Современные методы обработки сигналов

Лабораторная работа № 3
Реализация быстрого преобразования Фурье

1. Цель работы

Набор алгоритмов, называемых алгоритмами быстрого преобразования Фурье (БПФ), включает разнообразные методы уменьшения времени вычисления дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Поскольку вычисление ДПФ является основной операцией в большинстве задач спектрального анализа, то использование БПФ в некоторых встречающихся на практике случаях, позволяющее ускорить вычисление ДПФ в 100 и более раз по сравнению с методом прямого вычисления ДПФ.

Целью работы является реализация алгоритма БПФ с прореживанием по времени.

2. Основные понятия и расчетные формулы
2.1 Вычисление ДПФ

Прямое и обратное дискретные преобразования Фурье могут вычисляться непосредственно по формулам:

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\,W^{nk}\,,\ k=0,1,...,N-1 \tag{1}$$

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\,W^{-nk}\,,\ n=0,1,...,N-1 \tag{2}$$

где $W=\mathrm{e}^{-j(2\pi)/N}$, причем W^{nk} является периодической последовательностью с периодом N.

Анализ выражений показывает, что основными операциями при выполнении прямого и обратного дискретных преобразований Фурье являются операции комплексного умножения и суммирования.

Схема алгоритма вычисления спектральной характеристики $X(k)$ по формуле (1) показана на рис. 1. Схема вычисления обратного ДПФ аналогична.

Формулу (1) можно записать в матричной форме

$$\mathbf{X}=\mathbf{A}\times\mathbf{x}, \tag{3}$$

где **x** и **X** – векторы из отсчетов последовательности $x(n)$ и спектральной характеристики $X(k)$, **A** – матрица с элементами $a_{n,k}W^{nk}$.

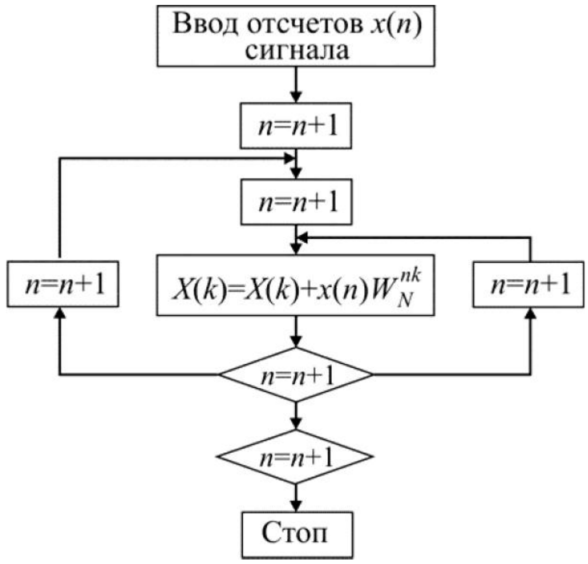


Рис. 1. Схема алгоритма вычисления ДПФ

Например, при N=8 векторы и матрицы в (3) будут иметь следующий вид:

$$\mathbf{X}=[X(1)\;X(2)\;X(3)\;X(4)\;X(5)\;X(6)\;X(7)]^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{x}=[x(1)\;x(2)\;x(3)\;x(4)\;x(5)\;x(6)\;x(7)]^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^0 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 \\ W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^8 & W_8^{10} & W_8^{12} & W_8^{14} \\ W_8^0 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^9 & W_8^{12} & W_8^{15} & W_8^{18} & W_8^{21} \\ W_8^0 & W_8^4 & W_8^8 & W_8^{12} & W_8^{16} & W_8^{20} & W_8^{24} & W_8^{28} \\ W_8^0 & W_8^5 & W_8^{10} & W_8^{15} & W_8^{20} & W_8^{25} & W_8^{30} & W_8^{35} \\ W_8^0 & W_8^6 & W_8^{12} & W_8^{18} & W_8^{24} & W_8^{30} & W_8^{36} & W_8^{42} \\ W_8^0 & W_8^7 & W_8^{14} & W_8^{21} & W_8^{28} & W_8^{35} & W_8^{42} & W_8^{49} \end{bmatrix}$$

Для того чтобы рассчитать при $N=8$ спектральную характеристику $X(k)$, необходимо произвести 8×8=64 умножения и 7×8=56 сложений.

