

Skriftlig prøve, den: 18. december 2014*Kursus nr :* 02405*Kursus navn:* Sandsynlighedsregning*Varighed :* 4 timer*Tilladte hjælpemidler:* Alle

Dette sæt er besvaret af:

(navn)

(underskrift)

(bord nr)

Der er i alt 30 spørgsmål fordelt på 30 opgaver, benævnt opgave 1,2,..., 30 i teksten. De enkelte spørgsmål er ligeledes nummereret og angivet som spørgsmål 1,2,...,30 i teksten. Svarerne skal uploades via campusnet, ved brug af filen "answers.txt" eller en lignende fil. I filen anføres studienummer på første linie, spørgsmålsnummer og svar anføres på de følgende linier med en linie for hvert spørgsmål. Nedenstående skema kan eventuelt afleveres som et supplement til den elektroniske aflevering. Ved uoverensstemmelse vil den elektroniske aflevering være gældende.

Spørgsmål	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Svar															

Spørgsmål	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Svar															

Svarmulighederne for hvert spørgsmål er nummereret fra 1 til 6.

Der gives 5 point for et korrekt svar og -1 for et ukorrekt svar. Ubesvarede spørgsmål eller et 6-tal (svarende til "ved ikke") giver 0 point. Det antal point, der kræves for, at et sæt anses for tilfredsstillende besvaret, afgøres endeligt ved censureringen af sættene.

Der gøres opmærksom på, at ideen med opgaverne er, at der er ét og kun ét rigtigt svar på de enkelte spørgsmål. Endvidere er det ikke givet, at alle de anførte alternative svarmuligheder er meningsfulde. Sættets sidste side er nr ??; blad lige om og se, at den er der.

I teksten benyttes betegnelsen $\log(\cdot)$ for naturlige logaritmer, dvs. logaritmer med grundtal e , medens Φ betegner fordelingsfunktionen for en standardiseret normalfordelt variabel.

Opgave 1

En vindmøllefabrikant har tre produktionsfaciliteter (A, B, og C), hvor henholdsvis 50%(A), 30%(B) og 20%(C) af gearkasserne til møllerne fremstilles. Defektsandsynlighederne er henholdsvis 1%(A), 2%(B) og 5%(C). Man har fået tilbageleveret en defekt gearkasse.

Spørgsmål 1

Sandsynligheden for, at den defekte gearkasse er fremstillet på facilitet A, findes til

- 1 $\frac{1}{2}$
- 2 $\frac{9}{23}$
- 3 $\frac{5}{21}$
- 4 $\frac{4}{19}$
- 5 $\frac{11}{20}$
- 6 Ved ikke

Opgave 2

En neutronkilde udsender neutroner tilfældigt med en rate af 4 per sekund.

Spørgsmål 2

Sandsynligheden for, at der udsendes mindst 4 neutroner i et sekund, findes til

- 1 $\sum_{k=4}^{\infty} \frac{4^k}{k!} e^{-4}$
- 2 $1 - \sum_{k=0}^4 \frac{4^k}{k!} e^{-4}$
- 3 $1 - \frac{17}{6} e^{-1}$
- 4 $\frac{1}{2}$
- 5 $\Phi(1)$
- 6 Ved ikke

Fortsæt på side 3

Opgave 3

En diskret stokastisk variabel med værdier i $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ har fordelingsfunktion givet ved:

x	1	2	3	4	5
$P(X \leq x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{25}{36}$

Man danner den stokastiske variabel $Y = |X - 3|$.

Spørgsmål 3

Man finder $P(Y = 2)$ til

- 1 $\frac{1}{36}$
- 2 $\frac{1}{4}$
- 3 $\frac{13}{18}$
- 4 $\frac{5}{18}$
- 5 $\frac{25}{36}$
- 6 Ved ikke

Opgave 4

En sælger af en vare er bekymret for, om varen bliver udsolgt. Erfaringen siger, at middelværdi og varians af solgt kvantum på en dag er henholdsvis 25 og 225. Sælgeren har 70 enheder.

