Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

# Übungsblatt Nr. 2

## **Aufgabe 1:** Orthonomalbasis

a)

$$\begin{aligned}(\vec{e}_1+\vec{e}_2)\cdot\vec{e}_3 &\overset{\text{Distr.}}{=} \vec{e}_1\cdot\vec{e}_3+\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3\\ &= \delta_{13}+\delta_{23}\\ &= 0+0\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4\vec{e}_1+3\vec{e}_2)\cdot(7\vec{e}_1-16\vec{e}_3) &\overset{\text{Distr.}}{=} (4\vec{e}_1+3\vec{e}_2)\cdot 7\vec{e}_1-(4\vec{e}_1+3\vec{e}_2)\cdot 16\vec{e}_3\\ &\overset{\text{Distr.}}{=} 28\vec{e}_1\vec{e}_1+21\vec{e}_1\vec{e}_2-64\vec{e}_1\vec{e}_3-48\vec{e}_2\vec{e}_3\\ &= 28\delta_{11}+21\delta_{12}-64\delta_{13}-48\delta_{23}\\ &= 28\end{aligned}$$

b) Genau dann wenn zwei Vektoren orthogonal sind, oder wenn einer der Vektoren der Nullvektor is, dann ist das Skalarprodukt zweier Vektoren 0. Also wollen wir ein $X$ finden, wofür gilt:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(2\vec{e}_1-5\vec{e}_2+X\vec{e}_3)\cdot(-\vec{e}_1+2\vec{e}_2-3\vec{e}_3)=0$$

$$\begin{aligned}(2\vec{e}_1-5\vec{e}_2+X\vec{e}_3)\cdot(-\vec{e}_1+2\vec{e}_2-3\vec{e}_3) &= 0\\ \sum_{i=0} 3a_ib_i &= 0\\ 2\cdot(-1)+(-5)\cdot 2+X\cdot(-3) &= 0\\ -2-10-3X &= 0\\ 3X &= 12\\ X &= 4\end{aligned}$$

Also für $X := 4$ sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel, oder einer der beiden ist der Nullvektor. Da aber $\vec{a}\neq\vec{0}$ und $\vec{b}\neq\vec{0}$ sind die Vektoren parallel

c) Genau dann, wenn die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear unabhängig sind, gilt:

$$\forall\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\}:\lambda_1\vec{v}+\lambda_2\vec{w}\neq 0$$

Seien $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ gegeben, zu zeigen:
$\lambda_1\vec{v}+\lambda_2\vec{w}\neq\vec{0}$, wir führen einen Beweis durch Widerspruch und nehmen dazu an $\exists\lambda_1,\lambda_2\in$

$\mathbb{R} \setminus \{0\} : \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w} = 0$, dann gilt:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 v_1 + \lambda_2 w_1 = 0, \\ &\lambda_1 v_2 + \lambda_2 w_2 = 0 \text{ und} \\ &\lambda_1 v_3 + \lambda_2 w_3 = 0. \end{aligned}$$

Also gilt für die erste Gleichung:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 w_1 &= 0 \\ \lambda_1 \cdot 1 &= -\lambda_2 \cdot (-3) \\ \lambda_1 &= 3\lambda_2. \end{aligned}$$

Dies in die zweite Gleichung eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned} \lambda_1 v_2 + \lambda_2 w_2 &= 0 \\ 3\lambda_2 v_2 + \lambda_2 w_2 &= 0 \\ \lambda_2 (3v_2 + w_2) &= 0 \\ \lambda_2 (3 \cdot (-1) + 2) &= 0 \\ \lambda_2 (-1) &= 0 \\ \lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

Da aber $\lambda_2 \neq 0$ führt dies zu einem Widerspruch und die die Annahme $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w} = 0$, war falsch, also gilt $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w} \neq 0$. $\square$