

Skriftlig prøve, den: 28. maj 2014

Kursus nr : 02405

Kursus navn: Sandsynlighedsregning

Varighed : 4 timer

Tilladte hjælpemidler: Alle

Dette sæt er besvaret af:

(navn)	(underskrift)	(bord nr)
--------	---------------	-----------

Der er i alt 30 spørgsmål fordelt på 30 opgaver, benævnt opgave 1,2,..., 30 i teksten. De enkelte spørgsmål er ligeledes nummereret og angivet som spørgsmål 1,2,...,30 i teksten. Svarerne skal uploades via campusnet, ved brug af filen “answers.txt” eller en lignende fil. I filen anføres studienummer på første linie, spørgsmålsnummer og svar anføres på de følgende linier med en linie for hvert spørgsmål. Nedenstående skema kan eventuelt afleveres som et supplement til den elektroniske aflevering. Ved uoverensstemmelse vil den elektroniske aflevering være gældende.

Spørgsmål	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Svar															

Spørgsmål	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Svar															

Svarmulighederne for hvert spørgsmål er nummereret fra 1 til 6. Indføres et forkert nummer i skemaet, kan dette rettes ved at “sværte” det forkerte nummer over og anføre det rigtige nedenunder. Er der tvivl om meningen med en rettelse, betragtes spørgsmålet som ubesvaret.

Kladde, mellemregninger og bemærkninger tillægges **ingen** betydning, kun tallene indført ovenfor registreres.

Der gives 5 point for et korrekt svar og -1 for et ukorrekt svar. Ubesvarede spørgsmål eller et 6-tal (svarende til “ved ikke”) giver 0 point. Det antal point, der kræves for, at et sæt anses for tilfredstillende besvaret, afgøres endeligt ved censureringen af sættene.

Der gøres opmærksom på, at ideen med opgaverne er, at der er ét og kun ét rigtigt svar på de enkelte spørgsmål. Endvidere er det ikke givet, at alle de anførte alternative svarmuligheder er meningsfulde. Sættets sidste side er nr 16; blad lige om og se, at den er der.

I teksten benyttes betegnelsen $\log(\cdot)$ for naturlige logaritmer, dvs. logaritmer med grundtal e , medens Φ betegner fordelingsfunktionen for en standardiseret normalfordelt variabel.

Opgave 1

En bil har et problem med olietryksmåleren. Hvis olielampen lyser, er der en sandsynlighed på $\frac{1}{5}$ for, at der er problemer med olietrykket. Sandsynligheden for, at olielampen lyser på en given køretur, er $\frac{1}{15}$.

Spørgsmål 1

Sandsynligheden for, at olielampen lyser, og, at der er problemer med olietrykket på en given køretur, findes til

- 1 $\frac{2}{15}$
- 2 $\frac{4}{15}$
- 3 $\frac{1}{75}$
- 4 $\frac{1}{5}$
- 5 $\frac{1}{15}$
- 6 Ved ikke

Opgave 2

Et automatiseret system til rørpost fungerer ved trykluft. Der eksperimenteres med, at man et givet sted i systemet kan skyde et emne ud, der efterfølgende skal ramme i en tragt. Hvis der indlægges et koordinatsystem, således at koordinatsystemets nulpunkt svarer til tragtenes centrum, kan man beskrive koordinaterne til emnets landingssted i tragten som uafhængige standard normalfordelte variable.

Spørgsmål 2

Sandsynligheden for, at et emne rammer i en afstand større end 3 fra tragtenes centrum, bestemmes til

- 1 $e^{-9/2}$
- 2 $\left(1 - \Phi\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2$
- 3 $4e^{-3}$
- 4 $1 - \Phi\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$
- 5 e^{-3}
- 6 Ved ikke

Fortsæt på side 3

Opgave 3

I et givet område fanges 10 hjorte, der mærkes og sættes ud igen. Efter et mindre stykke tid fanges 8 hjorte. Man kan antage, at bestanden er uændret i perioden og, at mærkede og umærkede hjorte har den samme sandsynlighed for at blive fanget ved den anden fangst. Man betegner den ukendte populationsstørrelse af hjorte med n .