Spørgsmål 4

En bedste øvre grænse for sandsynligheden for, at sælgeren får udsolgt, bestemmes til

- 1 $\frac{1}{3}$
- 2 $\frac{1}{9}$
- 3 $1 - \Phi(3)$
- 4 $\frac{1}{16}$
- 5 En sådan grænse kan ikke bestemmes med de givne oplysninger
- 6 Ved ikke

Fortsæt på side 4

Opgave 5

Den kontinuerte stokastiske variabel U er ligefordelt på enhedsintervallet.

Man danner $X = -\log(\sqrt{U})$.

Spørgsmål 5

Tætheden $f_X(x)$ findes i definitionsområdet til

- 1 $f_X(x) = e^{-x}$
- 2 $f_X(x) = 2e^{-2x}$
- 3 $f_X(x) = e^{-x}e^{-e^{-x}}$
- 4 $f_X(x) = \frac{1}{2}\sqrt{e^{-x}}$
- 5 $f_X(x) = xe^{-\frac{1}{2}x^2}$
- 6 Ved ikke

Opgave 6

Om de stokastiske variable V og W oplyses, at $E(V) = 1$, $E(W) = 2$, $\text{Var}(V) = 9$,
 $E(V \cdot W) = 5$, $\text{Corr}(V, W) = \frac{1}{2}$.

Spørgsmål 6

Man finder $\text{Var}(W)$ til

- 1 $\frac{3}{2}$
- 2 2
- 3 $\frac{16}{3}$
- 4 4
- 5 Der er ikke tilstrækkeligt med oplysninger til, at $\text{Var}(W)$ kan bestemmes.
- 6 Ved ikke

Fortsæt på side 5

Opgave 7

Man har X , der følger en $\exp(\lambda)$ fordeling, og den af X uafhængige Y , der følger en $\text{normal}(\mu, \sigma^2)$ fordeling.

Spørgsmål 7

For $Z = X + Y$ findes

- 1 $\text{Var}(Z) = \frac{1}{\lambda} + \sigma^2$
- 2 $\text{Var}(Z) = \frac{1}{\lambda^2} + \sigma^2$
- 3 $\text{Var}(Z) = \frac{2}{\lambda^2} + \mu^2 + \sigma^2$
- 4 $\text{Var}(Z) = \frac{1}{\lambda^2} + \sigma^2 + \frac{\mu}{\lambda}$
- 5 $\text{Var}(Z) = \frac{\mu}{\lambda^2} + \frac{\sigma^2}{\lambda}$
- 6 Ved ikke

Opgave 8

Økonomien kan være i et højrentescenario, hvilket forekommer med sandsynligheden $\frac{2}{5}$, meddens sandsynligheden for, at økonomien er i et scenario med høje P/E forhold, er $\frac{1}{3}$. Sandsynligheden for, at økonomien er i et højrentescenario, og, at der samtidigt er høje P/E forhold, er $\frac{1}{4}$.

Spørgsmål 8

Sandsynligheden for, at økonomien hverken er i et højrentescenario eller, at P/E forhold er høje, findes til

- 1 $\frac{29}{60}$
- 2 $\frac{3}{4}$
- 3 $\frac{4}{15}$
- 4 $\frac{9}{20}$
- 5 $\frac{31}{60}$
- 6 Ved ikke

Fortsæt på side 6

Opgave 9

Ved en artilleriøvelse skyder en gruppe rekrutter mod et mål med en morter. Granatens nedslagssted kan måles i forhold til målet ved koordinaterne til afvigelsen, hvor målet er valgt som koordinatsystemets nulpunkt. Koordinaterne til nedslagsstedet kan antages at være uafhængige standard normalfordelte variable.

Spørgsmål 9

Sandsynligheden for, at nedslagsstedet er længere væk end 2 enheder fra målet men dog indenfor en afstand af 3 enheder fra målet, er

- 1 $\Phi(3) - \Phi(2)$
- 2 $(\Phi(3) - \Phi(2))^2$
- 3 0,4712
- 4 0,1242
- 5 0,1353
- 6 Ved ikke

Opgave 10

Privatbiler, der kommer til periodisk syn har en sandsynlighed på $\frac{3}{5}$ for at passere synet uden anmærkninger.

