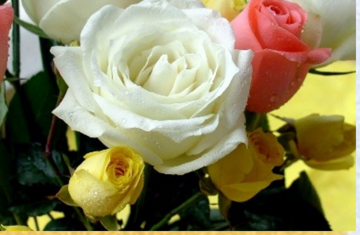
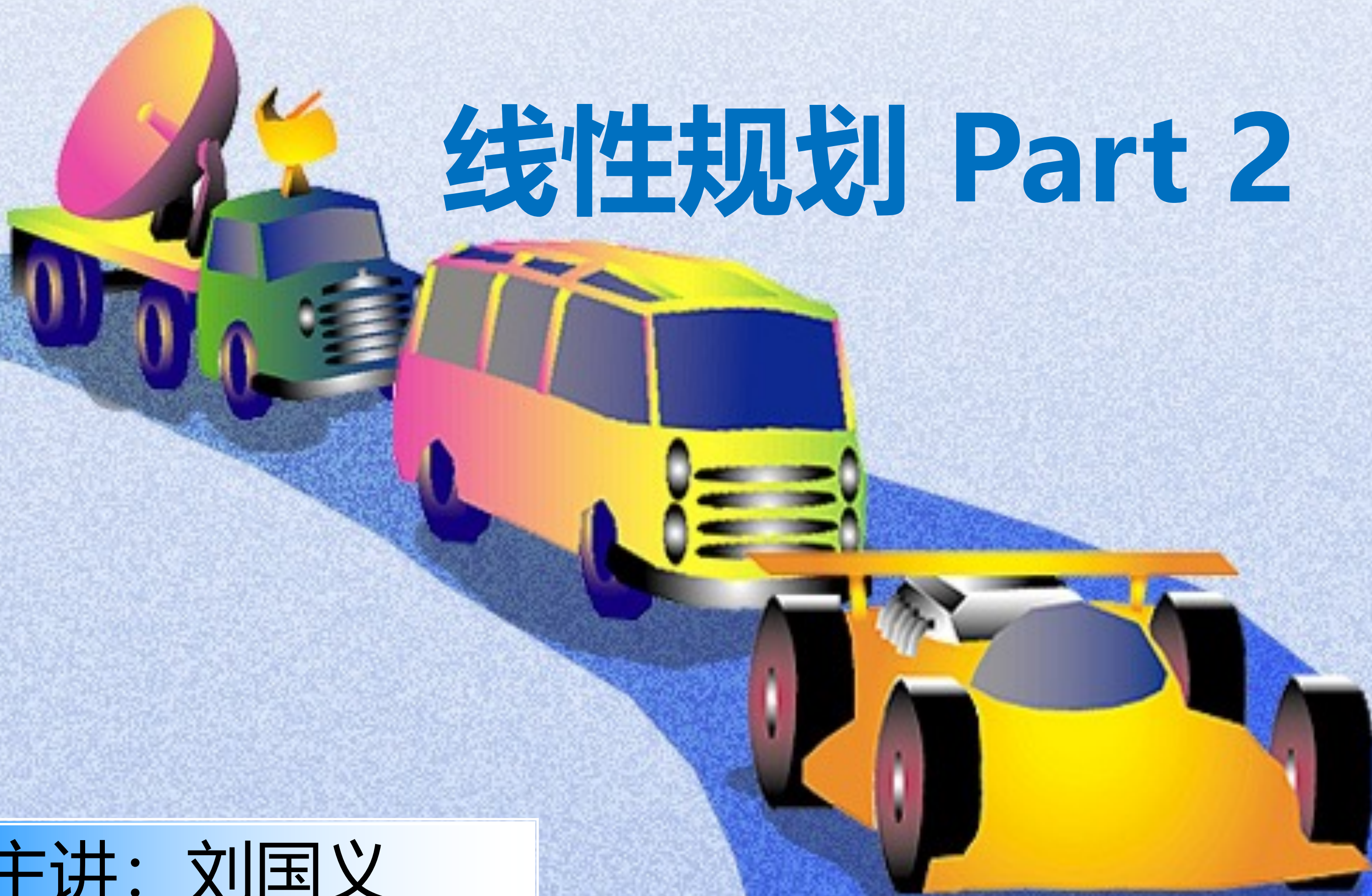


