[J]. *Geophysics*, 1992, 57:396–403.
- [7] Quan Y, Harris J M. Seismic attenuation tomography using the frequency shift method[J]. *Geophysics*, 1997, 62:895–905.
- [8] Hu W, Liu J, Bear L, et al. A robust and accurate seismic attenuation tomography algorithm[J]. 81st Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts, 2011:2727–2731.
- [9] Tarantola A. Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation[J]. *Geophysics*, 1984, 49:1259–1266.
- [10] Mora P. Nonlinear two-dimensional elastic inversion of multioffset seismic data[J]. *Geophysics*, 1987, 52:1211–1228.
- [11] Sirgue L, Pratt R G. Efficient waveform inversion and imaging: A strategy for selecting temporal frequencies[J]. *Geophysics*, 2004, 69:231–248.
- [12] Sen M K, Stoffa P L. Nonlinear seismic waveform inversion in one dimension using simulated annealing[J]. *Geophysics*, 1991, 56(10):1624–1638.
- [13] Mosegaard K, Tarantola A. Monte Carlo sampling of solutions to inverse problems[J]. *Journal of Geophysical Research Solid Earth*, 1995, 100(B7):12 431–12 447.

- [14] Lailly P. The seismic inverse problem as a sequence of before stack migrations[J]. in Proceeding of the Conference on Iverse Scattering: Theory and Application, 1983:206–220.
- [15] Pratt R G, Worthington M. Inverse theory applied to multi-source cross-hole tomography. Part 1: acoustic waveequation method[J]. Geophysical Prospecting, 1990, 38(3):287–310.
- [16] Song Z M, Williamson P R, Pratt R G. Frequency-domain acoustic-wave modeling and inversion of crosshole data: Part II—Inversion method, synthetic experiments and real-data results[J]. Geophysics, 1995, 60(3):796–809.
- [17] Ravaut C, Operto S, Improta L, et al. Multiscale imaging of complex structures from multifold wide-aperture seismic data by frequency-domain full-waveform tomography: application to a thrust belt[J]. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 2004, 159(3):1032–1056.
- [18] Gao F, Levander A, Pratt R, et al. Waveform tomography at a groundwater contamination site: VSP-surface data set[J]. Geophysics, 2006, 71(10):H1–H11.
- [19] Kamei R, Pratt R G, Tsuji T. Waveform tomography imaging of a megasplay fault system in the seismogenic Nankai subduction zone[J]. Earth & Planetary Science Letters, 2012, 317-318(s 317–318):343–353.
- [20] Liao Q, McMechan G A. Multifrequency visco-acoustic modeling and inversion[J]. Geophysics, 1996, 61:1371–1378.
- [21] Smithyman B, Pratt R G, Hayles J, et al. Detecting near-surface objects with seismic waveform tomography[J]. Geophysics, 2009, 74(6):WCC119–WCC127.
- [22] Hak B, Mulder W A. Seismic attenuation imaging with causality[J]. Geophysical Journal International, 2011, 184(1):439–451.
- [23] Malinowski M, Operto S, Ribodetti A. High resolution seismic attenuation imaging from wide aperture onshore data by viscoacoustic frequency domain full waveform inversion[J]. Geophysical Journal International, 2011, 186(3):1179–1204.
- [24] Bai J, Yingst D, Bloor R, et al. Viscoacoustic waveform inversion of velocity structures in the time domain[J]. Geophysics, 2014, 79(3):R103–R119.
- [25] Kamei R, Pratt R G. Inversion strategies for visco-acoustic waveform inversion[J]. Geophysical Journal International, 2013, 194:859–884.
- [26] Tarantola A. Theoretical background for the inversion of seismic waveforms including elasticity and attenuation[J]. Pure & Applied Geophysics, 1988, 128(1-2):365–399.

