

作业 3

考虑 PDE

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma u$$

及其差分格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\tau}{2h^2} (u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n + u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}) - \tau\gamma ((1-\theta)u_j^n + \theta u_j^{n+1}),$$

其中 $\gamma > 0$, 参数 $\theta \in [0, 1]$ 。证明:

1. 该格式的截断误差为 $\mathcal{O}(\tau^p + h^2)$, 其中

$$p = \begin{cases} 2, & \theta = \frac{1}{2} \\ 1, & \theta \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

2. 当 $\theta \geq \frac{1}{2}$ 时, 该格式无条件稳定。
3. 当 $\theta = 0, \tau \leq \frac{2}{\gamma}$ 时, 该格式稳定。