

作业 10

1. 证明：若有限差分近似

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} \approx \frac{1}{4h^2} \sum_{(k, l) \in \{-1, 0, 1\}^2} c_{k, l} u(x + kh, y + lh)$$

具有相容性，则存在实数 α, β, γ 使得

$$\begin{bmatrix} c_{-1,1} & c_{0,1} & c_{1,1} \\ c_{-1,0} & c_{0,0} & c_{1,0} \\ c_{-1,-1} & c_{0,-1} & c_{1,-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - \alpha - \beta + \gamma & 2(\alpha - \gamma) & 1 - \alpha + \beta + \gamma \\ 2(\alpha + \beta) & -4\alpha & 2(\alpha - \beta) \\ 1 - \alpha - \beta - \gamma & 2(\alpha + \gamma) & -1 - \alpha + \beta - \gamma \end{bmatrix}.$$

2. 编写 Python 程序，利用 5 点法求解方程

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \mathcal{D} = (0, 1)^2 \\ u &= g \quad \text{on } \partial \mathcal{D} \end{aligned}$$

其中 f, g 由 u 的真实解 $u(x, y) = x^2 y^2 + \sin(xy)$ 确定。要求：

- (1) 自行选择合适的空间步长。
- (2) 利用 `matplotlib.pyplot.contourf` 函数绘制数值计算结果。
- (3) 计算数值结果与真实解的相对误差

$$\frac{\sqrt{\sum_{(t_n, x_j) \in \mathcal{D}} (u_j^n - u(t_n, x_j))^2}}{\sqrt{\sum_{(t_n, x_j) \in \mathcal{D}} u(t_n, x_j)^2}}.$$

- (4) 提供一个报告，简要阐述你的程序和运行结果，并附上可执行的.py 文件。代码文件需有适当的注释。