В общем случае расчет спектральной характеристики по формуле (3) требует N^2 комплексных умножений и $N(N-1)$ комплексных сложений. При больших N количество арифметических операций настолько велико, что определение спектральной характеристики в режиме реального времени затруднено. Поэтому были предприняты усилия по поиску алгоритмов, которые при вычислении спектральной характеристики требовали бы меньшего количества арифметических операций. Такие алгоритмы объединены под общим названием «быстрое преобразование Фурье» (БПФ).

Первый алгоритм БПФ, предложенный Кули и Тьюки, основан на том, что среди элементов матрицы (комплексных экспонент W^{nk}) есть много повторяющихся значений в силу периодичности экспоненты. Алгоритм БПФ группирует слагаемые с одинаковыми множителями, значительно сокращая число умножений. В результате быстродействие БПФ может в зависимости от N в сотни раз превосходить быстродействие стандартного алгоритма.

2.2 Алгоритм БПФ с прореживанием по времени

Основная идея алгоритмов БПФ состоит в том, что преобразуемые последовательности разбиваются на более короткие.

2.2.1 Базовая операция алгоритма

Для уяснения этой идеи рассмотрим N-точечную последовательность $x(n)$. Её спектральная характеристика вычисляется по формуле:

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{nk}$$

Произведем прореживание последовательности $x(n)$, разбив её на две $(N/2)$-точечные последовательности $x_1(n)$ и $x_2(n)$, состоящие из $x(n)$ с четными и нечетными номерами:

$$x_1(n)=x(2n) \quad n=0,1,\dots,(N/2)-1$$

$$x_2(n)=x(2n+1) \quad n=0,1,\dots,(N/2)-1$$

Тогда спектральная характеристика последовательности $x(n)$ может быть записана в следующем виде:

$$X(k)=\sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(2n)\, W_N^{2nk}+\sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(2n+1)\, W_N^{(2n+1)k}$$

Учитывая, что $W_N^2=\exp(-2j2\pi/N)=\exp(-j2\pi/(N/2))=W_{N/2}$, получим

$$X(k)=\sum_{n=0}^{(N/2)-1} x_1(n)\, W_{N/2}^{nk}+W_N^k\sum_{n=0}^{(N/2)-1} x_2(n)\, W_{N/2}^{nk}$$

Легко заметить, что здесь первая сумма слагаемых в правой части есть спектральная характеристика последовательности $x_1(n)$, а вторая сумма – спектральная характеристика последовательности $x_2(n)$. Поэтому получим

$$X(k)=X_1(k)+W_N^k\, X_2(k), \quad k=0,1,\dots,(N/2)-1. \qquad (4)$$

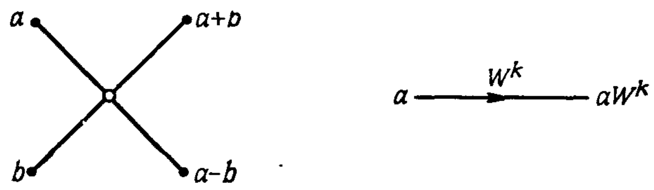
Поскольку $X(k)$ определено для $k\in[0,N-1]$, а $X_1(k)$ и $X_2(k)$ определены для $k\in[0,(N/2)-1]$, необходимо доопределить формулу (4) для $k\geq N/2$. С учетом, что $X_1(k)$ и $X_2(k)$ функции периодические с периодом $N/2$ и $W_N^{-N/2}=-1$, можно записать

$$X(k)=X_1(k)-W_N^k\, X_2(k) \qquad k=(N/2),\dots,N-1$$

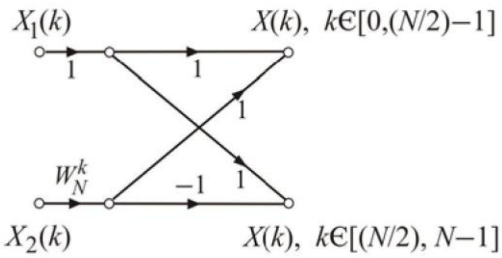
Таким образом, имеем

$$X(k)=\begin{cases} X_1(k)+W_N^k\, X_2(k), & k=0,1,\dots,(N/2)-1,\\ X_1(k)-W_N^k\, X_2(k), & k=(N/2),\dots,N-1.\end{cases} \qquad (5)$$

Формулы (5) определяют алгоритм базовой операции БПФ, позволяющей вычислить спектральную характеристику $X(k)$ N-точечной последовательности с помощью спектральных характеристик $X_1(k)$ и $X_2(k)$ ($N/2$)-точечных последовательностей. Этот алгоритм можно изобразить в виде графа, получившего название «бабочка» (рис. 2).



