
Analysis I

Organisation, Tipps & Tricks und Literaturhinweise

Mathe...

- ist intellektuell extrem herausfordernd
- kommt mit einem hohen Arbeitsaufwand
- oft falschen Erwartungen und
- ist wie Ausdauersport

aber dafür ist Mathe eines der schönsten Studien c:

Generelles Zeitmanagement:

- Vor- und Nachbereitung wahrscheinlich mehr als die gesetzten $14 \times 3 \text{ h} = 42 \text{ h}$
- Klausurvorbereitung auch mehr als 39 h
- Pro Woche $2 \times 1.5 \text{ h}$, $2 \times 2 \text{ h}$, 1.5 h, 10 h
- Es gibt immer eine Aufgabe die man nicht lösen kann
- In die Vorlesungen kommen

Vorlesung:

- normal nicht alles zu verstehen
- Notizen was man nicht versteht
- Punkte konzise angehen
- **Mathe muss sich gedanklich setzen** - genügend Zeit zu verarbeiten

Übungen:

- zeitintensiv
- Ergebnisse vernünftig aufschreiben

- Weg zu einer korrekter Lösung ist sehr langwierig
- **nicht 10 Blätter Papier ab, von denen 9.5 inkonklusiv sind**
- also schön Aufschreiben

Wenn wir einen Satz gezeigt bekommen, dann bekommen wir nicht die gescheiterten Jahrelangen Versuche zur Schau, sondern nur die Ausgearbeitete Lösung → also bei uns auch langer weg, aber Aufschreiben nur klein

Übungszettel:

- 50% muss richtig sein
- bis Freitag 10:00 Uhr
- in F4
- diese Woche nicht so umfangreich, weil weniger Zeit
- auf ILIAS Terminfindung Abstimmung
- Donnerstag Einteilung in Tutorien
- Blätter tackern :c
- alle zwei Wochen Beweismechanik Aufgaben, nur digital nicht in Papier (ist dann die letzte Aufgabe)

Literaturempfehlung:

- Otto Forster: Analysis 1
 - kurz und knapp - aber konzise, und das hilft
 - ähnliche Struktur wie Vorlesung
 - wenig motivation und wenige Querverbindungen
- Königsberger: Analysis 1
 - kurz - aber konzise
 - alle themen der Vorlesung, andere Struktur
 - mehr motivation und Querverbindungen
- Klaus Fritsche: Grundkurs Analysis 1
 - ausführlich

- Daniel Grieser: Analysis I
 - Ausführlich, aber mit Fokus auf das Wesentliche
 - alle Themen der Vorlesung enthalten, ähnliche Struktur
 - bunt??
- Harro Huser: Lehrbuch der Analysis Teil 1
 - extrem ausführlich, dick, an einigen Stellen sehr extensiv
 - alle und mehr Themen als Vorlesung
 - Querverbindungen
- Walter Rudin: Analysis
 - sehr knapp und elegant
 - klassiker
 - alle Themen der Vorlesung, leicht andere Struktur
 - empfehlenswertes Buch fortgeschrittene Leser*innen
 - nicht für Anfänger*innen
- Herber amann, Joachim Escher: Analysis I
 - strikt logischer Aufbau, damit teils länglich. Großes Bild
 - alle Themen, andere Struktur
 - auch nicht für Anfänger*innen
- Terence Tao: Analysis (englisch, aber gut)
- Rober Denk, Reinhard Racke: Kompendium der Analysis
 - kurz und knapp, teils wie Nachschlagewerk
 - alle Themen
- Florian Modler, Martin Kreh: Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1
 - kurz und knapp, teils wie Nachschlagewerk
 - von Studierenden für Studierende
 - aber enthält ein paar Fehler

1. Natürliche Zahlen und elemntare Begriffe

1.1. Zahlbereiche

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\mathbb{R} := \{ \text{reelle Zahlen} \}$$

Wir besprechen gar nicht was eine Menge ist, das ist zu philosophisch
Es ist schwierig Mengen zu Definieren, man kommt schnell auf logische Widersprüche

- Notation: für x schreiben wir für eine Eigenschaft A “ $A(x)$ ”, falls x A erfüllt.

