November 7, 2023
Wintersemester 2023/2024

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Übungsblatt Nr. 2

Aufgabe 1: Orthonomalbasis

a)

$$\begin{aligned}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_3 &\overset{\text{Distr.}}{=} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 + \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 \\ &= \delta_{13} + \delta_{23} \\ &= 0 + 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2) \cdot (7\vec{e}_1 - 16\vec{e}_3) &\overset{\text{Distr.}}{=} (4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2) \cdot 7\vec{e}_1 - (4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2) \cdot 16\vec{e}_3 \\ &\overset{\text{Distr.}}{=} 28\vec{e}_1\vec{e}_1 + 21\vec{e}_1\vec{e}_2 - 64\vec{e}_1\vec{e}_3 - 48\vec{e}_2\vec{e}_3 \\ &= 28\delta_{11} + 21\delta_{12} - 64\delta_{13} - 48\delta_{23} \\ &= 28\end{aligned}$$

b) Genau dann wenn zwei Vektoren orthogonal sind, oder wenn einer der Vektoren der Nullvektor is, dann ist das Skalarprodukt zweier Vektoren 0. Also wollen wir ein X finden, wofür gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + X\vec{e}_3) \cdot (-\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3) = 0$$

$$\begin{aligned}(2\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + X\vec{e}_3) \cdot (-\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3) &= 0 \\ \sum_{i=0} 3a_ib_i &= 0 \\ 2 \cdot (-1) + (-5) \cdot 2 + X \cdot (-3) &= 0 \\ -2 - 10 - 3X &= 0 \\ 3X &= 12 \\ X &= 4\end{aligned}$$

Also für $X \coloneqq 4$ sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel, oder einer der beiden ist der Nullvektor. Da aber $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ sind die Vektoren parallel

c) Genau dann, wenn die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear unabhängig sind, gilt:

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \lambda_1\vec{v} + \lambda_2\vec{w} \neq 0$$

Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ gegeben, zu zeigen:
$\lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w} \neq \vec{0}$, also

$$\lambda_1 v_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 w_1 \vec{e}_1 = 0,$$
$$\lambda_1 v_2 \vec{e}_2 + \lambda_2 w_2 \vec{e}_2 = 0 \text{ und}$$
$$\lambda_1 v_3 \vec{e}_3 + \lambda_2 w_3 \vec{e}_3 = 0$$

also gilt für die erste Gleichung:

$$\lambda_1 \cdot 1 \cdot \vec{e}_1 + \lambda_2 w_1 \vec{e}_1 = 0,$$