а



б

Рис. 2. Направленный граф алгоритма базовой операции:
а – пояснение операций
б – для двухточечной последовательности

2.2.2 Алгоритм БПФ с основанием 2

Алгоритм разработан для дискретной последовательности $x(n)$, длина которой равна $N = 2^m$, где m – целое положительное число. Если исходная последовательность $x(n)$ этому условию не удовлетворяет, то она дополняется необходимым количеством отсчетов с нулевыми значениями. Последовательное деление на более короткие последовательности, состоящие на каждом этапе из нечетных и четных номеров, приводит к образованию $N/2$ двухточечных последовательностей.

Пример. Рассмотрим особенности алгоритма на примере вычисления спектральной характеристики последовательности при $N=8$. Поэтапное деление исходной последовательности дает четыре двухточечные последовательности: $\{x(0),x(4)\}$; $\{x(2),x(6)\}$; $\{x(1),x(5)\}$; $\{x(3),x(7)\}$.

Направленный граф вычисления спектральной характеристики с использованием базовой операции приведен на рис. 3, где этапы вычисления отделены пунктирными линиями. Чтобы показать эффективность рассматриваемого алгоритма, сравним, например, вычисление отсчета $X(3)$спектральной характеристики непосредственно по формуле (1) и по алгоритму БПФ согласно направленному графу на рис 3. По формуле (1) имеем

$$X(3)=W_8^0x(0)+W_8^3x(1)+W_8^6x(2)+W_8^9x(3)+ \\ +W_8^{12}x(4)+W_8^{15}x(5)+W_8^{18}x(6)+W_8^{21}x(7) \qquad (6)$$

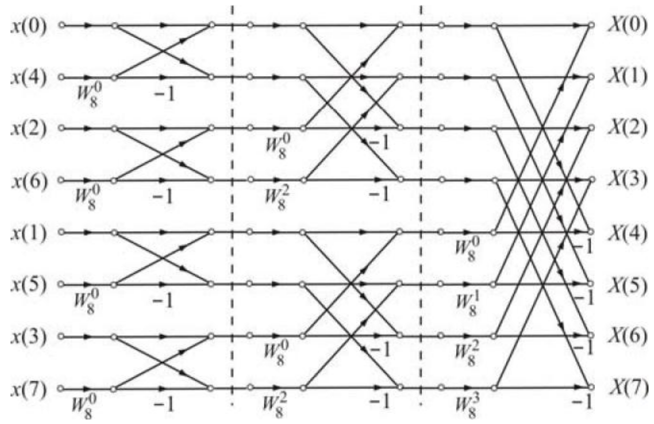


Рис. 3. Направленный граф алгоритма БПФ

Для наглядности расчета по алгоритму БПФ выделим на графе траекторию расчета значения $X(3)$ (рис. 4). Согласно этой траектории

$$X(3) = x(0) - x(4) - W_8^2[x(2) - x(6)] + W_8^3\{x(1) - x(5) - W_8^2[x(3) - x(7)]\}. \qquad (7)$$

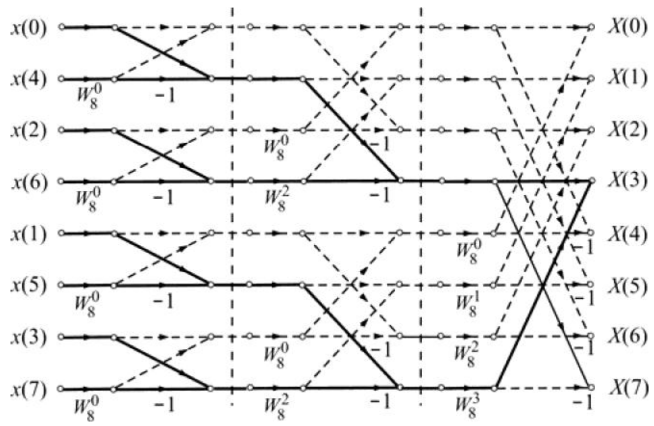


Рис. 4. Направленный граф алгоритма БПФ с выделенной траекторией вычисления отсчета X(3)

Приведенный пример позволяет сделать заключение, что экономии в количестве используемых арифметических операций достигается организацией порядка вычисления. При этом требуется хранить промежуточные результаты расчетов для их последующего использования.