→ Menge aller Objekte x mit $A(x)$

$$\{x : A(x)\}$$

→ gibt es kein x mit $A(x)$, so nennen wir die Menge leer, “ \emptyset ”

- $\exists \hat{=}$ Existenzquantor, “es existiert”
- A, B , Eig., $M := \{x : x \text{ erf. } A\}$
 $N := \{x : \text{erf. } B\}$
 $M \subset N$, falls $\forall x \in M : x \in N$
- $M = N$, falls $M \subset N \vee N \subset M$
- “Echte Teilmenge”: $M \subsetneq N$, falls $M \subset N, N \neq M$.

Example 1.1.1 (gerade Zahlen)

$$n \in \mathbb{N}_0 \text{ gerade} : \iff (\exists k \in \mathbb{N}_0 : n = 2k)$$

$$M := \{n \in \mathbb{N}_0 : \exists k \in \mathbb{N}_0 : n = 2k\} \tag{1}$$

$$= \{2k : k \in \mathbb{N}_0\} \tag{2}$$

Example 1.1 $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$

Zu $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} : \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Widerspruchsbeweis: Ang., $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, so $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, mit $p \in \mathbb{N}_0, q \in \mathbb{N}$.
 $(\exists p, q \text{ teilerfremd (d.h. Bruch ist vollständig gekürzt)})$. Also $p^2 = 2q^2$
 $\implies p$ ist gerade. Also $p = 2l$ mit $l \in \mathbb{N}_0$.
 $\implies 4l^2 = p^2 = 2q^2 \implies 2l^2 = q^2 \implies q$ gerade.
 $\implies p, q$ gerade. $\implies p, q$ nicht teilerfremd. □

1.2. Vollständige Induktion

- Ziel: Beweis von Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}_0$

Dominoprinzip: Wenn alle Steine umfallen sollen,

- müssen wir den 1. Stein umwerfen,
- muss stets der n -te Stein den $(n+1)$ -ten umwerfen.

Prinzip (vollst. Ind.) Wollen wir eine Aussage $A(n) \forall n \in \mathbb{N}$ zeigen; so zeigen wir

(i) $A(1)$ gilt (Induktionsanfang)

(ii) Aus $A(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ stets $A(n+1)$ folgt. (Induktionsschritt)

Definition 1.2 Summen

Für $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\sum_{k=1}^n x_k := x_1 + \dots + x_n$$

Example 1.3 Geometrische Summe

$\forall n \in \mathbb{N} :$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^n x^k}_{x^0 + x^1 + \dots + x^n} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad (3)$$

I.A. $n = 1$

$$\sum_{k=0}^1 x^k = x^0 + x^1 = 1 + x = \frac{(1-x)(1+x)}{1-x} = \frac{1-x^2}{1-x}$$

I.S.

$$n \rightarrow n+1$$

Angenommen, (equation) gilt für ein $n \in \mathbb{N}$. z.z. (equation) gilt für $n+1$

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \left(\sum_{k=0}^n x^k \right) + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1}$$

...

Example 1.4 Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $n^2 < 2^n$?

- $n = 1 \rightarrow 1 < 2$
 $n = 2 \rightarrow n^2 = 4 \not< 4 = 2^2$
 $n = 3 \rightarrow n^2 = 9 \not< 2^3$

$$\begin{aligned} n = 4 &\rightarrow n^2 = 16 \not< 16 = 2^4 \\ n = 5 &\rightarrow n^2 = 25 < 32 = 2^5 \end{aligned}$$

Wir versuchen die Aussage $\forall n \geq 5$ zu zeigen.

I.A.: $n = 5 : n^2 = 25 < 32 = 2^5$

I.S.: Ang., Aussage gilt für $n \geq 5$. Wir müssen zeigen:

$$(n+1)^2 < 2^{n+1}$$

$$(n+1)^2 = \underbrace{n^2}_{< 2^n} + 2n + 1 < 2^n + 2n + 1 \stackrel{?}{<} 2^{n+1} \text{ Angenommen, es gilt}$$

$$\forall n \geq 5 : 2n + 1 < 2^n \tag{4}$$

Dann: $(n+1)^2 < \dots < 2^n + 2n + 1 = 2 * 2^n = 2^{n+1}$

- Wir zeigen (4) wiederum mit voll. Ind.

I.A.: $n = 5 : 2n + 1 = 11 < 32 = 2^5$

I.S.: Ang., (4) gilt für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $2(n+1) + 1 = 2n + 3 = (2n + 1) + 2 < 2^n + 2 < 2^n + 2^n = 2 * 2^n = 2^{n+1}$.

