

Skriftlig prøve, den: 29. maj 2015

Kursus nr : 02405

Kursus navn: Sandsynlighedsregning

Varighed : 4 timer

Tilladte hjælpemidler: Alle

Dette sæt er besvaret af:

(navn)

(underskrift)

(bord nr)

Der er i alt 30 spørgsmål fordelt på 30 opgaver, benævnt opgave 1,2,..., 30 i teksten. De enkelte spørgsmål er ligeledes nummereret og angivet som spørgsmål 1,2,...,30 i teksten. Svarerne skal uploades via campusnet, ved brug af filen "answers.txt" eller en lignende fil. I filen anføres studienummer på første linie, spørgsmålsnummer og svar anføres på de følgende linier med en linie for hvert spørgsmål. Nedenstående skema kan eventuelt afleveres som et supplement til den elektroniske aflevering. Ved uoverensstemmelse vil den elektroniske aflevering være gældende.

Spørgsmål	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Svar															

Spørgsmål	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Svar															

Svarmulighederne for hvert spørgsmål er nummereret fra 1 til 6.

Der gives 5 point for et korrekt svar og -1 for et ukorrekt svar. Ubesvarede spørgsmål eller et 6-tal (svarende til "ved ikke") giver 0 point. Det antal point, der kræves for, at et sæt anses for tilfredsstillende besvaret, afgøres endeligt ved censureringen af sættene.

Der gøres opmærksom på, at ideen med opgaverne er, at der er ét og kun ét rigtigt svar på de enkelte spørgsmål. Endvidere er det ikke givet, at alle de anførte alternative svarmuligheder er meningsfulde. Sættets sidste side er nr 17; blad lige om og se, at den er der.

I teksten benyttes betegnelsen $\log(\cdot)$ for naturlige logaritmer, dvs. logaritmer med grundtal e , medens Φ betegner fordelingsfunktionen for en standardiseret normalfordelt variabel.

Opgave 1

En provisionslønnet telefonsælger ringer til 20 tilfældige personer i løbet af sin vagt. Der er 10% sandsynlighed for, at en kunde accepterer tilbuddet.

Spørgsmål 1

Sandsynligheden for, at højst to kunder accepterer tilbuddet i løbet af sælgerens vagt, findes til

- 1 0,1
- 2 0,5
- 3 $\Phi\left(\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{20 \cdot 0,1 \cdot 0,9}}\right)$
- 4 $5e^{-2}$
- 5 $(\frac{9}{10})^{20} + 20 \frac{1}{10} (\frac{9}{10})^{19} + 190 (\frac{1}{10})^2 (\frac{9}{10})^{18}$
- 6 Ved ikke

Opgave 2

En person opholder sig i en fugtig skov, hvor vedkommende modtager gennemsnitligt et insektbid per 5. minut. Man antager, at insekterne bider uafhængigt af hinanden.

Spørgsmål 2

Antallet af bid, personen udsættes for i løbet af en halv time, beskrives bedst ved en

- 1 Poisson(6) fordeling
- 2 geometrisk($\frac{1}{6}$) fordeling
- 3 binomial(12, $\frac{1}{2}$) fordeling
- 4 uniform($12, \frac{1}{2}$) fordeling
- 5 negativ binomial($12, \frac{1}{2}$) fordeling
- 6 Ved ikke

Fortsæt på side 3

Opgave 3

To instrumenter i et flycockpit kan erstatte hinanden. Sandsynligheden for, at det første fejler, er p , medens sandsynligheden for, at de begge fejler, er q . Man er i en situation, hvor det første instrument har fejlet.

Spørgsmål 3

Hvad er sandsynligheden for, at det andet instrument også fejler

- 1 p
- 2 $\frac{q}{p}$
- 3 $p - q$
- 4 \sqrt{q}
- 5 qp
- 6 Ved ikke

Opgave 4

Man har, at den stokastiske variabel X følger en Poisson(2) fordeling, medens den stokastiske variabel Y følger en hypergeometrisk(10,100,20) fordeling.

Spørgsmål 4

Man finder

- 1 $E(X + Y) = 2 + \frac{100!}{90!} \frac{10!}{20!}$
- 2 $E(X + Y) = \frac{19}{5}$
- 3 $E(X + Y) = 4$
- 4 $E(X + Y) = \frac{17}{5}$
- 5 $E(X + Y)$ kan ikke bestemmes, da Poissonfordelingen og den hypergeometriske fordeling ikke er kompatible
- 6 Ved ikke

Fortsæt på side 4

Opgave 5

Man har $E(X) = 2$, $E(X^2) = 4$, $E(Y) = 0$, $E(Y^2) = 9$ og $Z = X + Y$.

Spørgsmål 5

Man finder

- 1 $\text{Var}(Z) = 7$
- 2 $\text{Var}(Z) = 9$
- 3 $\text{Var}(Z) = 11$
- 4 $\text{Var}(Z) = 13$
- 5 Spørgsmålet kan ikke besvares, da der ikke er givet tilstrækkelige oplysninger.
- 6 Ved ikke

Opgave 6

Man har udviklet en sandsynlighedsmodel til beskrivelse af bestanden af to kænguruarter. Der er tilstrækkeligt mange individer til, at en bivariat normalfordeling kan bruges som model. Det forventede antal af hver af de to arter er 800, variansen for begge arter er 1600, medens korrelationskoefficienten er $\rho = -\frac{2}{5}$. Man har optalt antallet af den ene art til at være 700.

Spørgsmål 6

Det forventede antal af den anden (ikke optalte) art er

- 1 735
- 2 760
- 3 800
- 4 840
- 5 865
- 6 Ved ikke

Fortsæt på side 5

Opgave 7

Den kontinuerte stokastiske variabel V er uniformt fordelt på enhedsintervallet $(0;1)$. Man danner $X = e^V$.

Spørgsmål 7

Tætheden $f_X(x)$ for X findes til

- 1 $f_X(x) = e^{-x}, \quad x > 0$
- 2 $f_X(x) = \frac{1}{e}, \quad 0 < x < e$
- 3 $f_X(x) = \frac{1}{x}, \quad 1 < x < e$
- 4 $f_X(x) = \frac{1}{e-1}, \quad 1 < x < e$
- 5 $f_X(x) = \log(x), \quad 1 < x < e$
- 6 Ved ikke

Opgave 8

Levetiden af en elektronisk komponent er givet ved en gamma($3,1$) fordeling, hvor tidsenheden er et år. Komponenten har opnået alderen 2 år.

Spørgsmål 8

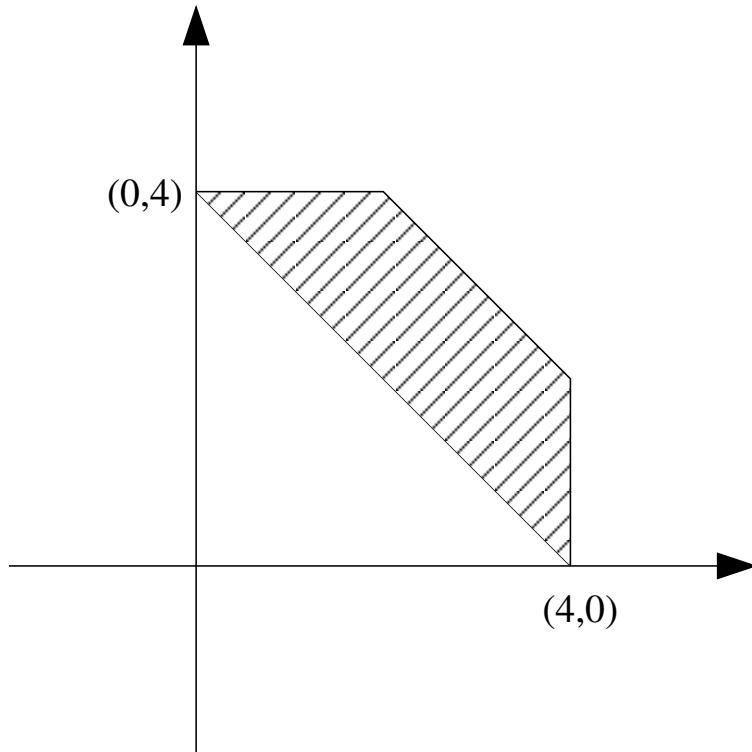
Sandsynligheden for, at komponenten fejler indenfor den første uge efter, at den har opnået alderen to år, findes, eventuelt approksimativt, til

- 1 $4e^{-2} \frac{1}{52}$
- 2 $\int_2^{2+\frac{1}{52}} \frac{x^2}{2} e^{-x} dx$
- 3 $e^{-2} \frac{1}{52}$
- 4 $\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{6}}}{1 - \Phi\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} \frac{1}{52}$
- 5 $\frac{1}{130}$
- 6 Ved ikke

Fortsæt på side 6

Opgave 9

Et punkt vælges tilfældigt i området afgrænset af linierne $x = 0, y = 4, x + y = 6, x = 4$ og $y = 0$. Det skraverede område på nedenstående figur er afgrænset af linierne $y = 4, x + y = 6, x = 4$ og $x + y = 4$.



Spørgsmål 9

Sandsynligheden for, at punktet ligger i det skraverede område, findes til

- 1 $\frac{5}{8}$
- 2 $\sqrt{2} - 1$
- 3 $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$
- 4 $\frac{5}{9}$
- 5 $\frac{3}{7}$
- 6 Ved ikke

Fortsæt på side 7

Opgave 10

Spørgsmål 10

Sandsynligheden for, at den næststørste af 3 uafhængige uniformt(0;1) fordelte variable er mellem $\frac{1}{4}$ og $\frac{3}{4}$, er

- 1 $\frac{15}{32}$
- 2 $\frac{1}{2}$
- 3 $\frac{11}{16}$
- 4 $\frac{3}{4}$
- 5 $\frac{21}{32}$
- 6 Ved ikke

Opgave 11

Skoleelever på et passende klassetrin klassificeres efter om de læser og regner tilfredsstillende, 42% læser tilfredsstillende, 35% regner tilfredsstillende, medens 55% mestrer mindst en af disciplinerne tilfredsstillende.

Spørgsmål 11

Andelen af elever, der både læser og regner tilfredsstillende, findes til

- 1 7%
- 2 13%
- 3 14,7%
- 4 22%
- 5 35%
- 6 Ved ikke

Fortsæt på side 8

Opgave 12

Man har empirisk fundet, at en person, der dyrker en af sportsgrenene cykling (C), fodbold (F) og svømning (S) har forhøjet hæmatokritværdi med følgende sandsynligheder P_{CH} , P_{FH} og P_{SH} . Sandsynligheden for, at en person dyrker cykling, fodbold eller svømning er henholdsvis P_C , P_F og P_S . Man kan antage, at en person dyrker netop en af de tre sportsgrene. En person har fået målt forhøjet hæmatokritværdi.

Spørgsmål 12

Sandsynligheden for, at personen dyrker fodbold, findes til

- 1 $P_F P_{FH}$
- 2 P_{FH}
- 3 $1 - P_C - P_S + P_{CH} + P_{FH} + P_{SH}$
- 4 $\frac{P_F P_{FH}}{P_C P_{CH} + P_F P_{FH} + P_S P_{SH}}$
- 5 $\frac{P_{FH}}{P_F (P_{CH} + P_{FH} + P_{SH})}$
- 6 Ved ikke

Opgave 13

I et sædvanligt spil kort udtages tilfældigt 5 kort.

Spørgsmål 13

Sandsynligheden for, at man blandt de 5 kort har netop 3 røde kort og 2 sorte kort, findes til

- 1 $\frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 26 \cdot 25}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}$
- 2 $\frac{13}{40}$
- 3 $\binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3$
- 4 $\frac{\binom{26}{3} \binom{26}{2}}{\binom{52}{5}}$
- 5 $\binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3$
- 6 Ved ikke

Fortsæt på side 9

Opgave 14

Man har de to uafhængige stokastiske variable X og Y , der begge følger en geometrisk fordeling med parameter henholdsvis p og q .

Spørgsmål 14

Man finder $\mathsf{P}(X > Y)$ til

- 1 $\mathsf{P}(X > Y) = \frac{q(1-p)}{p+q-pq}$
- 2 $\mathsf{P}(X > Y) = \frac{q}{3p}$
- 3 $\mathsf{P}(X > Y) = \frac{(1-p)(1-q)}{1-pq}$
- 4 $\mathsf{P}(X > Y) = \frac{p(1-q)}{p+q-pq}$
- 5 $\mathsf{P}(X > Y) = \frac{(1-p)q}{1-pq}$
- 6 Ved ikke

Opgave 15

Den stokastiske variabel X har tætheden $2x$ for $0 < x < 1$ og 0 ellers.

Spørgsmål 15

Man finder

- 1 $\mathsf{P}(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$
- 2 $\mathsf{P}(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$
- 3 $\mathsf{P}(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}) = \frac{3}{16}$
- 4 $\mathsf{P}(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}) = \frac{5}{8}$
- 5 $\mathsf{P}(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}) = \frac{3}{8}$
- 6 Ved ikke

Fortsæt på side 10

Opgave 16

Privatpersoner kan overføre billeder til en hjemmeside. Størrelsen af de enkelte billeder kan beskrives ved en fordeling med tæthed $f(x) = \frac{\alpha}{\beta} \left(1 + \frac{x}{\beta}\right)^{-\alpha-1}$, hvor α og β er positive konstanter.

Spørgsmål 16

Sandsynligheden for, at det mindste af 4 billeder har en størrelse, der overstiger en værdi x_0 , findes til

- 1 $\left(1 + \frac{x_0}{\beta}\right)^{-4\alpha}$
- 2 $\frac{\alpha}{\beta} \left(1 + \frac{x_0}{\beta}\right)^{-4\alpha-4}$
- 3 $\left(1 - \left(1 + \frac{x_0}{\beta}\right)^{-\alpha}\right)^4$
- 4 $\left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \left(1 + \frac{x_0}{\beta}\right)^{-\alpha-1}\right)^4$
- 5 $\left(1 + \frac{4x_0}{\beta}\right)^{-\alpha}$
- 6 Ved ikke

Opgave 17

Den stokastiske variabel Y er for givet $X = x$ ligefordelt på intervallet $(x; 1)$ medens X har tætheden $f_X(x) = 2 - 2x$, $0 \leq x \leq 1$.

Spørgsmål 17

Man finder $E(Y)$ til

- 1 $E(Y) = \frac{2}{3}$
- 2 $E(Y) = \frac{1}{2}$
- 3 $E(Y) = \frac{3}{4}$
- 4 $E(Y) = \frac{3}{5}$
- 5 $E(Y) = \frac{x+1}{2}$
- 6 Ved ikke

Fortsæt på side 11

Opgave 18

Besøgende i en forlystelsespark kaster bolde mod en skive med et midtpunkt. Det punkt, hvor den enkelte bold rammer, beskrives ved koordinaterne (X_1, X_2) , der er afstanden i henholdsvis horizontal og vertikal afstand fra midtpunktet. Man kan med rimelighed modellere X_1 og X_2 som to uafhængige standard normalfordelte variable. For at vinde en præmie skal bolden ramme i en ring med bredde 1. Ringens indre diameter er 2 (og den ydre diameter således 4).

Spørgsmål 18

Sandsynligheden for, at en besøgende vinder netop to præmier ved to kast, findes til

- 1 $e^{-1} + e^{-4} - 2e^{-\frac{5}{2}}$
- 2 $e^{-2} (1 + e^{-2} - 2e^{-1})$
- 3 $\frac{3}{4}$
- 4 $\frac{2\text{Atan}(3)}{\pi}$
- 5 $e^{-1} - e^{-4}$
- 6 Ved ikke

Opgave 19

I en grisetransport er der 400 slagtesvin. Slagtesvinene har en middelvægt på 97,5 kg. med en standardafvigelse på 15 kg.

