# Оценка параметров систем массового обслуживания

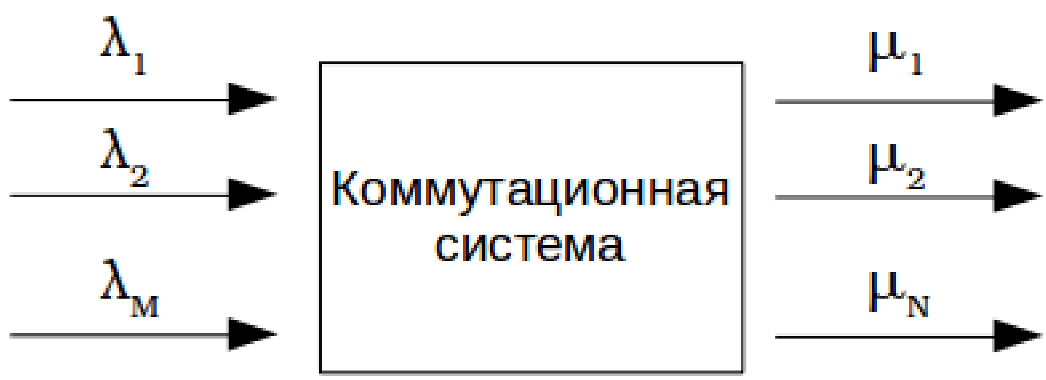
Андрей Валиков

## 1 Цель работы

Оценить следующие характеристики коммутаторов: вероятность потерь вызова, производительность, среднее число соединений. Лабораторная работа выполнена на языке Python 3.6 с использованием библиотек Matplolib и SciPy и представляет собой модели, позволяющие исследовать характеристики однозвенных коммутаторов при различных параметрах.

## 2 Общая модель коммутатора

Коммутатор в данной работе представляет собой модель, имеющую $M$ входов и $N$ выходов.




## 3 Параметры системы

| | |
|---|---|
| $M$ | входы коммутатора |
| $N$ | выходы коммутатора |
| $\lambda$ | поступление нагрузки на одном входе |
| $\mu$ | уход нагрузки с одного выхода |
| $P$ | вероятность потерь вызовов |
| $G$ | производительность |
| $E$ | среднее число соединений |

$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ – отношение поступления нагрузки к её уходу

# 4 Вероятность блокировки для трёх распредлений

## 4.1 Распределение Энгсета

$$p = \frac{\rho^N \binom{M}{N}}{\sum_{n=0}^{N} \rho^n \binom{M}{n}}$$

## 4.2 Распределение Эрланга

$$p = \frac{(M\rho)^N}{N! \sum_{n=0}^{N+1} \frac{(M\rho)^n}{n!}}$$

## 4.3 Биноминальное распределение

Пусть $\alpha = \frac{\rho}{\rho+1}$

$$p = \binom{M}{N} \alpha^N (1-\alpha)^{M-N}$$

# 5 Код программы

## 5.1 main.py

```
import math
import numpy as np
from queueing import Queueing
from mode_of_work import Mode

fact = math.factorial

mode = Mode.on_lambda

lam, mu = .9, .9


M, N = 10, 10

_range = np.arange(.01, 1, .05)


if mode == Mode.on_k:
    _range = np.arange(1, 20)

queueing = Queueing(lam, mu, M, N, _range, mode)

P1_k, G1_k, E1_k = [], [], []
P2_k, G2_k, E2_k = [], [], []
P3_k, G3_k, E3_k = [], [], []
```

```
for var in _range:

    if mode == Mode.on_lambda:
        queueing.lam, queueing.rho = var, var / mu
    elif mode == Mode.on_mu:
        queueing.rho = lam / var
    elif mode == Mode.on_rho:
        queueing.rho = var
    elif mode == Mode.on_k:
        queueing.N = var

    P1_k.append(queueing.p_engset())
    G1_k.append(queueing.perf(P1_k[-1]))
    E1_k.append(queueing.cons(P1_k[-1]))

    P2_k.append(queueing.p_erlang())
    G2_k.append(queueing.perf(P2_k[-1]))
    E2_k.append(queueing.cons(P2_k[-1]))

    P3_k.append(queueing.p_binom())
    G3_k.append(queueing.perf(P3_k[-1]))
    E3_k.append(queueing.cons(P3_k[-1]))

queueing.common_plot(
    title='loss_prob', title_eng='loss_prob',
    engset=P1_k, erlang=P2_k, binom=P3_k)
queueing.common_plot(
    title='perf', title_eng='perf',
    engset=G1_k, erlang=G2_k, binom=G3_k)
queueing.common_plot(
    title='aver_conn', title_eng='aver_conn',
    engset=E1_k, erlang=E2_k, binom=E3_k)
```

### 5.2 mode_of_work.py

```
from enum import Enum


class Mode(Enum):
    on_lambda = 0,
    on_mu = 1,
    on_rho = 2,
    on_k = 3
```

### 5.3 queueing.py

```
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.misc
```

```python
import math
from mode_of_work import Mode
fact = math.factorial
comb = scipy.misc.comb


class Queueing:
    def __init__(self, lam, mu, M, N, _range, mode):
        self.lam, self.mu = lam, mu
        self.rho = lam / mu
        self.M, self.N = M, N
        self._range = _range
        self.mode = mode

    """Stage 1"""
    def p_engset(self):
        """engset loss probability"""
        _sum = sum((comb(self.M, n) * (self.rho ** n) for n in range(self.N + 1)
        return comb(self.M, self.N) * ((self.rho ** self.N) / _sum)

    def p_erlang(self):
        """erlang loss probability"""
        _sum = sum(((self.M * self.rho) ** n) / fact(n) for n in range(self.N +
        return (self.M * self.rho) ** self.N / (fact(self.N) * _sum)

    def p_binom(self):
        """binom loss probability"""
        alpha = self.rho / (1 + self.rho)
        return comb(self.M, self.N) * (alpha ** self.N) * (1 - alpha) ** (self.M

    """Stage 2"""
    def perf(self, p):
        """performance"""
        return self.lam * self.M * (1 - p)

    """Stage 3"""
    def cons(self, p):
        """connections"""
        return self.rho * self.M * (1 - p)

    def common_plot(self, **kwargs):
        title = f"{kwargs['title']} "
        if self.mode == Mode.on_lambda:
            title += f'M={self.M} N={self.N} mu={self.mu}'
            plt.xlabel('lambda')
        elif self.mode == Mode.on_mu:
            title += f'M={self.M} N={self.N} lambda={self.lam}'
            plt.xlabel('mu')
```

```
        elif self.mode == Mode.on_rho:
            title += f'M={self.M} N={self.N} lambda={self.lam}'
            plt.xlabel('rho')
        elif self.mode == Mode.on_k:
            title += f'M={self.M} lambda={self.lam} mu={self.mu}'
            plt.xlabel('N')

#   file_title = f"_M{self.M}_N{self.N}_mu{self.mu}"

        plt.title(title)
        plt.plot(self._range, kwargs['engset'], label='Engset')
        plt.plot(self._range, kwargs['erlang'], label='Erlag')
        plt.plot(self._range, kwargs['binom'], label='Binom')
        plt.legend()
        # plt.savefig(file_title.replace('.', '') + '.png')
        plt.show()
```

# 6 Задача 1. Зависимость параметров от $\lambda$

## 6.1 $M = N$

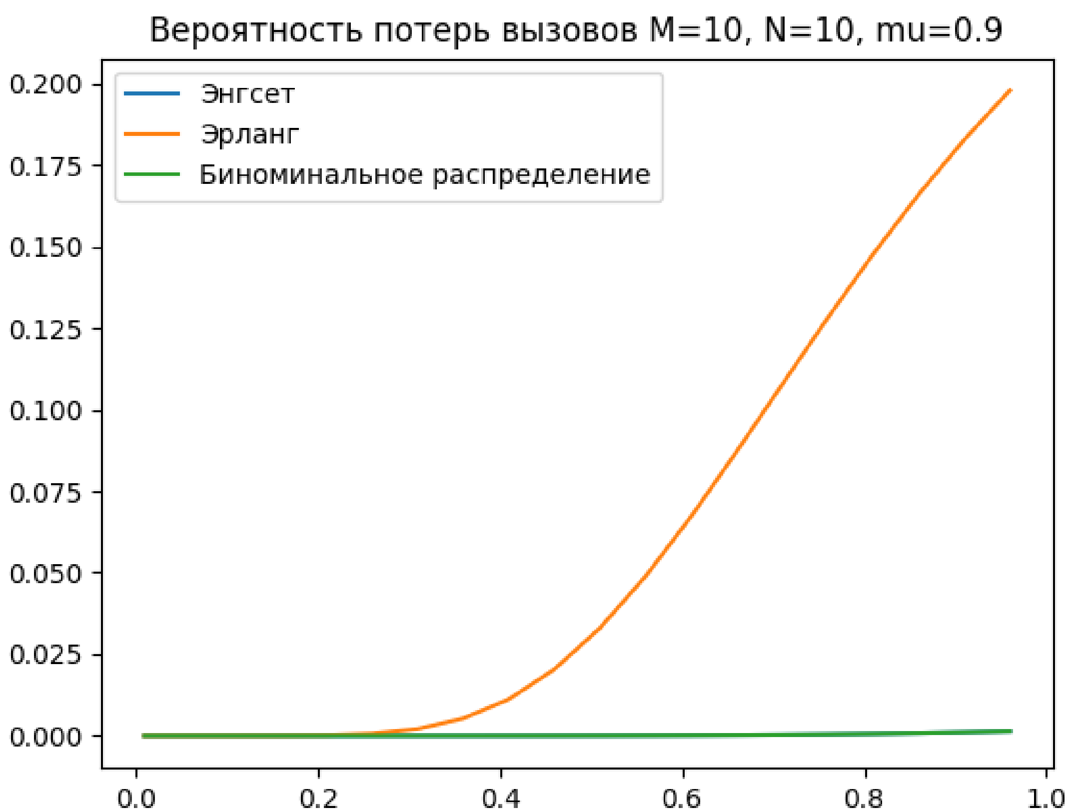
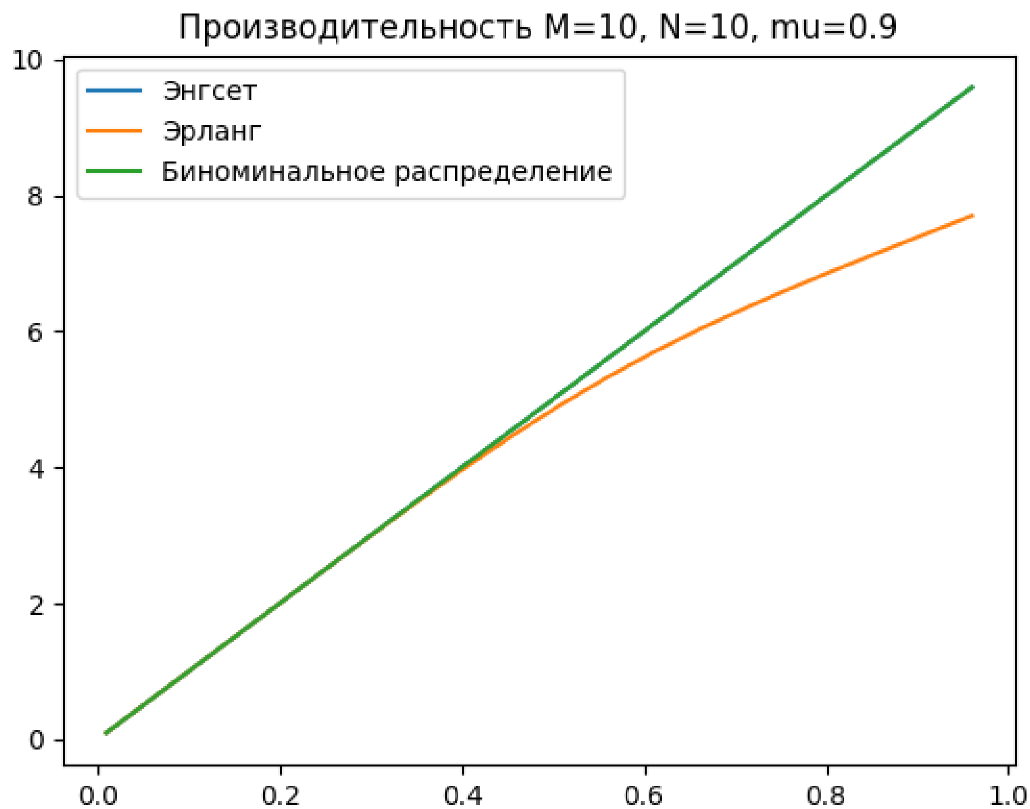



Рис. 1:



Производительность M=10, N=10, mu=0.9
Энгсет
Эрланг
Биноминальное распределение
0
2
4
6
8
10
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0


Рис. 2:

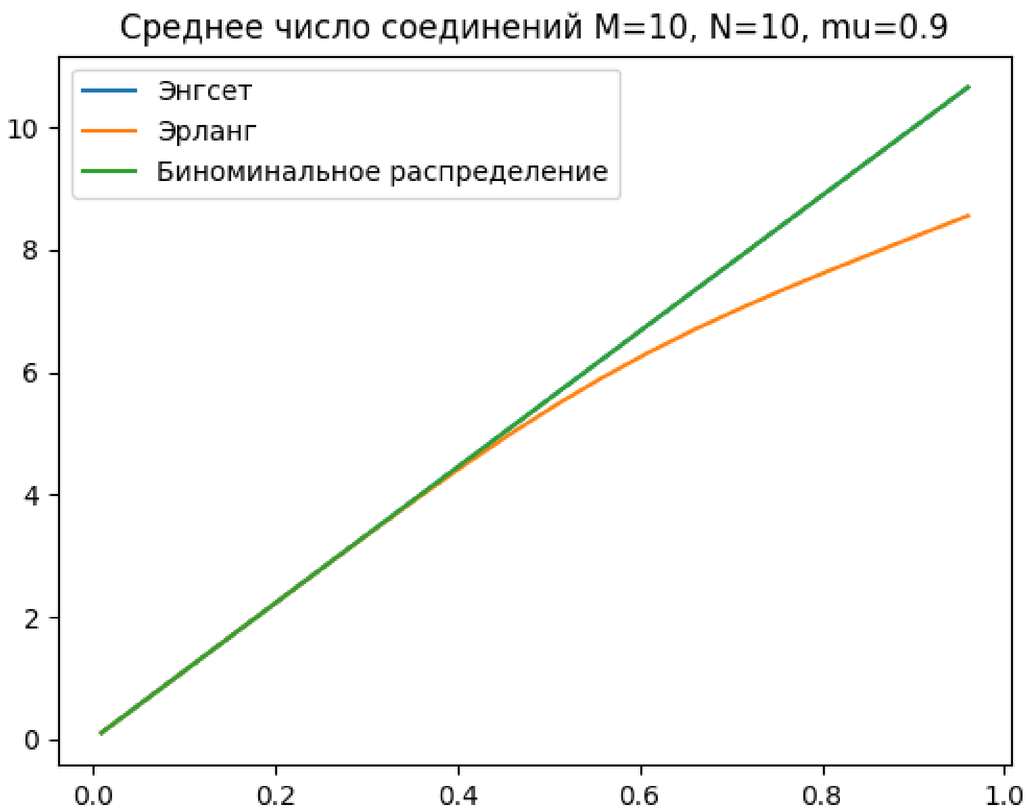
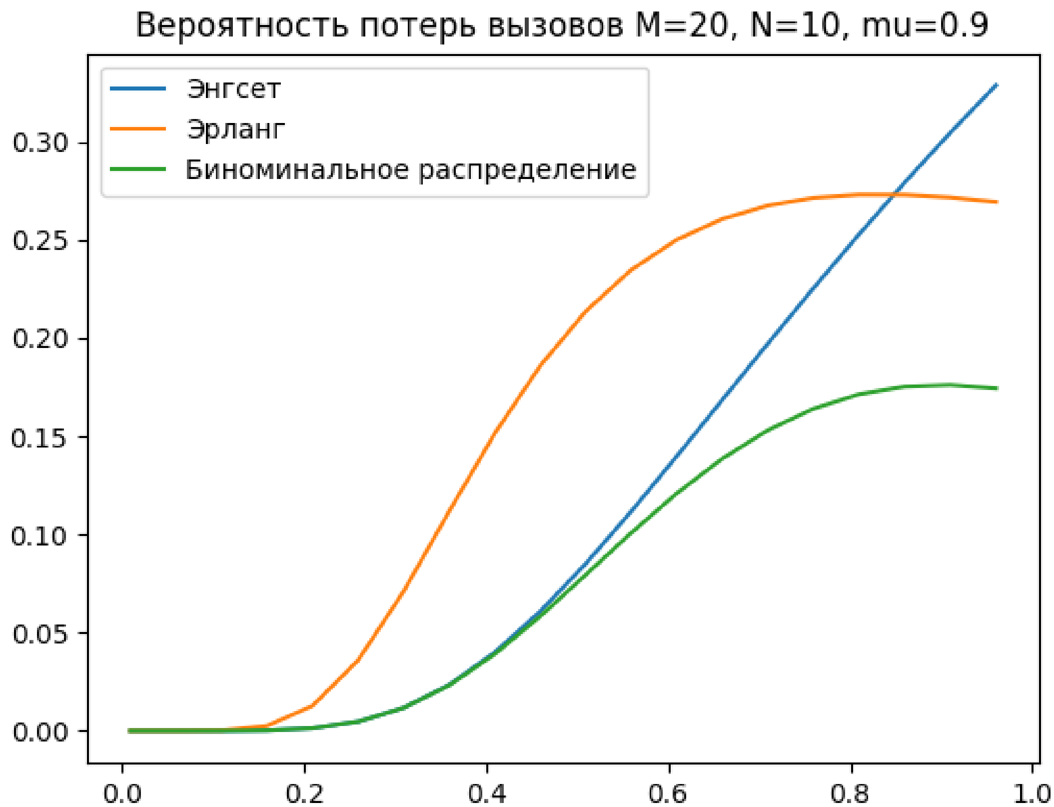

Среднее число соединений M=10, N=10, mu=0.9
Энгсет
Эрланг
Биноминальное распределение
0
2
4
6
8
10
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Рис. 3:

### 6.2 $M > N$



Вероятность потерь вызовов M=20, N=10, mu=0.9
Энгсет
Эрланг
Биноминальное распределение
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0


Рис. 4:

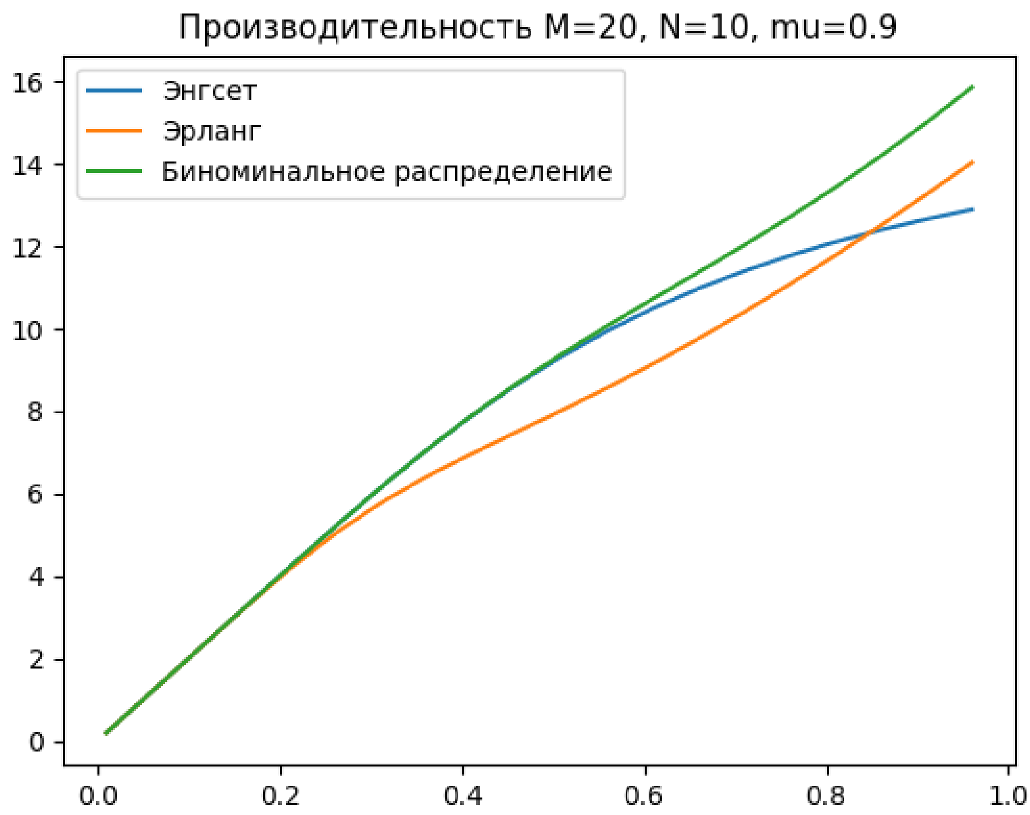

Производительность M=20, N=10, mu=0.9
Энгсет
Эрланг
Биноминальное распределение
16
14
12
10
8
6
4
2
0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Рис. 5:

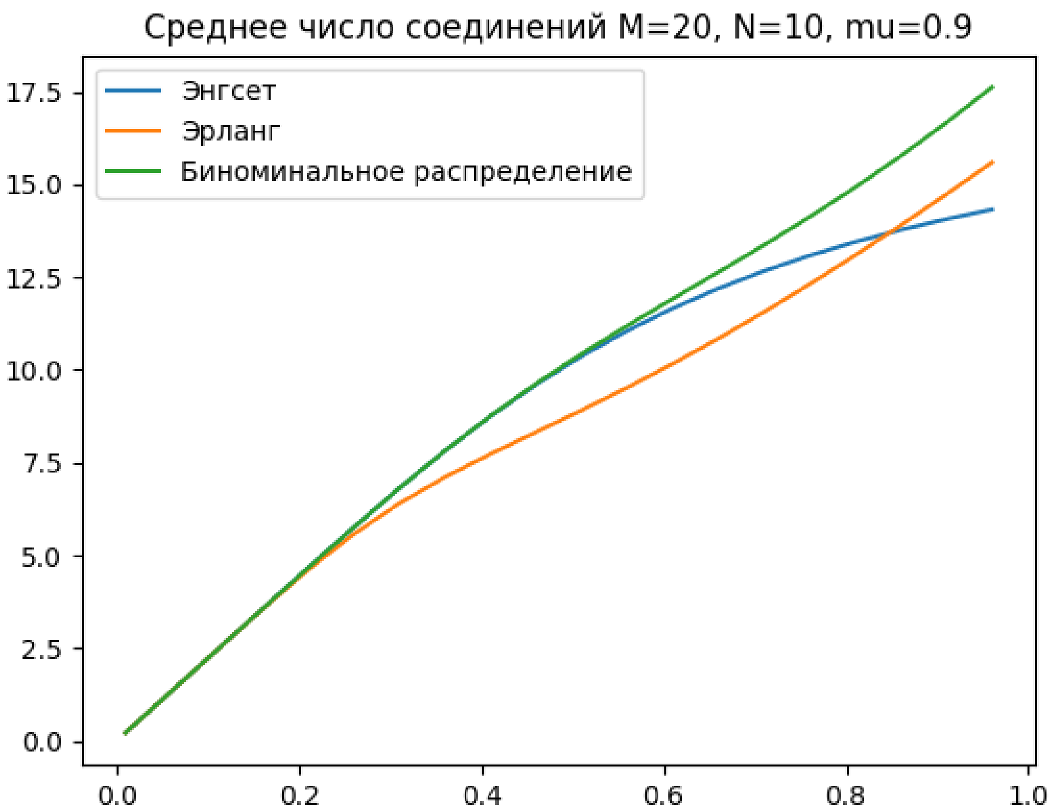

Среднее число соединений M=20, N=10, mu=0.9
Энгсет
Эрланг
Биноминальное распределение
17.5
15.0
12.5
10.0
7.5
5.0
2.5
0.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Рис. 6:

### 6.3 $M \gg N$

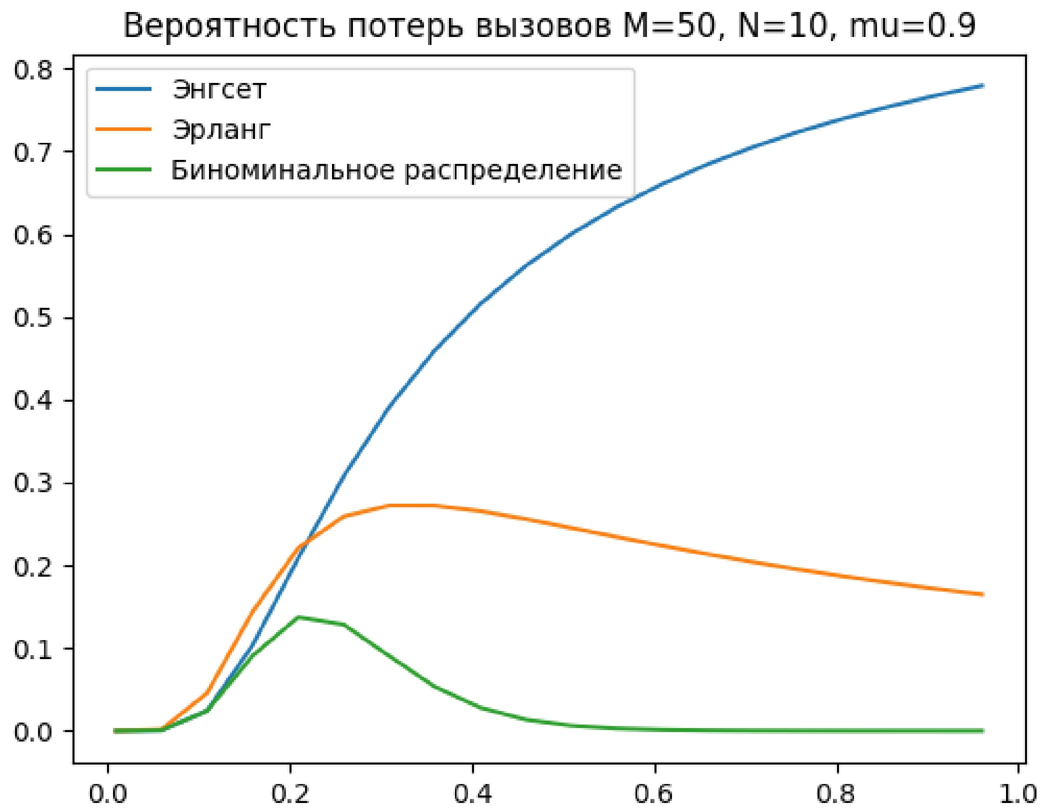

Вероятность потерь вызовов M=50, N=10, mu=0.9
Энгсет
Эрланг
Биноминальное распределение
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Рис. 7:

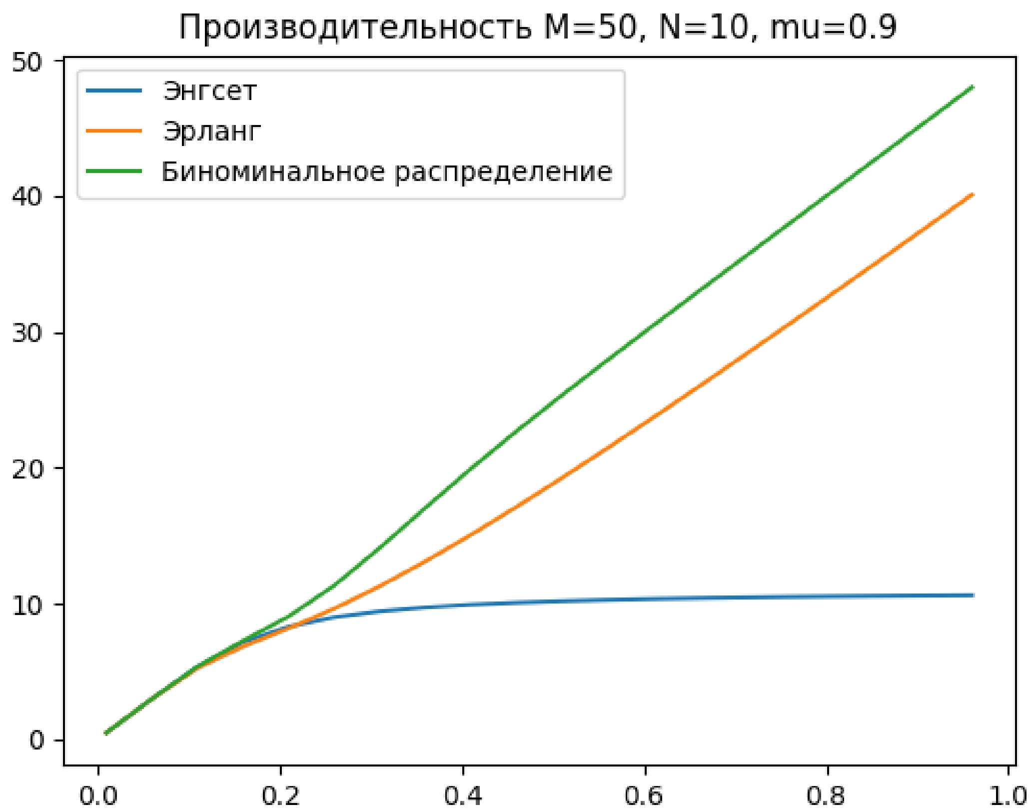

Производительность M=50, N=10, mu=0.9
Энгсет
Эрланг
Биноминальное распределение
0
10
20
30
40
50
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Рис. 8:

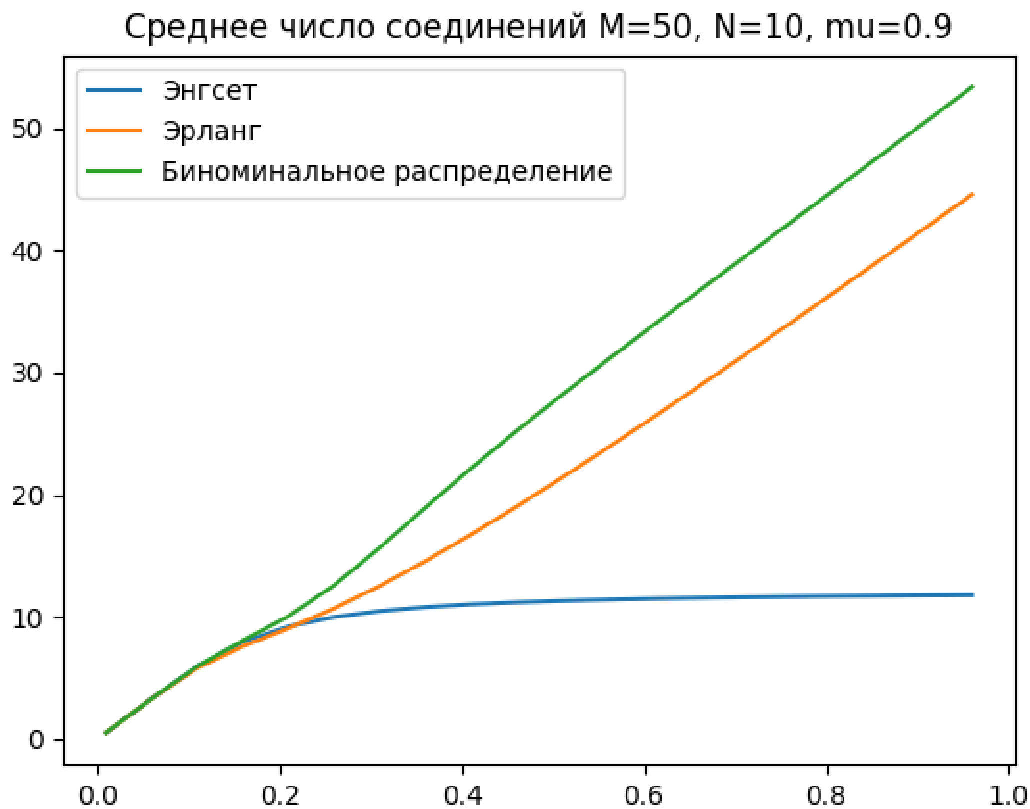

Среднее число соединений M=50, N=10, mu=0.9
Энгсет
Эрланг
Биноминальное распределение
0
10
20
30
40
50
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Рис. 9:

## 6.4 Вывод

При исследовании зависимости параметров коммутационной системы от интенсивности поступления нагрузки были получены следующие выводы:

- При $M = N$:
  - Наименьшая вероятность потерь вызовов с вероятностью поступления вызовов по распределению Эрланга или Биномиальному распределению
  - Чем выше коэффициент интенсивности ухода потока нагрузки, тем лучше результат.
- При $M \gg N$
  - Наибольшая производительность системы
  - Наиболее эффективный результат дает распределение Энгсета и Биномиальное распределение, $\mu$ при этом не имеет существенного влияния.
  - Среднее число соединений в системе также имеет наибольшее значение при наименьшем значении $\mu$, с подчинением закону распределения Энгсета и Биномиальному

Параметры коммутатора во многом зависят от:

- Закона распределения вероятностей поступающих заявок в систему
- $\lambda$
- $\mu$
- $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

Для каждого конкретного случая необходимо учитывать все эти характеристики в совокупности для получения требуемых параметров системы.

# 7 Задача 2. Зависимость параметров от $\mu$

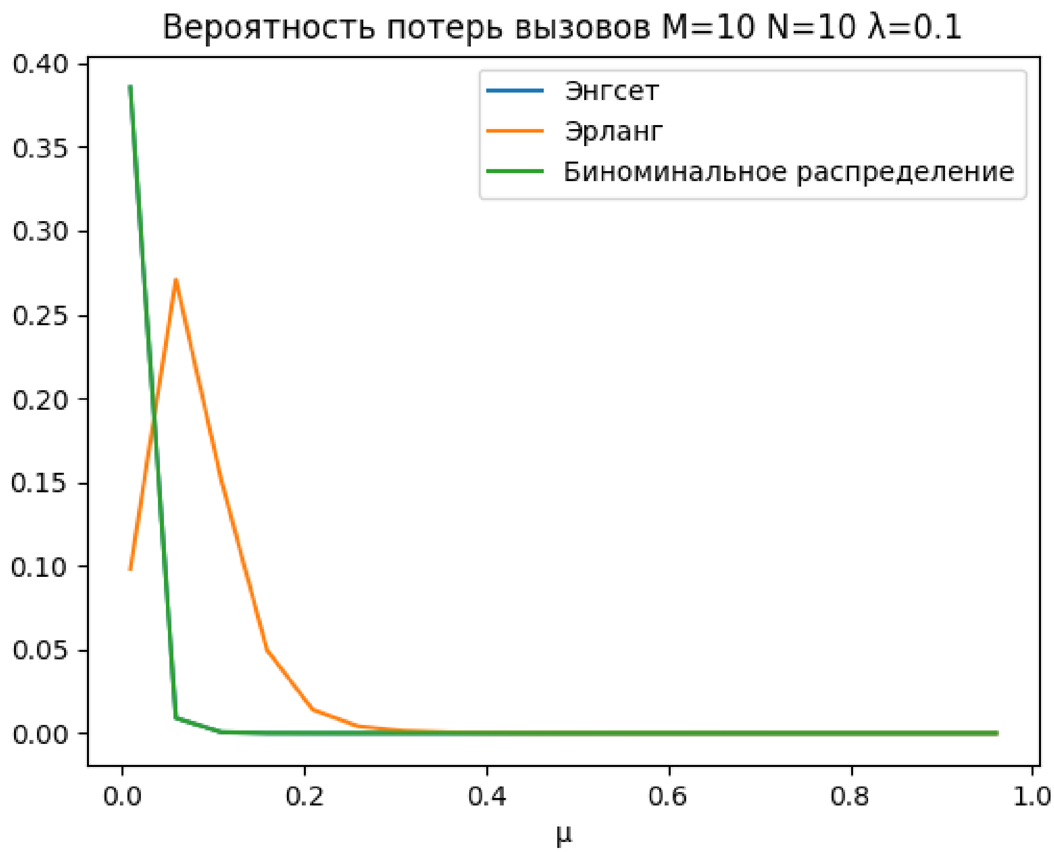

Вероятность потерь вызовов M=10 N=10 λ=0.1
0.40
0.35
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
μ
Энгсет
Эрланг
Биноминальное распределение

Рис. 10:

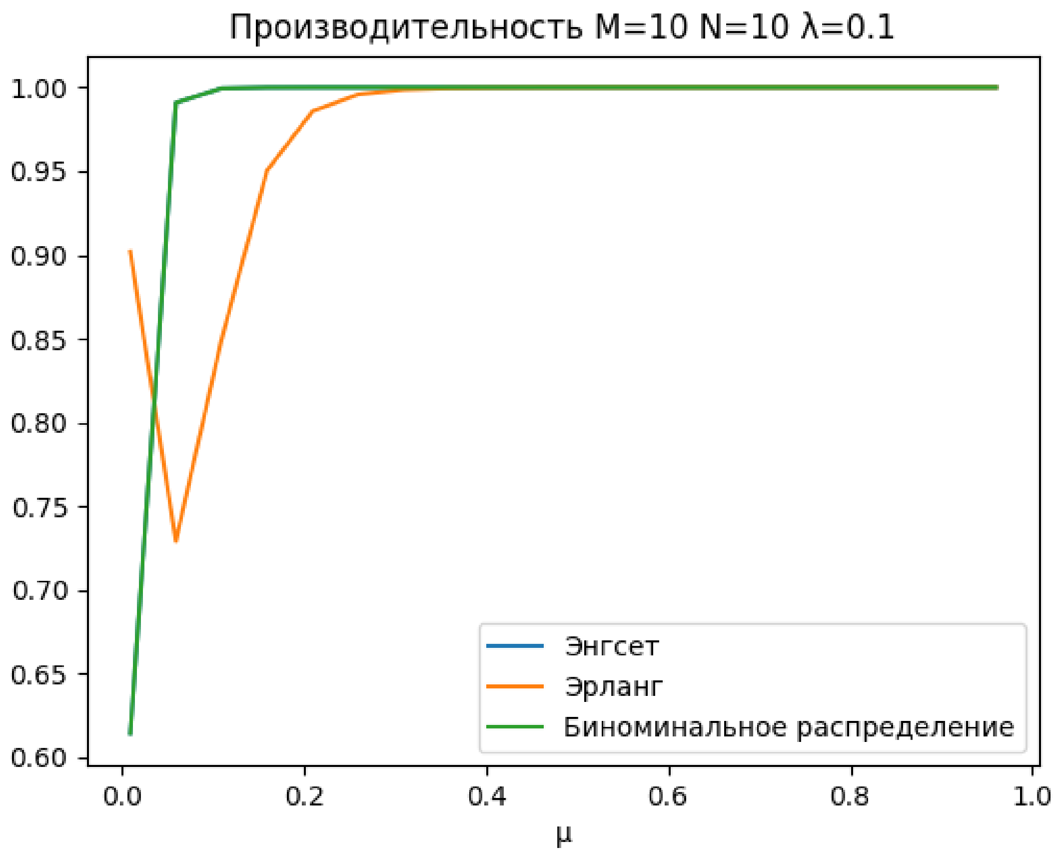

Производительность M=10 N=10 λ=0.1
1.00
0.95
0.90
0.85
0.80
0.75
0.70
0.65
0.60
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
μ
Энгсет
Эрланг
Биноминальное распределение

Рис. 11:

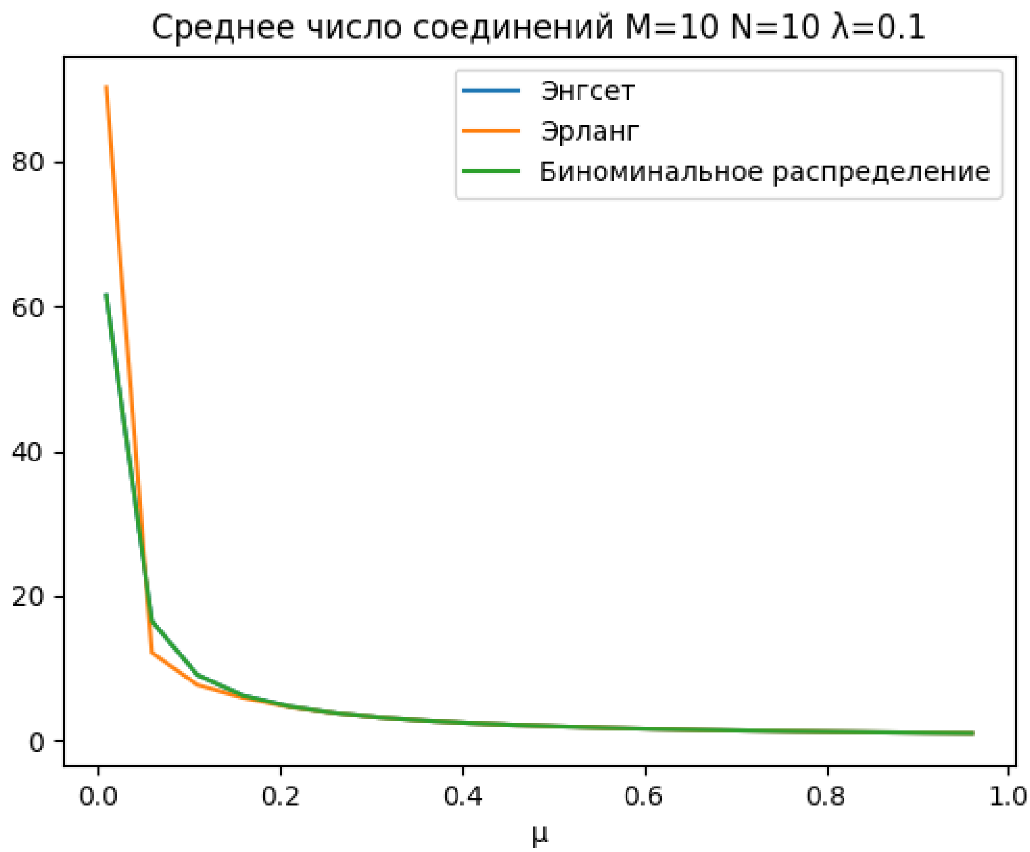

Среднее число соединений M=10 N=10 λ=0.1
Энгсет
Эрланг
Биноминальное распределение
80
60
40
20
0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
μ

Рис. 12:

## 7.1 $M > N$

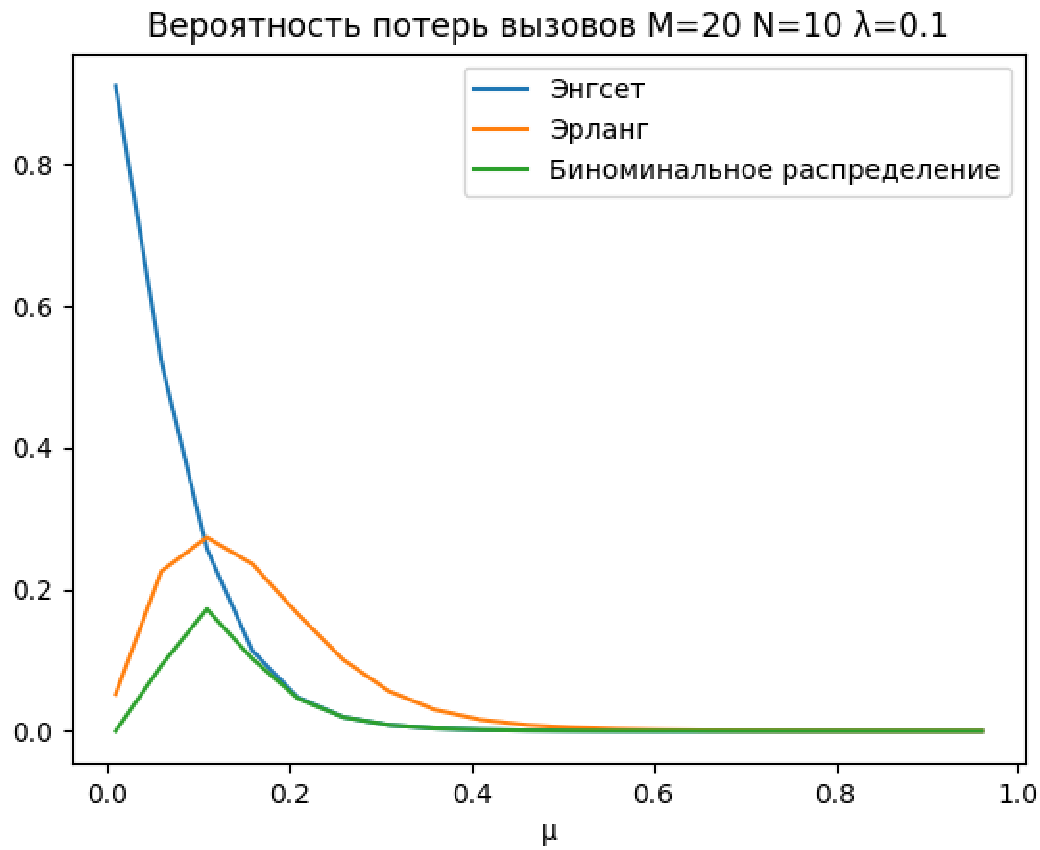

Вероятность потерь вызовов M=20 N=10 λ=0.1
Энгсет
Эрланг
Биноминальное распределение
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
μ

Рис. 13:

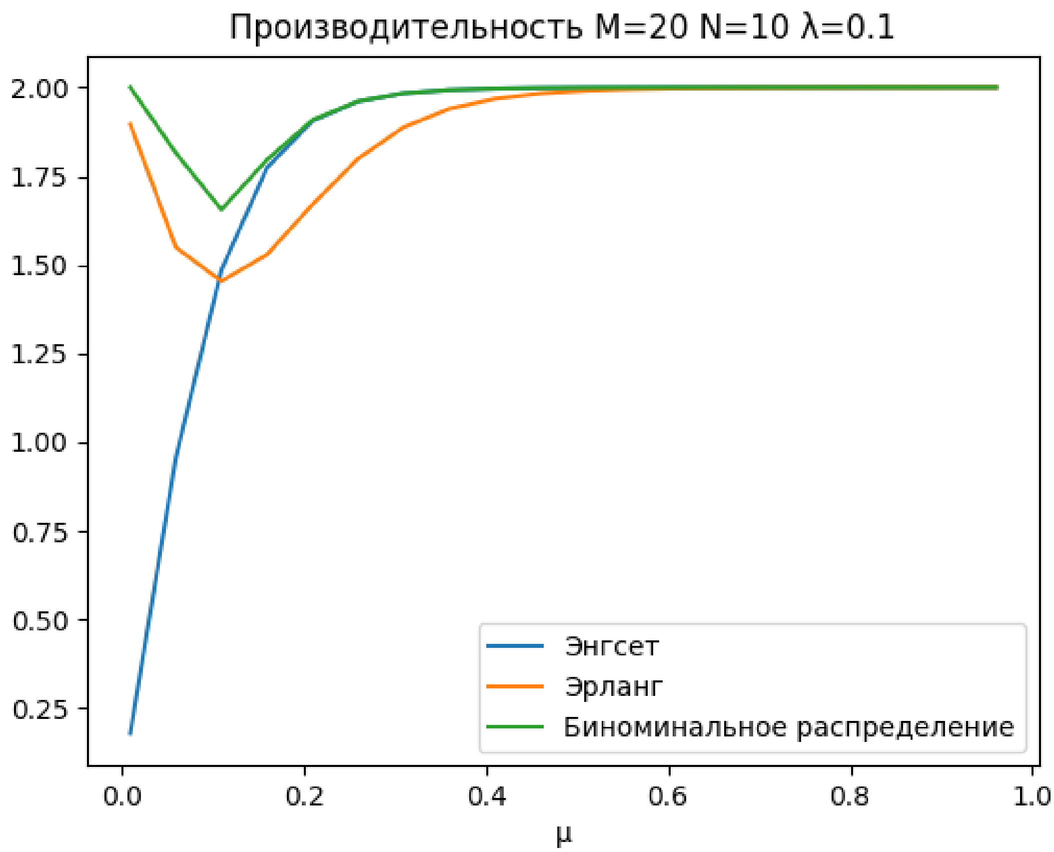

Производительность M=20 N=10 λ=0.1
2.00
1.75
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
μ
Энгсет
Эрланг
Биноминальное распределение

Рис. 14:

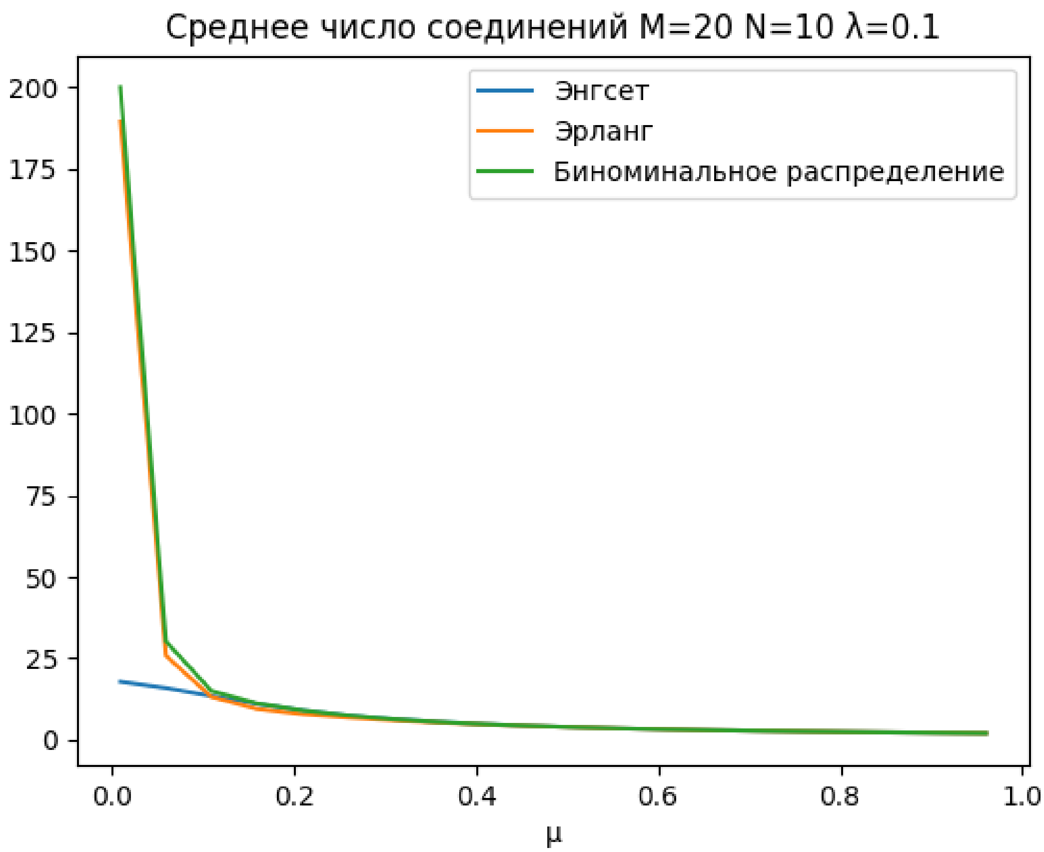

Среднее число соединений M=20 N=10 λ=0.1
Энгсет
Эрланг
Биноминальное распределение
200
175
150
125
100
75
50
25
0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
μ

Рис. 15:

## 7.2 $M \gg N$

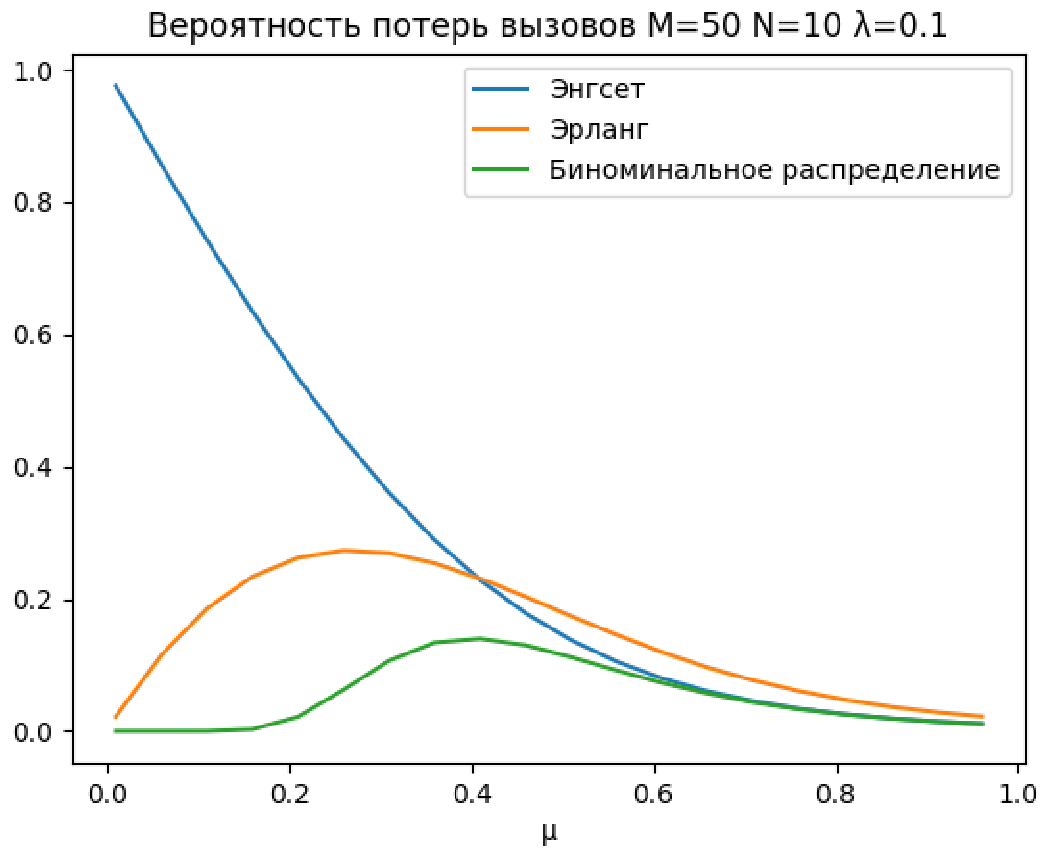



Рис. 16:

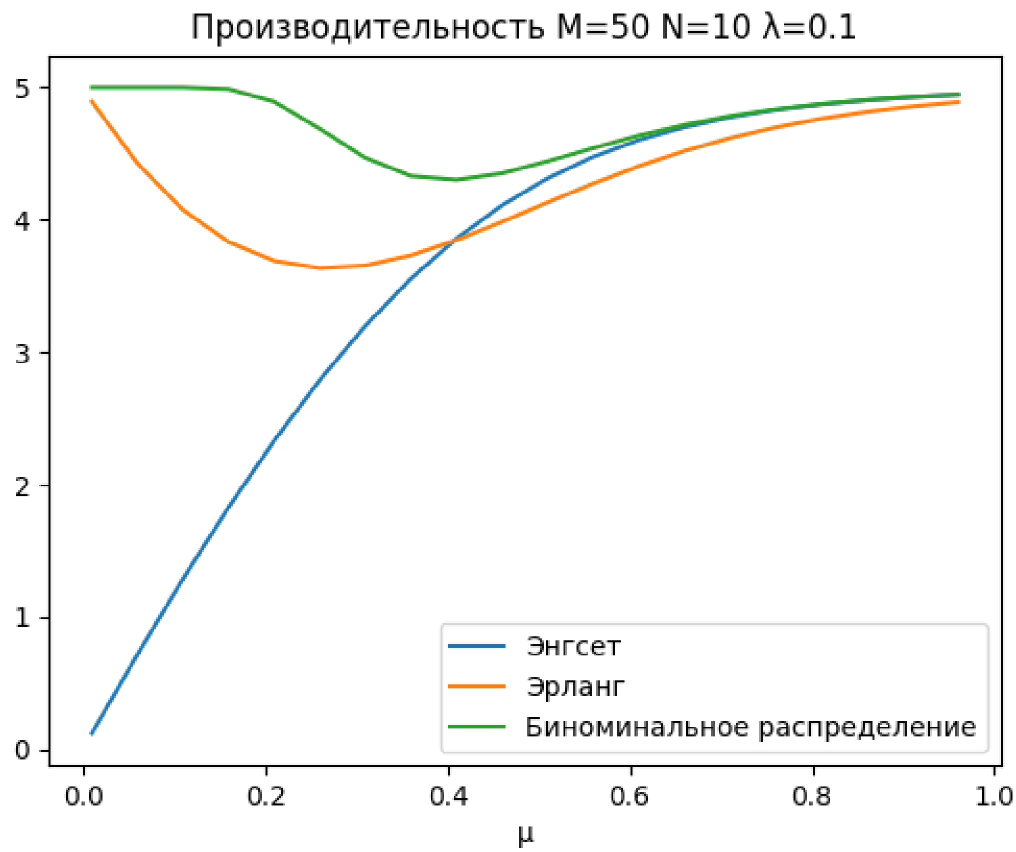

Производительность M=50 N=10 λ=0.1
5
4
3
2
1
0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
μ
Энгсет
Эрланг
Биноминальное распределение

