# Лабораторная работа 6

# СПЕКТРАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПРИ ПОМОЩИ КОРРЕЛОГРАММНОГО МЕТОДА

## 1. Цель работы

Основной целью спектрального анализа являются оценивание спектральной плотности мощности (СПМ) дискретизированного слу чайного процесса и обнаружение в нем периодических составляющих. Появление современных компьютеров и цифровых алгоритмов расши рило роль спектрального оценивания и превратило его в средство реше ния многих практических задач. Коррелограммный метод относится к классическим методам, основанным на использовании преобразования Фурье.

Целью работы является изучение коррелограммного метода и его практическое освоение на примере анализа дискретной последователь ности, содержащей две гармонические составляющие и помеху.

## 2. Основные понятия и расчетные формулы

### 2.1. Спектральная плотность мощности

Непосредственное применение классического гармонического анализа для исследования случайных процессов невозможно. Для случайного процесса спектральная характеристика $X(j\omega)$, полученная в ре зультате преобразования Фурье конкретной реализации $x(t)$, содержит гармонические составляющие со случайными амплитудами и фазами. Но с помощью преобразования Фурье можно исследовать распределе ние мощности случайного процесса по гармоническим составляющим.

Спектральная плотность $S_x(\omega)$ мощности стационарного случайного процесса $X(t)$ определяется как преобразование Фурье корреляци онной функции:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\ e^{-j\omega\tau} d\tau . \qquad (1)$$

Спектральная плотность представляет собой действительную, не отрицательную и четную функцию частоты $\omega$. Формулу (1) можно записать в следующем виде:

$$S_x(\omega) = 2\int_{0}^{\infty} R_x(\tau)\ \cos(\omega\tau)\, d\tau . \qquad (2)$$

## 2.2. Коррелограммный метод оценивания спектральной плотности мощности

Оценки спектральной плотности мощности, для определения кото рых сначала по исходным данным формируются оценки корреляцион ных функций, получили название *коррелограммных*.

Оценка корреляционной функции находится по заданной реализации $x_p(t)$ случайного процесса (см. лабораторную работу 5). Если определены $N$ отсчетов $x_p(n)$, $n = 0,1,..., N-1$, сигнала, то оценку корреляционной функции можно вычислить по формуле

$$R_x^*(m) = \frac{1}{N-m}\sum_{i=0}^{N-m-1} x_p(i)\cdot x_p(i+m), \quad m = 0,1,\ldots,M-1. \tag{3}$$

Оценка $R_x^*(m)$ корреляционной функции представляет собой дискрет ную последовательность, определенную на конечном интервалеи $[0, M-1]$. Дополнив $R_x^*(m)$ симметричными отсчетами для отрицатель ных $m = -M+1, ..., -1$ и применив дискретное преобразование Фурье (ДПФ), получим оценку спектральной плотности

$$S_x^*(\omega) = \sum_{m=1-M}^{M-1} R_x^*(m)\, e^{-j\,\omega\,T\,m} \tag{4}$$

С учетом того, что оценка $R_x^*(m)$ является четной функцией, формулу (3) можно записать в следующем виде:

$$S_x^*(\omega) = 2\sum_{m=0}^{M-1} R_x^*(m)\cos(\omega\,T\,m). \tag{5}$$

Преимущество формулы (5) очевидно. При ее использовании отпадает необходимость дополнения $R_x^*(m)$ отсчетами для отрица тельных $m$.

Теоретически спектральная плотность мощности $S_x(\omega)$, опреде ляемая в частотной области, является неслучайной характеристикой. Однако, поскольку ее оценивание всегда производится по ограничен ным реализациям случайного процесса, значения спектра могут быть найдены только приближенно. Поэтому сама оценка спектральной плотности мощности имеет случайный характер и никогда не совпадает во всех точках с теоретической спектральной плотностью.

Применение коррелограммного метода оценивания оправдано только для стационарных случайных процессов и при использовании алгоритмов быстрого преобразования Фурье для расчетов по формулам (4), (5).

Коррелограммный метод применялся и до появления современных вычислительных машин и персональных компьютеров. Последние позволили внедрить в практику спектрального анализа более трудоемкие в вычислительном смысле, но и более эффективные методы.

### 2.3. Использование оконных функций

Для оценки (4), в которой вместо бесконечной корреляционной последовательности используется конечное число значений, характерно просачивание энергии, вызванное явлением Гиббса (эффект прямо угольного окна). Избавиться от просачивания энергии можно путем предварительного преобразования оценки корреляционной функции при помощи оконной функции $w(m)$, отличающейся от прямоугольной.

Тогда в качестве оценки спектральной плотности будем иметь:

$$S_x^*(\omega) = \sum_{m=1-M}^{M-1} R_x^*(m)\, w(m)\, e^{-j\,\omega\, T\, m}\,. \tag{6}$$

или

$$S_x^*(\omega) = 2\sum_{m=0}^{M-1} R_x^*(m)\, w(m) \cos(\omega\, T\, m)\,. \tag{7}$$

Некоторые оконные функции, которые используются для улучше ния оценок спектральной плотности, приведены в приложении 1. Об работка с помощью оконной функции позволяет ослабить влия ние бо ковых лепестков, вызванных явлением Гиббса. Но при этом ухудшается спектральное разрешение.

Эффект просачивания энергии также можно уменьшить сглажива нием самой оценки спектральной плотности, полученной по формуле (4), при помощи дополнительного фильтра.

## 3. Методические указания

Для исследования коррелограммного метода оценивания спектральной плотности формируется тестовая последовательность

$$x(n) = f(n) + r(n), \quad n = 0, 1, ..., N-1, \tag{8}$$

в которой полезная составляющая $f(n)$ образуется путем дискретизации сигнала $f(t)$, состоящего из двух гармонических составляющих с раз личными частотами:

$$f(n) = \sin(\omega_1 T\, n) + \cos(\omega_2 T\, n)\,, \tag{9}$$

а помеха $r(n)$ представляет собой центрированную случайную последо вательность, генерируемую с помощью стандартных средств Matlab.

Для получения последней при помощи стандартной функции rand формируется нецентрированная случайная последовательность

$$r1(n) = b\ \mathrm{rand}, \tag{10}$$

где $b$ – верхняя граница интервала разброса

Эта последовательность центрируется при помощи функции $\mathrm{mean}(r1)$:

$$r(n) = r1(n) - \mathrm{mean}(r1). \tag{11}$$

Тогда тестовая последовательность окончательно принимает вид

$$x(n) = \sin(\omega_1 T\ n) + \cos(\omega_1 T\ n) + r(n). \tag{12}$$

Число элементов в этой последовательности принимается равным $N$=2048. Значения параметров последовательности приведены в табл. 1. Целью работы является оценивание значений $\omega_1$ и $\omega_2$. Оценка

корреляционной функции тестовой последовательности, которая необходима для получения оценки спектральной плотности по методу коррелограмм, определяется по формуле (3) для $M$=256. Оценка спектральной плотности вычисляется по формуле (5), причем на частотном интервале $[\,0, \pi/T\,]$ для получения достаточного разрешения должно располагаться не менее 100 точек. Значения $\omega_1^*$ и $\omega_2^*$, соответ ствующие точкам максимума, могут быть приняты в качестве оценок значений частоты гармонических составляющих последовательности (12).

Вычисление спектральной плотности может быть выполнено при помощи алгоритма БПФ, реализованного в системе Matlab.

Оценка спектральной плотности будет получена в виде дискретной последовательности $S_x^*(k)$, $k = 0, 1, ..., M/2$. На рис. 1 приведен гра фик оценки спектральной плотности тестовой последовательности (12) при $\omega_1 = 280$ и $\omega_2 = 100$. Для того чтобы оценить значения $\omega_1$ и $\omega_2$ по графику, необходимо найти значения $k_1^*$ и $k_2^*$, соответствующие точкам максимума. Легко убедиться, что искомые оценки

$$\omega_1^* = \frac{\pi}{128 \cdot T} k_1^*, \quad \omega_2^* = \frac{\pi}{128 \cdot T} k_2^* \tag{13}$$

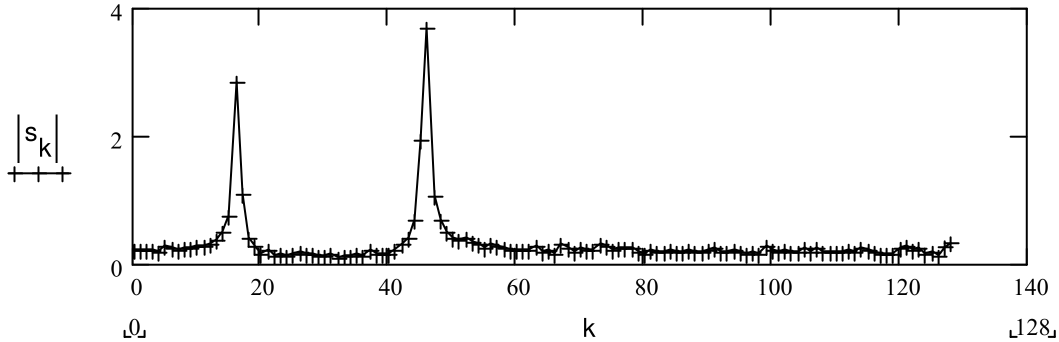



Рис. 1. Оценка спектральной плотности мощности, полученная при помощи метода коррелограмм

## 4. Программа работы

### 4.1. Основное задание

1. Для гармонической функции $x(t) = A \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi)$ получить аналитические выражения корреляционной функции $R_x(\tau)$ и спектральной плотности $S_x(\omega)$. Построить график спектральной плотности.

2. Сформировать исследуемую последовательность $x(n)$, $n = 0, 1, ..., N-1$ ($N = 512$), приняв параметры регулярной составляющей из табл.1 согласно заданному варианту, а для случайной составляющей значение $b = 5$. Пронаблюдать на экране полезную и случайную составляющие, а также исследуемую последовательность в целом.

3. Составить программу расчета оценки $S_x^*(\omega)$ спектральной плотности по методу коррелограмм с прямоугольным окном. Построить график оценки $S_x^*(\omega)$ спектральной плотности и определить оценки частот $\omega_1$ и $\omega_2$.

Таблица 1

| Параметры | Номера вариантов | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| $T$, с | 0.01 | 0.02 | 0.002 | 0.012 | 0.005 | 0.015 | 0.008 | 0.004 |
| $\omega_1$,рад/с | 94 | 81 | 360 | 300 | 200 | 150 | 180 | 280 |
| $\omega_2$,рад/с | 5.2 | 14 | 120 | 80 | 120 | 20 | 50 | 100 |
| Оконная функция | Бартлетта | | Хэнна | | Хэмминга | | Блэкмана | |

4. Составить программу расчета оценки $S_x^*(\omega)$ спектральной плот ности по методу коррелограмм с использованием оконной функции, за данной в табл. 1. Построить график оценки $S_x^*(\omega)$ спектральной плотности и определить оценки частот $\omega_1$ и $\omega_2$.

5. Сравнить результаты, полученные в пп. 3 и 4. Сделать выводы о влиянии оконной функции на качество оценивания.

### 4.2. Дополнительное задание

6. Исследовать влияние уровня случайной составляющей (помехи) на качество оценивания.

**Примечание.** Значение $b$, определяющее уровень случайной составляющей, изменять в интервале от 5 до 10.

7. Исследовать работу коррелограммного метода для близких значений $\omega_1$ и $\omega_2$.