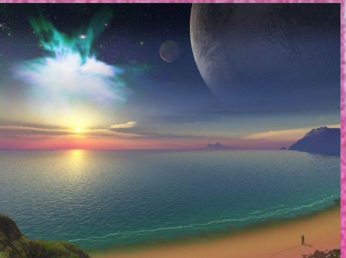
高级算法设计与分析

（最优化课件研制组）



线性规划 Part 2

主讲：刘国义



退出

开始

2. 基本容许解的改进

（1）Gauss-Jordan方程组

假定 $B=[\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_m]$ 是（2.21）的一个基。由

$$B\vec{x}_B+N\vec{x}_N=\vec{b}$$

得等价方程组

$$I\vec{x}_B+B^{-1}N\vec{x}_N=B^{-1}\vec{b} \qquad （2.28）$$

记 $B^{-1}\vec{b}=\bar{\vec{b}}=[\bar{b}_1,\bar{b}_2,\cdots,\bar{b}_m]^T$

$$B^{-1}\vec{a}_j=\bar{\vec{a}}_j=[\bar{a}_{1j},\bar{a}_{2j},\cdots,\bar{a}_{mj}]^T,\quad j=1,2,\cdots,n$$

则（2.28）可写成

$$\left.\begin{array}{l}
x_1 \qquad\qquad +\bar{a}_{1m+1}x_{m+1}+\cdots+\bar{a}_{1l}x_l+\cdots+\bar{a}_{1n}x_n=\bar{b}_1 \\
\quad x_2 \qquad\quad +\bar{a}_{2m+1}x_{m+1}+\cdots+\bar{a}_{2l}x_l+\cdots+\bar{a}_{2n}x_n=\bar{b}_2 \\
\qquad\ddots \qquad\qquad \vdots \\
\qquad\qquad x_m+\bar{a}_{mm+1}x_{m+1}+\cdots+\bar{a}_{ml}x_l+\cdots+\bar{a}_{mn}x_n=\bar{b}_m.
\end{array}\right\} \quad （2.29）$$

（2.29）称为关于基 B 的**Gauss-Jordan方程组**（**G-J方程组**）

典范线性规划的主约束即是一个G-J方程组。

G-J方程组的性质：

i ）一个基决定唯一的G-J方程组；

ii ）若 B 是容许基，则由其G-J方程组可得出关于 B 的基本容许解 $\vec{x}=\begin{bmatrix} B^{-1}\vec{b} \\ \vec{0} \end{bmatrix}$

iii ）在G-J方程组中,基变量的系数向量构成单位矩阵。

性质 i ）说明求新的基本容许解的过程实质上就是不同基的G-J方程组间的转化过程。这个转化过程很容易实现。

设 $B'=[\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_{k-1},\vec{a}_l,\vec{a}_{k+1},\cdots,\vec{a}_m]$ 是新基，是用非基向量 $\vec{a}_l$ 替换 B 中的 $\vec{a}_k$ 得到的矩阵。这时G-J方程组间的转化过程就是要将非基变量 x_l 的系数向量 $\vec{a}_l$ 变为单位向量 $\vec{e}_k$（性质iii）.要实现这个过程，则必须有元素

