Современные методы обработки сигналов

Лабораторная работа 1

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

1.1. Цель работы

Большинство сигналов, подвергающихся обработке, имеет непериодический характер. Особенностью гармонического анализа непериодических сигналов является то, что связь между временной функцией $x(t)$ и ее образом $X(j\omega)$ в области частот определяется интегральными соотношениями, составляющими пару преобразований Фурье.

Целью работы является изучение прямого и обратного преобразований Фурье и приобретение практических навыков их использования для расчета спектральной характеристики $X(j\omega)$ сигнала $x(t)$ и восстановления функции $x(t)$ по спектральной характеристике $X(j\omega)$.

1.2. Основные понятия и расчетные формулы

Пусть непериодический сигнал описывается функцией времени $x(t)$, заданной на интервале (t_1, t_2) (рис. 1.1,*а*). Для функции выполняется условие абсолютной интегрируемости:

$$\int_{t_1}^{t_2} |\,x(t)\,|\,dt = M < \infty . \qquad (1.1)$$

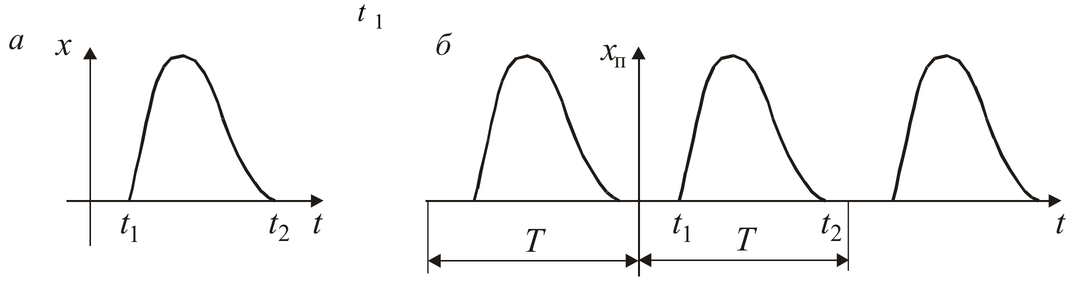


Рис. 1.1. Образование вспомогательной периодической функции:
а – непериодическая функция; *б* – периодическая функция

Путем повторения функции $x(t)$ с периодом $T > t_2 - t_1$ образуем вспомогательную периодическую функцию

$$x_\Pi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - kT) . \qquad (1.2)$$

Фрагмент функции $x_\Pi(t)$ показан на рис. 5.1,*б*. Очевидно, что

$$x(t) = \lim_{T \to \infty} x_\Pi(t) . \qquad (1.3)$$

Периодическую функцию $x_{\text{п}}(t)$ можно описать с помощью ряда Фурье в комплексной форме:

$$x_{\text{п}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{j n \omega_1 t}, \tag{1.4}$$

где $\omega_1 = 2\pi/T$, а коэффициенты c_n рассчитываются по формуле

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} x_{\text{п}}(t) \, e^{-j n \omega_1 t} \, dt. \tag{1.5}$$

Подставив (1.5) в (1.4) и заменив $T = 2\pi/\omega_1$, получим

$$x_{\text{п}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} x_{\text{п}}(\tau) \, e^{-j n \omega_1 t} \, d\tau \right] e^{j n \omega_1 t} \, \omega_1. \tag{1.6}$$

В пределе при $T \to \infty$ угловая частота $\omega_1 = 2\pi/T$ превращается в бесконечно малое приращение частоты $d\omega$, частота n-й составляющей ряда $n\omega_1$ – в текущую частоту ω, а операция суммирования переходит в операцию интегрирования. При этом расстояние между спектральными линиями, равное основной частоте ω_1, становится бесконечно малым, а спектр – сплошным.

Таким образом, при $T \to \infty$ из формулы (1.6) будем иметь

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j \omega t} \left[\int_{t_1}^{t_2} x(\tau) \, e^{-j \omega \tau} \, d\tau \right] d\omega. \tag{1.7}$$

С учетом, что значения t_1 и t_2 не определены, введем обозначение

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \, e^{-j \omega t} \, dt. \tag{1.8}$$

Тогда

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \, e^{j \omega t} \, d\omega. \tag{1.9}$$