Damit folgt (4) und damit die eigentliche Aussage □

Definition 1.5

für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die *Fakultät* via $n! := n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$, falls $n \geq 1$, und $0! := 1$. Für $k \in \{0, \dots, n\}$ definieren wir den *Binomialkoeffizienten*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Lemma 1.6

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

Proof 1.7

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n! \binom{n-k+1}{k}}{k!(n-k)!(n-k+1)!} + \frac{n! \binom{n-k+1}{k-1}}{(k-1)!(n-(k-1)k)!(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!n + n!}{k!(n-k+1)!} = \frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!} \end{aligned} \quad \square$$

Example 1.8 (Binomische Formel)

Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Sei also $x, y \in \mathbb{R}$.

I.A.: $n = 0$. $(x + y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 y^0$

I.S.: Gelte die Aussage für $n \in \mathbb{N}_0$

$$(x + y)^{n+1} = (x + y)(x + y)^n = (x + y) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad (5)$$

$$= x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + y \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad (6)$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \quad (7)$$

Indexverschiebung: $l = k + 1$. $l \in \{1, \dots, n + 1\}$

$$\begin{aligned} (7) &= \underbrace{\sum_{l=1}^n \binom{n}{l-1} x^l y^{n+1-l}}_{\text{Hier Indexverschiebung}} + \underbrace{\sum_{l=0}^n \binom{n}{l} x^l y^{n+1-l}}_{\text{Hier nennen wir einfach } k = l} \\ &= \binom{n}{n} x^{n+1} y^0 + \left(\sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{l-1} + \binom{n}{l} \right) x^l y^{n+1-l} \right) + \binom{n}{0} x^0 y^{n+1} \\ &= \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} y^0 + \left(\sum_{l=1}^n \binom{n+1}{l} x^l y^{(n+1)-l} \right) + \binom{n+1}{0} x^0 y^{n+1} \\ &= \sum_{l=0}^{n+1} \binom{n+1}{l} x^l y^{(n+1)-l} \quad \square \end{aligned}$$

1.2.1 Charakterisierung der natürlichen Zahlen**Definition 1.2.1**

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heißt induktiv, falls

- (i) $1 \in M$
- (ii) $\forall x \in M : x + 1 \in M$

Example 1.2.2

- (a) \mathbb{N} sind ind. Menge.
- (b) $A := \{2n : n \in \mathbb{N}_0\}$ nicht ind. Menge, da (i) $1 \notin A$, (ii) $2n + 1$ ist immer ungerade
- (c) $B := \{2n + 1 : n \in \mathbb{N}_0\}$ nicht ind.: (i), aber $2n + 1 + 1 = 2(n + 1)$
- (d) $\mathbb{Q}^+ := \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$ ist ind. Teilmenge

- Sei $(A_i)_{i \in I}$ mit I Indexmenge eine Familie von Mengen. setze

$$\text{Schnitt}_{i \in I} := \{x : (\forall i \in I : x \in A_i)\}$$

$$\text{Vereinigung}_{i \in I} := \{x : (\exists i \in I : x \in A_i)\}$$

prop

Für eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ sind äquivalent

- (i) $M = \mathbb{N}$
 - (ii) Ist $N \subset \mathbb{R}$ induktiv, so $M \subset N$
 - (iii) $M = \text{Schnitt}_{N \subset \mathbb{R}} N$ induktiv
- (i) \iff (ii) \iff (iii)

Proof 1.2.3

‘(i) \implies (ii)’: Sei $N \subset \mathbb{R}$ beliebige ind. Teilmengen von \mathbb{R} . Zu zeigen: $M \stackrel{(i)}{=} \mathbb{N} \subset N$
 Aber $1 \in \mathbb{N}$, und $1 \in N$ (da N ind.), Da N ind. ist, ist mit jeder nat. $x \in \mathbb{N}$ also auch $x + 1 \in N$. Damit $\boxed{\mathbb{N} \subset N}$.

‘(ii) \implies (iii)’ Wir zeigen: $\text{Schnitt}_{N \text{ ind.}} N$ ist ind. Menge

$\stackrel{(ii)}{\implies} M \subset N \subset M$. Also $M = \text{Schnitt}_{N \text{ ind.}} N$.

$\text{Schnitt}_{N \text{ ind.}} N$ induktiv: (i) $(\forall N \text{ ind.} : I \in N) \implies I \in \text{Schnitt}_{N \text{ ind.}} N$