- [27] Bunks C, Saleck F M, Zaleski S, et al. Multiscale seismic waveform inversion[J]. *Geophysics*, 1995, 60(5):1457–1473.
- [28] Kamei R, Pratt R G. Waveform Tomography strategies for imaging attenuation structure with cross-hole data[J]. 2008:F019.
- [29] Ribodetti A, Operto S, Virieux J, et al. Asymptotic viscoacoustic diffraction tomography of ultrasonic laboratory data: a tool for rock properties analysis[J]. *Geophysical Journal International*, 2000, 140(2):324–340.
- [30] Hak B, Mulder W A. Migration for velocity and attenuation perturbations[J]. *Geophysical Prospecting*, 2010, 58(6):939–952.
- [31] Innanen K A, Weglein A B. On the construction of an absorptive – dispersive medium model via direct linear inversion of reflected seismic primaries[J]. *Inverse Problems*, 2007, 23(6):2289–2310.
- [32] Mulder W A, Hak B. An ambiguity in attenuation scattering imaging[J]. *Geophysical Journal International*, 2009, 178(3):1614–1624.
- [33] Pratt R, Hou F, Bauer K, et al. Waveform tomography images of velocity and inelastic attenuation from the Mallik 2002 Crosshole Seismic Surveys[J]. in *Scientific Results from the Mallik 2002 Gas Hydrate Production Research Well Program*, Mackenzie Delta, North Territories, Canada, 2004, 585:1–14.
- [34] Rao Y, Wang Y H. The Strategies for Attenuation Inversion with Waveform Tomography[J]. 2008:H006.
- [35] Watanabe T, Nihei K T, Nakagawa S, et al. Viscoacoustic wave form inversion of transmission data for velocity and attenuation[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2004, 115(115):3059–3067.
- [36] Dutta G, Schuster G T. Wave-equation Q tomography[J]. *Geophysics*, 2016, 81:R471–R484.
- [37] Wu Z, Alkhalifah T. Spectral implementation of full waveform inversion based on reflections[J]. 76th EAGE Conference & Exhibition, Expanded Abstracts, 2016.
- [38] Alkhalifah T. Scattering-angle based filtering of the waveform inversion gradients[J]. *Geophysical Journal International*, 2015, 200:363–373.
- [39] Chi B, Dong L, Liu Y. Correlation-based reflection full-waveform inversion[J]. *Geophysics*, 2015, 80(4):R189–R202.
- [40] Alkhalifah T, Wu Z. The natural combination of full and image-based waveform inversion[J]. *Geophysical Prospecting*, 2016, 64:19–30.

- [41] Liu F, Zhang G, Morton S A. An effective imaging condition for reverse-time migration using wavefield decomposition[J]. *Geophysics*, 2011, 76:S29–S39.
- [42] Wang F, Chauris H, Donno D. Taking advantage of wave field decomposition in full waveform inversion[J]. 75th EAGE Conference & Exhibition, Expanded Abstracts, 2013.
- [43] Tang Y, Lee S, Baumstein A. Tomographically enhanced full wavefield inversion[J]. SEG Technical Program Expanded Abstracts, 2013:1037–1041.
- [44] Xu S, Wang D, Chen F. Inversion on reflection seismic wave[J]. SEG Technical Program Expanded Abstracts, 2012:1–7.
- [45] Ma Y, Hale D. Wave-equation reflection traveltime inversion with dynamic warping and full-waveform inversion[J]. *Geophysics*, 2013, 78:R223–R233.
- [46] Alkhalifah T. Full-model wavenumber inversion: An emphasis on the appropriate wavenumber continuation[J]. *Geophysics*, 2016, 81:R89–R98.
- [47] Dai W, Schuster G T. Plane-wave least-squares reverse time migration[J]. *Geophysics*, 2013, 78:S165–S177.
- [48] Zhang Y, Duan L, Xie Y. A stable and practical implementation of least-squares reverse time migration[J]. *Geophysics*, 2014, 80:V23–V31.
- [49] Luo S, Hale D. Least-squares migration in the presence of velocity errors[J]. *Geophysics*, 2014, 79:S153–S161.
- [50] Shen Y, Biondi B, Clapp R. Q model building using one-way wave-equation migration Q analysis –Part1: Theory and synthetic test[J]. 2018.
- [51] Carcione J M. Wave fields in real media: Wave propagation in anisotropic, anelastic, porous and electromagnetic media[M], 2007.
- [52] Kjartansson E. Constant-Q wave propagation and attenuation[J]. *Journal of Geophysical Research*, 1979, 84:4737–4748.
- [53] Fung Y. Foundations of solid mechanics[M], 1965.
- [54] Hudson J A. The excitation and propagation of elastic waves[M], 1980.
- [55] Christensen R. Theory of viscoelasticity: an introduction,2nd ed.[M], 1982.
- [56] Carcione J M, Kosloff D, Kolosoff R. Wave propagation simulation in a linear viscoacoustic medium[J]. *Geophysical Journal International*, 1988, 93(2):393–401.
- [57] Blanch J O, Robertsson J O, Symes W W. Modeling of a constant Q: Methodology and algorithm for an efficient and optimally inexpensive viscoelastic technique[J]. *Geophysics*, 1995, 60:176–184.

