第 1 题：

有载重量 M=50 的背包，物体重量分别为 $w_1=5, w_2=15, w_3=25, w_4=27, w_5=30$，物品价值分别为 $v_1=12$, $v_2=30$, $v_3=44$, $v_4=46$, $v_5=50$。如果每个物品只有一件，求一种最优装法，使得装入背包的物体价值最大。

1. 请画出该问题的搜索树（3 分）
2. 请根据搜索树给出问题的最优方案以及该方案的价值（2 分）

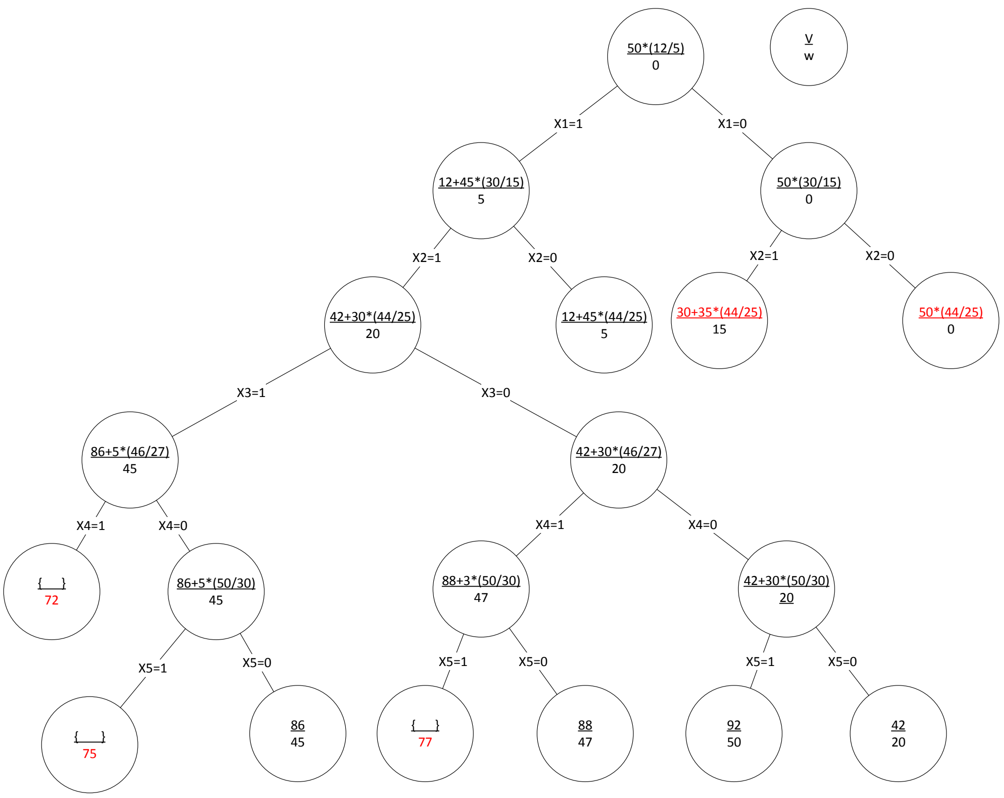
参考答案：

1. 对物品按照$\frac{v_i}{w_i}$从大到小进行排序，并用序列$<$ *重量，价值* $>$来表示排好序以后的物品序列：$<5,12>, <15,30>, <25,44>, <27,46>, <30,50>$，用$x_i = 1$ *或* 0来分别表示取用或者不用物品 i。那么代价函数为：

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{k} v_i x_i + \left(M - \sum_{i=1}^{k} w_i x_i\right)\frac{v_{k+1}}{w_{k+1}}, & \text{若对某个 } j > k \text{ 有} M - \sum_{i=1}^{k} w_i x_i \ge w_j \\ \sum_{i=1}^{k} v_i x_i, & \text{否则} \end{cases}$$

其中$\sum_{i=1}^{k} v_i x_i$表示已放入背包中物品的价值，$M - \sum_{i=1}^{k} w_i x_i$表示背包剩下的空隙的重量。初始的时候界函数值为 0，每次搜索到叶节点都更新界函数的值。当代价函数小于界函数的值就当前分支的搜索，判定为当前分支不存在最优解。

搜索树如下：



其中，v 表示代价函数的值，w 代表此时放入背包物品的总重量。

2．最优方案是放入重量为 5,15,30 的物品，最优方案的价值总量为 92。

评分标准：

1. 不必拘泥于搜索树的形式，但要求搜索树清晰地表达问题求解的思路。部分结点分支不对或者代价函数计算出错的最高只能得 2 分。
2. 最优方案和最优价值各占 1 分

第 2 题：

有 4 个操作员完成 4 项作业所需的时间表如下所示。第 i 行的 4 个数据分别表示第 i 位操作员完成 4 项作业所需时间， i=1, 2, 3, 4。

	作业 1	作业 2	作业 3	作业 4
操作员 1	3	8	4	12
操作员 2	9	12	13	5
操作员 3	8	7	9	3
操作员 4	12	7	6	8

4 位操作员从 0 时刻开始工作，最后一项作业完成的时刻记作全部作业的完成时间。求使得完成所有 4 项作业用时最短的分配方案。

1. 画出作业分配的搜索树（3 分）
2. 根据搜索树求出最优分配方案和最短完成时间（2 分）

参考答案：

这是一个组合优化问题，使用回溯算法。

问题的解是向量$<x_1,x_2,x_3,x_4>$，其中 $x_i=j$ 表示第 i 个任务分配给操作者 j, i=1,2,3,4. 初始 $X_i=\{1,2,3,4\}$,i=1,2,3,4. 表示第 i 个任务可以分配给操作者 1,2,3,4.

搜索树是一棵 4 叉树。从根开始，每个结点有 4 个儿子，第一层结点的部分向量是$\langle x_1\rangle$,4 个结点从左到右排列为<1>,<2>,<3>,<4>；第二层结点<1>的 4 个儿子对应的部分向量分别是<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>；直到最后一个结点<4>对应的儿子为<4,1>,<4,2>,<4,3>,<4,4>。

在结点$<x_1,\ldots,x_k>$计算前 k 个任务分配后方案的时间：

$T(j)=\sum_{x_i=j,i=1,2,\ldots k} t_{j,i}$， $t_{j,i}$ 表示第 i 项任务分配给第 j 个操作者的加工时间。

$T_k=\max\{\, T(j) \mid j=1,2,3,\ldots,n\}$

$T(j)$是前 k 项任务中已分给第 j 个操作者的任务加工时间总和，这些任务在第 j 个操作者是串行的。T_k 是此刻完成上述 k 个作业的停机时刻。当 $k=n$ 时，这就是最优解的完成时间。

对题目给的实例，上述计算结果得到的解是

$<x_1,x_2,x_3,x_4>=<1,3,4,2>$, 最短完成时间 $T=\max\{3,7,6,5\}=7$。

或者

$<x_1,x_2,x_3,x_4>=<1,3,1,2>$，最短完成时间 $T=\max\{3*2,7,5\}=7$。

或者

$<x_1,x_2,x_3,x_4>=<1,4,1,2>$，最短完成时间 $T=\max\{3*2,7,5\}=7$。

评分标准：

1. 不必拘泥于搜索树的形式，但要求搜索树能够清晰地表达问题求解的思路，不要求代价函数的设计。
2. 最优方案和最优时间各占 1 分
3. 个别学生如果理解为操作者之间不能并行工作，也可酌情给分，但最高只能得 4 分。