Spørgsmål 10

Sandsynligheden for, at der blandt 5 privatbiler til syn er højst 3, der passerer synet uden anmærkninger, er

- 1 $1 - \left(\frac{2}{5}\right)^5$
- 2 $\frac{3}{5}$
- 3 $\sum_{i=0}^3 \binom{5}{i} \left(\frac{3}{5}\right)^i \left(\frac{2}{5}\right)^{5-i}$
- 4 $\sum_{i=0}^3 \frac{3^i}{i!} e^{-3}$
- 5 $\sum_{i=4}^5 \binom{5}{i} \left(\frac{3}{5}\right)^i \left(\frac{2}{5}\right)^{5-i}$
- 6 Ved ikke

Fortsæt på side 7

Opgave 11

Et område i planen er afgrænset af linierne $x + y = 1$, $x + y = -1$, $y - x = 1$, og $y - x = -1$. Et punkt vælges tilfældigt indenfor det angivne område.

Spørgsmål 11

Sandsynligheden for, at punktet ligger i tredje kvadrant, findes til

- 1 $\frac{1}{2}$
- 2 $\frac{1}{3}$
- 3 $\frac{1}{4}$
- 4 $\frac{1}{2} - \frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2\pi}$
- 5 $\frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2\pi}$
- 6 Ved ikke

Opgave 12

Ved en artilleriøvelse skyder en gruppe rekrutter mod et mål. Koordinaterne til nedslagsstedet beskrives ved en bivariat standardiseret normalfordeling med korrelationskoefficient $\rho = \frac{5}{13}$, hvor målet er valgt som koordinatsystemets nulpunkt.

Spørgsmål 12

Sandsynligheden for, at nedslagsstedet ligger i koordinatsystemets anden kvadrant, er givet ved

- 1 $\frac{1}{6}$
- 2 $\frac{1}{4} - \frac{\arctan\left(\frac{2}{3}\right)}{2\pi}$
- 3 $\frac{1}{4} - \frac{\arctan\left(\frac{5}{12}\right)}{2\pi}$
- 4 $\frac{\arctan\left(\frac{5}{8}\right)}{2\pi}$
- 5 $\frac{\arctan\left(\frac{8}{5}\right)}{2\pi}$
- 6 Ved ikke

Fortsæt på side 8

Opgave 13

Ved en artilleriøvelse skyder nogle rekrutter mod et mål. Sandsynligheden for, at de rammer målet ved et enkelt skud, er 0,15.

Spørgsmål 13

Sandsynligheden for, at målet rammes for tredje gang i netop femte skud, findes til

- 1 $0,15^3 \cdot 0,85^2$
- 2 $\binom{5}{3} \cdot 0,15^3 \cdot 0,85^2$
- 3 $\binom{5}{3} \cdot 0,15^2 \cdot 0,85^3$
- 4 $3 \cdot 0,15^3 \cdot 0,85^2$
- 5 $\binom{4}{2} \cdot 0,15^3 \cdot 0,85^2$
- 6 Ved ikke

Opgave 14

En gruppe på 20 personer består af 10 kvinder og 10 mænd. Der udvælges tilfældigt 4 personer fra gruppen.

Spørgsmål 14

Sandsynligheden for, at der er netop to personer af hvert køn blandt de 4 udvalgte, findes til

- 1 $\frac{1}{5}$
- 2 $\frac{3}{8}$
- 3 $\frac{115}{273}$
- 4 $\frac{135}{323}$
- 5 $\binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^4$
- 6 Ved ikke

Opgave 15

Man har parret (X, Y) , der er bivariat normalfordelt med $E(X) = 8$, $E(Y) = 0$, $\text{Var}(X) = 225$, $\text{Var}(Y) = 1$ og korrelationskoefficient $\rho = \frac{15}{17}$.

Spørgsmål 15

Man finder $P(X - 17Y > 0)$

1 $1 - \Phi\left(\frac{-8}{\sqrt{15}}\right)$

2 $\Phi(1)$

3 $\Phi\left(\frac{-8\sqrt{2}}{17}\right)$

4 $1 - \Phi\left(\frac{-8}{\sqrt{514}}\right)$

5 $1 - \Phi\left(\frac{-8\sqrt{739}}{739}\right)$

6 Ved ikke

Opgave 16

Den stokastiske variabel X følger en Poissonfordeling med parameter μ . For givet $X = x$ er Y ligefordelt på $0, \dots, x$.