$\bar{a}_{kl} \neq 0$，$\bar{a}_{kl}$ 称为主元。转化过程显示如下：

关于基 B 的Gauss-Jordan方程组 $\Rightarrow$ 关于基 B' 的Gauss-Jordan方程组

$$
\begin{array}{cccc}
 & l & j & \vec{b} \\
 & \vdots & \vdots & \vdots \\
k & \cdots \bar{a}_{kl} & \cdots\cdots \bar{a}_{kj} & \cdots\cdots \bar{b}_k \\
 & \vdots & \vdots & \vdots \\
i & \cdots \bar{a}_{il} & \cdots\cdots \bar{a}_{ij} & \cdots\cdots \bar{b}_i \\
 & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
\overset{\bar{a}_{kl} \neq 0}{\Rightarrow}
\begin{array}{cccc}
 & l & j & \bar{\vec{b}} \\
 & \vdots & \vdots & \vdots \\
k & \cdots 1 & \cdots\cdots \dfrac{\bar{a}_{kj}}{\bar{a}_{kl}} & \cdots\cdots \dfrac{\bar{b}_k}{\bar{a}_{kl}} \\
 & \vdots & \vdots & \vdots \\
i & \cdots 0 & \cdots\cdots \bar{a}_{ij} - \dfrac{\bar{a}_{kj}}{\bar{a}_{kl}} \bar{a}_{il} & \cdots\cdots \bar{b}_i - \dfrac{\bar{b}_k}{\bar{a}_{kl}} \bar{a}_{il} \\
 & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

为保证解的改进，替换须满足以下两个条件：

第一，容许性条件。即保证 B' 的G-J方程组的右端项非负的条件。

第二，下降性条件。即保证 B' 的基本容许解的目标函数值小于 B 的基本容许解的目标函数值的条件。

i）容许性条件

由 $b'_k = \dfrac{b_k}{\bar{a}_{kl}} \geq 0 \Rightarrow \bar{a}_{kl} > 0$，即主元还必须为正。

$$b'_{ij} = \bar{b}_i - \frac{\bar{b}_k}{\bar{a}_{kl}} \bar{a}_{il} \geq 0 \begin{cases} \overset{\bar{a}_{il}>0}{\Rightarrow} \dfrac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{il}} \geq \dfrac{\bar{b}_k}{\bar{a}_{kl}} \\ \overset{\bar{a}_{il}\leq 0}{\Rightarrow} \text{左式恒成立} \end{cases}, \quad i = 1, 2, \cdots, m (i \neq k) \tag{2.36}$$

结论是：为保证 B' 的G-J方程组的右端项非负，主元 $\bar{a}_{kl}$ 必须是满足 $\dfrac{\bar{b}_k}{\bar{a}_{kl}} = \min\limits_{1\leq i\leq m}\left\{\dfrac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{il}} \middle| \bar{a}_{il} > 0\right\}$ 的正数。如果主元不存在，则线性规划解无界（定理2.12）。

例2.6 考虑例2.5中的线性规划关于 $B_0=[\vec{a}_4,\vec{a}_2]$ 的G-J方程组

$$\begin{aligned} x_1 \qquad -2x_3+x_4 &= 1 \\ x_1+x_2+\ \ x_3 \qquad &= 4 \end{aligned}$$

试把 $\vec{a}_1=[1,1]^T$ 和 $\vec{a}_3=[-2,1]^T$ 分别引入基，求新的基本容许解。

ii）下降性条件

新解 $\vec{x}'=\begin{bmatrix}\vec{x}'_B\\ \vec{x}'_N\end{bmatrix}=[b'_1,\cdots,b'_{k-1},0,b'_{k+1},\cdots,b'_m,0,\cdots,0,b'_k,0,\cdots,0]^T$。$\vec{x}'_N$ 中只有 $x'_l=b'_k\geq 0$, 其余分量皆为0。于是，由（2.26）式得

$$z'=\bar{z}-\sigma_l x'_l=\bar{z}-\sigma_l b'_k \qquad （2.37）$$

由于 $b'_k\geq 0$，所以只要 $\sigma_l\geq 0$ ，则 $z'\leq\bar{z}$

特别当 $b'_k>0$ 时，只要 $\sigma_l>0$ ，必有 $z'<\bar{z}$

结论是：引入判别数为正的变量，将保证 B' 的基本容许解的目标函数值不大于B的基本容许解的目标函数值。

引理2.10

定理2.11（单纯形法基本定理） 在标准线性规划（2.21）中，假设：

i） $B=[\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_m]$是容许基，关于$B$ 的基本容许解是非退化的，即 $\bar{\vec{b}}=B^{-1}\vec{b}>\vec{0}$ ；

