Лабораторная работа 7

СПЕКТРАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПРИ ПОМОЩИ ПЕРИОДОГРАММНОГО МЕТОДА

1. Цель работы

Периодограммный метод относится к классическим методам спектрального оценивания. В этом методе преобразование Фурье применя ется непосредственно к последовательности, полученной в результате дискретизации конечной реализации случайного процесса.

Целью работы является изучение периодограммного метода оценивания спектральной плотности и его практическое освоение на примере анализа тестовой дискретной последовательности, содержащей две гармонические составляющие и помеху.

2. Основные понятия и расчетные формулы

2.1. Периодограммный метод оценивания спектральной плотности

Спектральная плотность мощности случайного процесса может быть получена в результате непосредственного преобразования Фурье случайного процесса. Преобразование Фурье реализации случайного процесса $x_{\text{р}}(t)$ имеет вид

$$X_{\text{р}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{\text{р}}(t)\, e^{-j\,\omega\, t} dt\,. \tag{1}$$

Спектральная плотность мощности определяется по формуле:

$$S_x(\omega) = \lim_{T_{\text{р}} \to \infty} \frac{1}{2 \cdot T_{\text{р}}} M\,[\,|\,X_{\text{р}}(j\omega)|^2\,]. \tag{2}$$

Оценка спектральной плотности производится по известной реализа ции $x_{\text{р}}(t)$ случайного процесса путем формирования из нее дискрет ной последовательности $x(n),\ n = 0,1,\dots,N-1$ и обработки этой последовательности в соответствии с приведенными выше формулами.

Преобразование Фурье действительной последовательности конечной длины $x(n),\ n = 0, 1,\dots, N-1,$ равно

$$X(e^{j\,\omega T}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\,\omega T\, n}\,. \tag{3}$$

Пренебрегая операцией вычисления математического ожидания в формуле (2), в качестве оценки спектральной плотности используют функцию

$$P_x(\omega) = \frac{1}{N}\ |X(e^{j\ \omega T})|^2\ . \tag{4}$$

Оценка спектральной плотности, полученная с помощью прямого преобразования Фурье согласно формулам (3) и (4), получила название *периодограммы*.

При использовании дискретного преобразования Фурье формулы (3) и (4) принимают следующий вид:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j\ \Omega\ T\ k\ n},\ \ k = 0,1,\ldots,N-1, \tag{5}$$

$$P_x(k) = \frac{1}{N}\ |X(k)|^2\ ,\ k = 0,1,\ldots,N-1. \tag{6}$$

В общем случае, поскольку была опущена операция математического ожидания, периодограмма не является состоятельной оценкой и суще ствует возможность ее флуктуации около истинного значения спектра. Для получения состоятельной оценки спектра используются фильтры и методы усреднения периодограмм.

Используя фильтр нижних частот с частотной характеристикой $H(k)$, получают модифицированную периодограмму

$$\widetilde{P}_x(k) = H(k) P_x(k)\,. \tag{7}$$

В частности, фильтрация может быть выполнена с помощью алгоритма скользящего усреднения, рассмотренного в лабораторной работе 4.

При использовании метода усреднения периодограмм из исходной последовательности данных формируется псевдоансамбль дискретных последовательностей (сегментов) и соответствующий псевдоансамбль периодограмм. Получили известность алгоритмы Бартлетта и Уэлча. В алгоритме Бартлетта исходная дискретная последовательность из N от счетов разбивается на V неперекрывающихся сегментов. Основное от личие алгоритма Уэлча состоит в том, что используется перекрывающееся сегментирование исходной последовательности отсчетов.

Рассмотрим последовательность действий при использовании алгоритма Уэлча. На **первом этапе** из анализируемой дискретной последовательности $x(n)$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, формируется несколько сегментов. При этом выбирается коэффициент D перекрытия соседних сегментов и определяется число V сегментов. Как правило, коэффициент перекры тия $D = 0.5$ или $D = 0.75$.

Число V сегментов определяется по формуле

$$V = E_{\text{ц}}[(N - D \cdot L)/(L - D \cdot L)], \qquad (8)$$

где N – общее количество отсчетов анализируемого процесса, L – количество отсчетов в формируемых сегментах, $E_{\text{ц}}$ означает «целая часть числа, заключенного в квадратные скобки».

После этого из заданной дискретной последовательности формируется V дискретных последовательностей $x_r(l)$, $r = 1,...,V$, $l = 0,1,...,L-1$. Варианты перекрытия сегментов, соответствующие данным значениям коэффициента $V = 3$, показаны на рис. 1.

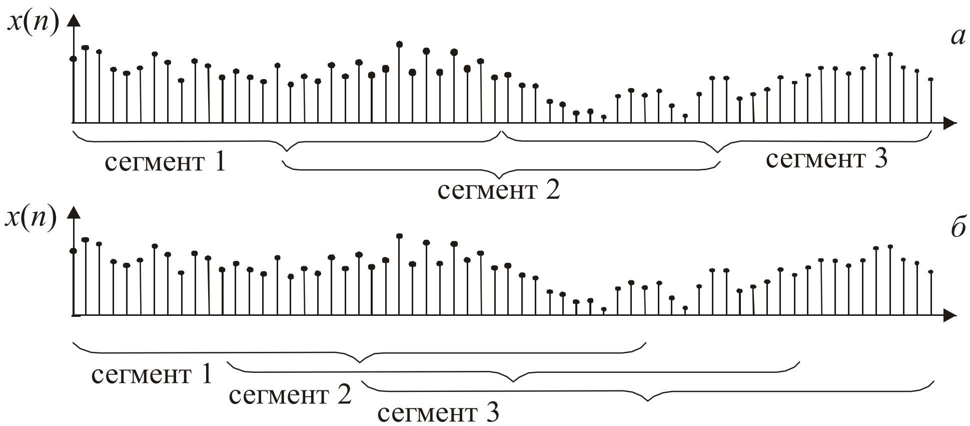


Рис. 1. Варианты перекрытия сегментов:
а – с коэффициентом перекрытия $D = 0.5$;
б – с коэффициентом перекрытия $D = 0.75$

На **втором этапе** выбирается оконная функция $w(l)$, осуществляется преобразование дискретных последовательностей $x_r(l) \cdot w(l)$, $r = 1,...,V$, $l = 0,1,...,L-1$ по Фурье:

$$X_r(k) = \sum_{l=0}^{L-1} x_r(l) \cdot p(l) \cdot e^{-j\,\Omega\,T\,k\,l}, \quad k = 0,1,...,N-1, \quad r = 1,...,V \qquad (9)$$

и производится расчет функций:

$$P_{xr}(k) = \frac{1}{N} |\, X_r(k)|^2 \; . \qquad (10)$$

На **третьем этапе** выполняется усреднение результатов, полученных для нескольких сегментов, с целью уменьшения дисперсии оценки. Усредненная оценка рассчитывается по формуле

$$S_x^*(k) = \frac{1}{V} \sum_{r=1}^{V} P_{xr}(k) \; . \qquad (11)$$

Для вычисления спектральных характеристик $X(k)$ могут быть ис пользованы алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ).

3. Методические указания

Для исследования описанных выше методов оценивания спектральной плотности формируется тестовая последовательность

$$x(n) = f(n) + r(n), \quad n = 0, 1, ..., N, \tag{12}$$

в которой полезная составляющая $f(n)$ образуется путем дискретиза ции сигнала $f(t)$, состоящего из двух гармонических составляющих с различными частотами:

$$f(n) = \sin(\omega_1 T\ n) + \cos(\omega_2 T\ n), \tag{13}$$

а помеха $r(n)$ представляет собой центрированную случайную после довательность, генерируемую при помощи стандартных функций системы Matlab. Нецентрированная случайная последовательность $r1(n)$ формируется при помощи стандартной функции rand:

$$r1(n) = b \text{ rand}, \tag{14}$$

где b – верхняя граница интервала разброса случайных чисел. Эта по следовательность центрируется при помощи функции $mean(r1)$. В ре зультате будем иметь

$$r(n) = r1(n) - \text{mean}(r1). \tag{15}$$

Таким образом, тестовая последовательность окончательно принимает вид

$$x(n) = \sin(\omega_1 T\ n) + \cos(\omega_1 T\ n) + r(n). \tag{16}$$

Число элементов в этой последовательности принимается равным $N = 2^m$, где m – целое число. Значения параметров последовательности приведены в табл. 1. Целью работы является оценивание значений ω_1 и ω_2.

Таблица 1

Параметры	Номера вариантов							
	1	2	3	4	5	6	7	8
T, с	0.01	0.02	0.002	0.012	0.005	0.015	0.008	0.004
ω_1,рад/с	94	81	360	300	200	150	180	280
ω_2,рад/с	5.2	14	120	80	120	20	50	100
Оконная функция	Бартлетта		Хэнна		Хэмминга		Блэкмана	

Оценивание спектральной плотности по методу периодограмм осуществляется согласно описанному выше алгоритму, например, при $N = 2048$, $L = 1024$ и $D = 0.5$. При этом согласно формуле (7) имеем число интервалов $V = 3$, то есть исследуемая последовательность $x(n)$ разбивается на три последовательности $x_1(n), x_2(n), x_3(n)$, как показано на рис. 1, *а*. Последовательности $x_1(n), x_2(n), x_3(n)$ подвергаются преобразованию при помощи оконной функции $w(n)$ заданного вида (см. табл. 1. и приложение 1):

$$y_i(n) = x_i(n) \cdot w(n), \quad i = 1, 2, 3. \tag{17}$$

Преобразование дискретных последовательностей $y_i(n)$ по Фурье осуществляется при помощи алгоритма БПФ, реализованного в системе Matlab. Обращение к нему осуществляется в следующем виде:

$$S = \mathrm{fft}(x), \tag{18}$$

где x – массив, образованный значениями дискретной последователь ности; S – массив, составляющими которого являются значения спектральной характеристики (спектральной плотности) в дискретных точках частотного интервала.

Оценка спектральной плотности будет получена в виде дискретной последовательности $S_x^*(k)$, $k = 0, 1, ..., 512$. График оценки $S_x^*(k)$ может выглядеть, например, так, как показано на рис. 2.

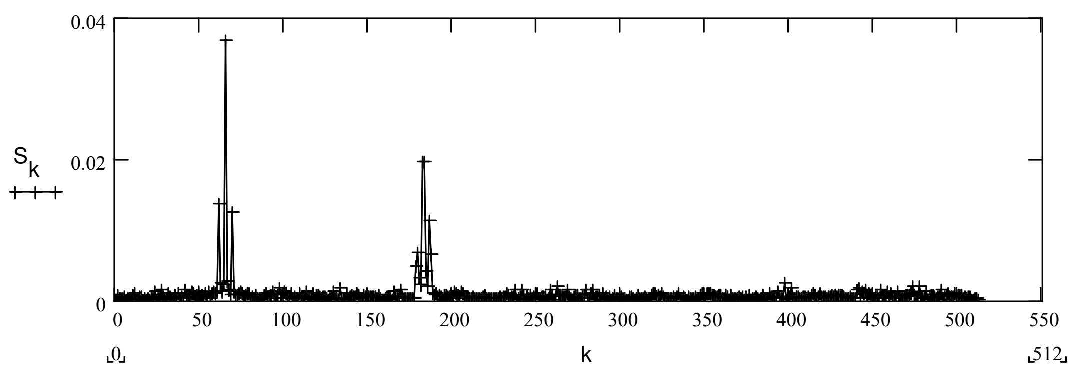


Рис. 2. Оценка спектральной плотности мощности, полученная при помощи метода периодограмм

Чтобы оценить значения ω_1 и ω_2, необходимо найти значения k_1^* и k_2^*, соответствующие точкам максимума. Легко убедиться, что

$$\omega_1^* = \frac{\pi}{512 \cdot T} k_1^*, \quad \omega_2^* = \frac{\pi}{512 \cdot T} k_2^* . \tag{19}$$

4. Программа работы

4.1. Основное задание

1. Сформировать исследуемую последовательность $x(n)$, $n = 0, 1, ..., N-1$ $(N = 2048)$, задав параметры регулярной составляю щей из табл.1 согласно заданному варианту и приняв для случайной составляющей произвольное значение b из интервала [5; 10]. Пронаблюдать на экране полезную и случайную составляющие, а также иссле дуемую последовательность в целом.

2. Разбить последовательность $x(n)$, на сегменты с коэффициентом перекрытия $D = 0.5$ и сформировать три последовательности $x_1(n), x_2(n), x_3(n)$.

3. Рассчитать спектральные характеристики $X_1(k)$, $X_2(k)$, $X_2(k)$ и периодограммы $P_{x1}(k)$, $P_{x2}(k)$, $P_{x3}(k)$.

4. Получить оценку спектральной плотности мощности $S_x^*(k)$ и рассчитать оценки ω_1^* и ω_2^*.

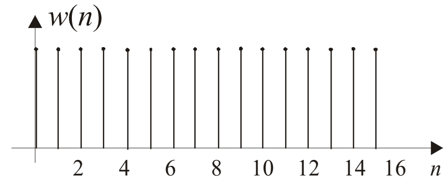
4.2. Дополнительное задание

5. Повторить пункты 2–4 программы, предварительно подвергнув последовательности $x_1(n), x_2(n), x_3(n)$ преобразованию при помощи за данной в табл. 1 оконной функции. Сделать выводы.

Характеристики оконных функций

Прямоугольное (равномерное) окно

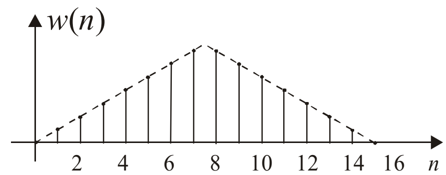
$$w(n) = 1,\quad 0 \le n \le N-1$$



$$A_{пл} = -13;\ \Delta\omega = 4\pi/N;\ A_{мин} = -21$$

Треугольное окно (окно Бартлетта)

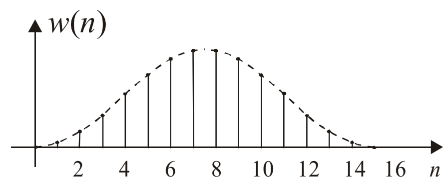
$$w(n) = \begin{cases} \dfrac{2n}{N-1}, & 0 \le n \le \dfrac{N-1}{2}, \\ 2 - \dfrac{2n}{N-1}, & \dfrac{N-1}{2} \le n \le N-1, \end{cases}$$



$$A_{пл} = -25;\ \Delta\omega = 8\pi/N;\ A_{мин} = -25$$

Косинус-квадрат (окно Хэнна)

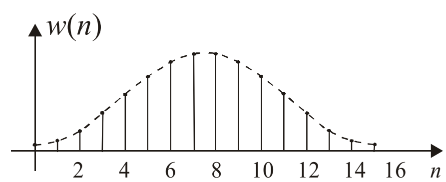
$$w(n) = 0.5\{1 - \cos[2\pi n/(N-1)]\},\quad 0 \le n \le N-1;$$



$$A_{пл} = -31;\ \Delta\omega = 8\pi/N;\ A_{мин} = -44$$

Приподнятый косинус (окно Хэмминга)

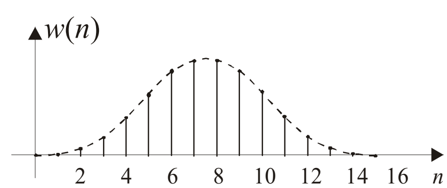
$$w(n) = 0{,}54 - 0{,}46 \cdot \cos[2\pi n/(N-1)],\quad 0 \le n \le N-1$$



$$A_{пл} = -41;\ \Delta\omega = 8\pi/N;\ A_{мин} = -53$$

Окно Блэкмана

$$w(n) = 0.42 - 0.5 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N-1} n\right) + 0.08 \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{N-1} n\right);\ 0 \le n \le N-1$$



$$A_{пл} = -57;\ \Delta\omega = 12\pi/N;\ A_{мин} = -74$$

$A_{пл}$ – амплитуда пика бокового лепестка, дБ

$\Delta\omega$ – ширина переходной полосы главного лепестка;

$A_{мин}$ – минимальное затухание в полосе задерживания, дБ.