3. Методические указания

В работе исследуется алгоритм быстрого преобразования Фурье с прореживанием по времени, в котором выделяются две части:

1. Перестановка элементов входной последовательности. Целью перестановки является образование $N/2$ двухточечных последовательностей. Для перестановки элементов входной последовательности используется представление номера элемента последовательности в двоичном коде и его чтение в обратном порядке.

Например, для рассмотренного выше примера при $N = 8$ во второй строке табл. 1 записаны номера элементов входной последовательности в двоичном коде. В третьей строке записаны инверсные двоичные коды, а в четвертой - соответствующие им элементы входной последовательности, которые образуют $N/2$ пар.

Таблица 1

Сортировка последовательности путем обращения кода

$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$	$x(3)$	$x(4)$	$x(5)$	$x(6)$	$x(7)$
000	001	010	011	100	101	110	111
000	100	010	110	001	101	011	111
$x(0)$	$x(4)$	$x(2)$	$x(6)$	$x(1)$	$x(5)$	$x(3)$	$x(7)$

2. Вычисление отсчетов спектральной характеристики. Вычисления выполняются с использованием базовой операции поэтапно. На первом этапе вычисляются $N/4$ двухточечных спектральных характеристик, которые запоминаются (рис. 5).

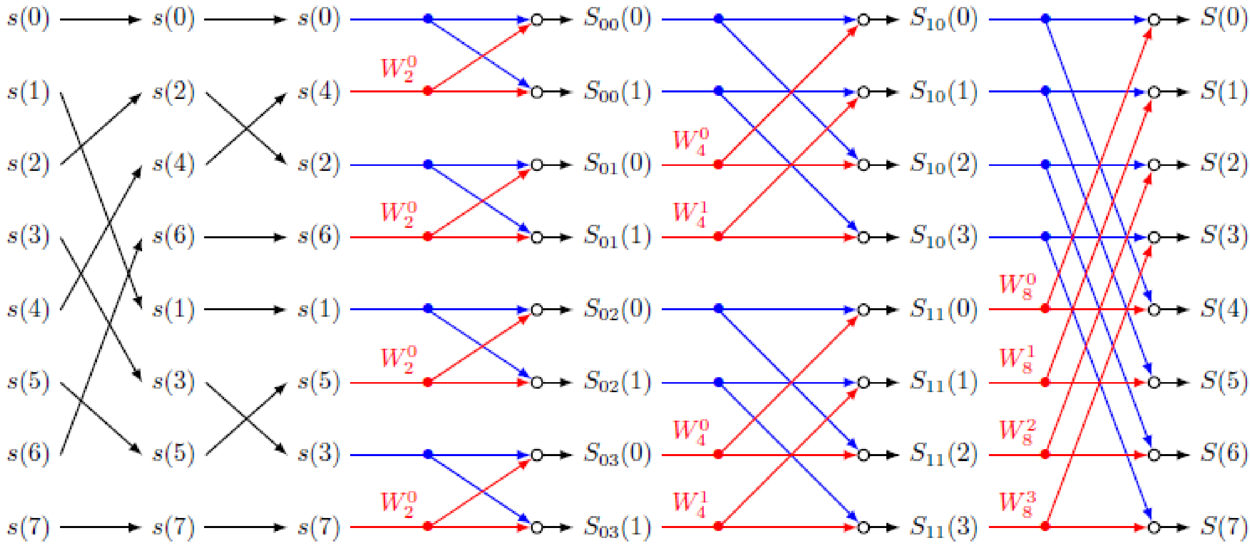


Рис. 5. Вычисление спектральной характеристики

После двоично-инверсной перестановки получаем четыре 2-точечных ДПФ:

$$S_{00}(0) = s(0) + W_2^0 \cdot s(4);$$
$$S_{00}(1) = s(0) - W_2^0 \cdot s(4);$$
$$S_{01}(0) = s(2) + W_2^0 \cdot s(6);$$
$$S_{01}(1) = s(2) - W_2^0 \cdot s(6);$$
$$S_{02}(0) = s(1) + W_2^0 \cdot s(5);$$
$$S_{02}(1) = s(1) - W_2^0 \cdot s(5);$$
$$S_{03}(0) = s(3) + W_2^0 \cdot s(7);$$
$$S_{03}(1) = s(3) - W_2^0 \cdot s(7).$$

На втором этапе после объединения двухточечных спектральных характеристик в четверки получается $N/4$ четырехточечных спектральных характеристик (формируются два 4-точечных ДПФ).

$$S_{10}(0) = S_{00}(0) + W_4^0 \cdot S_{01}(0);$$
$$S_{10}(1) = S_{00}(1) + W_4^1 \cdot S_{01}(1);$$
$$S_{10}(2) = S_{00}(0) - W_4^0 \cdot S_{01}(0);$$
$$S_{10}(3) = S_{00}(1) - W_4^1 \cdot S_{01}(1);$$

$$S_{11}(0) = S_{02}(0) + W_4^0 \cdot S_{03}(0);$$
$$S_{11}(1) = S_{02}(1) + W_4^1 \cdot S_{03}(1);$$
$$S_{11}(2) = S_{02}(0) - W_4^0 \cdot S_{03}(0);$$
$$S_{11}(3) = S_{02}(1) - W_4^1 \cdot S_{03}(1).$$

Вычисления продолжаются до тех пор, пока не получится конечная N-точечная спектральная характеристика $X(k)$ (полное ДПФ входного сигнала) (рис. 5).

$$S(0) = S_{10}(0) + W_8^0 \cdot S_{11}(0);$$
$$S(1) = S_{10}(1) + W_8^1 \cdot S_{11}(1);$$
$$S(2) = S_{10}(2) + W_8^2 \cdot S_{11}(2);$$
$$S(3) = S_{10}(3) + W_8^3 \cdot S_{11}(3);$$
$$S(4) = S_{10}(0) - W_8^0 \cdot S_{11}(0);$$
$$S(5) = S_{10}(1) - W_8^1 \cdot S_{11}(1);$$
$$S(6) = S_{10}(2) - W_8^2 \cdot S_{11}(2);$$
$$S(7) = S_{10}(3) - W_8^3 \cdot S_{11}(3).$$

Рассмотренный алгоритм БПФ содержит $(N/2)\log_2 N$ операций комплексного умножения и $N\log_2 N$ операций комплексного сложения.

4. Программа работы

1. Сформировать в среде MATLAB математическую модель сигнала $x(t)$, (по вариантам из табл. 2). Построить график функции $x(t)$ по формуле

$$x(t) = \sum_{k=1}^{3} A_{f_k} \sin(2\pi \cdot f_k \cdot t + \varphi_k) \qquad (8)$$

2. Используя формулу (1) рассчитать ДПФ прямым методом.
3. Получить в результате выполнения программы амплитудный спектр, вычисленный прямым методом ДПФ.
4. В соответствии с рис. 5 вычислить БПФ, в которой N- точечная последовательность вычисляется через $N/2$ и $N/4$ – точечных последовательностей.
5. Получить в результате выполнения БПФ амплитудный спектр.
6. Сравнить амплитудный спектр, полученный прямым ДПФ, со спектром БПФ и сделать выводы.

5. Контрольные вопросы и задания

1. В чем заключается основная идея быстрого преобразования Фурье? При каком условии может использоваться этот алгоритм?

2. В каком порядке выполняется операции умножения и сложения в базовых операциях алгоритма БПФ с прореживанием по времени?

3. Дана дискретная последовательность $\{0, 1, 1, 0\}$. Постройте направленный граф расчета спектральной характеристики по алгоритму БПФ с прореживанием по времени. Найдите спектральную характеристику $X(k)$, $k=0,1,2,3$.

Приложение

Таблица 2

№	f_1 Гц	f_2 Гц	f_3 Гц	A_{f1}	A_{f2}	A_{f3}	Фазовый сдвиг		
							φ_1	φ_2	φ_3
1	500	2500	5000	3	5	10	45	90	45
2	1000	3000	6000	0,5	1	5	120	180	90
3	2000	4000	6000	3	0,5	5	45	45	90
4	1000	2000	3000	4	2	1	-45	45	120
5	10000	20000	40000	1	5	10	30	120	45
6	1250	3750	11250	2	1	2	90	-45	-45
7	625	1875	3750	3	2	1	30	30	45
8	1250	2500	5000	1	2	3	30	45	120
9	1875	3750	7500	5	10	20	30	90	150
10	3125	6250	12500	0,5	2	5	30	-45	100

Фазовый сдвиг задается в градусах, при использовании формулы (8) его необходимо перевести в радианы.