ii）非基变量 x_l 的判别数$\sigma_l>0$；

iii）$\bar{\vec{a}}_l=B^{-1}\vec{a}_l\not\leq\vec{0}$，$k$ 是用公式（2.36）确定的一个行标；

iv）用 $\vec{a}_k$ 替换 B 中的 $\vec{a}_l$，而其余基向量不变，构成矩阵 B' 。

那么，B' 是容许基，且关于 B' 的基本容许解的

目标函数值小于关于 B 的基本容许解的目标函数值。

定理2.12 在标准线性规划（2.21）中，假设：

i） $B=[\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_m]$ 是容许基；

ii）非基本变量 x_l 的判别数 $\sigma_l>0$ ；

iii） $\bar{\vec{a}}_l=B^{-1}\vec{a}_l\le\vec{0}$ 。

那么线性规划（2.21）存在可以使目标函数值任意减小的容许解。

（2）单纯形表

以上过程都可以清晰地在一张表——单纯形表上进行，称之为表上作业法。

假设已知（容许）基 $B=[\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_m]$，那么关于 B 的信息全部反映在以下两个式子（线性规划的两个关键数学式）中，

$$\begin{cases} I\vec{x}_B + B^{-1}N\vec{x}_N = B^{-1}\vec{b} & (2.43) \\ z \quad + \quad \vec{\sigma}_N^T\vec{x}_N = \bar{z} & (2.44) \end{cases}$$

称之为关于基 B 的**增广G-J方程组**。

增广G-J方程组其实可由线性规划（2.21）的原始数据经初等行变换得到。原有

$$\begin{cases} B\vec{x}_B + N\vec{x}_N = \vec{b} & (2.45) \\ z - \vec{c}_B^T\vec{x}_B - \vec{c}_N^T\vec{x}_N = 0, & (2.46) \end{cases}$$

(2.45）式左乘 B^{-1} 即得（2.43）式，（2.43）式再左乘 $\vec{c}_B^T$ 加到（2.46）式上便得（2.44）式。

隐去增广G-J方程组中的变量和 z 的系数向量，将其余数据列成表

$$\begin{bmatrix} I & B^{-1}N & \vdots & B^{-1}\vec{b} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \vec{0}^T & \vec{\sigma}_N^T & \vdots & \bar{z} \end{bmatrix} \qquad （2.51）$$

称为关于基B的**单纯形表**。若B是最优基，则称为**最优表**。

单纯形表是增广G-J方程组的简单表示。

表
$$\begin{bmatrix} B & N & \vdots & \vec{b} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ -\vec{c}_B^T & -\vec{c}_N^T & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$
称为线性规划的**准备表**。

类似前面的推导，由准备表容易导出单纯形表

$$\begin{bmatrix} B & N & \vdots & \vec{b} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ -\vec{c}_B^T & -\vec{c}_N^T & \vdots & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} I & B^{-1}N & \vdots & B^{-1}\vec{b} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ -\vec{c}_B^T & -\vec{c}_N^T & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} I & B^{-1}N & \vdots & B^{-1}\vec{b} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & \vec{c}_B^T B^{-1}N - \vec{c}_N^T & \vdots & \vec{c}_B^T B^{-1}\vec{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & B^{-1}N & \vdots & B^{-1}\vec{b} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0^T & \vec{\sigma}_N^T & \vdots & \bar{z} \end{bmatrix}.$$

至此，含有标准基的线性规划问题的求解彻底解决。归纳见（3）。

例2.7 求解例2.5中的线性规划。P64-55

（3）典范线性规划的解法

考虑典范线性规划

$$\min c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$s.t.\ \ x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + \cdots + x_n\bar{a}_n = \vec{b}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