Spørgsmål 16

Man finder

1 $P(Y = y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{1+i} \frac{\mu^i}{i!} e^{-\mu}$

2 $P(Y = y) = \frac{\left(\frac{\mu}{2}\right)^y}{y!} e^{-\frac{\mu}{2}}$

3 $P(Y = y) = (1 - e^{-\mu})^y e^{-\mu}$

4 $P(Y = y) = \binom{y-1}{1} (1 - e^{-\mu})^y e^{-2\mu}$

5 $P(Y = y) = \sum_{i=y}^{\infty} \frac{\mu^i}{(i+1)!} e^{-\mu}$

6 Ved ikke

Fortsæt på side 10

Opgave 17

Sandsynligheden for, at vejrfænomenet El Nino indtræder et givent år, sættes til $\frac{1}{8}$, medens sandsynligheden for, at der kommer særligt kraftive nedbørsbegivenheder i det kontinentale USA under en El Nino periode, sættes til $\frac{2}{3}$.

Spørgsmål 17

Sandsynligheden for, at der et givet år optræder en El Nino og særligt kraftige nedbørsmængder i det kontinentale USA, findes til

- 1 $\frac{13}{24}$
- 2 $\frac{14}{24}$
- 3 $\frac{19}{24}$
- 4 $\frac{1}{12}$
- 5 $\frac{2}{3}$
- 6 Ved ikke

Opgave 18

Feltstyrken af et elektromagnetisk signal kan angives ved en fordeling med tæthed $f(x) = xe^{-\frac{1}{2}x^2}$.

Spørgsmål 18

Sandsynligheden for, at feltstyrken ligger mellem 1 og 1,1 findes, eventuelt approksimativt, til

- 1 $\int_1^2 xe^{-\frac{1}{2}x^2} dx$
- 2 $e^{-\frac{1}{2}}$
- 3 $0,1 \cdot e^{-\frac{1}{2}}$
- 4 $1 - e^{-\frac{(1,1)^2}{2}}$
- 5 $\Phi(1,1) - \Phi(1)$
- 6 Ved ikke

Fortsæt på side 11

Opgave 19

En stokastisk variabel X følger en $\exp(\lambda)$ fordeling, medens den stokastiske variabel Y for givet $X = x$ følger en normalfordeling med $E(Y|X = x) = \mu \cdot x$ og $\text{Var}(Y|X = x) = x \cdot \sigma^2$.

Spørgsmål 19

Man finder $E(Y^2)$ til

- 1 $E(Y^2) = \frac{\mu}{\lambda^2} + \frac{\sigma^2}{\lambda}$
- 2 $E(Y^2) = \mu^2 + \sigma^2$
- 3 $E(Y^2) = \frac{1}{\lambda}(\mu^2 + \sigma^2)$
- 4 $E(Y^2) = \frac{2\mu^2}{\lambda^2} + \frac{\sigma^2}{\lambda} + \frac{\mu^2\sigma^2}{\lambda^2}$
- 5 $E(Y^2) = \frac{2\mu^2}{\lambda^2} + \frac{\sigma^2}{\lambda}$
- 6 Ved ikke

(Vink: man kan eventuelt udnytte, at beregningsformlen for varians også gælder for betinget middelværdi og varians).

Opgave 20

Produktionsprocessen af nogle armaturer består af forskellige led, der alle har indflydelse på diameteren af armaturets tilslutningssted. Der er således typisk en afvigelse mellem den ønskede diameter og den reelle diameter.

Spørgsmål 20

En hensigtsmæssig fordeling til at modellere afvigelsen af diameteren på armaturets tilslutningssted er en

- 1 gammafordeling
- 2 normalfordeling
- 3 binomialfordeling
- 4 Poissonfordeling
- 5 ligefordeling (uniform fordeling)
- 6 Ved ikke

Fortsæt på side 12

Opgave 21

På en given tropisk lokalitet er sandsynligheden for regn en given dag $\frac{1}{2}$. Sandsynligheden er nogenlunde konstant henover året. Regnvejr kan antages at forekomme uafhængigt mellem de enkelte dage.