Формулы (1.8) и (1.9) устанавливают однозначное соответствие между представлением $x(t)$ сигнала во временной области и его представлением $X(j\omega)$ в области частот. Формула (1.8) осуществляет прямое преобразование и позволяет найти спектральную характеристику $X(j\omega)$, соответствующую сигналу $x(t)$. Символически это записывается следующим образом:

$$X(j\omega) = \Im\{x(t)\}.$$

При известной спектральной характеристике $X(j\omega)$ по формуле (1.9) выполняется обратное преобразование и вычисляется мгновенное значение сигнала $x(t)$. Символически это можно записать так:

$$x(t) = \Im^{-1}\{X(j\omega)\}.$$

Установлено, что сигналу $x(t)$ можно сопоставить его спектральную характеристику $X(j\omega)$ в том случае, если этот сигнал описывается абсолютно интегрируемой функцией, т. е. существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\, x(t)\,|\, dt < \infty.$$

Это условие существенно снижает класс допустимых сигналов. Однако имеются математические приемы, с помощью которых удается получать спектральные характеристики неинтегрируемых сигналов. Эти спектральные характеристики являются обобщенными функциями.

Спектральную характеристику $X(j\omega)$ сигнала $x(t)$, использовав известную формулу Эйлера, можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} X(j\omega) = X(\omega)\, e^{j\varphi(\omega)} &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos\omega t \cdot dt - j\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin\omega t \cdot dt = a(\omega) - jb(\omega). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Действительная часть

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos\omega t \cdot dt \tag{1.11}$$

спектральной характеристики является четной функцией частоты, а мнимая часть

$$b(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin\omega t \cdot dt \tag{1.12}$$

– нечетной функцией частоты. Отсюда следует, что модуль спектральной характеристики

$$X(\omega) = |\, X(j\omega)\,| = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)} \tag{1.13}$$

является четной функцией частоты, а аргумент спектральной характеристики

$$\varphi(\omega) = \arg X(j\omega) = \arg[a(\omega) - jb(\omega)] \tag{1.14}$$

– нечетной функцией частоты.

Спектральную характеристику $X(j\omega)$ можно изобразить на комплексной плоскости в виде годографа (рис. 1.2,*а*). Чаще же спектральную характеристику $X(j\omega)$ представляют в виде амплитудно-частотной $X(\omega)$ и фазо-частотной $\varphi(\omega)$ спектральных характеристик (рис. 1.2,*б,в*). Учитывая симметричность спектральных характеристик при положительных и отрицательных значениях частоты ω, как правило, их строят только в интервале положительных значений частоты ω.

Формула (1.9) обратного преобразования Фурье предполагает интегрирование комплексных функций и поэтому не всегда удобна для непосредственных вычислений. При помощи формулы Эйлера и выражения (1.10) формулу обратного преобразования можно привести к следующему виду:

$$x(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} [\, a(\omega)\cos\omega t + b(\omega)\sin\omega t]\, d\omega. \qquad (1.15)$$

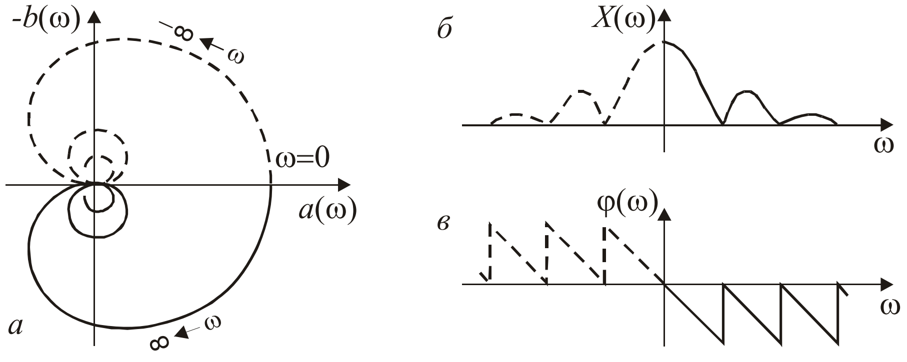


Рис. 1.2. Спектральные характеристики:
а – годограф; *б* – амплитудная; *в* – фазовая

1.3. Методические указания

Программа работы предусматривает определение спектральной характеристики заданного сигнала $x(t)$ с помощью формул прямого преобразования Фурье и восстановление сигнала по имеющейся спектральной характеристике с помощью формулы обратного преобразования Фурье.

Предлагаемый для исследования сигнал представляет собой одиночный импульс, заданный на интервале времени $[0, T_\text{c}]$ (см. приложение П.1). Его спектральная характеристика вычисляется по формуле (1.8), либо по формулам (1.11), (1.12), в которых нижний и верхний пределы интегрирования принимаются соответственно равными 0 и T_c. Для достижения необходимой точности вычисления спектральной характеристики

ристики на интервале $[0, T_{\text{c}}]$ определения сигнала берется не менее 50 отсчетов заданного сигнала. Правая граница частотного интервала $[0, \omega_{\text{c}}]$, на котором рассчитывается спектральная характеристика, подбирается экспериментально с учетом сказанного ниже.

