Лабораторная работа 4

СГЛАЖИВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

1.1. Цель работы

При исследовании реальных процессов, как правило, вместо истинной физической величины регистрируется случайная величина $x(t)$, представляющая собой аддитивную смесь самой величины $f(t)$ и помехи $r(t)$, то есть $x(t) = f(t) + r(t)$. Помеха $r(t)$ может генерировать ся непосредственно в исследуемом объекте, попадать в него извне или быть случайной наводкой в цепях измерения и регистрации.

Наличие помехи в последовательности $x(n)$, полученной в результате дискретизации, затрудняет получение достоверной инфор мации об исследуемом процессе. Поэтому последовательность $x(n)$ подвергают первичной обработке, целью которой является сглаживание, то есть полное или частичное устранение помехи $r(n)$. Сглаживание дискретной последовательности $x(n)$ осуществляется при помощи спе циальных алгоритмов.

Целью работы является изучение алгоритмов сглаживания экспе риментальных данных, представленных в виде конечных дискретных последовательностей.

1.2. Основные понятия и расчетные формулы

Изучаемые в работе алгоритмы сглаживания данных описываются линейными разностными уравнениями. Следовательно, их можно рассматривать как цифровые фильтры, которые преобразуют исходную по следовательность $x(n)$ в последовательность $y(n)$, являющуюся оценкой полезной составляющей $f(n)$.

1.3. Сглаживание скользящим усреднением

Суть этого метода сглаживания состоит в последовательном осреднении ординат $x(n)$, $n = 0, 1, ..., N-1$, на интервале $[n - L/2,\ n + L/2]$, где L – целое четное число. Значения сглаженной последовательности $y(n)$ определяются по формуле

$$y\left(n + \frac{L}{2}\right) = \frac{1}{L+1} \sum_{\lambda=0}^{L} x(n+\lambda), \qquad n = 0, 1, ..., N-L-1. \tag{1.1}$$

Согласно этой формуле значение $y(n+L/2)$ находится как среднее арифметическое $L+1$ значений $x(n), x(n+1), ..., x(n+L)$. При этом усредняются значения, расположенные слева и справа от текущего номера дискретной последовательности. Например, при $L=4$ каждый элемент последовательности $y(n)$ вычисляется как среднее пяти значений вход ной последовательности $x(n-2), x(n-1), x(n), x(n+1), x(n+2)$.

Фильтр, реализующий сглаживание по методу скользящего усред нения, существенно ослабляет гармонические составляющие, частоты которых выше $\omega = 2\pi/(T \cdot L)$. Правильный выбор значения L определя ет качество отделения высокочастотной помехи $r(n)$ от более низкочастотной составляющей $f(n)$. Уменьшение L ведет к недостаточному выравниванию экспериментальных данных, а завышение – к искажению существенных особенностей последовательности $f(n)$. Поскольку частотные спектры последовательностей $f(n)$ и $r(n)$ заранее неизвестны, величину L обычно подбирают экспериментально. Обычно процедуру сглаживания начинают со значений $L = 2-4$ и увеличивают в случае необходимости после анализа полученных результатов сглаживания.

1.4. Сглаживание четвертыми разностями

Сглаживание четвертыми разностями производится путем аппроксимации пяти соседних значений последовательности $x(n)$ параболой с помощью метода наименьших квадратов. В качестве элемента сгла женной последовательности $y(n)$ принимается точка параболы, наи лучшим образом аппроксимирующей значения сглаживаемой последо вательности $x(n)$ в пяти точках (рис. 1.1)