Spørgsmål 3

Sandsynligheden for at få netop 5 mærkede hjorte ved genfangsten kan udtrykkes som

- 1 $\binom{8}{5} \left(\frac{10}{n}\right)^5 \left(\frac{n-10}{n}\right)^3$
- 2 $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$
- 3 $\binom{8}{5} \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} \frac{(n-10)(n-11)(n-12)}{n(n-1)(n-2)}$
- 4 $\frac{\binom{10}{5} \binom{n-10}{3}}{\binom{n}{8}}$
- 5 $\binom{7}{4} \left(\frac{10}{n}\right)^5 \left(\frac{n-10}{n}\right)^3$
- 6 Ved ikke

Opgave 4

En rovfisk møder byttedyr tilfældigt med et gennemsnitligt tidsinterval på 6 timer.

Spørgsmål 4

Sandsynligheden for, at rovfisken venter mere end 24 timer på at møde 4 byttedyr, findes til

- 1 e^{-4}
- 2 $\frac{71}{3}e^{-4}$
- 3 $\frac{23}{3}e^{-2}$
- 4 $\frac{103}{3}e^{-4}$
- 5 $\frac{1}{2}$
- 6 Ved ikke

Fortsæt på side 4

Opgave 5

En fiskelarve har indtaget 100 byttedyr, hvor størrelsesfordelingen for byttedyr kan beskrives ved en fordeling med middelværdi 1,5 nanogram og standardafvigelse 5 nanogram.

Spørgsmål 5

Sandsynligheden for, at fiskelarven har indtaget højst 300 nanogram, findes, eventuelt approksimativt, til

- 1 $\Phi\left(\frac{200+\frac{1}{2}-100 \cdot 1,5}{\sqrt{100 \frac{1,5}{5} \frac{3,5}{5}}}\right)$
- 2 $\Phi\left(\frac{3}{2}\right)$
- 3 $1 - \Phi\left(\frac{3}{2}\right)$
- 4 $\Phi(3)$
- 5 Sandsynligheden kan ikke bestemmes grundet manglende oplysninger
- 6 Ved ikke

Opgave 6

En flyrute betjenes, således at der er pladser dels på economy class og dels på business class. Sandsynligheden for, at der udsolgt på mindst en af de to klasser er $\frac{1}{3}$, medens sandsynligheden for, at der udsolgt på business class er $\frac{1}{8}$.

Spørgsmål 6

Sandsynligheden for, at der udsolgt på economy class men ikke på business class, findes til

- 1 $\frac{1}{24}$
- 2 $\frac{5}{24}$
- 3 $\frac{9}{24}$
- 4 $\frac{1}{6}$
- 5 Sandsynligheden kan ikke bestemmes grundet manglende oplysninger
- 6 Ved ikke

Fortsæt på side 5

Opgave 7

Man har den kontinuerte ligefordelte stokastiske variabel $U \sim \text{uniform}(0, 1)$ og den ligeledes kontinuerte stokastiske variabel Y der for givet $U = u$ følger en eksponentialfordeling med parameter (intensitet) u .

Spørgsmål 7

Overlevelsесfunktionen $G_Y(y) = \mathbb{P}(Y > y)$ findes til

- 1 $G_Y(y) = e^{u/2}$
- 2 $G_Y(y) = \frac{1}{y} (1 - e^{-y})$
- 3 $G_Y(y) = (1 + \frac{y}{2})e^{-\frac{y}{2}}$
- 4 $G_Y(y) = e^{-y/2}$
- 5 $G_Y(y) = \int_0^1 (1 - e^{-y}) \cdot 1 dy$
- 6 Ved ikke

Opgave 8

En person, der er kommet til skade, foretager opkald til en akuttelefon. Imidlertid er der en sandsynlighed på $\frac{9}{10}$ for, at et opkald ikke kan etableres grundet særlig stor belastning forårsaget af det aktuelle verjlig.

