作业 7

1. 考虑扩散方程 $\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 的有限差分格式

$$\left(1 - \frac{a\tau}{2h^2}\delta_x^2\right)\left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau}\right) = \frac{a}{h^2}\left(1 - \frac{1}{12}\delta_x^2\right)\delta_x^2 u_j^n,$$

   其中

$$\delta_x^2 u_j = u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}.$$

   求其截断误差。(注意：该格式的精度优于 $O(\tau^2 + h^2)$。)

2. 编写 Python 程序，利用 Lax-Wendroff 法计算偏微分方程 $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$，其中 $(t, x) \in \mathcal{D} = \{(t, x) | -1 \le x \le 1, 0 \le t \le 1\}$，边界条件为

$$u(t, -1) = 0, u(0, x) = \begin{cases} 0, & x < -1/2 \\ 1, & x \in [-1/2, 1/2] \\ 0, & x > 1/2 \end{cases}.$$

   要求：

   (1) 根据稳定性条件自行选择合适的时间和空间步长，并注意边界问题的处理。

   (2) 利用 matplotlib.pyplot.contourf 函数绘制数值计算结果。

   (3) 计算数值结果与真实解的相对误差

$$\frac{\sqrt{\sum_{(t_n, x_j)\in\mathcal{D}} \left(u_j^n - u(t_n, x_j)\right)^2}}{\sqrt{\sum_{(t_n, x_j)\in\mathcal{D}} u(t_n, x_j)^2}}.$$

   (4) 提供一个报告，简要阐述你的程序和运行结果，并附上可执行的.py 文件。代码文件需有适当的注释。