- [58] Virieux J. SH-wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method[J]. *Geophysics*, 1984, 49:1933–1957.
- [59] Carcione J M. Staggered mesh for the anisotropic and viscoelastic wave equation[J]. *Geophysics*, 1999, 64(6):1863–1866.
- [60] Carcione J M, Herman G C, Kroode A P E T. Seismic modeling[J]. *Geophysics*, 2002, 67:1304–1325.
- [61] Zhu T, Harris J M. Modeling acoustic wave propagation in heterogeneous attenuating media using decoupled fractional Laplacians[J]. *Geophysics*, 2014, 79(3):T105–T116.
- [62] Etgen J, Brandsberg-Dahl S. The pseudo-analytical method: Application of pseudo-Laplacians to acoustic and acoustic anisotropic wave propagation[J]. 79th Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts, 2009:2552–2556.
- [63] Cheng J B, Fomel S. Fast algorithms of elastic wave mode separation and vector decomposition using low-rank approximation for anisotropic media[J]. *Geophysics*, 2014, 79(4):C97–C110.
- [64] Yao J, Zhu T, Hussain F, et al. Locally solving fractional Laplacian viscoacoustic wave equation using Hermite distributed approximating functional method[J]. *Geophysics*, 2017, 82(2):T59–T67.
- [65] Zhu T, Harris J M, Biondi B. Q-compensated reverse-time migration[J]. *Geophysics*, 2014, 79(3):S77–S87.
- [66] Muller T M, Gurevich B, Lebedev M. Seismic wave attenuation and dispersion resulting from wave-induced flow in porous rocks – A review[J]. *Geophysics*, 2010, 75(5):A147–A164.
- [67] Hargreaves N D, Calvert A J. Inverse Q filtering by Fourier transform[J]. *Geophysics*, 1991, 56:519–527.
- [68] Fletcher R, Nichols D, Cavalca M. Wavepath-consistent effective Q estimated for Q -compensated reverse time migration[J]. 82th EAGE Conference and Exhibition 2006, Expanded Abstracts, 2012:A020.
- [69] Deng F, MeMechan G A. Viscoelastic true-amplitude prestack reverse-time depth migration[J]. *Geophysics*, 2008, 73(4).
- [70] Bai J, Chen G, Yingst D, et al. Attenuation compensation in viscoacoustic reverse time migration[J]. 83rd Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts, 2013:3825–3830.