## 5. Контрольные вопросы и задания

1. Дайте физическое понятие спектральной плотности мощности.
2. Докажите, что $S_x(-\omega) = S_x(\omega)$.
3. Как выглядит график спектральной плотности «белого шума»?
4. Объясните физический смысл спектральной плотности «белого шума».
5. Определите спектральную плотность мощности случайного про цесса с корреляционной функцией

$$R_x(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha \cdot |\tau|), \quad \alpha > 0.$$

6. Докажите, что если спектральная плотность случайного процес са $S_x(\omega) = 0$ при $\omega = 0$, то его автокорреляционная функция удовлетво ряет соотношению

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) d\tau = 0.$$

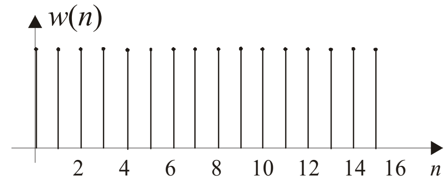
7. Чем объясняется просачивание энергии при использовании прямоугольного окна?

**Приложение 1**

# Характеристики оконных функций

### Прямоугольное (равномерное) окно

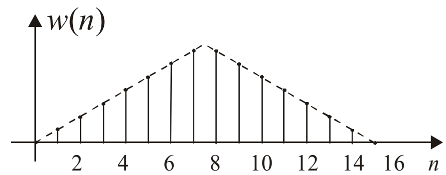
$$w(n) = 1, \quad 0 \le n \le N-1$$




$$A_{\text{пл}} = -13;\ \Delta\omega = 4\pi/N;\ A_{\text{мин}} = -21$$

### Треугольное окно (окно Бартлетта)

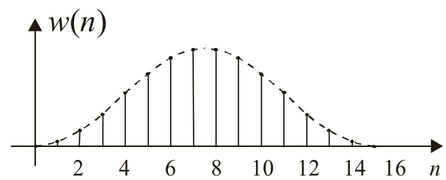
$$w(n) = \begin{cases} \dfrac{2n}{N-1}, & 0 \le n \le \dfrac{N-1}{2}, \\ 2 - \dfrac{2n}{N-1}, & \dfrac{N-1}{2} \le n \le N-1, \end{cases}$$




$$A_{\text{пл}} = -25;\ \Delta\omega = 8\pi/N;\ A_{\text{мин}} = -25$$

### Косинус-квадрат (окно Хэнна)

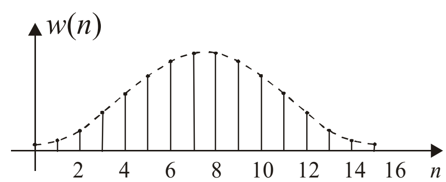
$$w(n) = 0.5\{1 - \cos[2\pi n/(N-1)]\},$$
$$0 \le n \le N-1;$$




$$A_{\text{пл}} = -31;\ \Delta\omega = 8\pi/N;\ A_{\text{мин}} = -44$$

### Приподнятый косинус (окно Хэмминга)

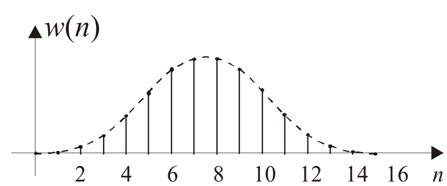
$$w(n) = 0{,}54 - 0{,}46 \cdot \cos[2\pi n/(N-1)],$$
$$0 \le n \le N-1$$




$$A_{\text{пл}} = -41;\ \Delta\omega = 8\pi/N;\ A_{\text{мин}} = -53$$

### Окно Блэкмана

$$w(n) = 0.42 - 0.5 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N-1} n\right) +$$
$$+ 0.08 \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{N-1} n\right);\ 0 \le n \le N-1$$




$$A_{\text{пл}} = -57;\ \Delta\omega = 12\pi/N;\ A_{\text{мин}} = -74$$

$A_{\text{пл}}$ – амплитуда пика бокового лепестка, дБ

$\Delta\omega$ – ширина переходной полосы главного лепестка;

$A_{\text{мин}}$ – минимальное затухание в полосе задерживания, дБ.