Spørgsmål 8

Sandsynligheden for, at det er nødvendigt med mere end 5 opkald, før personen får etableret forbindelse, findes til

- 1 0,0591
- 2 0,4066
- 3 0,5905
- 4 0,6065
- 5 0,6321
- 6 Ved ikke

Fortsæt på side 6

Opgave 9

Den positive stokastiske variabel X med tæthedsfunktion $f_X(x) = xe^{-x}$ transformeres til den stokastiske variabel $Y = e^X - 1$.

Spørgsmål 9

Man finder tætheden $f_Y(y)$ for Y til

- 1 $f_Y(y) = \frac{1}{(y+1)^2}$
- 2 $f_Y(y) = \log(y+1)e^{-(y+1)}$
- 3 $f_Y(y) = \frac{\log(y+1)}{4(y+1)^3}$
- 4 $f_Y(y) = \frac{\log(y+1)}{(y+1)^2}$
- 5 $f_Y(y) = \frac{w \log(y+1)}{y+1}$
- 6 Ved ikke

Opgave 10

Parret (X, Y) af stokastiske variable følger en standardiseret bivariat normalfordeling med korrelationskoefficient $\rho = -\frac{7}{8}$.

Spørgsmål 10

Man finder $P(X + Y \leq 1)$ til

- 1 $\Phi(2)$
- 2 $\Phi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- 3 $\Phi(2\sqrt{2})$
- 4 $\Phi(\sqrt{2})$
- 5 $\Phi\left(\frac{1}{2}\right)^2$
- 6 Ved ikke

Fortsæt på side 7

Opgave 11

En lottospiller køber en række per uge. Sandsynligheden for at få en gevinst på rækken i en given uge er $\frac{1}{5}$.

Spørgsmål 11

Sandsynligheden for, at spilleren opnår gevinst i mindst 10 ud af 100 uger findes til

- 1 $\Phi\left(\frac{10-20+\frac{1}{2}}{\sqrt{100\frac{4}{25}}}\right)$
- 2 $\sum_{i=10}^{100} \frac{20^i}{i!} e^{-20}$
- 3 $1 - 5^{-100} \sum_{i=0}^9 \binom{100}{i} 4^{100-i}$
- 4 $\frac{\binom{20}{10} \binom{80}{10}}{\binom{100}{20}}$
- 5 $\sum_{i=10}^{100} \binom{100}{i} \frac{1}{2^{100}}$
- 6 Ved ikke

Opgave 12

X og Y er to uafhængige kontinuerte stokastiske variable, der begge er uniformt fordelte på intervallet $(0, 1)$.

Spørgsmål 12

Man finder $P(X + Y \leq \frac{1}{2})$ til

- 1 $\frac{1}{6}$
- 2 $\frac{1}{3}$
- 3 $\frac{1}{2}$
- 4 $\frac{1}{4}$
- 5 $\frac{1}{8}$
- 6 Ved ikke

Fortsæt på side 8

Opgave 13

Man antager, at den månedsvise maksimale vandstand ved et dige er givet ved fordelingsfunktionen $F(x) = 1 - \exp\left(-x^{\frac{1}{3}}\right)$. Man kan som en noget grov antagelse antage, at denne fordeling er den samme for alle årets 12 måneder.

Spørgsmål 13

Sandsynligheden for, at vandstanden overstiger 8 mindst en gang i løbet af et år, findes til

1 $1 - \Phi\left(\frac{8-6\sqrt{8}}{12\sqrt{38}}\right)$

2 $(1 - e^{-2})^{12}$

3 e^{-24}

4 $1 - e^{-24}$

5 $1 - (1 - e^{-2})^{12}$

6 Ved ikke

Opgave 14

Man betragter parret (X, Y) af kontinuerte stokastiske variable med den simultane tæthedsfunktion $f(x, y) = 4xy, 0 < x < 1, 0 < y < 1$.