Рис. 17:

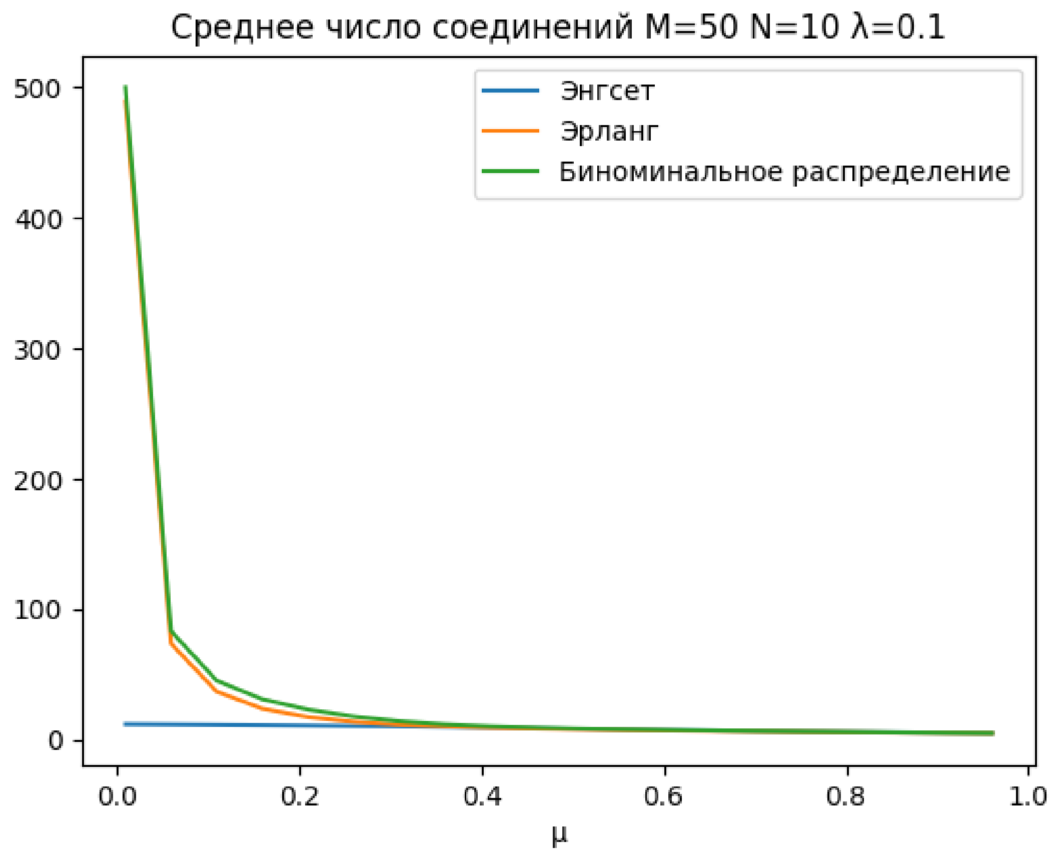

Среднее число соединений M=50 N=10 λ=0.1
Энгсет
Эрланг
Биноминальное распределение
500
400
300
200
100
0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
μ

Рис. 18:

### 7.3 Вывод

Будет

# 8 Задача 3. Зависимость параметров от $\rho$

## 8.1 $M = N$

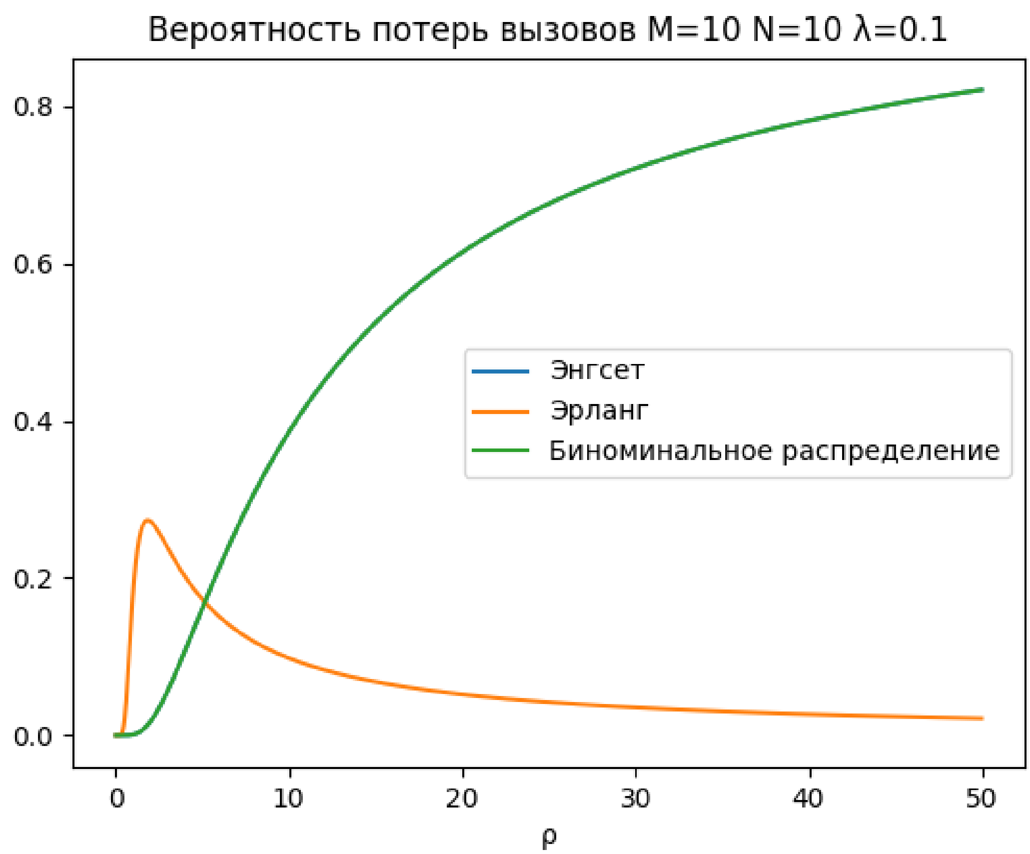



Рис. 19:

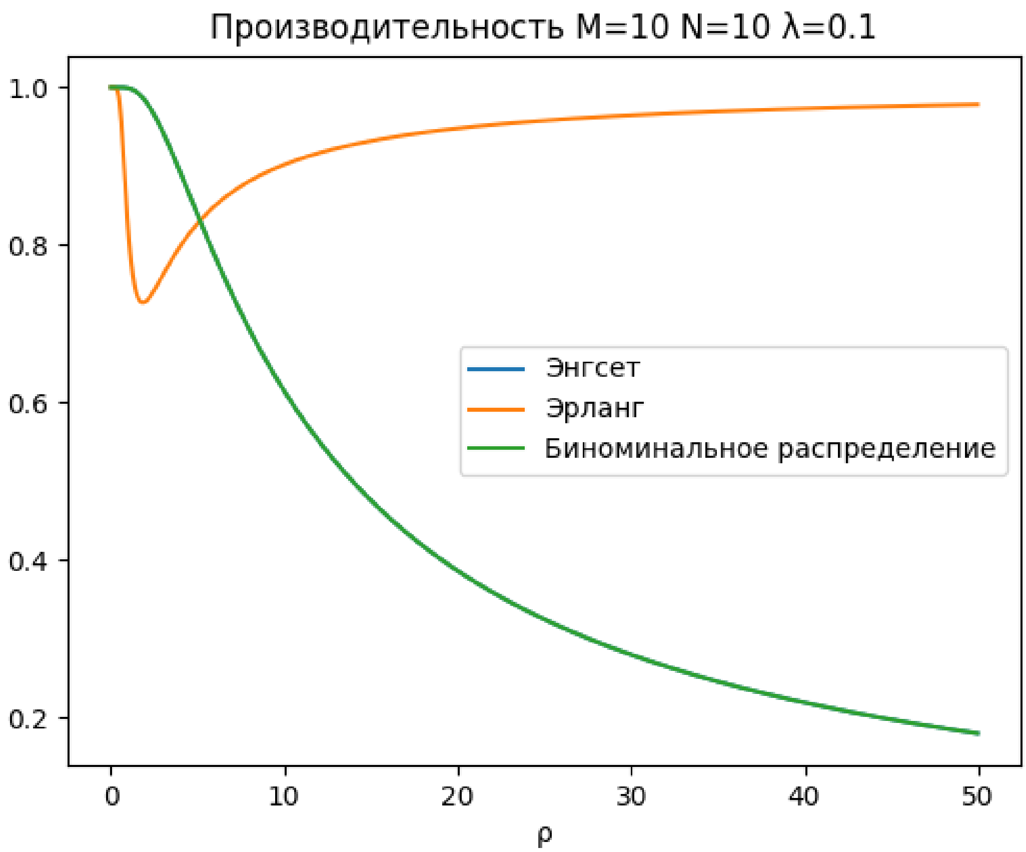

Производительность M=10 N=10 λ=0.1
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
10
20
30
40
50
ρ
Энгсет
Эрланг
Биноминальное распределение

Рис. 20:

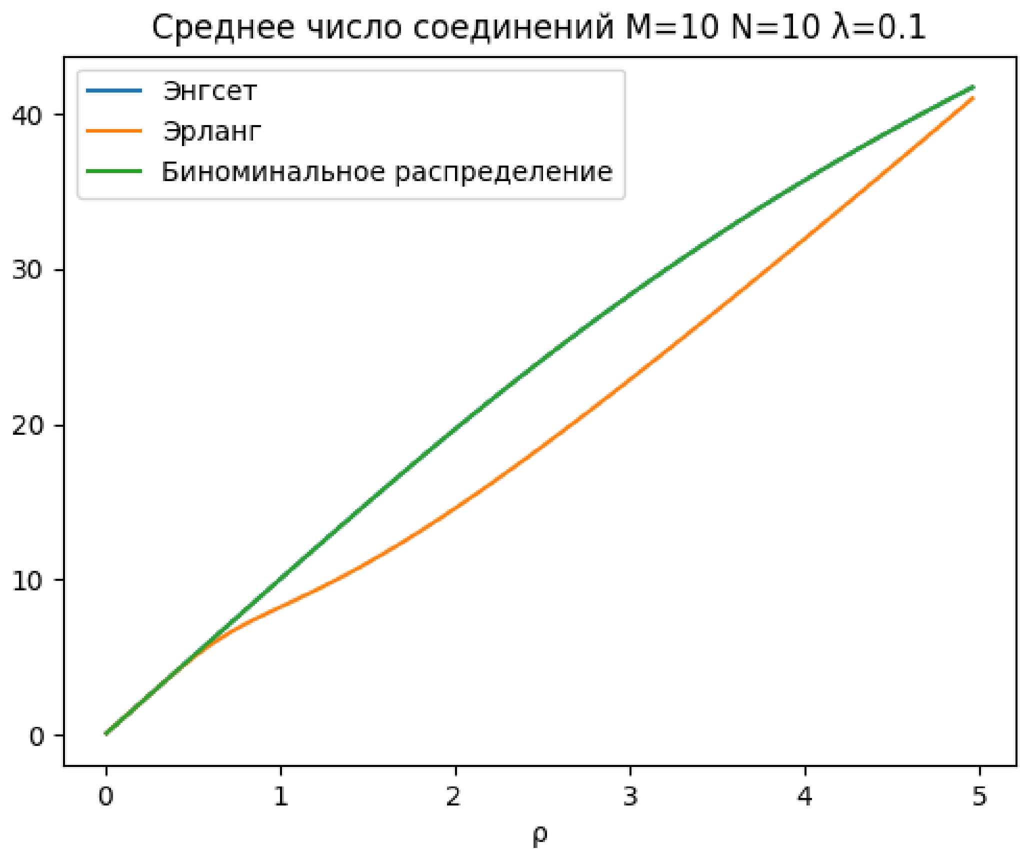
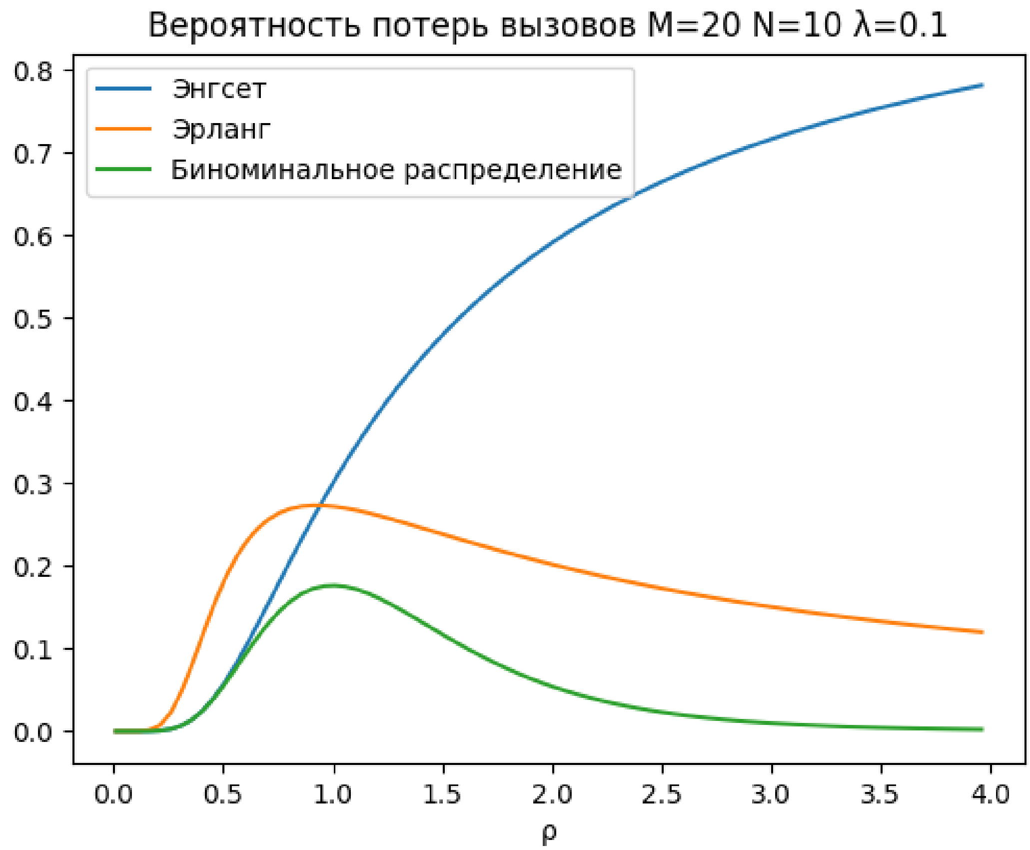