$B_0 = \left[\bar{a}_{t_1}, \bar{a}_{t_2}, \cdots, \bar{a}_{t_m}\right]$是标准容许基。

典范线性规划含有标准容许基，它的准备表既是单纯形表，因此单纯形法可以直接启动。

算法2.1（单纯形法） P65

单纯形法本质上是求解典范线性规划的算法。

定理2.13 在使用单纯形法（算法2.1）求解典范线性规划时，若各次迭代出的基本容许解皆是非退化的，则算法在有限步终止。

推论2.14 典范线性规划或者存在最优基本容许解，或者解无界。

对于如下形式的线性规划

$$\min \vec{c}^T \vec{x}$$

$$s.t.\quad A\vec{x} \le \vec{b}$$

$$\vec{x} \ge \vec{0},$$

其中 $\vec{b} \ge \vec{0}$ 。先引入非负变量 $\vec{u}$ 将其化为典范形式

$$\min \vec{c}^T \vec{x}$$

$$s.t.\quad A\vec{x} + I\vec{u} \le \vec{b}$$

$$\vec{x},\quad \vec{u} \ge \vec{0},$$

然后就可以启动单纯形法。

例2.8 求解线性规划 P66

$$
\begin{aligned}
\min\ & x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 \\
s.t.\ & x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\
& \quad -2x_2 + x_3 + x_4 \le 3 \\
& \quad -x_2 + 6x_3 - x_4 \le 4 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \ge 0.
\end{aligned}
$$

3. 初始基本容许解的产生

对于标准线性规划

$$\left.\begin{aligned} &\min \vec{c}^T\vec{x} \\ &s.t.\quad A\vec{x}=\vec{b} \\ &\qquad\quad \vec{x}\ge\vec{0}, \end{aligned}\right\} \qquad (2.54)$$

引入 m 个**人工变量** $u_1,u_2,\cdots,u_m$，求解辅助线性规划——一个典范线性规划

$$\left.\begin{aligned} &\min \vec{e}^T\vec{u} \\ &s.t.\quad I\vec{u}+A\vec{x}=\vec{b} \\ &\qquad\quad \vec{u}\ge\vec{0},\vec{x}\ge\vec{0}, \end{aligned}\right\} \qquad (2.55)$$

其中 $\vec{e}=[1,1,\cdots,1]^T$。

显然（2.55）不可能无解。

设（2.55）的最优值为 w，显然 $w \geq 0$ 。设最优表对应的G-J方程组为

$$D'\vec{u} + A'\vec{x} = \vec{b}' \qquad (2.56)$$

注意：$A\vec{x} = \vec{b}$ 与 $A'\vec{x} = \vec{b}'$ 等价。

（2.54）与（2.55）的关系:若 $w > 0$，则（2.54）无解；若 $w = 0$ ，则由（2.56）可得到（2.54）的一个初始基本容许解。

以下讨论在 $w = 0$ 下进行。分两种情形：

（1）在最优表中人工变量已全部退出基变量（表现为 D' 中不存在基向量）。

这时，与 $A\vec{x} = \vec{b}$ 等价的 $A'\vec{x} = \vec{b}'$ 中有了标准基，即表明（2.54）有了初始基本容许解，这时可以开始求解（2.54）（见下面的4.（1））。