Spørgsmål 14

Tætheden $f_Z(z)$ for $Z = Y/X$ findes til

1 $f_Z(z) = \begin{cases} z & \text{for } 0 < z \leq 1 \\ \frac{1}{z^3} & \text{for } 1 < z \end{cases}$

2 $f_Z(z) = \int_0^z 4x^2y \, dx, \quad 0 < z$

3 $f_Z(z) = \frac{1}{z^2}, \quad 1 < z$

4 $f_Z(z) = \begin{cases} \frac{2}{3}z & \text{for } 0 < z \leq 1 \\ \frac{2}{3z^2} & \text{for } 1 < z \end{cases}$

5 $f_Z(z) = \int_0^1 4x^3z \, dx, \quad 0 < z$

6 Ved ikke

Fortsæt på side 9

Opgave 15

Man har de tre diskrete stokastiske variable X_1, X_2, X_3 , hvor (X_1, X_2, X_3) følger en multinomialfordeling, hvor antallet af forsøg er $n = 3$ og sandsynlighedsparametre $p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{3}, p_3 = \frac{1}{6}$.

Spørgsmål 15

Man finder $P(X_1 + X_3 \leq 2)$ til

- 1 $\sum_{i=0}^2 \binom{3}{i} \left(\frac{2}{3}\right)^i \frac{1}{3^{3-i}}$
- 2 $\sum_{i=0}^2 \frac{3!}{i!(2-i)!1!} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{3}\right)^{2-i} \frac{1}{6}$
- 3 $\sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \frac{3!}{i!j!(3-i-j)!} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{3}\right)^{2-i-j} \left(\frac{1}{6}\right)^j$
- 4 $\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \frac{3!}{i!j!(3-i-j)!} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{3}\right)^{2-i-j} \left(\frac{1}{6}\right)^j$
- 5 $\Phi(0)$
- 6 Ved ikke

Opgave 16

Den betingede fordeling af den stokastiske variabel Y givet X er givet ved tætheden $f_Y(y|X = x) = 1/x e^{-y/x}$. Givet $X = x$ er Y altså $\exp(1/x)$ fordelt. Fordelingen af X er gamma(2,1), dvs. tætheden $f_X(x)$ er $f_X(x) = xe^{-x}$.

Spørgsmål 16

Middelværdien af Y findes til

- 1 1
- 2 2
- 3 3
- 4 4
- 5 $\frac{3}{2}$
- 6 Ved ikke

Fortsæt på side 10

Opgave 17

Ventetiden for opkald til en akuttelefon kan beskrives ved en fordeling med tæthedsfunktion $f(x) = 2xe^{-x^2}$. Der foretages fem opkald til akuttelefonen.

Spørgsmål 17

Den tredejelængste ventetid ud af de fem ventetider har tætheden

- 1 $2xe^{-x^2}$
- 2 $x^5e^{-x^2}$
- 3 $\binom{5}{3} (1 - e^{-x^2})^3 (e^{-x^2})^2$
- 4 $120xe^{-x^2} \left(1 + (e^{-x^2})^2 - 2e^{-x^2}\right) (e^{-x^2})^2$
- 5 $60xe^{-3x^2} (1 - e^{-x^2})^2$
- 6 Ved ikke

Opgave 18

I opgaven betragtes to uafhængige hændelser.

Spørgsmål 18

At to hændelser er uafhængige betyder, at

- 1 hændelserne ikke kan forekomme samtidigt.
- 2 man kan bestemme sandsynligheden for foreningshændelsen som et produkt af sandsynlighederne for de to hændelser hver for sig.
- 3 man kan bestemme sandsynligheden for fælleshændelsen som et produkt af sandsynlighederne for de to hændelser hver for sig.
- 4 man kan bestemme sandsynligheden for foreningshændelsen som summen af sandsynlighederne for de to hændelser hver for sig.
- 5 indikatorfunktionen for foreningshændelsen kan bestemmes som summen af indikatorfunktionerne for de to hændelser hver for sig.
- 6 Ved ikke

Fortsæt på side 11

Opgave 19

Ændringen af kurSEN af et værdipapir over en dag kan beskrives ved en forDELING med midDELVÆRDI 0 og variANS 49.

