# 1. Гармонический анализ непериодических сигналов

Андрей Валиков

## 1 Математическая модель сигнала

Исходный сигнал:

$$x(t) = \begin{cases} Ae^{-t/\tau} \text{ if } 0 \leq t \leq T_c \\ 0 \text{ else} \end{cases}$$

Константы имеют следующие значения:

$$A = 2$$

$$\tau = 0.5$$

$$T_c = 0.7$$

```
A, tau = 2, .5
def _func(arg):

  return A * np.exp(-arg / tau) if 0 <= arg.all() < t[-1] else 0

N  = 300
t  =  np.linspace(0, .7, N)

func = _func(t)

ax1 = plt.subplot(221)
ax1.plot(t, func, 'r')
ax1.set_title('Original')
```

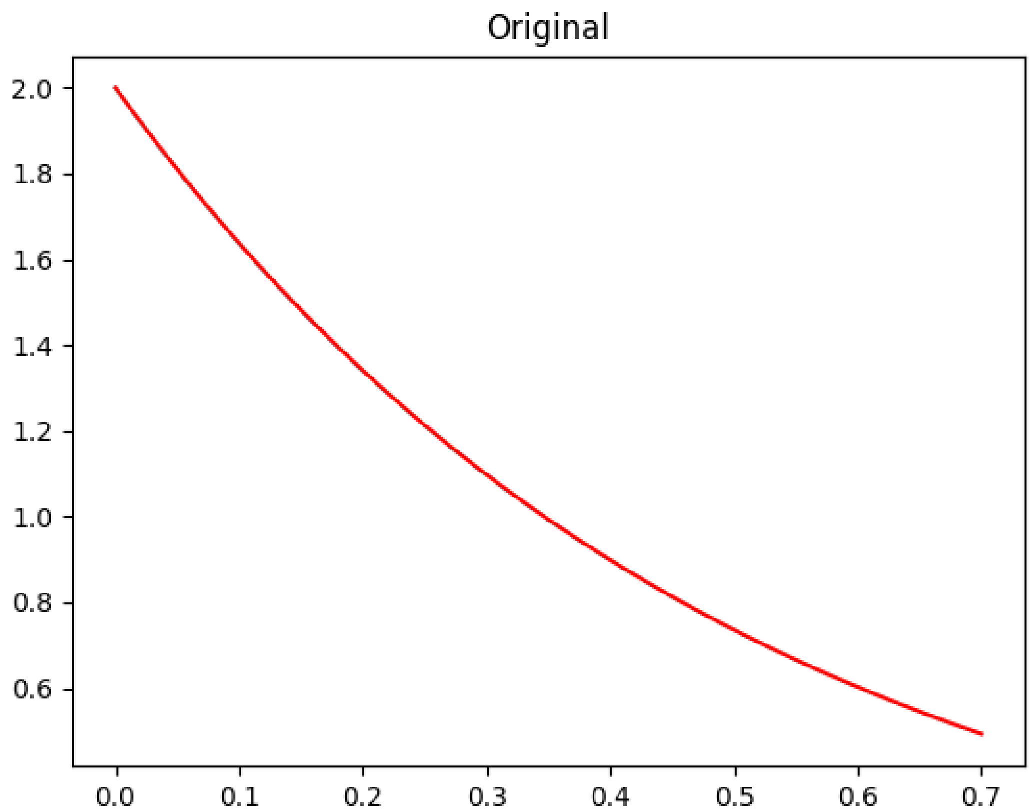


Рис. 1:

## 2 Амплитудная и фазовая спектральные характеристики полученные с помощью прямого преобразования Фурье.

Используется тригонометрическая форма преобразования Фурье:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(\omega t)dt - i\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin(\omega t)dt$$

Модуль полученной спектральной характеристики будет составлять амплитудную характеристику сигнала:

$$A(\omega) = |\hat{f}|$$

А аргумент фазовую:

$$\Phi(\omega) = \arg\hat{f}$$

```
fou = []
om  = np.linspace(0, 2000, N)
for i in range(N):
    re = np.trapz(func * np.cos(t * om[i]), x=t)
    im = np.trapz(func * np.sin(t * om[i]), x=t)
    fou.append(re - im * 1j)

ax2 = plt.subplot(223)
ax2.plot(om, np.abs(fou))
ax2.set_title('Amplitudes')

ax3 = plt.subplot(224)
ax3.plot(om, np.angle(fou))
ax3.set_title('Frequencies')
```

