

作业 5

1. 考虑偏微分方程 $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ 的改进 Lax-Friedrichs 法如下:

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{a\lambda}{1 + (a\lambda)^2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n).$$

试分析其截断误差及稳定性。

2. 考虑有限差分格式:

$$\alpha u_{j+1}^{n+1} + \beta u_{j-1}^{n+1} = u_j^n.$$

- (a) 证明 $||\alpha| - |\beta|| \geq 1$ 时, 该格式稳定。
(b) 在上一结论的基础上, 证明隐式 Lax-Friedrichs 法:

$$\frac{\frac{1}{2}(u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} = 0$$

当 $|a\lambda| \geq 1$ 时稳定。