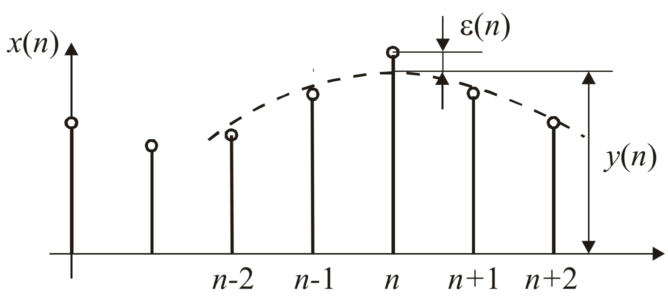

Рис. 1.1. Аппроксимация последовательности в пяти точках

Как показано с помощью метода наименьших квадратов, значение этого элемента вычисляется по формуле

$$y(n) = x(n) - \varepsilon(n), \tag{1.2}$$

где поправка $\varepsilon(n)$ пропорциональна смещенной обратной или прямой разности четвертого порядка:

$$\varepsilon(n)=\frac{3}{35}\Delta^4 x(n+2)=\frac{3}{35}\Delta^4 x(n-2)\ . \qquad (1.3)$$

Использовав известные соотношения для расчета прямых и обрат ных разностей, легко убедиться в том, что

$$\varepsilon(n)=\frac{3}{35}\left[x(n-2)-4\cdot x(n-1)+6\cdot x(n)-4\cdot x(n+1)+x(n+2)\right]. \qquad (1.4)$$

Подставив (1.4) в (1.2), найдем формулу, которая позволяет непо средственно рассчитать ординату выходной последовательности:

$$y(n)=\frac{1}{35}\left[-3\cdot x(n-2)+12\cdot x(n-1)+17\cdot x(n)+12\cdot x(n+1)-3\cdot x(n+2)\right]. \qquad (1.5)$$

1.5. Экспоненциальное сглаживание

Экспоненциальное сглаживание – один из простейших и распространенных приемов выравнивания последовательностей. В его основе лежит расчет экспоненциальных средних. Экспоненциальное сглажива ние последовательности осуществляется при помощи разностного урав нения

$$y(n)=(1-\alpha)\cdot y(n-1)+\alpha\cdot x(n) \qquad (1.6)$$

где α – постоянный коэффициент $(0<\alpha<1)$, называемый *постоянной сглаживания*.

Из выражения (1.6) следует, что текущее значение сглаженной по следовательности $y(n)$ равно предыдущему ее значению плюс некото рая доля (α) разности между текущим значением входной последова тельности и предыдущим значением сглаженной выходной последова тельности.

Если последовательно использовать соотношение (1.6), то экспо ненциальную среднюю $y(n)$ можно выразить через значения входной последовательности $x(\nu)$, $\nu=0,\dots,n$:

$$y(n)=\alpha\cdot x(n)+(1-\alpha)\cdot y(n-1)=$$

$$=\alpha\cdot x(n)+\alpha\cdot(1-\alpha)\cdot x(n-1)+(1-\alpha)^2\cdot y(n-2)=\dots$$

$$\dots=\alpha\sum_{\nu=0}^{n-1}(1-\alpha)^{\nu}\cdot x(n-\nu)+(1-\alpha)^n\cdot x(0). \qquad (1.7)$$

Таким образом, величина $y(n)$ оказывается взвешенной суммой всех членов последовательности $x(n)$, причем веса падают экспоненциально в зависимости от удаления элемента входной последовательности.

Если, например, $\alpha = 0.3$, то текущий элемент последовательности будет иметь вес 0.3, а веса предшествующих элементов составят соответственно 0.21; 0.147; 0.1029 и т.д. Постоянная сглаживания α принимает значения от 0 до 1. Предельное значение $\alpha = 0$ соответствует случаю $L = \infty$ при сглаживании скользящим усреднением. При этом $y(n) = y(n-1)$. Предельное значение $\alpha = 1$ означает, что предыдущие значения вообще не учитываются.

Как показывает практика, значение постоянной сглаживания α следует принимать в пределах от 0.01 до 0.3.