Spørgsmål 19

Sandsynligheden for, at den samlede vægt af grisene i en grisetransport overstiger 40 ton, findes, eventuelt approksimativt, til

- 1 $1 - \Phi \left(\frac{20 - 400 \cdot 97,5 - \frac{1}{2}}{2000\sqrt{0,15 \cdot 0,85}} \right)$
- 2 $1 - \Phi \left(\frac{40\ 000 - 400 \cdot 97,5}{30\ 000} \right)$
- 3 $\Phi(-3)$
- 4 $\Phi \left(-\frac{10}{3} \right)$
- 5 Kan ikke bestemmes grundet manglende oplysninger
- 6 Ved ikke

Fortsæt på side 12

Opgave 20

Punktet (X, Y) vælges efter en ligefordeling indenfor området afgrænset af koordinatsystems akser samt linien $2y + x = 2$. Man danner $Z = X + Y$.

Spørgsmål 20

Tæthedens $f_Z(z)$ for Z findes til

1 $f_Z(z) = \frac{z}{9}, \quad 0 < z < 3$

2 $f_Z(z) = \begin{cases} \frac{z}{2} & 0 < z \leq 1 \\ \frac{1}{2} & 1 < z \leq 2 \\ \frac{3-z}{2} & 2 < z \leq 3 \end{cases}$

3 $f_Z(z) = \begin{cases} z & 0 \leq z < 1 \\ 2-z & 1 \leq z \leq 2 \end{cases}$

4 $f_Z(z) = \int_0^z dx$

5 $f_Z(z) = \begin{cases} z & 0 \leq z < 1 \\ 4-2z & 1 \leq z \leq 2 \end{cases}$

6 Ved ikke

Opgave 21

Man har parret (X, Y) , der er standard bivariat normalfordelte med korrelationskoefficient $\rho = \frac{3}{5}$. Man danner $Z = X + Y$.

Spørgsmål 21

Man finder $\mathbb{P}(Z < -1)$ til

1 $\Phi\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

2 $\Phi\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

3 $\Phi\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$

4 $\Phi\left(-\frac{4\sqrt{3}}{5}\right)$

5 $\Phi\left(-\frac{\sqrt{5}}{4}\right)$

6 Ved ikke

Fortsæt på side 13

Opgave 22

Under særlige vejrforhold omdirigeres fly til en mindre lufthavn med sikre landingsforhold. Man antager, at de omdirigerede fly ankommer uafhængigt af hinanden med en hyppighed af 1 per tredje minut.

Spørgsmål 22

Bestem sandsynligheden for, at der ankommer mere end 6 fly indenfor 5 minutter.

1 $1 - \Phi\left(\frac{6 - \frac{5}{3}}{\sqrt{\frac{5}{3}}}\right)$

2 0,0467

3 0,023

4 0,017

5 0,0017

6 Ved ikke

Opgave 23

De stokastiske variable X og Y har den simultane tæthedsfunktion $f(x, y) = x + y$ for $0 < x < 1$ og $0 < y < 1$.

Spørgsmål 23

Man finder $\mathbb{P}(X \leq \frac{1}{2}, Y \leq \frac{1}{2})$ til

1 $\mathbb{P}(X \leq \frac{1}{2}, Y \leq \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

2 $\mathbb{P}(X \leq \frac{1}{2}, Y \leq \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

3 $\mathbb{P}(X \leq \frac{1}{2}, Y \leq \frac{1}{2}) = \frac{1}{6}$

4 $\mathbb{P}(X \leq \frac{1}{2}, Y \leq \frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$

5 $\mathbb{P}(X \leq \frac{1}{2}, Y \leq \frac{1}{2}) = \frac{1}{16}$

6 Ved ikke

Fortsæt på side 14

Opgave 24

Man betragter hændelserne A og B samt de tilknyttede indikatorfunktioner I_A og I_B .

Spørgsmål 24

Man finder $\mathbb{P}(I_A I_B = 1)$ til

- 1 $\mathbb{P}(A \cap B)$
- 2 $\mathbb{P}(A \cup B)$
- 3 $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
- 4 $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- 5 Sandsynligheden kan ikke bestemmes uden nøjere kendskab til funktionerne I_A og I_B .
- 6 Ved ikke

Opgave 25

Man har de tre uafhængige stokastiske variable X_1 , X_2 og X_3 , der alle følger en eksponential(λ) fordeling. Man indfører $Y = X_1 + X_2 + X_3$.

Spørgsmål 25

Man finder $\mathbb{P}(Y > y)$

- 1 $e^{-\lambda y/3}$
- 2 $(1 + \lambda y + \frac{1}{2}(\lambda y)^2) e^{-\lambda y}$
- 3 $\Phi\left(\frac{y-\frac{3}{\lambda}}{\frac{\sqrt{3}}{\lambda}}\right)$
- 4 $1 - \Phi\left(\frac{y-\frac{3}{\lambda}}{\frac{\sqrt{3}}{\lambda}}\right)$
- 5 $\lambda \frac{1}{2}(\lambda y)^2 e^{-\lambda y}$
- 6 Ved ikke

Fortsæt på side 15

Opgave 26

Et stålværk producerer to ståltyper. På en given dag kan afvigelserne fra normalproduktionen beskrives ved en bivariat normalfordeling med korrelationskoefficient $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Spørgsmål 26

Sandsynligheden for, at der på en given dag produceres mindre end normalproduktionen for begge typer af stål, findes til

1 $\frac{\pi - \text{Atan}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2\pi}$

2 $\frac{\text{Atan}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2\pi}$

3 $\frac{1}{8}$

4 $\frac{1}{6}$

5 $\frac{1}{4}$

6 Ved ikke

Opgave 27

Et firma sælger varer i et miljø, der kan beskrives ved en kontinuert stokastisk variabel X , der for hver dag antager værdier i intervallet $(0; 1)$ med tæthedens $6x(1 - x)$ uafhængigt fra dag til dag. Antallet af varer, der kan sælges i løbet af en dag, kan angives som en binomial($20, x$) fordeling for et givet x .

Spørgsmål 27

Sandsynligheden for, at der kan sælges netop 10 enheder på en tilfældig dag, findes til

1 $\frac{1}{21}$

2 $\frac{11}{161}$

3 $\int_0^1 \binom{20}{10} 6x(1 - x) dx$

4 $\binom{20}{10} \frac{1}{1024}$

5 $\int_0^1 6x^{11}(1 - x)^{11} dx$

6 Ved ikke

Fortsæt på side 16

Opgave 28

I en alternativ parameterisering af binomialfordelingen benytter man parameteren θ . Sammenhængen mellem θ og den sædvanlige sandsynlighedsparameter p er givet ved

$$p = \frac{e^\theta}{1 + e^\theta}, \quad \theta = \log\left(\frac{p}{1 - p}\right).$$

Spørgsmål 28

For X binomialfordelt med antalsparameter $n = 2$ finder man for $\theta = 0$

- 1 $\mathbb{P}(X = 0) = 1$
- 2 $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{2}$
- 3 $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{4}$
- 4 $\mathbb{P}(X = 0) = 0$
- 5 $\mathbb{P}(X = 0)$ kan ikke bestemmes da $\theta = 0$ ikke er en gyldig parameterværdi
- 6 Ved ikke

Opgave 29

Rejsetiden til en videnskabelig station i arktis har en middeltid på 1 dag med standardafvigelse 3 dage.

Spørgsmål 29

En bedste øvre grænse for sandsynligheden for, at rejsetiden til den videnskabelige station overstiger 2 dage findes til

- 1 1
- 2 $\frac{1}{2}$
- 3 $1 - \Phi\left(\frac{1}{3}\right)$
- 4 $\frac{1}{4}$
- 5 Kan ikke bestemmes uden nøjere kendskab til fordelingen af rejsetiden
- 6 Ved ikke

Fortsæt på side 17

Opgave 30

Den simultane fordeling af de diskrete stokastiske variable X og Y er givet ved følgende tabel

		Værdier af X			Fordeling af Y
		1	2	3	
Værdier af Y	3	1/6	0	1/6	1/3
	2	0	1/3	0	1/3
	1	1/6	0	1/6	1/3
	Fordeling af X	1/3	1/3	1/3	1 (total sum)

Spørgsmål 30

Om de stokastiske variable X og Y gælder

- 1 De er uafhængige
- 2 De er ukorrelerede men ikke uafhængige
- 3 De er korrelerede
- 4 De er identiske
- 5 De er gensidigt udelukkende
- 6 Ved ikke

Slut på opgavesættet.