Для восстановления сигнала $x(t)$ по его спектральной характеристике $X(j\omega)$ используется формула (1.15) обратного преобразования Фурье. Как известно, спектральная характеристика сигнала, заданного на ограниченном интервале времени $[0, T_{\text{c}}]$, определена на бесконечном интервале частот $(-\infty, \infty)$ (или с учетом симметричности на полубесконечном интервале $[0, \infty)$. Поэтому точное восстановление заданного сигнала согласно формуле (1.15) требует интегрирования на полубесконечном интервале $[0, \infty)$. На практике интегрирование осуществляют на ограниченном интервале $[0, \omega_{\text{c}}]$, вследствие чего появляется ошибка восстановления. Правая граница ω_{c} частотного интервала и число точек, в которых рассчитываются значения спектральной характеристики, выбираются так, чтобы были учтены все ее особенности.

2. Программа работы

2.1. Основное задание

1. Сформировать в среде Matlab математическую модель $x(t)$ сигнала, представляющего собой импульс заданной формы.

Примечание: Форма и параметры импульса задаются преподавателем или выбираются согласно заданному варианту из приложения П.1 и табл. 1.1. Параметр α в вариантах 6, 7 подбирается студентом самостоятельно.

2. Составить программу вычисления спектральной характеристики $X(j\omega)$ данного сигнала $x(t)$ по формулам прямого преобразования Фурье. Выбрать интервал $[0, \omega_{\text{c}}]$. Построить амплитудную $X(\omega)$ и фазовую $\varphi(\omega)$ спектральные характеристики.

3. Составить программу восстановления сигнала $x(t)$ по полученной спектральной характеристике $X(j\omega)$ с помощью формулы обратного преобразования Фурье. Построить графики исходного $x(t)$ и восстановленного $x_{\text{в}}(t)$ сигналов. Сравнить их между собой и сделать качественные выводы по результатам восстановления.

4. Изменить интервал интегрирования $[0, \omega_{\text{c}}]$ и повторить процедуру восстановления. Сравнить с результатами, полученными в п. 3.

2.2. Дополнительное задание

5. Для сигнала $y(t)$, график которого изображен на рис. 1.3, по формуле (1.8) получить аналитическое выражение для спектральной характеристики $Y(j\omega)$. Записать аналитические выражения для функций $a(\omega)$, $b(\omega)$.

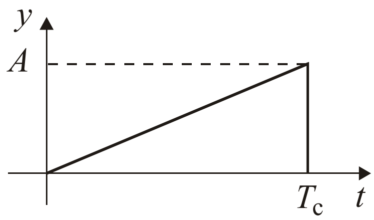


Рис. 1.3

Примечание: Параметры импульса задаются непосредственно преподавателем или согласно вариантам из табл. 1.1.

6. Составить программу вычисления спектральной характеристики $Y(j\omega)$. Построить амплитудную и фазовую спектральные характеристики исследуемого сигнала.

3. Контрольные вопросы и задания

1. Поясните отличие между понятиями ряда и интеграла Фурье.
2. При каких условиях можно пользоваться формулой прямого преобразования Фурье?
3. Справедлив ли принцип суперпозиции для преобразования Фурье?
4. Дана функция $x(t) = \delta(t + \tau) + \delta(t - \tau)$. Найдите спектральную характеристику $X(j\omega)$.
5. Поясните отличие между односторонним и двусторонним преобразованиями Фурье.
6. Назовите особенности спектральных характеристик сигналов, описываемых нечетной и четной функциями.
7. Какая связь существует между спектром одиночного импульса и спектром периодического сигнала, образованного из таких импульсов?
8. Как изменяются амплитудная и фазовая спектральная характеристики сигнала при его запаздывании?
9. Что происходит со спектральной характеристикой при сжатии (растяжении) сигнала?
10. Как при помощи преобразования Фурье вычислить энергию сигнала?

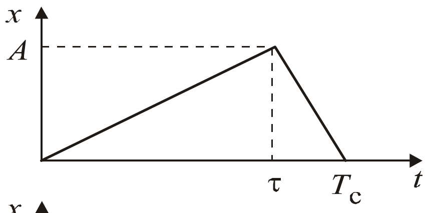
Таблица 1.1

Пара-метры	Номера вариантов							
	1	2	3	4	5	6	7	8
A, В	1	2	5	10	20	25	40	50
τ, мс	0.3	0.5	0.4	0.5	0.8	1.2	0.8	1.2
T_c, мс	0.4	0.7	0.6	0.8	1.0	1.5	1.0	1.5
T, мс	0.5	0.8	1.0	1.2	1.5	2.0	2.4	3.0

ПРИЛОЖЕНИЕ

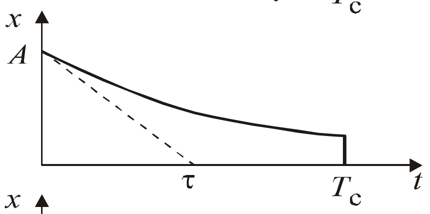
Варианты исследуемых функций

1.