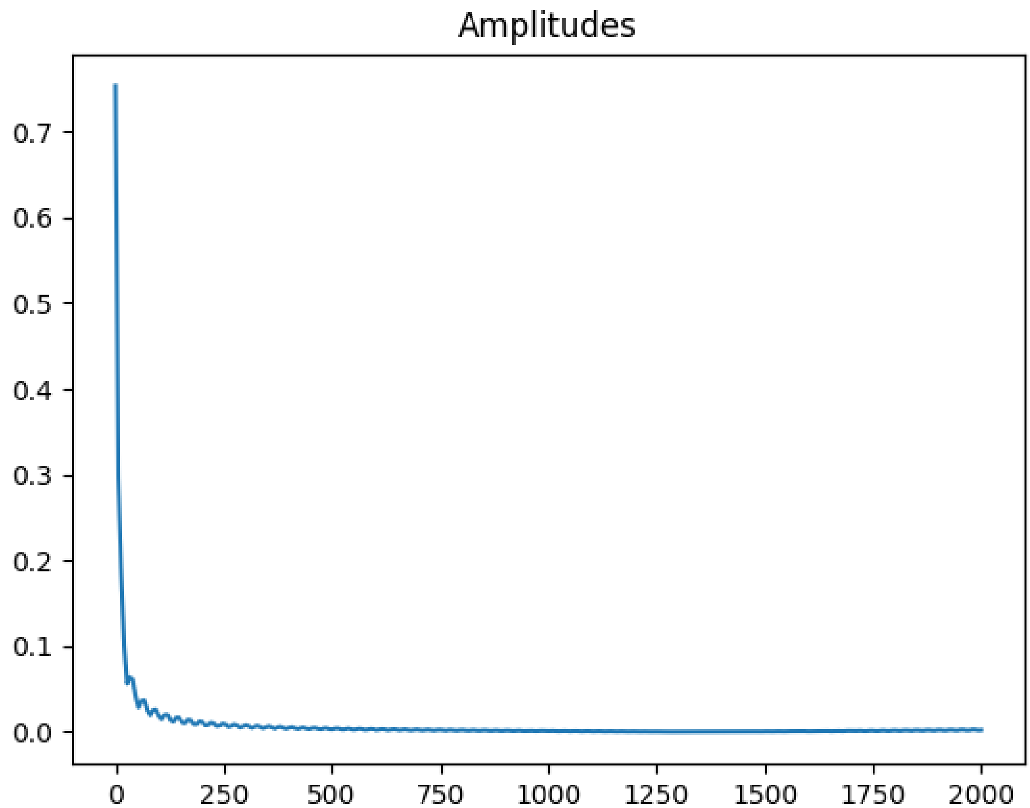
Amplitudes
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
0
250
500
750
1000
1250
1500
1750
2000

Рис. 2:

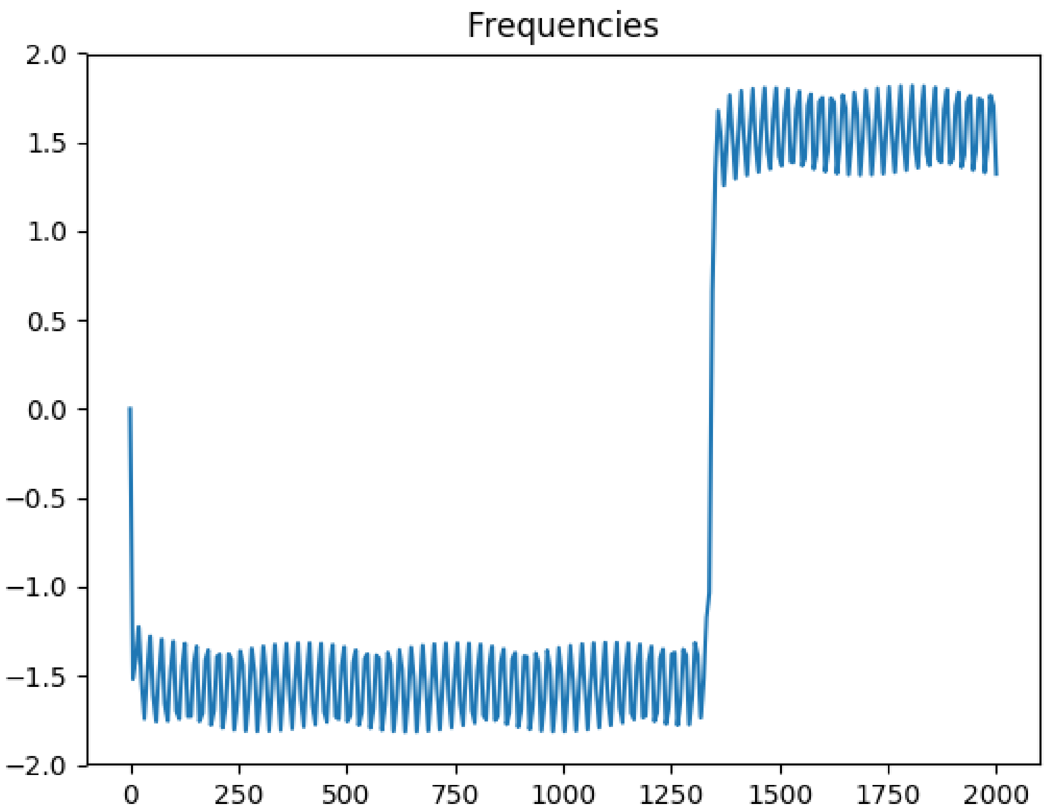
Frequencies
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
0
250
500
750
1000
1250
1500
1750
2000

