

1. Гармонический анализ непериодических СИГНАЛОВ

Андрей Валиков

1 Математическая модель сигнала

Исходный сигнал:

$$x(t) = \begin{cases} Ae^{-t/\tau} & \text{if } 0 \leq t \leq T_c \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

Константы имеют следующие значения:

$$A = 2$$

$$\tau = 0.5$$

$$T_c = 0.7$$

```
A, tau = 2, .5
```

```
def _func(arg):
```

```
    return A * np.exp(-arg / tau) if 0 <= arg.all() < t[-1] else 0
```

```
N = 300
```

```
t = np.linspace(0, .7, N)
```

```
func = _func(t)
```

```
ax1 = plt.subplot(221)
```

```
ax1.plot(t, func, 'r')
```

```
ax1.set_title('Original')
```

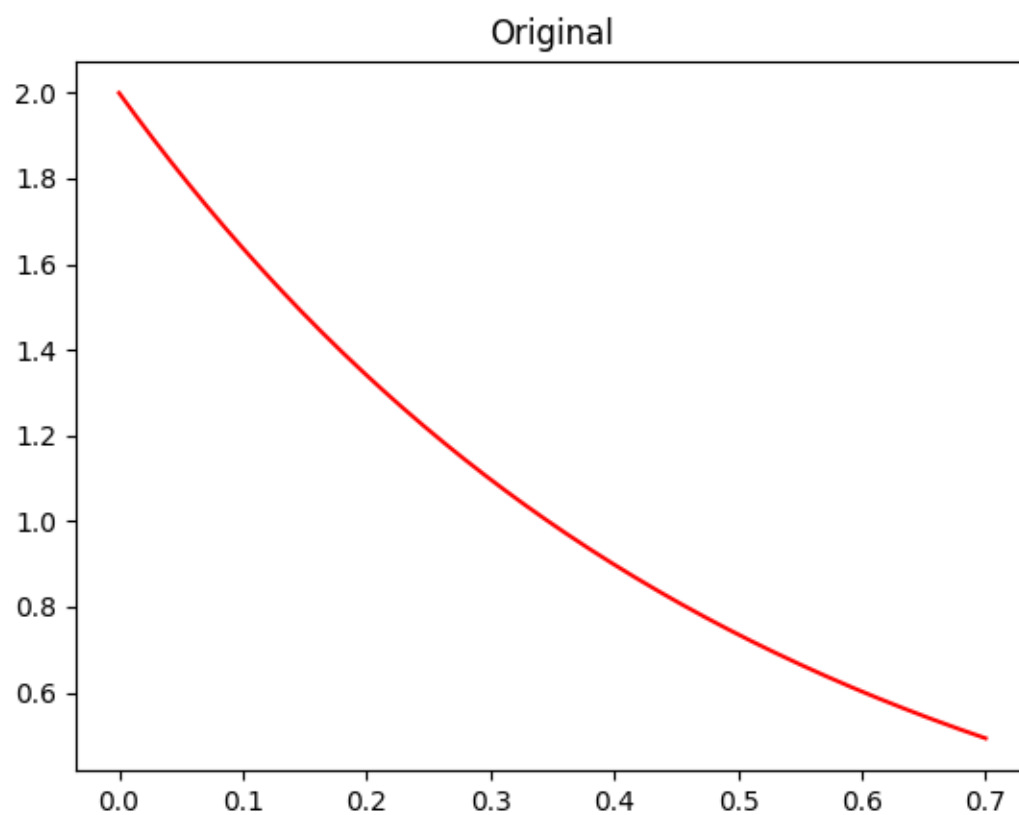


Рис. 1:

2 Амплитудная и фазовая спектральные характеристики полученные с помощью прямого преобразования Фурье.

Используется тригонометрическая форма преобразования Фурье:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(\omega t) dt - i \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(\omega t) dt$$

Модуль полученной спектральной характеристики будет составлять амплитудную характеристику сигнала:

$$A(\omega) = |\hat{f}|$$

А аргумент фазовую:

$$\Phi(\omega) = \arg \hat{f}$$

```
fou = []  
om = np.linspace(0, 2000, N)  
for i in range(N):  
    re = np.trapz(func * np.cos(t * om[i]), x=t)  
    im = np.trapz(func * np.sin(t * om[i]), x=t)  
    fou.append(re - im * 1j)
```

```
ax2 = plt.subplot(223)  
ax2.plot(om, np.abs(fou))  
ax2.set_title('Amplitudes')
```

```
ax3 = plt.subplot(224)  
ax3.plot(om, np.angle(fou))  
ax3.set_title('Frequencies')
```

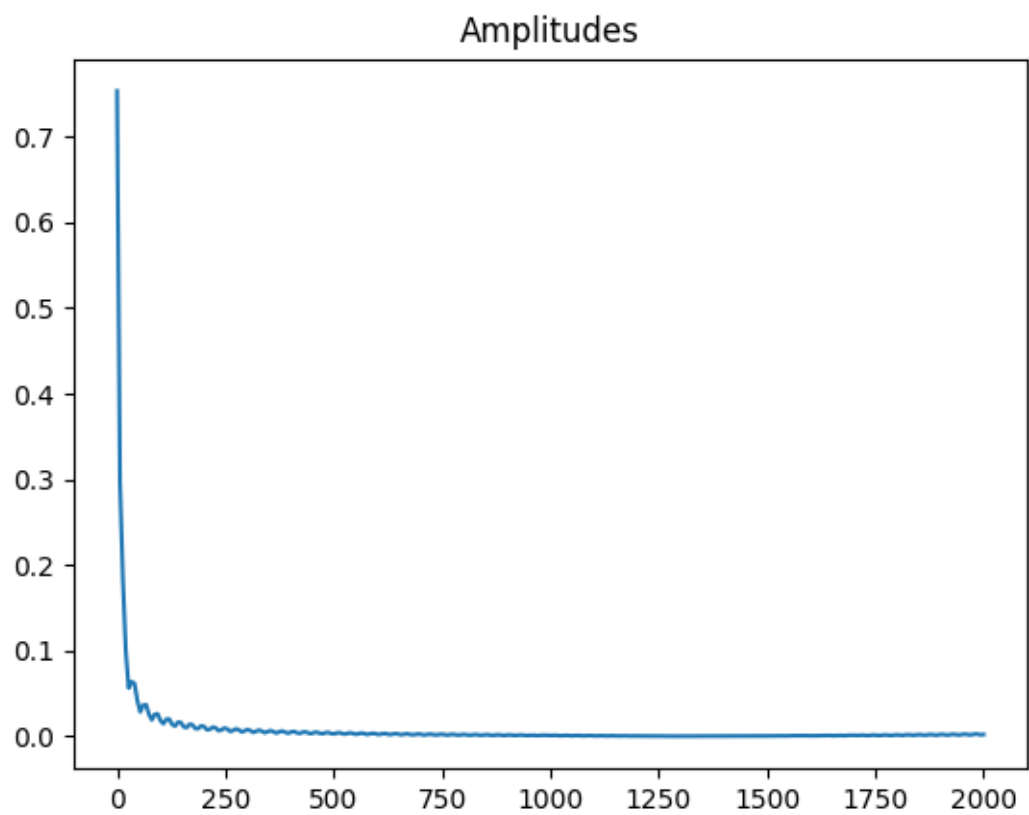


Рис. 2:

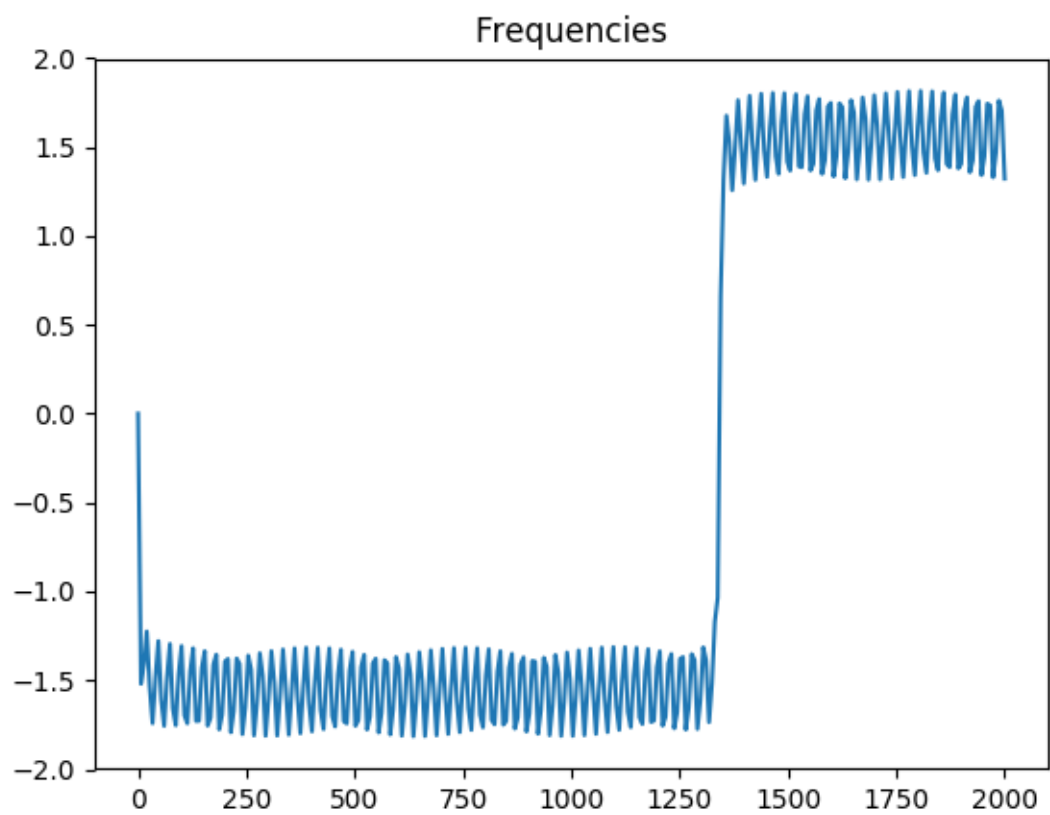


Рис. 3:

3 Восстановление функции с помощью обратного преобразования Фурье

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (\operatorname{Re}(\hat{f}) \cos(\omega t) - \operatorname{Im}(\hat{f}) \sin(\omega t)) d\omega$$

```
rst = []
for i in range(N):
    a = np.trapz(np.real(fou) * np.cos(om * t[i]), x = om)
    b = np.trapz(np.imag(fou) * np.sin(om * t[i]), x = om)
    rst.append((a - b) / np.pi)

ax4 = plt.subplot(222)
ax4.plot(t, rst, 'g')
ax4.set_title('Restored')
```

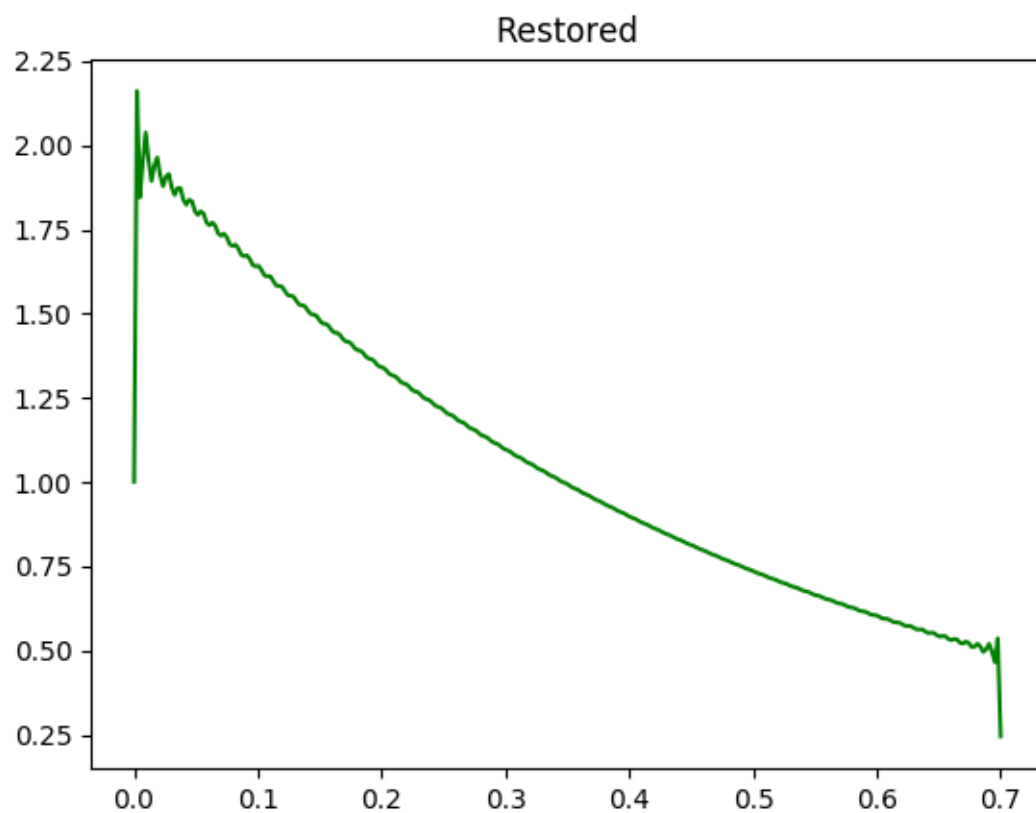


Рис. 4:

4 Вывод

Имеется исходный сигнал, экспонента на интервале $[0, T_c]$, нулевое значение на остальных аргументах.

С помощью прямого преобразования Фурье получается Фурье образ, комплексный ряд.

По известным формулам получен амплитудный спектр (модуль). И фазовую (аргумент)

Обратное преобразование Фурье позволяет восстановить исходную сигнал.