Spørgsmål 21

Sandsynligheden for, at der højest forekommer regn 140 af årets (ikke skudår) dage, findes, eventuelt approksimativt, til

- 1 $\Phi\left(\frac{-84\sqrt{365}}{365}\right)$
- 2 $\Phi\left(\frac{-42}{\sqrt{365}}\right)$
- 3 $\Phi\left(\frac{-34\sqrt{365}}{365}\right)$
- 4 $\sum_{i=0}^{140} \binom{365}{i} \left(\frac{140}{365}\right)^i \left(\frac{225}{365}\right)^{365-i}$
- 5 $\frac{1}{2^{365}} \sum_{i=141}^{365} \binom{365}{i}$
- 6 Ved ikke

Opgave 22

Man har tre uafhængige eksponentialfordelte variable med rate λ .

Spørgsmål 22

Den næststørste af de tre variable har tætheden $g(x)$

- 1 $g(x) = 3\lambda e^{-3\lambda x}$
- 2 $g(x) = 2\lambda e^{-\lambda x} - 2\lambda e^{-2\lambda x}$
- 3 $g(x) = 6\lambda e^{-2\lambda x} - 6\lambda e^{-3\lambda x}$
- 4 $g(x) = 2\lambda e^{-2\lambda x}$
- 5 $g(x) = \lambda(\lambda x)e^{-\lambda x}$
- 6 Ved ikke

Fortsæt på side 13

Opgave 23

En lokalbus har en sen aften 8 passagerer tilbage før de sidste 6 stoppesteder. Bussen stopper kun ved et stoppested, hvis en passager skal af, idet det kan antages, at der ikke vil være nogle påstigende passagerer på den tilbageværende del af ruten. Hvis der ikke er passagerer tilbage ved det sidste stoppested kører bussen direkte til garagen uden at stoppe. Det kan antages, at en passager vælger ligeligt mellem de tilbageværende stoppesteder, og, at passagererne står af uafhængigt af hinanden.

Spørgsmål 23

Det forventede antal stop bussen skal foretage findes til

- 1 $8 \left(1 - \left(1 - \frac{5}{6}\right) \left(1 - \frac{4}{6}\right) \left(1 - \frac{3}{6}\right) \left(1 - \frac{2}{6}\right)\right)$
- 2 $6 \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^8\right)$
- 3 $6 \left(1 - \left(1 - \frac{7}{8}\right) \left(1 - \frac{6}{8}\right) \left(1 - \frac{5}{8}\right) \left(1 - \frac{4}{8}\right) \left(1 - \frac{3}{8}\right)\right)$
- 4 $8 \cdot \frac{1}{6}$
- 5 4
- 6 Ved ikke

Opgave 24

En stokastisk variabel $X \geq 1$ har hazardrate $\lambda(x) = \frac{1}{x}$.

Spørgsmål 24

Man finder $P(X > x)$ til

- 1 $\int_x^\infty e^{-\frac{1}{u}} du$
- 2 $\frac{1}{\sqrt{x}}$
- 3 $\int_x^\infty \frac{1}{u} du$
- 4 $e^{-\int_0^x \frac{1}{u} du}$
- 5 $\frac{1}{x}$
- 6 Ved ikke

Fortsæt på side 14

Opgave 25

Parret (X, Y) af stokastiske variable er ligefordelt i området

$$A = \{(x, y) \in (R)^2 | 0 < x, 0 < y, x + y < 1\}$$

dvs. området i første kvadrant afgrænset af linien $x + y = 1$.

Spørgsmål 25

I definitionsområdet findes tætheden $f_Z(z)$ for $Z = \frac{Y}{X}$ til

- 1 $f_Z(z) = \frac{1}{(1+z)^2}$
- 2 $f_Z(z) = 1$
- 3 $f_Z(z) = \frac{1}{2}$
- 4 $f_Z(z) = \int_0^{\frac{1}{z}} 2x dx$
- 5 $f_Z(z) = \int_0^{\frac{1}{1+z}} x dx$
- 6 Ved ikke

Opgave 26

Parret (X, Y) af stokastiske variable har tætheden $f(x, y) = \frac{3}{2}x$ for $0 < |y| < x < 1$ og 0 ellers.