Рис. 3:

## 3 Восстановление функции с помощью обратного преобразования Фурье

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(\mathrm{Re}(\hat{f})\cos(\omega t) - \mathrm{Im}(\hat{f})\sin(\omega t))d\omega$$

```
rst = []
for i in range(N):
  a = np.trapz(np.real(fou) * np.cos(om * t[i]), x = om)
  b = np.trapz(np.imag(fou) * np.sin(om * t[i]), x = om)
  rst.append((a - b) / np.pi)

ax4 = plt.subplot(222)
ax4.plot(t, rst, 'g')
ax4.set_title('Restored')
```

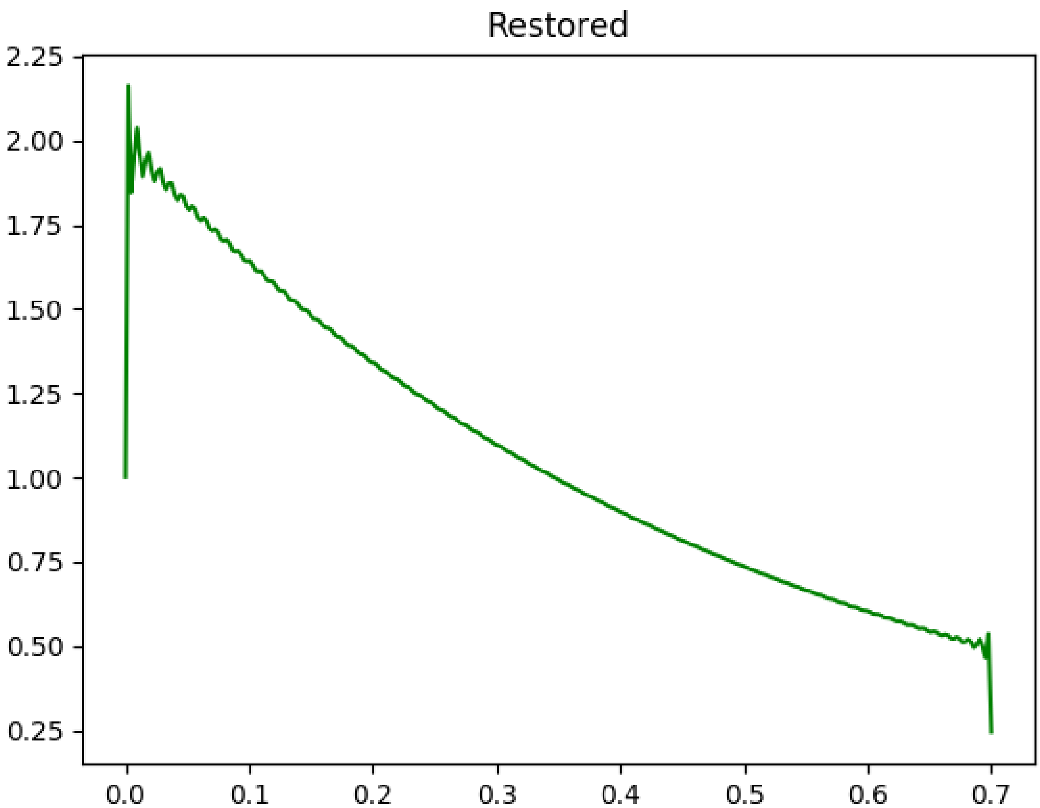
Restored
2.25
2.00
1.75
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7

Рис. 4: