# Современные методы обработки сигналов

**Лабораторная работа 2**

## ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ ПРИ ПОМОЩИ РЯДА КОТЕЛЬНИКОВА

### 1.1. Цель работы

Первым этапом цифровой обработки сигналов является дискретизация. В результате дискретизации непрерывный сигнал заменяется от счетами, взятыми через определенные, обычно равные интервалы вре мени. При этом очень важным оказывается выбор интервала дискрети зации. При большом интервале дискретизации быстрые изменения не прерывного сигнала могут остаться незамеченными. Выбор малого ин тервала дискретизации ведет к увеличению числа отсчетов и тем самым к увеличению времени обработки. Задача о выборе интервала дискрети зации наиболее просто решается при помощи теоремы, доказанной В. А. Котельниковым в 1933 году. Эта теорема устанавливает условия точного восстановления мгновенных значений сигнала по его отсчетам, взятым через равные промежутки времени.

Целью работы является определение периода дискретизации по спектральной характеристике заданного сигнала и оценка погрешности восстановления сигнала при помощи ряда Котельникова.

### 1.2. Основные понятия и расчетные формулы

Сигнал $x(t)$ и спектральная характеристика $X(j\omega)$ взаимно однозначно связаны прямым и обратным преобразованиями Фурье:

$$X(j\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt; \qquad (1.1)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega. \qquad (1.2)$$

Пусть спектральная характеристика $X(j\omega)$ равна нулю при $\omega < -\omega_{\text{в}}$ и $\omega > \omega_{\text{в}}$. В этом случае ее можно преобразовать в периодиче скую с периодом $W = 2\omega_{\text{в}}$ и представить в виде комплексного ряда Фу рье. Заменив в формуле комплексного ряда Фурье переменную $t$ на $\omega$ и период $T$ на $W = 2\omega_{\text{в}}$ получим

$$X(j\omega) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\, e^{jn\frac{2\pi}{W}\omega}, \qquad (1.3)$$

где коэффициенты разложения

$$A_n = \frac{2}{W} \int_{-\omega_в}^{\omega_в} X(j\omega)\, e^{-jn\frac{2\pi}{W}\omega}\, d\omega = \frac{1}{\omega_в} \int_{-\omega_в}^{\omega_в} X(j\omega)\, e^{-jn\frac{\pi}{\omega_в}\omega}\, d\omega\,. \qquad (1.4)$$

Сравнивая правые части выражений (1.2) и (1.4), замечаем, что

$$A_n = \frac{2\pi}{\omega_в}\, x(-n\frac{\pi}{\omega_в}) = 2\,T\, x(-nT)\,, \qquad (1.5)$$

где

$$T = \pi/\omega_в\ . \qquad (1.6)$$

При этом спектральная характеристика (1.3) примет вид

$$X(j\omega) = T \sum_{n=-\infty}^{n} x(-nT)\, e^{j\,n\,T\,\omega} = T \sum_{n}^{n} x(nT)\, e^{-j\,n\,T\,\omega}. \qquad (1.7)$$

Подставляя (1.7) в (1.2), меняя порядок действия интегрирования и суммирования и вычисляя интегралы, находим

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_в}^{\omega_в} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\; e^{-j\,n\,T\,\omega}\; e^{j\,\omega\,t}\; d\,\omega =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_в}^{\omega_в} x(nT)\, e^{j\omega(t-nT)}\, d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{T}{\pi}\, x(nT)\, \frac{\sin\omega_в(t-nT)}{\omega_в(t-nT)}\,.$$

С учетом (1.6) окончательно получим

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\, \frac{\sin\omega_в(t-nT)}{\omega_в(t-nT)}\,. \qquad (1.8)$$

На основании изложенного В. А. Котельниковым была сформули рована следующая

**Теорема.** Любую функцию $x(t)$, содержащую гармонические со ставляющие с частотами от 0 до $\omega_в$, можно представить в виде ряда (1.8) и, наоборот, любая функция, представленная формулой (1.8), со держит лишь гармонические составляющие с частотами от 0 до $\omega_в$.

Полученную формулу (1.8) можно рассматривать как разложение сигнала $x(t)$ по функциям

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin\,\omega_в(t-nT)}{\omega_в(t-nT)}\ , \qquad (1.9)$$

причем в качестве коэффициентов ряда выступают значения сигнала $x(t)$ в дискретные моменты времени $t_n = nT, \quad n \in (-\infty, \infty)$.

Функция $\varphi_n(t)$, называемая отсчетной функцией, отображает собой колебания с максимальным значением при $t_n = nT$ (на рис. 1.1,*а* представлен график отсчетной функции для $n = 4$). В другие дискретные моменты времени функция равна нулю. Легко проверить, что отсчетные функции ортогональны на интервале времени, то есть

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t)\,\varphi_m(t)\,dt = \begin{cases} d_n & \text{при} \quad n = m, \\ 0 & \text{при} \quad n \neq m, \end{cases} \tag{1.10}$$

где

$$d_n = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\sin \omega_{\text{в}}(t - nT)}{\omega_{\text{в}}(t - nT)} \right]^2 dt = \frac{\pi}{\omega_{\text{в}}} = T\,. \tag{1.11}$$

Представление функции $x(t)$ рядом (1.8) показано на рис. 1.1,б. В каждой точке $t = nT$ только один член ряда, стоящего в правой части выражения (1.8), отличен от нуля и этот член равен $x(nT)$. Следовательно, в точках $t = nT$ справедливость формулы (1.8) очевидна. В промежутках между указанными точками точное значение функции $x(t)$ обеспечивается суммированием бесконечного числа функций вида (1.9).

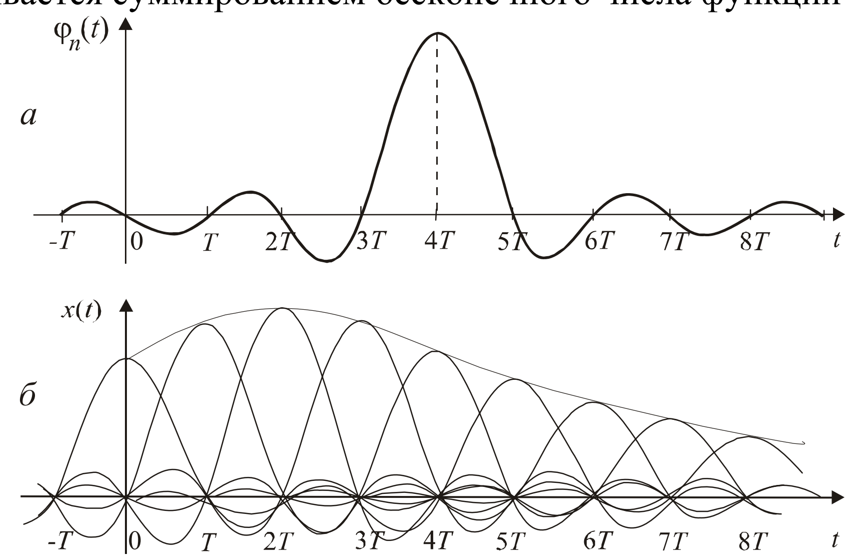



Рис. 1.1. Представление сигнала в виде ряда Котельникова:
а – отсчетная функция; б – составляющие ряда

Таким образом, функция $x(t)$ с ограниченным спектром, с одной стороны, может быть полностью задана множеством ее мгновенных значений, взятых через равные промежутки времени $T$. С другой стороны, если имеются числовые значения функции $x(nT)$ для всех $n$, то она может быть полностью восстановлена по формуле (1.8).

При практическом использовании теоремы Котельникова для восстановления непрерывного сигнала по его отсчетам необходимо учитывать следующее. Сигналы с ограниченным спектром, для которых справедлива теорема, бесконечны во времени. Реальные же сигналы ограничены по времени интервалом $[0, T_c]$ и обладают, следовательно, неограниченным по времени спектром. Однако всегда можно выделить интервал частот $[0, \omega_в]$, в котором заключена основная часть энергии сигнала, а на долю составляющих спектра с частотой $\omega > \omega_в$ приходится малая часть энергии сигнала.

Сигнал, ограниченный по времени, приближенно описывается рядом (1.8), состоящим из конечного числа членов:

$$x_N^*(t) = \sum_{n=0}^{N} x(nT) \frac{\sin\omega_в(t - nT)}{\omega_в(t - nT)} . \tag{1.12}$$

При суммировании членов ряда (1.12) сигнал $x(t)$ воспроизводится точно только в точках отсчета $t_n = nT$. В промежутках между отсчетами возникает ошибка аппроксимации, величина которой зависит от отбрасываемой части спектра сигнала. Чтобы уменьшить ошибку, интервал дискретизации $T$ рекомендуют принимать в 2–5 раз меньше величины, определяемой по формуле (1.6). Ряд Котельникова для восстановления сигналов используется редко. Он имеет скорее теоретическое значение, позволяя получить полезные выводы. Для восстановления же сигналов по дискретным отсчетам на практике чаще используются другие методы, например методы линейной и квадратичной интерполяции.

## 1.3. Методические указания

В работе исследуется сигнал $x(t)$, представляющий собой одиночный импульс заданной формы (см. приложение П.1). Программа работы предусматривает дискретизацию заданного сигнала, восстановление его по дискретным отсчетам и оценку погрешности восстановления.

Период дискретизации $T$ находится по формуле (7.6). Для определения граничной частоты $\omega_в$, которая используется в формуле (7.6), строится амплитудная спектральная характеристика $X(j\omega) = |X(j\omega)|$ сигнала. По этой характеристике определяется граница интервала $\omega_в$, в котором заключена основная часть энергии сигнала (рис. 7.2). Значение $\omega_в$ находится из условия, что при $\omega > \omega_в$ выполняется неравенство

$$X(\omega) \le A,$$

где $A$ – заданная величина.

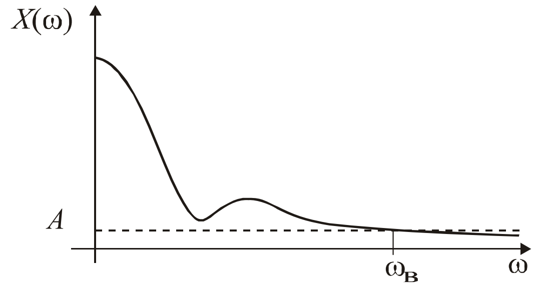



Рис. 1.2. Определение границы частотного интервала

При составлении программы восстановления сигнала по формуле (1.12) надо принять во внимание, что входящие в нее отсчетные функции (1.9) имеют неопределенность при $t = nT$. Чтобы устранить эту неопределенность, в программе рекомендуется использовать условный оператор, имеющийся в составе системы MATLAB. Например, программа вычисления функции

$$y(x) = \sin x / x \tag{1.13}$$

с помощью условного оператора может быть записана в виде

$$\text{if } x<=0.01 \ \ y(x)=1 \text{ else } y(x)=\sin x/x \text{ end} \tag{1.14}$$

Как отмечалось выше, ряд (1.8) точно воспроизводит сигнал $x(t)$ в точках отсчета $t_n = nT$. Следовательно, в этих точках ошибка аппрок симации равна нулю, максимумы же ошибки следует ожидать примерно посередине интервалов между соседними точками отсчета. Поэтому для быстрой оценки погрешности аппроксимации можно вычислить значения ошибки $\varepsilon(nT + 0.5T)$.

## 2. Программа работы

### 2.1. Основное задание

1. Найти спектральную характеристику отсчетной функции

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin \omega_\text{в}(t - nT)}{\omega_\text{в}(t - nT)}.$$

Построить ее для произвольного значения $n$ и $T = \pi/\omega_\text{в} = 1$.

2. Сформировать в среде MATLAB математическую модель сигнала $x(t)$, заданного преподавателем (варианты сигналов приведены в приложении). Построить график функции $x(t)$.

3. Составить программу расчета спектральной характеристики

$$X(j\omega) = \int_0^\infty x(t) e^{-j\omega t} dt$$

заданного сигнала $x(t)$. Построить амплитудную спектральную характеристику $X(\omega) = |X(j\omega)|$.

4. По амплитудной спектральной характеристике $X(\omega)$ определить значение частоты $\omega_в$ из условия, что $X(\omega) \le 0.05 \max\limits_{\omega} X(\omega)$ при $\omega \ge \omega_в$.

5. Определить интервал дискретизации Котельникова $T = \pi/\omega_в$ и сформировать дискретную последовательность

$$x(n) = x(nT),\ n = 0,1,...,N = T_c/T,$$

где $T_с$ – интервал определения заданного сигнала $x(t)$.

6. Составить программу расчета сигнала $x_N^*(t)$, восстанавливаемого из дискретной последовательности $x(nT), n = 0,1,...,N$, при помощи ряда Котельникова. Построить на одном рисунке графики функций $x(t)$ и $x_N^*(t)$.

7. Сформировать сигнал ошибки $\varepsilon(t) = x(t) - x_N^*(t)$. Определить максимальную абсолютную ошибку

$$\varepsilon_{\max} = \max_t |\varepsilon(t)|.$$

### 2.2. Дополнительное задание

8. Повторить пункты 4–6 программы, уменьшив период дискретизации $T$ в 2–5 раз.

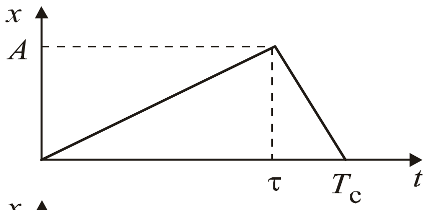
## 3. Контрольные вопросы и задания

1. Как осуществляется дискретизация непрерывного сигнала по времени?
2. Покажите, что отсчетные функции $\varphi_n(t)$ ортогональны на интервале времени $(-\infty, \infty)$.
3. Как изменяются отсчетные функции $\varphi_n(t)$ при уменьшении (увеличении) периода дискретизации?
4. Как выглядит спектральная характеристика отсчетной функции?
5. Что понимают под числом степеней свободы сигнала $x(t)$?
6. Какие методы, кроме ряда Котельникова, используются для восстановления сигнала по его отсчетам в дискретные моменты времени?