Среднее число соединений M=10 N=10 λ=0.1
Энгсет
Эрланг
Биноминальное распределение
0
10
20
30
40
0
1
2
3
4
5
ρ

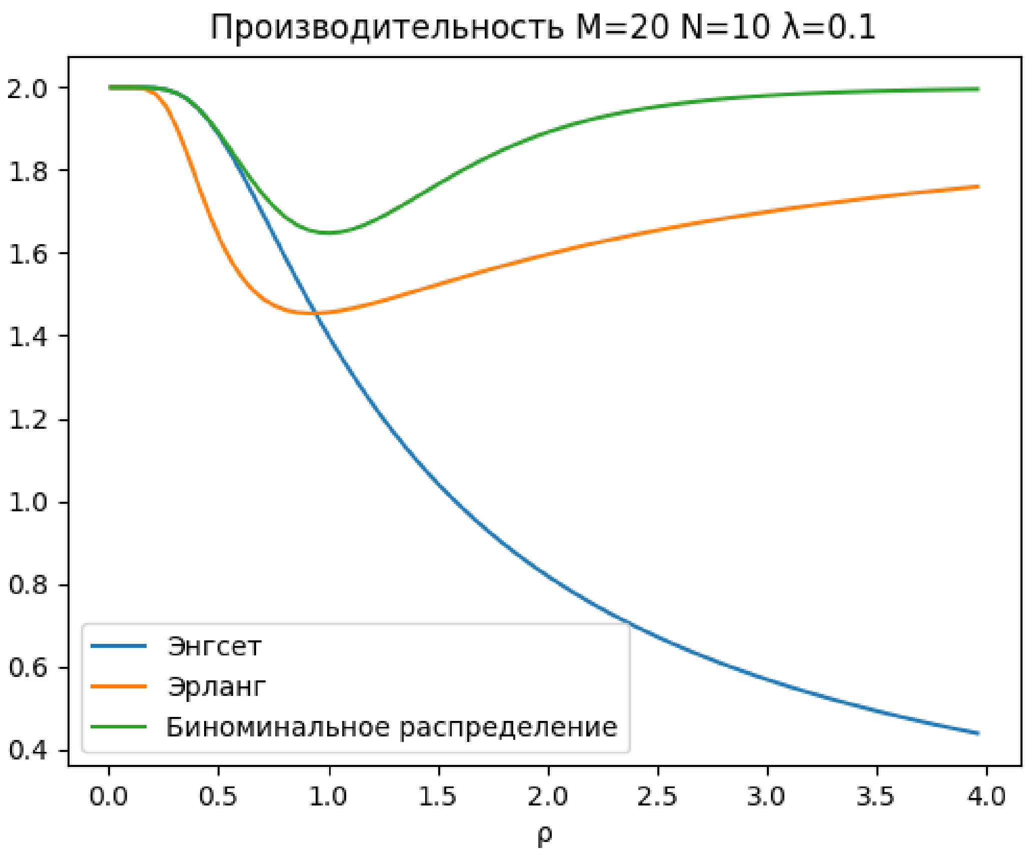
Рис. 21:

## 8.2 $M > N$



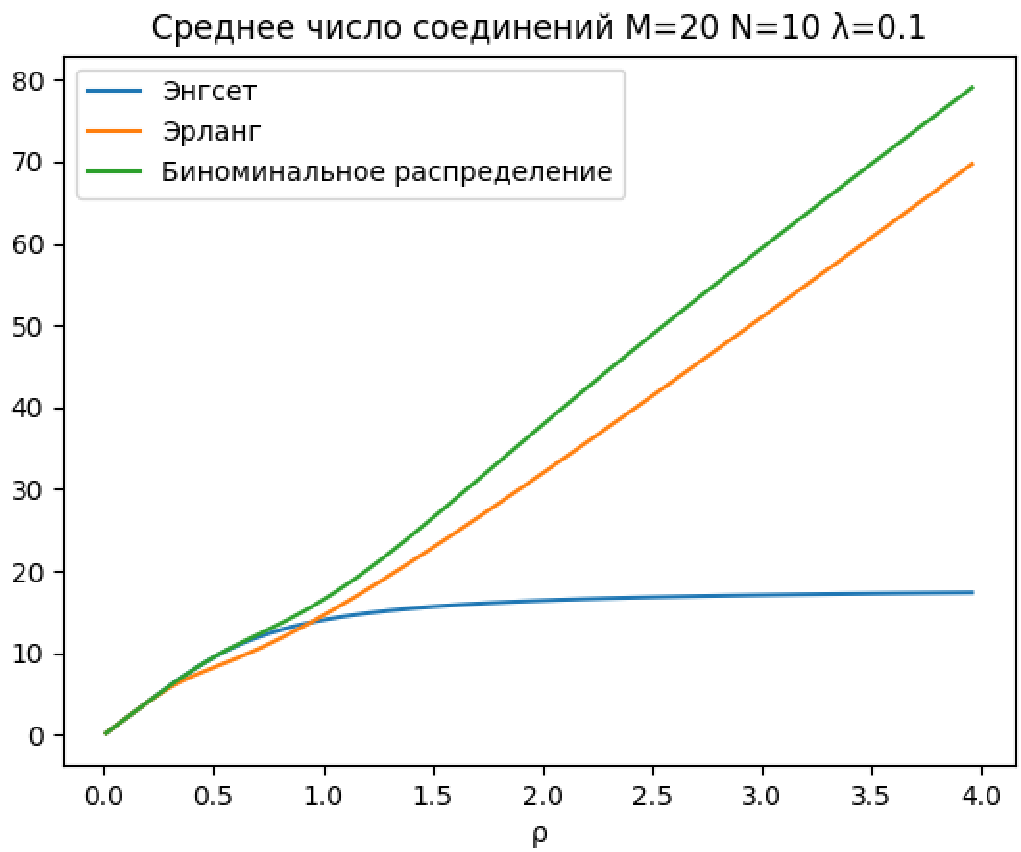
Вероятность потерь вызовов M=20 N=10 λ=0.1
Энгсет
Эрланг
Биноминальное распределение
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0
ρ


Рис. 22:



Производительность M=20 N=10 λ=0.1
2.0
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0
ρ
Энгсет
Эрланг
Биноминальное распределение


Рис. 23:



Среднее число соединений M=20 N=10 λ=0.1
Энгсет
Эрланг
Биноминальное распределение
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0
ρ


Рис. 24:

## 8.3 $M \gg N$

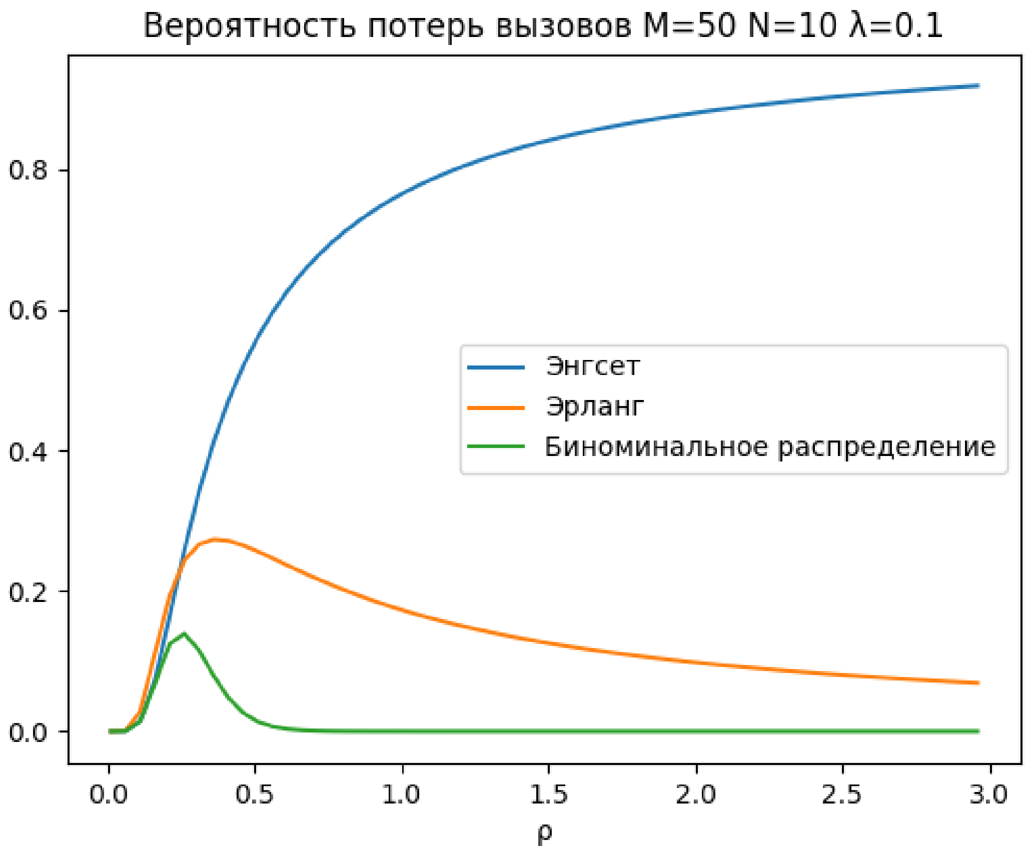



Рис. 25:

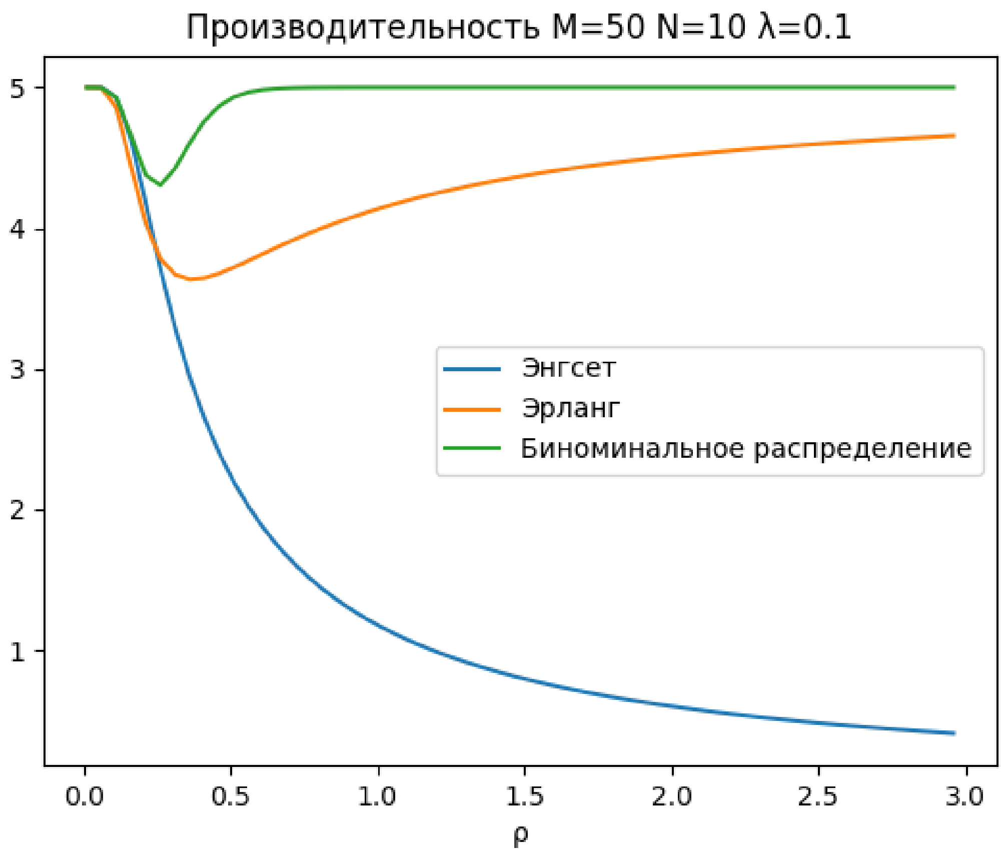
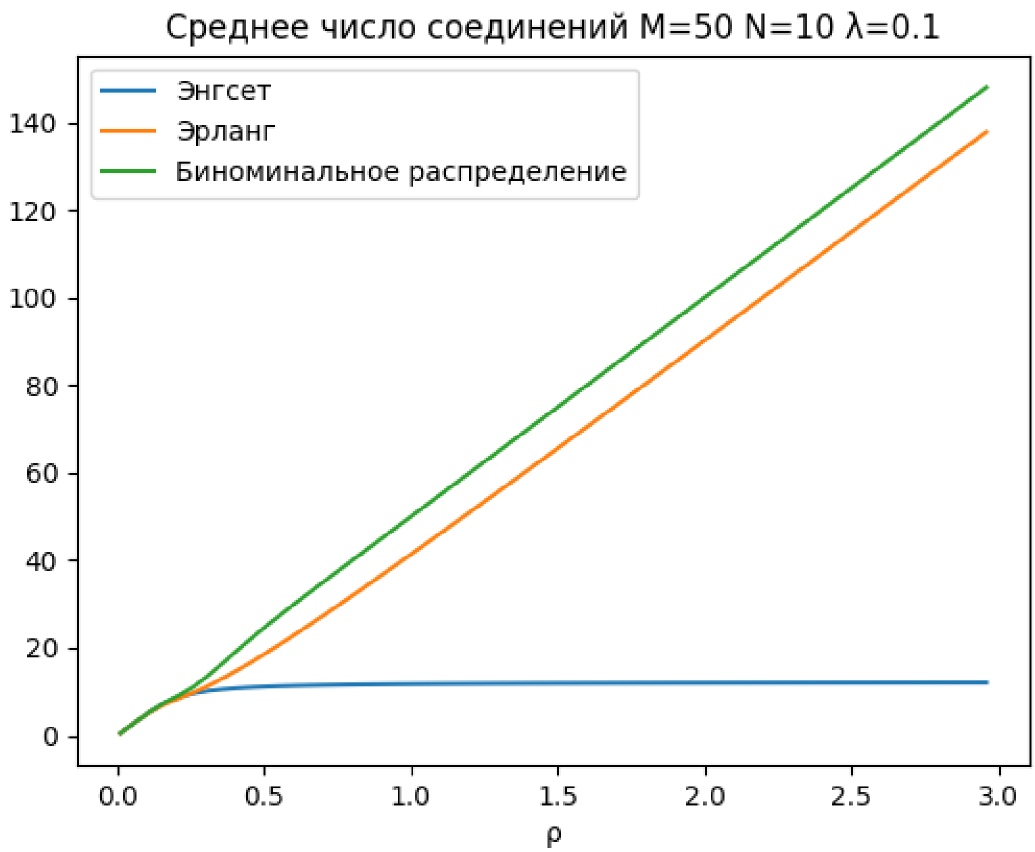

Производительность M=50 N=10 λ=0.1
5
4
3
2
1
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
ρ
Энгсет
Эрланг
Биноминальное распределение

Рис. 26:



Среднее число соединений M=50 N=10 λ=0.1
Энгсет
Эрланг
Биноминальное распределение
140
120
100
80
60
40
20
0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
ρ


Рис. 27:

### 8.4 Вывод

Будет

## 9 Задача 4. Зависимость параметров от $k = \frac{N}{M}$. Заменена зависимостью от $N$ при фиксированном $M$

### 9.1 $M = N$

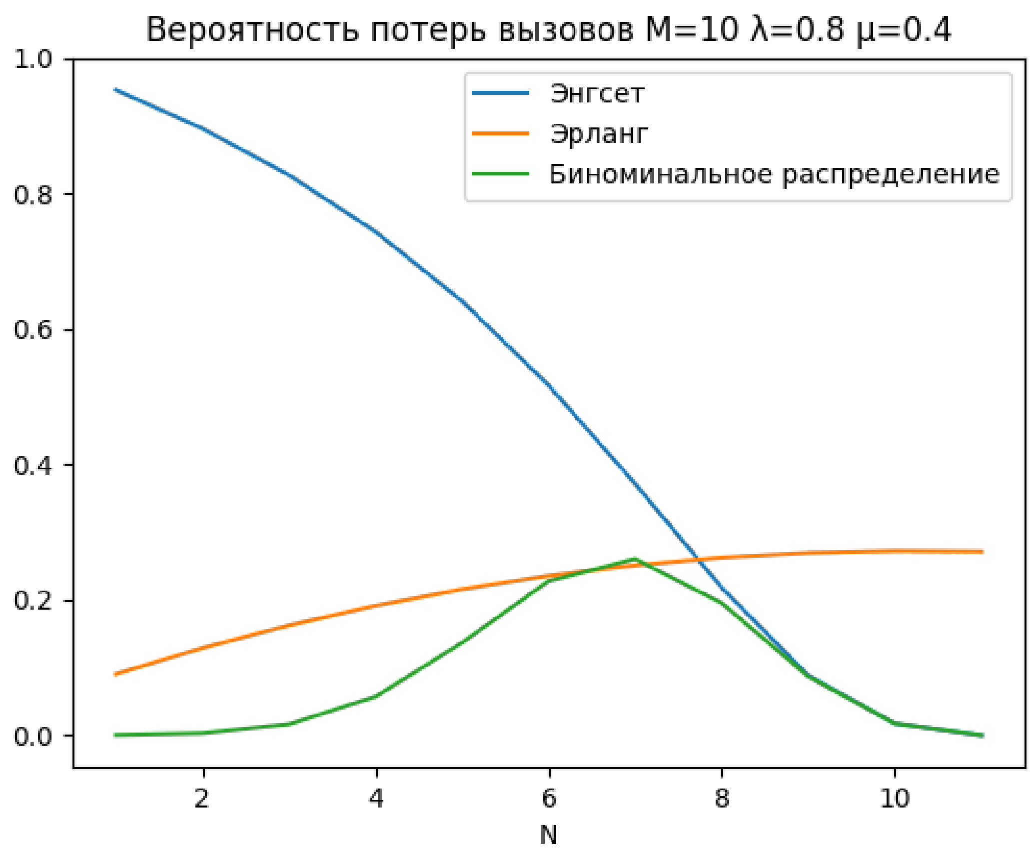



Рис. 28:

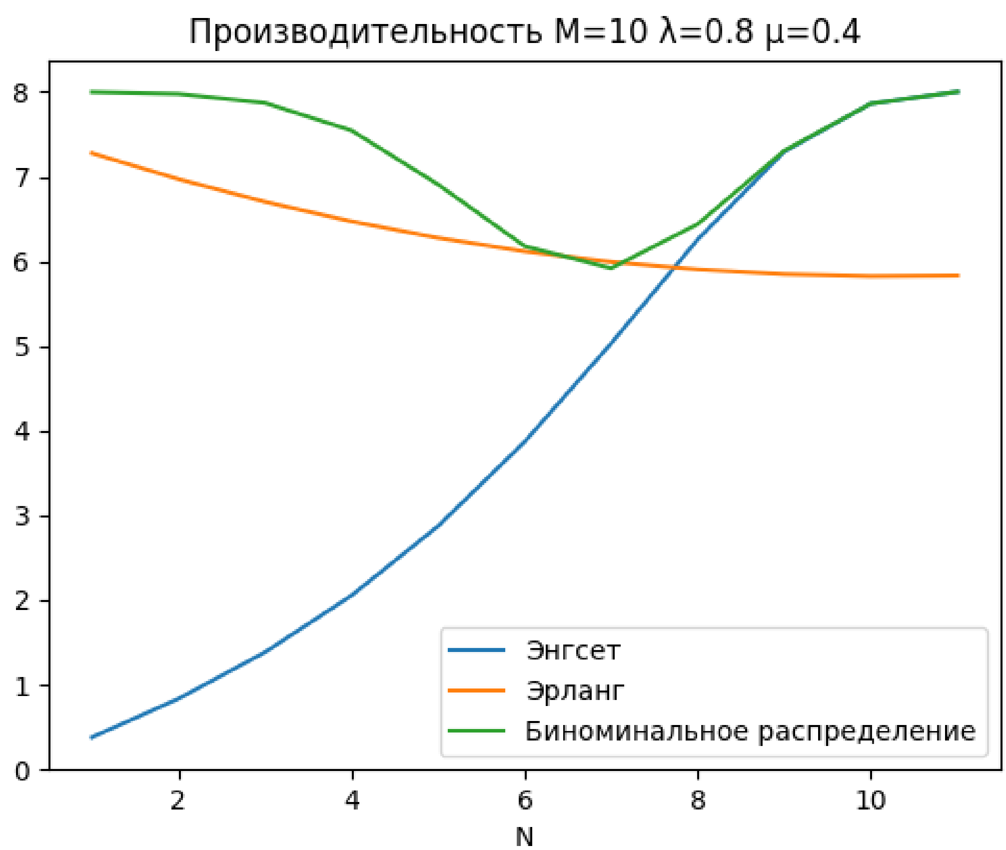

Производительность M=10 λ=0.8 μ=0.4
Энгсет
Эрланг
Биноминальное распределение
N
0
1
2
3
4
5
6
7
8
2
4
6
8
10

Рис. 29:

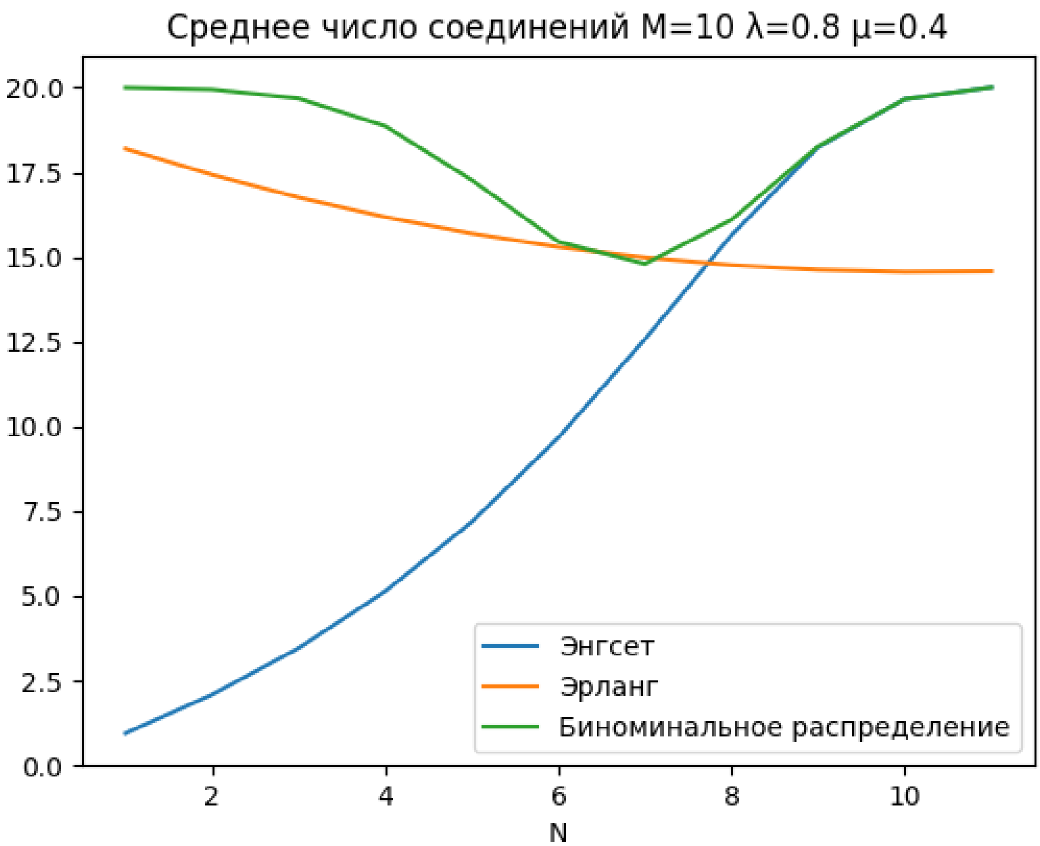

Среднее число соединений M=10 λ=0.8 μ=0.4
20.0
17.5
15.0
12.5
10.0
7.5
5.0
2.5
0.0
2
4
6
8
10
N
Энгсет
Эрланг
Биноминальное распределение

Рис. 30:

## 9.2 $M > N$

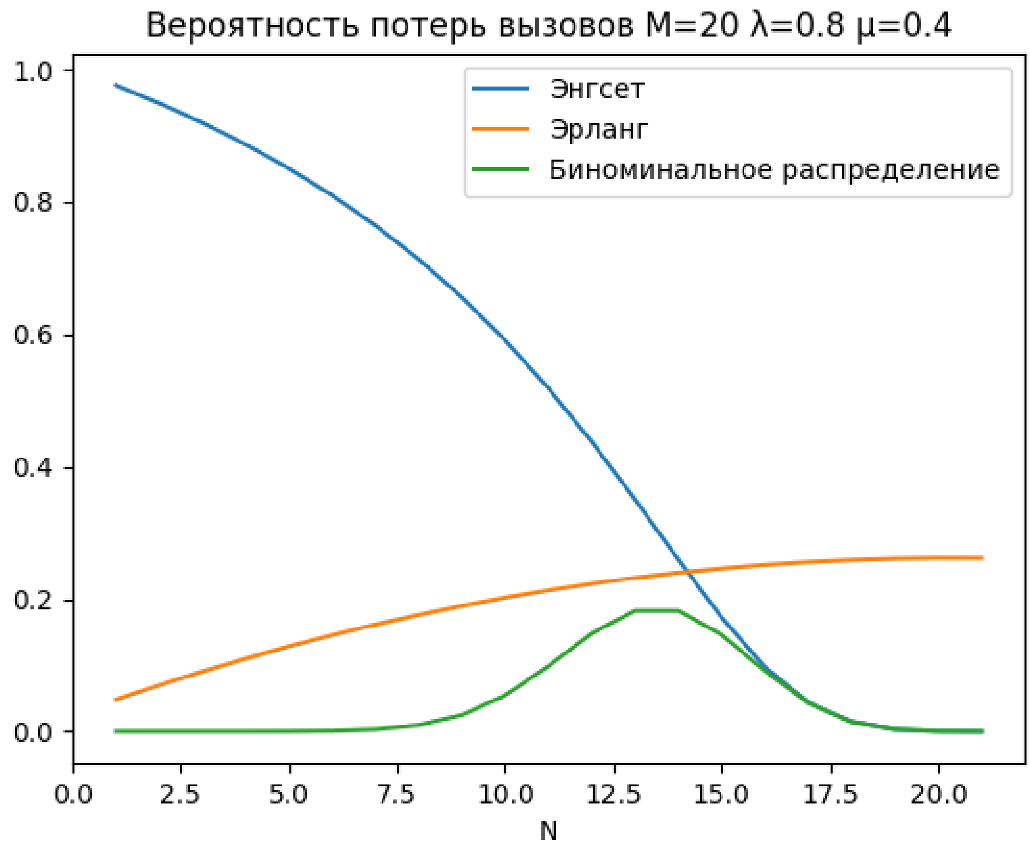

Вероятность потерь вызовов M=20 λ=0.8 μ=0.4
Энгсет
Эрланг
Биноминальное распределение
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0
N

Рис. 31:

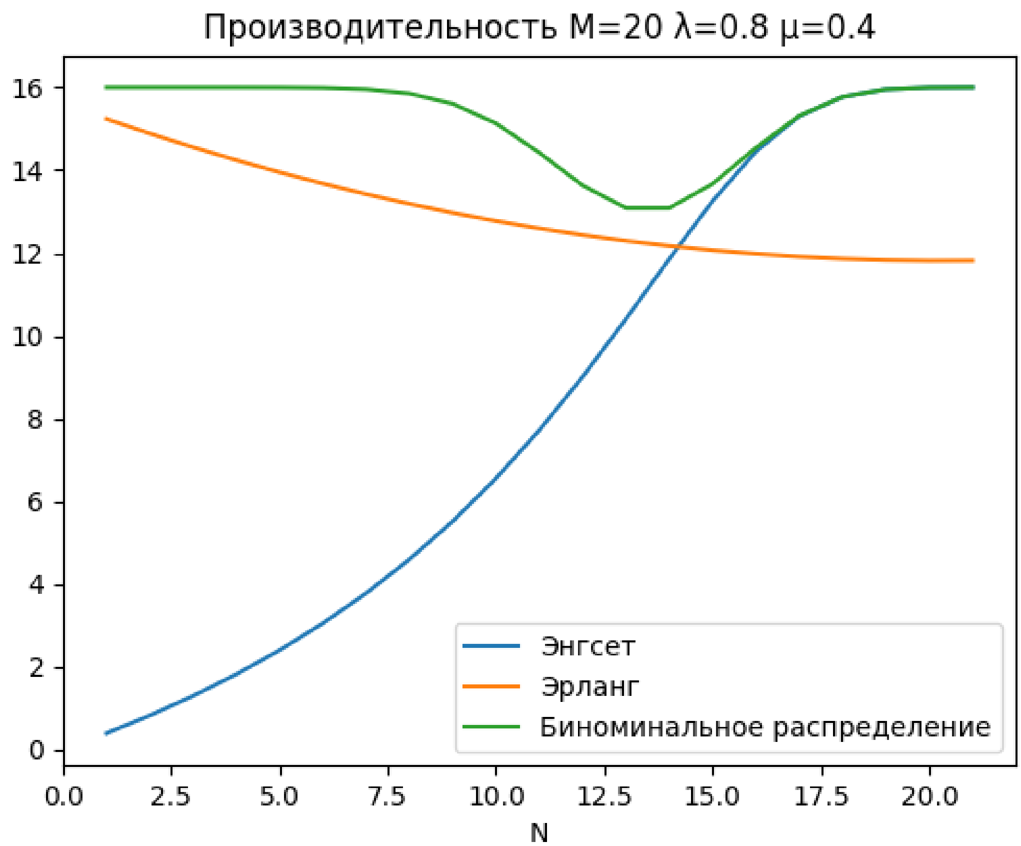

Производительность M=20 λ=0.8 μ=0.4
16
14
12
10
8
6
4
2
0
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0
N
Энгсет
Эрланг
Биноминальное распределение

Рис. 32:

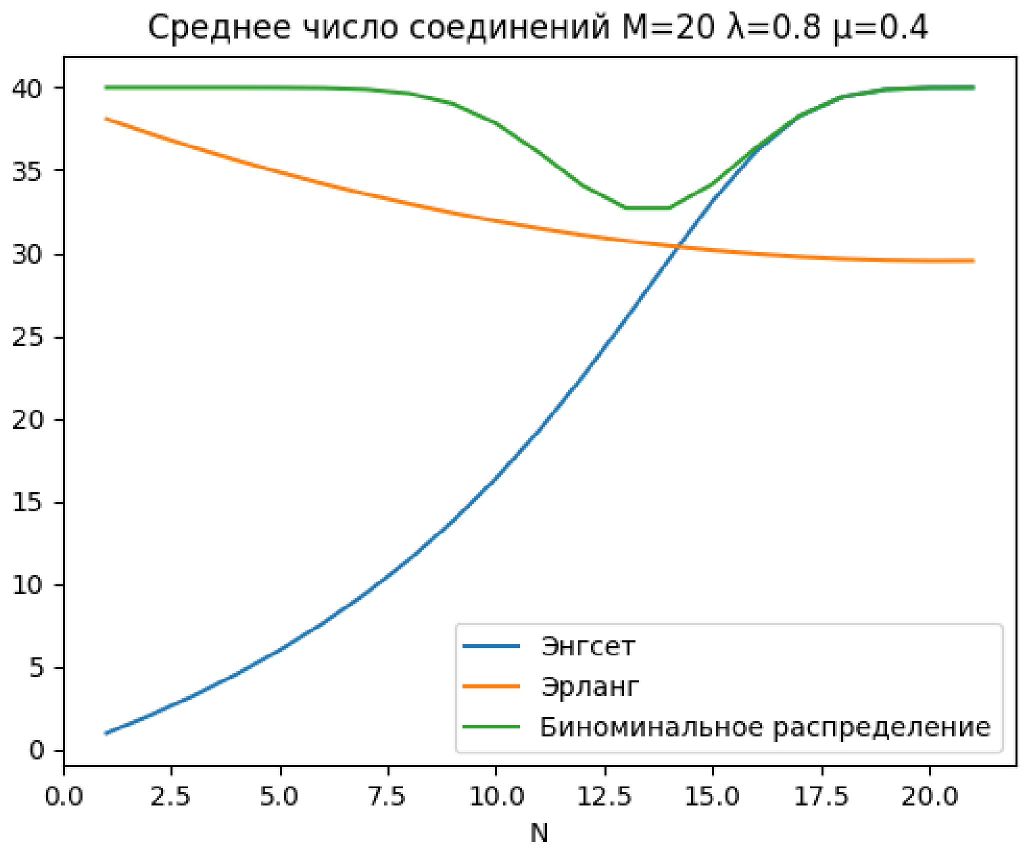

Среднее число соединений M=20 λ=0.8 μ=0.4
40
35
30
25
20
15
10
5
0
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0
N
Энгсет
Эрланг
Биноминальное распределение

Рис. 33:

## 9.3 $M \gg N$

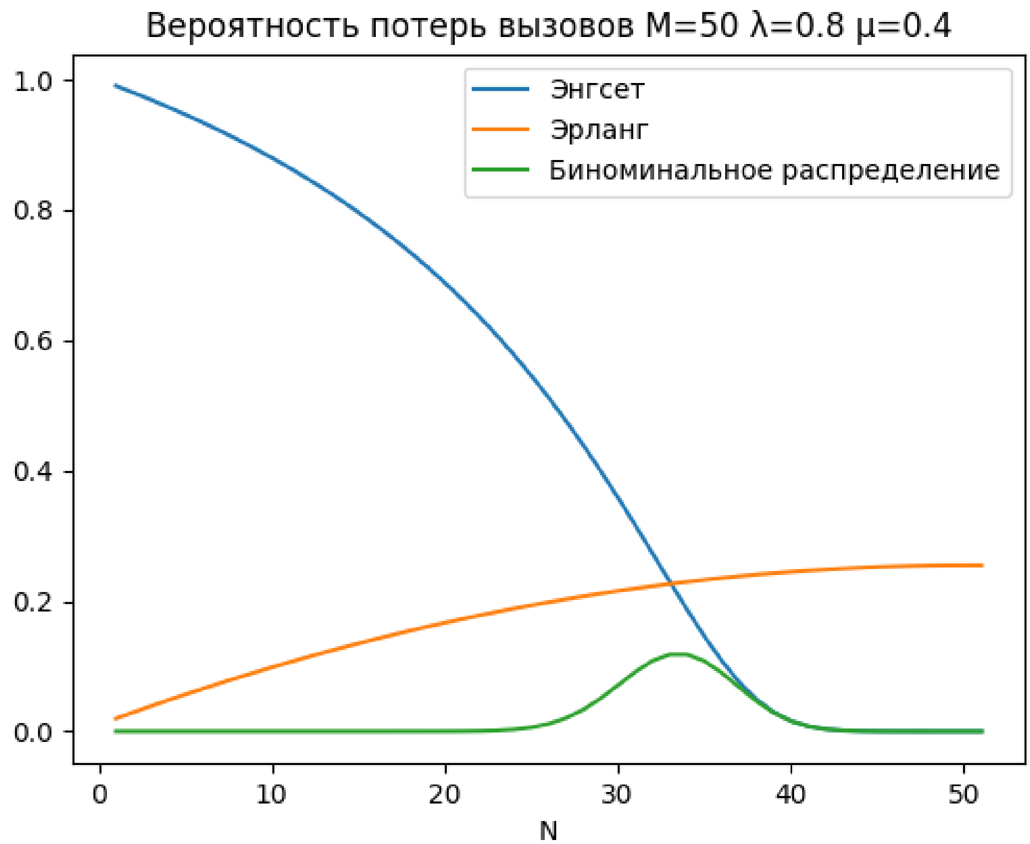



Рис. 34:

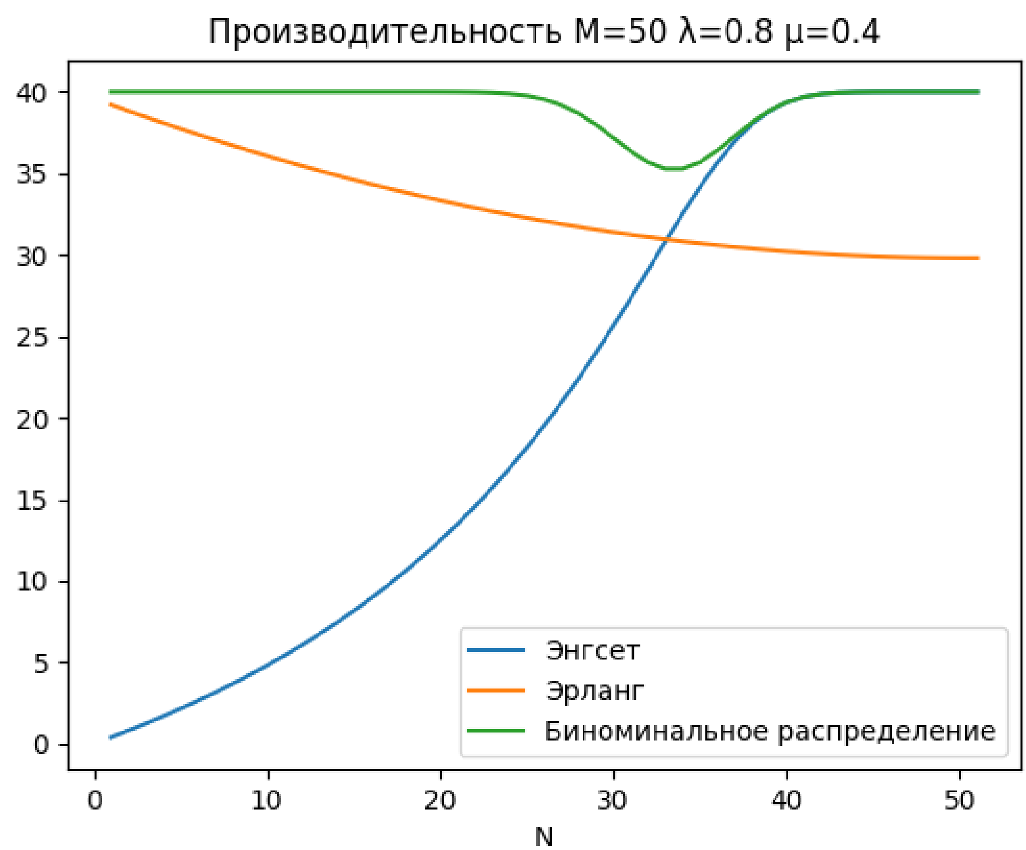

Производительность M=50 λ=0.8 μ=0.4
40
35
30
25
20
15
10
5
0
0
10
20
30
40
50
N
Энгсет
Эрланг
Биноминальное распределение

Рис. 35:

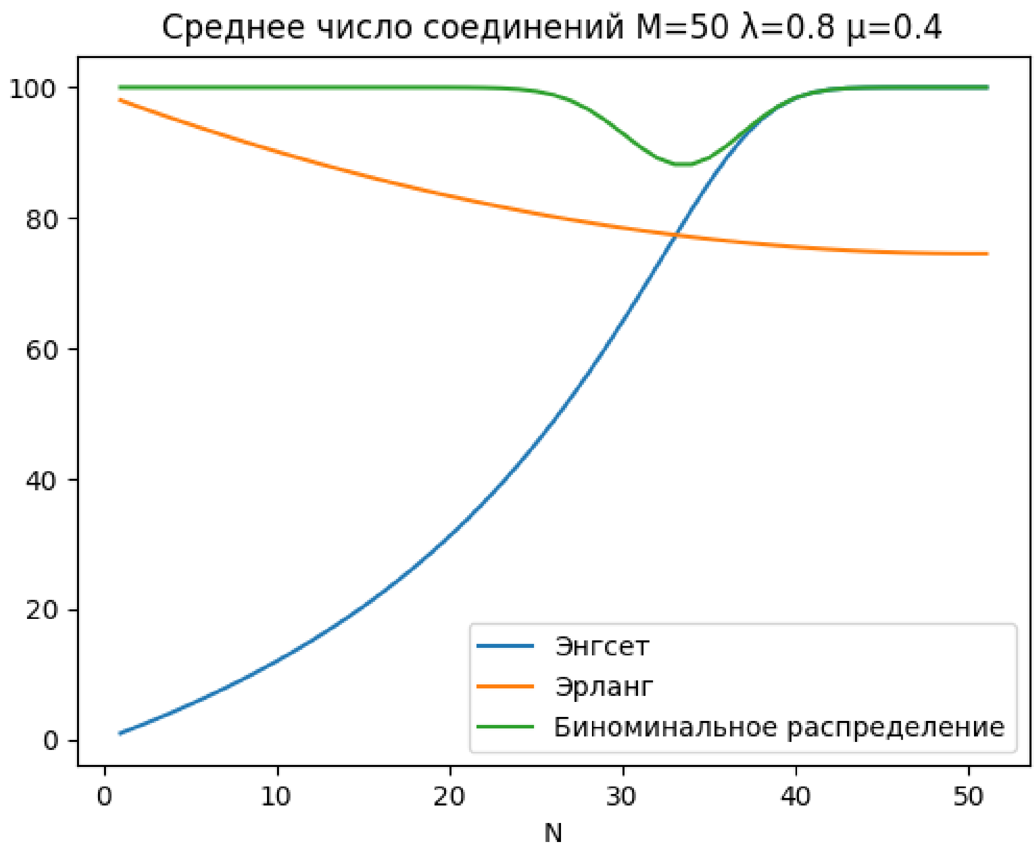

Среднее число соединений M=50 λ=0.8 μ=0.4
100
80
60
40
20
0
0
10
20
30
40
50
N
Энгсет
Эрланг
Биноминальное распределение

Рис. 36:

## 9.4 Вывод

Будет