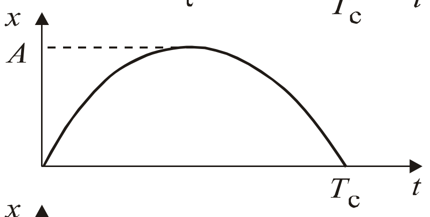
$$x(t)=\begin{cases}(A/\tau)\cdot t \quad \text{при } 0\le t\le \tau\,,\\ A\cdot (t-T_{с})/(\tau-T_{с}) \;\text{ при } \tau\le t\le T_{с}\,,\\ 0 \quad \text{при других } t\,.\end{cases}$$

2.



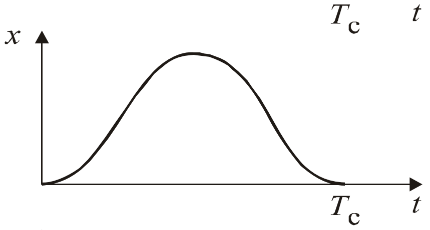
$$x(t)=\begin{cases}A\cdot \exp(-t/\tau) \quad \text{при } 0\le t\le T_{с}\,,\\ 0 \quad \text{при других } t\,.\end{cases}$$

3.



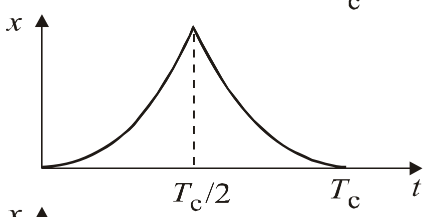
$$x(t)=\begin{cases}A\cdot \sin\left(\dfrac{\pi}{T_{с}}\cdot t\right) \quad \text{при } 0\le t\le T_{с}\,,\\ 0 \quad \text{при других } t\,.\end{cases}$$

4.



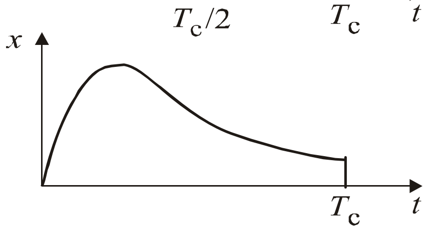
$$x(t)=\begin{cases}A\cdot \sin^{2}\left(\dfrac{\pi}{T_{с}}\cdot t\right) \quad \text{при } 0\le t\le T_{с}\,,\\ 0 \quad \text{при других } t\,.\end{cases}$$

5.



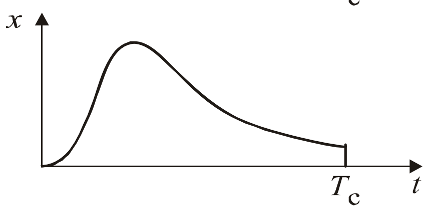
$$x(t)=\begin{cases}t^{2} \quad \text{при } 0\le t\le T_{с}/2\,,\\ (t-T_{с})^{2} \quad \text{при } T_{с}/2\le t\le T_{с}\,,\\ 0 \quad \text{при других } t\,.\end{cases}$$

6.



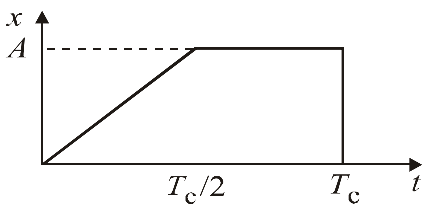
$$x(t)=\begin{cases}t\cdot \exp(-\alpha\, t) \quad \text{при } 0\le t\le T_{с}\,,\\ 0 \quad \text{при других } t\,.\end{cases}$$

7.



$$x(t)=\begin{cases}t^{2}\cdot \exp(-\alpha\, t) \quad \text{при } 0\le t\le T_{с}\,,\\ 0 \quad \text{при других } t\,.\end{cases}$$

8.



$$x(t)=\begin{cases}2(A/T_{с})\cdot t \quad \text{при } 0\le t\le T_{с}/2\,,\\ A \qquad \text{при } T_{с}/2\le t\le T_{с}\,,\\ 0 \quad \text{при других } t\,.\end{cases}$$