（2）在最优表中至少还有一个人工变量是基变量（表现为 D' 中有基向量）。

假设第 k 个人工变量 u_k 仍是基变量，那么它的取值为 b'_k。因为 $w=0$ 且 $w=\sum_{i=1}^{n} u_i$，所以 $b'_k=0$。考虑（2.56）的第 k 个方程

$$\sum_{j=1}^{n} a'_{kj} x_j = b'_k \qquad (2.58)$$

以下分两种情形：

i ）若 $a'_{k1}=a'_{k2}=\cdots=a'_{kn}=0$，则（2.58）实质上成为 $0=0$。这表明 $A'\bar{x}=\bar{b}'$ 的第 k 个方程是多余方程，从而 $A\bar{x}=\bar{b}$ 的第 k 个方程也多余。划去第 k 个方程，人工变量 u_k 将彻底消失。

ii ）若 $a'_{k1}, a'_{k2}, \cdots, a'_{kn}$ 至少有一个不为0，不妨设 $a'_{kl} \neq 0$. 以 a'_{kl} 为主元在最优表上进行换基运算，人工变量 u_k

就会从基变量中消失。

重复以上步骤，直到人工变量全部从基变量中消失，最终的G-J方程组为

$$D''\vec{u} + A''\vec{x} = \vec{b}''$$

这时与 $A\vec{x} = \vec{b}$ 等价的 $A''\vec{x} = \vec{b}''$ 中也有了标准基，从而（2.54）也有了初始基本容许解，于是可以开始求解（2.54）（见下面的4.（2））。

4. 标准线性规划的解法

按3.求出（2.54）的初始基本容许解之后，接下来求解（2.54），与3.中的（1）、（2）对应，分别为

（1）求解线性规划 $$\left.\begin{aligned} &\min \vec{c}^T\vec{x} \\ &s.t.\quad A'\vec{x} = \vec{b}' \\ &\qquad\qquad \vec{x} \ge \vec{0}. \end{aligned}\right\}$$

（2）求解线性规划

$$\left.\begin{aligned} &\min \vec{c}^T\vec{x} \\ &s.t.\quad A''\vec{x}=\vec{b}'' \\ &\qquad\qquad \vec{x}\geq\vec{0}. \end{aligned}\right\}$$

总结：一般来说，解线性规划主要分为两大步：

第一步，化标准形（有时不需要）；

第二步，启动两阶段单纯形法（当标准形是典范线性规划时，直接进入第二阶段）。

例 求解线性规划

$$\begin{aligned} \min & -x_1-2x_2-3x_3+x_4 \\ s.t.\quad & x_1+2x_2+3x_3 \qquad =15 \\ & 2x_1+\ x_2+5x_3 \qquad =20 \\ & x_1+2x_2+\ x_3+x_4=10 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\geq 0. \end{aligned}$$

例2.9 求解线性规划

$$
\begin{aligned}
\min\ & x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 \\
s.t.\ & x_1 \qquad\quad - 2x_3 + x_4 = 1 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \qquad\quad = 4 \\
& 2x_1 \qquad\quad - 4x_3 + 2x_4 = 2 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0.
\end{aligned}
$$

例2.10 求解线性规划

$$
\begin{aligned}
\min\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\
s.t.\ & x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4 \\
& 4x_1 - 9x_2 - 3x_3 = 16 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

2.4 退化的处理

在非退化假定下，单纯形法（算法2.1）具有有限终止性（定理2.13）。<u>取消非退化假定，情况会是怎么样</u>？第一，算法2.1可能发生无限循环，求不到最优解；第二，适当修改选主元的规则，则可以保证单纯形法仍具有有限步终止性。

1. 选主元规则

单纯形法的核心是换基运算，而换基运算的首要步骤是选主元。选取主元列标的规则称为**进基规则**；选取主行标的规则称为**退基规则**。进基规则和退基规则合称**选主元规则**。选主元规则有多种多样，常用的进基规则有以下两种：

i ）最大正判别数进基规则

选取最大判别数的下标作为主元的列标。若同时有多个等值的最大正判别数，则选取其中最小的下标为主元的列标；

ⅱ）正判别数最小下标进基规则

选取正判别数中最小的下标作为主元的列标。算法2.2和算法2.3就采用这种进基规则。

常用的退基规则是最小行标退基规则。在使用公式（2.36）确定主元行标，若最小比值在多行上取得，则从中选取最小的行标作为主元的行标。

最大正判别数进基规则与最小行标退基规则合称**Dantzig规则**。算法2.1采用的就是这种规则。计算实践表明，在各种选主元规则中，Dantzig规则效果较好，在求解同一线性规划问题时，迭代次数相对较少。它的缺点是，在求解退化问题时，算法可能产生无限循环，求不到最优解。

2. 避免循环的规则

这里介绍一种最简单的避免循环的规则—Bland规则。

Bland规则 设在单纯形法的迭代过程中，当前容许基是 $B=[\vec{a}_{t_1},\vec{a}_{t_2},\cdots,\vec{a}_{t_m}]$ 关于 B 的基容许解不是最优解，则主元列标和行标分别由如下两个规则确定：

ⅰ）Bland进基规则

采用正判别数最小下标进基规则，即主元列标是

$$l=\min_{1\le j\le n}\{j\,|\,\sigma_j>0\},$$

由此确定 $\vec{a}_l$ 进基。

ⅱ）Bland退基规则

假定 $\bar{\vec{a}}_l=B^{-1}\vec{a}_l=[\bar{a}_{1l},\bar{a}_{2l},\cdots,\bar{a}_{ml}]^T\not\le\vec{0}$。设

$$\bar{\theta}=\min_{1\le i\le m}\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{il}}|\bar{a}_{il}>0\},$$

又设

$$I=\left\{i\left|\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{il}}=\bar{\theta},\bar{a}_{il}>0,i=1,2,\cdots,m\right.\right\}$$

则主元行标 k 由式

$$t_k=\min_{i\in I}\left\{t_i\left|t_i\text{是基向量下标}\right.\right\}$$

确定，由此确定 $\bar{a}_{t_k}$ 退基。换句话说，在所有可能的退基 向量中，选取下标最小的向量退基。

Bland证明：使用带有Bland规则的单纯形法求解典范线性规划，不会发生基的循环。

2.5 修正单纯形法

修正单纯形法是计算机实现的单纯形法。

注意到，包含全部信息的单纯形表

$$\begin{bmatrix} I & B^{-1}N & \vdots & B^{-1}\vec{b} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \vec{0}^T & \vec{\sigma}_N^T & \vdots & \bar{z} \end{bmatrix}$$

中的数据完全由基 B（实际是 B^{-1}）及原始数据决定。可以说有 B^{-1} 就有一切。

举例说明修正单纯形法的概貌。

例如求解

$$
\begin{aligned}
&\min u_1 + u_2 \\
&s.t.\ \ u_1 + \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \\
&\qquad u_2 + 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20 \\
&\qquad\qquad x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\
&\quad u_1,\ u_2,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0.
\end{aligned}
$$

解　建立单纯形表如下

$\vec{x}_B$	u_1	u_2	x_1	x_2	x_3	x_4	$\vec{b}$
u_1	1	0	1	2	3	0	15
u_2	0	1	2	1	5	0	20
x_4	0	0	1	2	1	1	10
$-\vec{c}^T$	/1	/1	0	0	0	0	0
$\vec{\sigma}^T$	0	0	3	3	8*	0	35

u_1	$1 \quad -\frac{3}{5} \quad -\frac{1}{5} \quad \frac{7}{5} \quad 0 \quad 0$	3
x_3	$0 \quad \frac{1}{5} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{5} \quad 1 \quad 0$	4
x_4	$0 \quad -\frac{1}{5} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{9}{5} \quad 0 \quad 1$	6
$\vec{\sigma}^T$	$0 \quad -\frac{8}{5} \quad -\frac{1}{5} \quad \frac{7}{5}^{*} \quad 0 \quad 0$	3

x_2	$\frac{5}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$	1	0	0	$\frac{15}{7}$
x_3	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	0	1	0	$\frac{25}{7}$
x_4	$-\frac{9}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{6}{7}$	0	0	1	$\frac{15}{7}$
$\vec{\sigma}^T$	"/1	/1	0	0	0	0	0