Spørgsmål 19

En øvre grænse for sandsynligheden for, at ændringen af kurSEN over en dag er større end 21, findes til

- 1 $2\Phi(-3)$
- 2 $1 - \Phi(3)$
- 3 $\frac{1}{9}$
- 4 $\frac{1}{7}$
- 5 $\frac{1}{3}$
- 6 Ved ikke

Opgave 20

Det normerede afkast på to værdipapirer kan beskrives ved en standardiseret bivariat normalfordeling med korrelationskoefficient $\rho = -\frac{1}{2}$.

Spørgsmål 20

Sandsynligheden for, at afkastet på begge værdipapirer er negativt, findes til

- 1 $\frac{\frac{\pi}{2} + \arctan(\sqrt{3})}{2\pi}$
- 2 $\frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(\sqrt{3})}{2\pi}$
- 3 $\frac{1}{6}$
- 4 $\frac{1}{4}$
- 5 $\frac{1}{3}$
- 6 Ved ikke

Fortsæt på side 12

Opgave 21

Parret (X, Y) af kontinuerte stokastiske variable har den simultane tæthedsfunktion $f(x, y) = 3e^{-(x+y)}$, for $\frac{1}{2}x \leq y \leq 2x$.

Spørgsmål 21

Man finder $E(\sqrt{XY})$ til

- 1 $E(\sqrt{XY}) = \int_0^\infty \int_0^\infty 3\sqrt{xy}e^{-(x+y)}dydx$
- 2 $E(\sqrt{XY}) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty 3\sqrt{xy}e^{-(x+y)}dydx$
- 3 $E(\sqrt{XY}) = \int_0^\infty \int_{\frac{1}{2}x}^{2x} 3\sqrt{xy}e^{-(x+y)}dydx$
- 4 $E(\sqrt{XY}) = \int_0^\infty \int_0^\infty 3xy\sqrt{xy}e^{-(x+y)}dydx$
- 5 $E(\sqrt{XY}) = \int_0^\infty \int_{\frac{1}{2}x}^{2x} 3xy\sqrt{xy}e^{-(x+y)}dydx$
- 6 Ved ikke

Opgave 22

En forsker mener at have påvist, at egetræers levetid i år kan beskrives ved en fordeling med tæthed $f(t) = 3/(1+2t)^{5/2}$. Man kan i det følgende antage, at forskerens påstand er korrekt.

Spørgsmål 22

Sandsynligheden for, at et 100 år gammelt egetræ vil dø indenfor et kort tidsrum kaldet Δt , bestemmes, eventuelt approksimativt, til

- 1 $\frac{3}{201}\Delta t$
- 2 $\frac{\sqrt{201}}{2706867}\Delta t$
- 3 $\frac{\sqrt{201}}{40401}$
- 4 $1 - (201 + 2\Delta t)^{-\frac{3}{2}}$
- 5 $(201 + 2\Delta t)^{-\frac{3}{2}}$
- 6 Ved ikke

Fortsæt på side 13

Opgave 23

Om de stokastiske variable X og Y oplyses $E(X) = 2$, $V(X) = 4$, $E(Y) = 3$, $V(Y) = 9$, $E(XY) = 6$.

Spørgsmål 23

Om X og Y gælder

- 1 X og Y er uafhængige
- 2 X og Y er ukorrelerede
- 3 X og Y er positivt korrelerede
- 4 X og Y er negativt korrelerede
- 5 Ingen af de ovenstående kan afgøres ud fra de givne oplysninger
- 6 Ved ikke

Opgave 24

Et udfaldsrum Ω er opdelt i tre indbyrdes disjunkte hændelser C_1, C_2, C_3 , således at foreningshændelsen af de tre hændelser er den sikre hændelse (Ω). Man får oplyst, at $P(C_1) = P(C_2) = \frac{1}{4}$. Man betragter yderligere hændelsen D om, hvilket det oplyses $P(D|C_1) = P(D|C_2) = 1/5$, $P(D|C_3) = 2/5$.