# ПРИЛОЖЕНИЕ

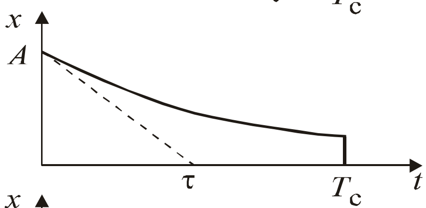
## Варианты исследуемых функций

**1.**



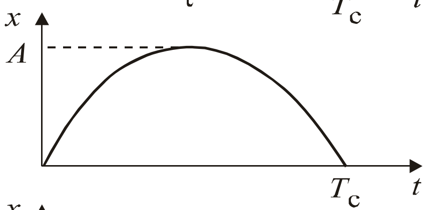

$$x(t)=\begin{cases}(A/\tau)\cdot t \quad \text{при } 0\le t\le\tau\,,\\ A\cdot(t-T_\text{c})/(\tau-T_\text{c}) \ \text{ при } \tau\le t\le T_\text{c}\,,\\ 0 \quad \text{при других } t\,.\end{cases}$$

**2.**



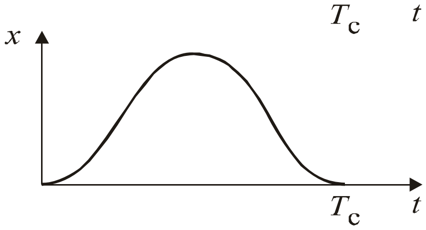

$$x(t)=\begin{cases}A\cdot\exp(-t/\tau) \quad \text{при } 0\le t\le T_\text{c}\,,\\ 0 \quad \text{при других } t\,.\end{cases}$$

**3.**



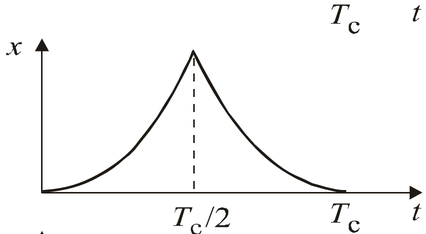

$$x(t)=\begin{cases}A\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{T_\text{c}}\cdot t\right) \quad \text{при } \ 0\le t\le T_\text{c}\,,\\ 0 \quad \text{при других } t\,.\end{cases}$$

**4.**



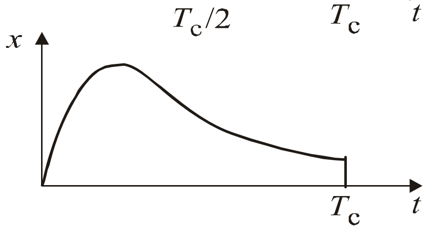

$$x(t)=\begin{cases}A\cdot\sin^2\left(\dfrac{\pi}{T_\text{c}}\cdot t\right) \quad \text{при } \ 0\le t\le T_\text{c}\,,\\ 0 \quad \text{при других } t\,.\end{cases}$$

**5.**



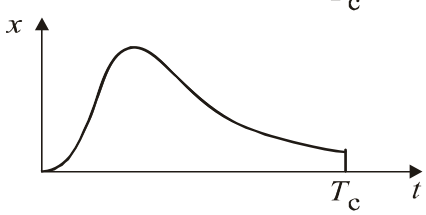

$$x(t)=\begin{cases}t^2 \quad \text{при } 0\le t\le T_\text{c}/2\,,\\ (t-T_\text{c})^2 \quad \text{при } T_\text{c}/2\le t\le T_\text{c}\,,\\ 0 \quad \text{при других } t\,.\end{cases}$$

**6.**



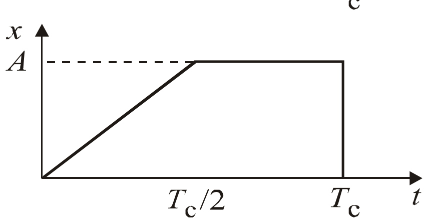

$$x(t)=\begin{cases}t\cdot\exp(-\alpha\, t) \quad \text{при } 0\le t\le T_\text{c}\,,\\ 0 \quad \text{при других } t\,.\end{cases}$$

**7.**




$$x(t)=\begin{cases}t^2\cdot\exp(-\alpha\, t) \quad \text{при } 0\le t\le T_\text{c}\,,\\ 0 \quad \text{при других } t\,.\end{cases}$$

**8.**




$$x(t)=\begin{cases}2(A/T_\text{c})\cdot t \quad \text{при } 0\le t\le T_\text{c}/2\,,\\ A \qquad\qquad \text{при } T_\text{c}/2\le t\le T_\text{c}\,,\\ 0 \quad \text{при других } t\,.\end{cases}$$