Лабораторная работа 5

ОЦЕНИВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

1. Цель работы

При решении многих прикладных задач необходимо знать статистические характеристики случайных процессов. Обычно эти харак теристики определяют по реализациям случайного процесса, полученным экспериментально. Наиболее просто эта задача решается для стационарного случайного процесса, статистические характеристики которого не изменяются во времени. Если стационарный случайный процесс обладает эргодическим свойством, то его статистические характеристики могут быть определены по одной реализации, наблюдаемой на достаточно большом интервале времени.

Целью работы является определение оценок математического ожидания, дисперсии, плотности распределения вероятности и корреляционной функции стационарного случайного процесса по его заданной реализации.

2. Основные понятия и расчетные формулы

2.1. Подготовка данных

Пусть дана реализация $x_{\text{р}}(t)$ стационарного случайного процесса длительностью $T_{\text{р}}$ (рис. 1.1).

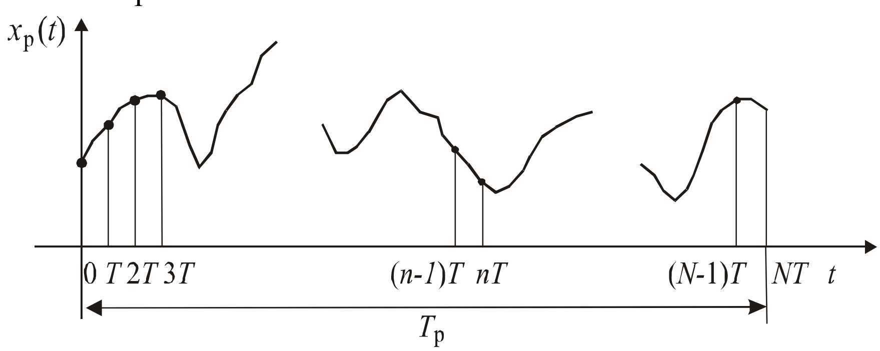

Рис. 1. Дискретизация реализации случайного процесса

На основании эргодического свойства математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция этого стационарного случайного процесса определяются соответственно выражениями:

$$m_x = \lim_{T_p \to \infty} \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} x_p(t)\,dt \tag{1.1}$$

$$D_x = \lim_{T_p \to \infty} \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} \left[x_p(t) - m_x \right]^2 dt \ , \tag{1.2}$$

$$R_x(\tau) = \lim_{T_p \to \infty} \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} \left[x_p(t) - m_x \right] \left[x_p(t+\tau) - m_x \right] dt. \tag{1.3}$$

Оценки приведенных выше статистических характеристик находят ся по имеющейся реализации $x_p(t)$ заданной длины по следующим формулам, полученным из (1.1) – (1.3):

$$m_x^* = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} x_p(t)\,dt \ , \tag{1.4}$$

$$D_x^* = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} \left[x_p(t) - m_x^* \right]^2 dt \ , \tag{1.5}$$

$$R_x^*(\tau) = \frac{1}{T_p - \tau} \int_0^{T_p - \tau} \left[x_p(t) - m_x^* \right] \left[x_p(t+\tau) - m_x^* \right] dt \ . \tag{1.6}$$

Расчет численных значений оценок математического ожидания m_x^*, дисперсии D_x^* и ординат функции $R_x^*(\tau)$, являющейся оценкой корреляционной функции, производится путем дискретизации реализации $x_p(t)$ случайного процесса и заменой интегралов в выражениях (1.4)–(1.6) суммами. Для этого интервал наблюдения $[0, T_p]$ случайного процесса (рис. 1.1) разбивается на N достаточно малых интервалов длительностью T. В начале каждого из этих интервалов определяются значения

$$x(0) = x_p(0),\ x(1) = x_p(T),\ \ldots\ , x(N-1) = x_p((N-1)T). \tag{1.7}$$

При этом возникает задача выбора необходимой длины T_p реали зации случайного процесса и длительности T интервала дискретизации. Необходимая длина реализации в основном определяется требуемой точностью оценивания корреляционной функции и ее свойствами. Раз работаны методики, которые позволяют оценить необходимую длину реализации для получения корреляционной функции с заданной точно стью непосредственно по отрезку реализации случайного процесса. Например, для определения T_p используется связь среднего числа максимумов и нулей случайного процесса в единицу времени с параметрами корреляционной функции. Шаг дискретизации T рекомендуют выби рать так, чтобы на «полупериод» (время между двумя пересечениями графиком случайной функции линии математического ожидания) реали зации случайного процесса приходилось около семи дискретных значе ний.

2.2. Оценки математического ожидания и дисперсии

Для оценки математического ожидания, заменив в (1.4) интеграл суммой, получим

$$m_x^* = \frac{1}{N \cdot T} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot T = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) . \tag{1.8}$$

Таким образом, оценка математического ожидания равна среднему арифметическому значений $x(0), x(1), \ldots, x(N-1)$ реализации случайного процесса в дискретные моменты времени.

Для оценки дисперсии из формулы (1.5) найдем

$$D_x^* = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) - m_x^*]^2 . \tag{1.9}$$

Однако эта оценка дисперсии оказывается смещенной. На практике применяется формула, которая удовлетворяет условию несмещенности:

$$D_x^* = \frac{1}{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) - m_x^*]^2 . \tag{1.10}$$

2.3. Оценка одномерной плотности распределения

Оценка одномерной плотности распределения вероятности случайного процесса сводится к построению гистограммы распределения зна чений $x(0), x(1), \ldots, x(N-1)$ реализации. Для этого следует разбить по лученный диапазон значений случайных чисел на равные интервалы и вычислить частоты попадания случайных чисел в эти интервалы.

Большое значение при построении гистограммы имеет разбиение интервала изменения случайных чисел на интервалы группировки. При слишком большом числе интервалов группировки некоторые из них оказываются слабозаполненными и гистограмма получается изрезанной и многолепестковой. При малом числе интервалов гистограмма утрачи вает детальность и становится малоинформативной. В работе рекомен дуется принять $L \approx \sqrt{N}$ (L–целое).

2.4. Оценка корреляционной функции

По формуле (1.6) для значений оценки корреляционной функции в дискретные моменты времени $\tau_m = m \cdot T \ \left(m = 0, 1, \ldots\right)$ получим

$$R_x^*(m) = \frac{1}{N - m} \sum_{n=0}^{N-m-1} [x(n) - m_x^*][x(n+m) - m_x^*] \ , \qquad (1.11)$$

$$m = 0, 1, \ldots, M - 1.$$

Показано, что чем больше m, тем больше ошибка определения корреляционной функции. Поэтому формулу (1.11) рекомендуют использовать при $M < N/10$. Найденную по формуле (1.11) оценку корреляционной функции необходимо дополнить симметричными отсчетами для отрицательных $m = -M + 1, \ldots, -1$.

3. Методические указания

В качестве объекта исследования используется последовательность случайных чисел $x(0), x(1), \ldots, x(N-1)$, моделирующая некоторый стационарный случайный процесс. Для получения этой последовательности используется генератор случайных чисел, имеющийся в составе системы Matlab, и линейный дискретный фильтр (рис. 2).

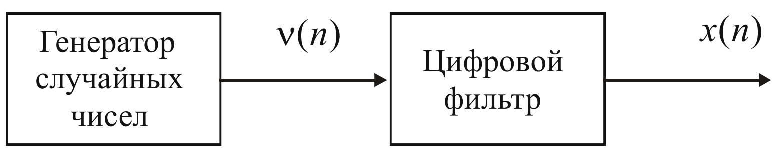

Рис. 2. Формирование последовательности случайных чисел

Функция $v(n)$= b rand в системе Matlab генерирует случайные числа с равномерным распределением в интервале $[0, b]$. Линейный фильтр первого порядка описывается разностным уравнением

$$x(n) = (1 - a) \cdot x(n-1) + a \cdot v(n), \quad n = 1, 2, \ldots, \ N - 1, \qquad (1.12)$$

где a – постоянный коэффициент и $x(0)$ – первый элемент генерируемой последовательности, значение которого можно принять равным $x(0) = b/2$. Значения a и b даны в табл. 1.

Таблица 1

Параметры	Номера вариантов							
	1	2	3	4	5	6	7	8
a	0,20	0,24	0,28	0,32	0,36	0,40	0,44	0,48
b	3	2	10	6	9	12	5	7

При построении гистограммы для определения частот попадания случайных чисел $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$ в заданные интервалы использу ется стандартная функция $\mathrm{hist}(X,\ w)$ системы Matlab. Для того чтобы применить указанную функцию, надо сформировать вектор w с состав ляющими $w(0), w(1), \dots,\ w(L)$, представляющими собой границы интер валов группировки. Эти составляющие образуют по формуле

$$w(l+1) = w(l) + \Delta w, \qquad l = 0,1,\dots,L-1, \tag{1.13}$$

где

$$\Delta w = \frac{\max(x) - \min(x)}{L}; \qquad w(0) = \min(x). \tag{1.14}$$

4. Программа работы

4.1. Основное задание

1. Сформировать последовательность случайных чисел $v(n)$, $n = 0,1,\dots,N-1$ ($N \in [500, 1000]$).

2. Получить последовательность случайных чисел $x(n)$, $n = 0,1,\ \dots, N-1$ путем преобразования последовательности чисел $v(n)$, $n = 0,1,\dots,N-1$ при помощи дискретного фильтра, описываемого разно- стным уравнением (1.12).

Примечание: Значение коэффициента a цифрового фильтра выбираются согласно заданному варианту из табл. 1.1.

3. Разбить интервал изменения значений случайных чисел в последовательности $x(n)$, $n = 0,1,\ \dots, N-1$ на L интервалов группиров ки, определив последовательность $w(0),\ w(1),\ \dots,\ w(L)$, и построить гистограмму. Сделать вывод о характере распределения случайной последовательности $x(n)$, $n = 0,1,\ \dots, N-1$.

4. Определить значение оценки m_x^* математического ожидания случайной последовательности $x(n)$, $n = 0,1,\ \dots, N-1$.

5. Определить значение оценки D_x^* дисперсии случайной последо вательности $x(n)$, $n = 0,1,\ \dots, N-1$.

6. Рассчитать значения ординат оценки $R_x^*(m)$ корреляционной функции для $m = 0, 1, ..., 32$. Построить график оценки корреляционной функции.

5. Контрольные вопросы и задания

1. Что понимают под реализацией случайного процесса?
2. Какой случайный процесс называется стационарным?
3. В чем состоит суть эргодического свойства?
4. Выразите свое отношение к следующим утверждениям: а) лю бой стационарный случайный процесс обладает эргодическим свойст- вом; б) случайный процесс, обладающий эргодическим свойством, яв ляется стационарным.
5. Поясните физический смысл понятий математического ожида ния и дисперсии стационарного случайного процесса.
6. Как связаны между собой среднее квадратическое отклонение и дисперсия случайного процесса?
7. Какое свойство стационарного случайного процесса характери зует корреляционная функция?
8. Какая связь существует между дисперсией и корреляционной функцией стационарного случайного процесса?