Spørgsmål 24

Hvis hændelsen D er indtruffet, bestemmes sandsynligheden for, at hændelsen C_1 også er indtruffet, til

- 1 $\frac{1}{7}$
- 2 $\frac{1}{6}$
- 3 $\frac{2}{11}$
- 4 $\frac{1}{4}$
- 5 Sandsynligheden kan ikke beregnes grundet manglende oplysninger
- 6 Ved ikke

Fortsæt på side 14

Opgave 25

Man antager, at bakteriekolonier i et vækstmedium, der observeres for en standardiseret vækstperiode, optræder uafhængigt af hinanden med en middelforekomst på 2 kolonier per ml. Man kan antage, at den enkelte bakteriekoloni har en forsvindende udbredelse.

Spørgsmål 25

Sandsynligheden for ikke at finde en bakteriekoloni i $\frac{1}{4}$ ml af vækstmediet efter en standardiseret vækstperiode findes til

- 1 0,607
- 2 0,500
- 3 0,368
- 4 0,250
- 5 0,125
- 6 Ved ikke

Opgave 26

En diskret stokastisk variabel N er ligefordelt på $1, 2, \dots, n$, medens X for givet $N = i$ følger en binomialfordeling med antalsparameter i og sandsynlighedsparameter $\frac{1}{i}$.

Spørgsmål 26

Man finder $P(X = n)$ til

- 1 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \binom{n}{i} \frac{1}{n^i} (1 - \frac{1}{n})^{n-i}$
- 2 $\binom{n+1}{2} \frac{1}{n^n}$
- 3 $\frac{1}{n^n}$
- 4 $\frac{1}{n^{n+1}}$
- 5 $(n-1) \frac{1}{n^n}$
- 6 Ved ikke

Fortsæt på side 15

Opgave 27

Funktionen $f(x) = c(x^2 - 4x + 3)e^{-x}$ foreslåes som en tæthedsfunktion for en kontinuert stokastisk variabel.

Spørgsmål 27

Om funktionen $f(x)$ gælder

- 1 $f(x)$ kan være en tæthed for alle positive x og et positivt valgt c
- 2 $f(x)$ kan være en tæthed for alle positive x og et negativt valgt c
- 3 $f(x)$ kan være en tæthed for alle negative x og et positivt valgt c
- 4 $f(x)$ kan være en tæthed for alle negative x og et negativt valgt c
- 5 $f(x)$ kan ikke være en tæthed på hverken hele \mathbb{R}_- eller hele \mathbb{R}_+ .
- 6 Ved ikke

Opgave 28

Den stokastiske variabel X følger en geometrisk fordeling $P(X = x) = \frac{1}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^{x-1}$, medens den af X uafhængige Y følger en Poissonfordeling $P(Y = y) = \frac{2^y}{y!} e^{-2}$.

Spørgsmål 28

Man finder $E(XY) + E(X)E(Y)$ til

- 1 0
- 2 10
- 3 16
- 4 20
- 5 32
- 6 Ved ikke

Fortsæt på side 16

Opgave 29

Et ambulatorium på et hospital indkalder patienter til behandling. For hver patient, der er tilslagt, er der en sandsynlighed for, at patienten udebliver. Man ønsker at bestemme, hvor mange patienter, der skal indkaldes for, at sandsynligheden for, at der møder mindst 10 patienter frem er større end 90%.

Spørgsmål 29

Den bedst egnede sandsynlighedsfordeling til at foretage ovenstående beregning er

- 1 Normalfordeling
- 2 Gammafordeling
- 3 Poissonfordeling
- 4 Binomialfordeling
- 5 Negativ binomialfordeling
- 6 Ved ikke

Opgave 30

Fra Australien udføres blandt andet jernmalm og kul. Mængden af jernmalm og kul, der udføres et givet år, kan beskrives ved en bivariat normalfordeling med parametre (i millioner tons) $E(X) = 500$, $E(Y) = 200$, $V(X) = 2500$, $V(Y) = 1600$ og korrelationskoefficient $\rho = \frac{4}{5}$. I ovenstående betegner X mængden af jernmalm og Y betegner mængden af kul, der udføres.

Spørgsmål 30

Hvad er den forventede mængde af jernmalm angivet i millioner tons, der udføres et år, hvor der udføres 160 millioner tons kul.

- 1 540
- 2 500
- 3 475
- 4 460
- 5 450
- 6 Ved ikke

Slut på opgavesættet.