- [71] Zhang Y, Zhang P, Zhang H. Compensating for viscoacoustic effects in reverse time migration[J]. 80th Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts, 2010:3160–3164.
- [72] Dutta G, Schuster G T. Attenuation compensation for least-squares reverse time migration using the viscoacoustic-wave equation[J]. Geophysics, 2014, 79:S251–S262.
- [73] Sun J, Fomel S, Ying L. Low-rank one-step wave extrapolation for reverse time migration[J]. Geophysics, 2016, 81(1):S39–S54.
- [74] Virieux J, Operto S. An overview of full-waveform inversion in exploration geophysics[J]. Geophysics, 2009, 74:WCC1–WCC26.
- [75] Plessix R E. A review of the adjoint-state method for computing the gradient of a functional with geophysical applications[J]. Geophysical Journal International, 2006, 167:495–503.
- [76] Wang C L, Cheng J B, Arntsen B. Scalar and vector imaging based on wave mode decoupling for elastic reverse time migration in isotropic and transversely isotropic media[J]. Geophysics, 2016, 81(5):S383–S398.
- [77] Dong L, Fan Z, Wang H, et al. One way equation to implement correlation-based reflection full waveform inversion[J]. Geophysical Prospecting, 2018:(in review).
- [78] Wu Z, Alkhalifah T. Simultaneous inversion of the background velocity and the perturbation in full-waveform inversion[J]. Geophysics, 2015, 80(6):R317–R329.
- [79] Yoon K, Marfurt K. Reverse-time migration using the Poynting vector[J]. Exploration Geophysics, 2006, 37:102–107.
- [80] Nocedal J, Wright S. Numerical optimization[M], 1999.
- [81] Luo Y, Schuster G T. Wave equation inversion[J]. Geophysics, 1991, 56:645–653.
- [82] Wang Y, Rao Y. Reflection seismic waveform tomography[J]. Journal of Geophysical Research, 2009, 114:B03304.
- [83] Zhang S, Schuster G, Luo Y. Wave equation reflection traveltime inversion[J]. 81th Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts, 2011.
- [84] Taner M T, Koehler F, Sheriff R E. Complex seismic attributes[J]. Geophysics, 1979, 44:1041–1063.

- [85] Poggiagliolmi E, Vesnauer A. Instantaneous phase and frequency derived without user-defined parameters[J]. Geophysical Journal International, 2014, 199:1544–1553.
- [86] Fomel S. Local seismic attributes[J]. Geophysics, 2007, 72:A29–A33.
- [87] Cohen L. Time-frequency analysis[M], 1995.
- [88] Pinnegar C, Mansinha L. The S transform with windows of arbitrary and varying shape[J]. Geophysics, 2003, 68:381–385.
- [89] Chakraborty A, Okaya D. Frequency time decomposition of seismic data using wavelet based methods[J]. Geophysics, 1995, 60:1906–1916.
- [90] Sinha S, Routh P S, Anno P D, et al. Spectral decomposition of seismic data with continuous wavelet transform[J]. Geophysics, 2005, 70:P19–P25.
- [91] Kazemeini S H, Juhlin C, Jorgensen K Z, et al. Application of the continuous wavelet transform on seismic data for mapping of channel deposits and gas detection at the CO2SINK site, Ketzin, Germany[J]. Geophysical Prospecting, 2009, 57:111–123.
- [92] Wang Y. Seismic time frequency spectral decomposition by matching pursuit[J]. Geophysics, 2007, 72:V13–V20.
- [93] Liu J, Marfurt K J. Instantaneous spectral attributes to detect channels[J]. Geophysics, 2007, 72:P21–P31.
- [94] Liu Y, Fomel S. Seismic data analysis using local time frequency decomposition[J]. Geophysical Prospecting, 2013, 61:516–525.
- [95] Allen J B. Short term spectral analysis, synthesis, and modification by discrete Fourier transform[J]. Signal Processing, 1977, 25:235–238.
- [96] Sun J, Zhu T, Fomel S. Viscoacoustic modeling and imaging using low-rank approximation[J]. Geophysics, 2015, 80(5):T103–T108.
- [97] Fomel S, Ying L, Song X. Seismic wave extrapolation using a low-rank symbol approximation[J]. Geophysical Prospecting, 2013, 61(3):526–536.

致 谢

个人简历、在读期间发表的学术论文与研究

已发表论文

[1]

[2]

[3]

个人简历

邹鹏，男，1993 年 03 月生

2015 年 6 月，毕业于同济大学海洋与地球科学学院地球物理学，获理学学士学位。

2015 年 9 月，免试直接攻读同济大学海洋与地球科学学院地球物理学硕士学位。

攻读学位期间参与的项目

[1]