2. Методические указания

Для исследования описанных выше алгоритмов сглаживания формируется тестовая дискретная последовательность

$$x(n) = f(n) + r(n), \quad n = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{1.8}$$

в которой полезная составляющая $f(n)$ состоит из двух гармонических последовательностей с различными частотами:

$$f(n) = \sin\left(\frac{2\pi}{M_1} n\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{M_2} n\right), \tag{1.9}$$

а помеха $r(n)$ представляет собой центрированную случайную последо вательность, генерируемую при помощи стандартных функций Matlab.

Центрированная случайная последовательность $r(n)$ формируется в виде разности

$$r(n) = r1(n) - \text{mean}(r1). \tag{1.10}$$

Здесь нецентрированная случайная последовательность образуется при помощи стандартной функции rand, то есть

$$r1(n) = b\ \text{rand}, \tag{1.11}$$

где b – верхняя граница интервала разброса случайных чисел, а $\text{mean}(r1)$ – среднее значение, определяемое по формуле

$$\text{mean}(r1) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} r1(n). \tag{1.12}$$

Таким образом, тестовая последовательность окончательно принимает вид

$$x(n) = \sin\left(\frac{2\pi}{M_1} n\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{M_2} n\right) + r(n). \tag{1.13}$$

оценки качества сглаживания различных алгоритмов в работе используется сумма

$$J = \sum_{n=10}^{N-10} [y(n) - f(n)]^2 . \qquad (1.14)$$

Пределы изменения n в (1.14) приняты такими, чтобы при сравнении алгоритмов сглаживания с некоторым запасом исключить влияние начального и конечного участков, на которых алгоритмы сглаживания не работают.

3. Программа работы

3.1. Основное задание

1.Сформировать полезную и случайную составляющие сглаживаемой последовательности $x(n)$, $n = 0, 1, ..., N-1$ $(N \approx 200)$, приняв их параметры из табл. 1.1 согласно заданному варианту. Пронаблюдать по лезную и случайную составляющие, а также сглаживаемую последова тельность в целом.

Таблица 1.1

Параметры	Номера вариантов							
	1	2	3	4	5	6	7	8
b	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3
M_1	37	41	43	47	49	37	41	47
M_2	19	23	29	19	23	29	19	23

2. Составить программу сглаживания последовательности $x(n)$ по методу скользящего усреднения и вычисления значения критерия (1.14), характеризующего качество сглаживания. Пронаблюдать сглаженные последовательности и рассчитать значение критерия при $L = 2, 4, 6, 8$. Значения критерия при различных L занести в таблицу и оценить влияние параметра L на качество сглаживания.

3. Составить программу сглаживания последовательности $x(n)$ по методу четвертых разностей. Пронаблюдать сглаженную последовательность и вычислить значение критерия качества.

4. Составить программу экспоненциального сглаживания последовательности $x(n)$. Пронаблюдать сглаженную последовательность и вычислить значения критерия качества при $\alpha = 0.1, 0.2, ..., 0.9$. Данные

занести в таблицу и построить график зависимости критерия качества сглаживания от коэффициента α. Определить оптимальное значение коэффициента α.

5. Сравнить значения критериев качества сглаживания, полученные для различных алгоритмов сглаживания, и сделать выводы.

Контрольные вопросы и задания

1. В каких случаях рекомендуется использовать процедуру сглаживания экспериментальных данных?
2. Почему при сглаживании скользящим усреднением увеличение L приводит к искажению полезной составляющей?
3. Как изменится АЧХ алгоритма скользящего усреднения при увеличении L?
4. Поясните геометрически идею сглаживания четвертыми разностями.
5. В чем заключается аппроксимация по методу наименьших квадратов?
6. Покажите, что уравнения фильтра, полученные через обратную и прямую разности четвертого порядка, эквивалентны.
7. Найдите статический коэффициент передачи фильтра, реали зующего сглаживание четвертыми разностями.
8. Почему в уравнении (1.6) должно выполняться условие $0 < \alpha < 1$?
9. Найдите статический коэффициент передачи экспоненциального фильтра.
10. Какие алгоритмы сглаживания, кроме рассмотренных, Вам из вестны?