

## 作业 8

1. 利用有限体积法推导扩散方程  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  的 Crank-Nicolson 格式。
2. 对于形如

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F\left(u, x, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

的 PDE, Crank-Nicolson 格式采用如下方法实现时间离散化

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{1}{2} \left[ F\left(u, x, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \Big|_{t=t_{n+1}, x=x_j} + F\left(u, x, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \Big|_{t=t_n, x=x_j} \right].$$

请据此设计如下方程的 Crank-Nicolson 格式并编写 Python 程序求解:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u(0, t) = g_0(t), \quad u(1, t) = g_1(t),$$

其中  $f, u_0, g_0, g_1$  可根据其真实解  $u(x, t) = (\cos t)x^2 \sin(\pi x)$  确定。要求:

- (1) 自行选择合适的时间和空间步长, 并注意边界问题的处理。
- (2) 利用 `matplotlib.pyplot.contourf` 函数绘制数值计算结果。
- (3) 计算数值结果与真实解的相对误差

$$\frac{\sqrt{\sum_{(t_n, x_j) \in \mathcal{D}} (u_j^n - u(t_n, x_j))^2}}{\sqrt{\sum_{(t_n, x_j) \in \mathcal{D}} u(t_n, x_j)^2}}.$$

- (4) 提供一个报告, 简要阐述你的程序和运行结果, 并附上可执行的.py 文件。代码文件需有适当的注释。