Spørgsmål 26

I definitionsområdet findes den marginale tæthed $f_X(x)$ til

- 1 $f_X(x) = 3x^2$
- 2 $f_X(x) = x$
- 3 $f_X(x) = 4x^3$
- 4 $f_X(x) = 1$
- 5 $f_X(x) = 2(1 - x)$
- 6 Ved ikke

Fortsæt på side 15

Opgave 27

Den stokastiske variabel X følger en Rayleigh fordeling, medens den stokastiske variabel Y er eksponential(λ) fordelt. De to stokastiske variable er indbyrdes uafhængige. Man indfører $Z = \min(X, Y)$.

Spørgsmål 27

Man finder $P(Z > z)$ til

1 $P(Z > z) = e^{-z(\lambda + \frac{z}{2})}$

2 $P(Z > z) = 1 - (1 - e^{-\lambda z}) \left(1 - e^{-\frac{z^2}{2}}\right)$

3 $P(Z > z) = (1 - \lambda e^{-\lambda z}) \left(1 - ze^{-\frac{z^2}{2}}\right)$

4 $P(Z > z) = (1 - e^{-\lambda z}) \left(1 - e^{-\frac{z^2}{2}}\right)$

5 $P(Z > z) = e^{-\frac{\lambda z^2}{2}}$

6 Ved ikke

Opgave 28

Man har parret (X, Y) , der følger en bivariat normalfordeling med $E(X) = 3$, $E(Y) = -10$, $\text{Var}(X) = 9$, $\text{Var}(Y) = 100$ og korrelationskoefficient $\rho = -\frac{3}{5}$.

Spørgsmål 28

Man finder $P(Y \leq 6 | X = 0)$ til

1 $\Phi\left(\frac{8}{5}\right)$

2 $1 - \Phi(1)$

3 $\Phi(1)$

4 $\Phi\left(\frac{5}{4}\right)$

5 $\Phi\left(\frac{\sqrt{5}}{20}\right)$

6 Ved ikke

Fortsæt på side 16

Opgave 29

I et givet område er man interesseret i at etablere borebrønde til olieeftersøgning. Man antager, at gunstige steder til etablering af borebrønde forekommer i området med en gennemsnitlig forekomst af $\frac{1}{2}$ per km^2 . Man antager yderligere, måske som en lidt grov antagelse, at de gunstige steder forekommer uafhængigt af hinanden og uden udbredelse.

Spørgsmål 29

Sandsynligheden for, at der forefindes mindre end 2 gunstige undersøgelsessteder i et område på 4 km^2 , findes til

- 1 $3e^{-2}$
- 2 $2e^{-1}$
- 3 e^{-2}
- 4 $\frac{1}{8}$
- 5 $\sum_{i=0}^1 \binom{4}{i} \frac{1}{2^4}$
- 6 Ved ikke

Opgave 30

Den stokastiske variabel P følger en beta($1, u$) fordeling. For givet $P = p$ følger X en geometrisk fordeling med parameter p ($\mathbb{P}(X = x) = (1 - p)^{x-1}p$). I det følgende angiver $B(r, s) = \Gamma(r)\Gamma(s)/\Gamma(r + s)$ betafunktionen.

Spørgsmål 30

Man finder $\mathbb{P}(X > x)$ til

- 1 $\frac{u}{B(1,u)(x+u)}$
- 2 $\int_0^1 (1-p)^{x-1} p \frac{1}{B(1,u)} (1-p)^{u-1} dp$
- 3 $\int_0^1 (1-p)^{x-1} p \frac{1}{B(1,u)} p (1-p)^u dp$
- 4 $\int_0^1 (1-p)^x \frac{1}{B(1,u)} p (1-p)^u dp$
- 5 $\frac{1}{B(1,u)(x+u)}$
- 6 Ved ikke

Slut på opgavesættet.