Blatt 01

Elias Gestrich

Aufgabe 1: Vektoren und Skalare

a)

i) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \begin{pmatrix} 3-7 \\ 0+6 \\ -1+7 \end{pmatrix} = \vec{a} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = -9 \cdot -4 + 0 \cdot 6 + 3 \cdot 6 = 54$

ii) $\vec{a} \mid \vec{b} + \vec{c} \mid = \vec{a} \mid \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \mid = \vec{a}\sqrt{(-4)^2 + 6^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 36 + 36}\vec{a} = \sqrt{88}\,\vec{a}$

iii) $\vec{b} \times (\vec{a} \cdot \vec{c}) = \vec{b} \times (-7 \cdot -9 + 0 + 3 \cdot 7) = \vec{b} \times 84$ ↯

iv) $\vec{b} \cdot \vec{c}$ ist ein Skalar, ein Vektorprodukt ist nur für zwei Vektoren definiert ↯

v) $(\vec{a} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{c} = 0$

vi) $\vec{c} \times (\vec{b} \times \vec{a}) = \vec{c} \times \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 & - & -1 \cdot 0 \\ -(3 \cdot 3 & - & -1 \cdot -9) \\ 3 \cdot 0 & - & 0 \cdot -9 \end{pmatrix} = \vec{c} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a}\vec{b} = ab\cos(\vartheta) \iff \cos(\vartheta) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{ab} = \frac{-27-3}{\sqrt{84}\sqrt{10}} = -\frac{30}{\sqrt{840}} \implies \vartheta = \arccos(\frac{30}{\sqrt{840}})$
$\vec{b}\vec{c} = bc\cos(\vartheta) \iff \cos(\vartheta) = \frac{\vec{b}\vec{c}}{bc} = \frac{-21-7}{\sqrt{10}\sqrt{134}} = -\frac{28}{\sqrt{1340}} \implies \vartheta = \arccos(\frac{28}{\sqrt{1340}})$

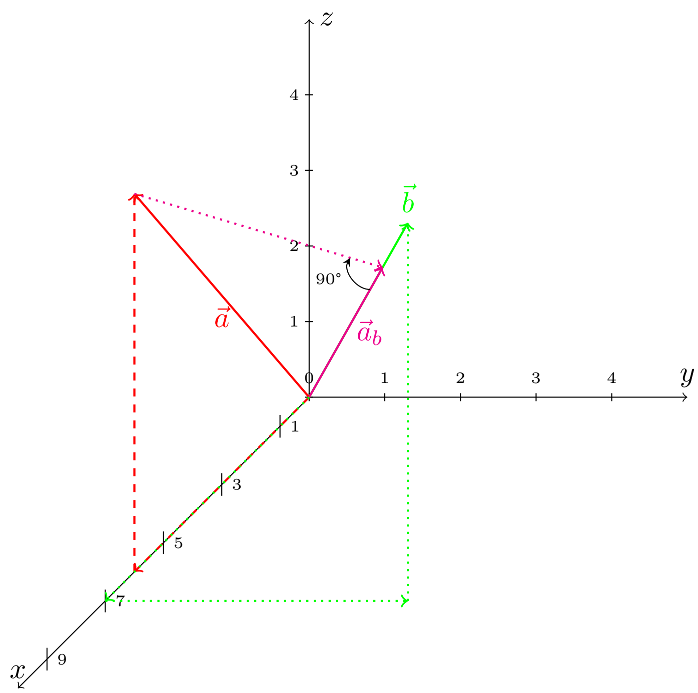
c)

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{r} &= \cos(\omega t)\exp(-\lambda t) \cdot \cos(\omega t) + \sin(\omega t)\exp(-\lambda t) \cdot \sin\omega t + \left(z - \frac{1}{2}\exp(-\lambda t)\right) \cdot 2 \\ &= \exp(-\lambda t)\left(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) + 1\right) + 2z \\ &= \exp(-\lambda t)(0) + 2z \\ &= 2z \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Vektorgeometrie

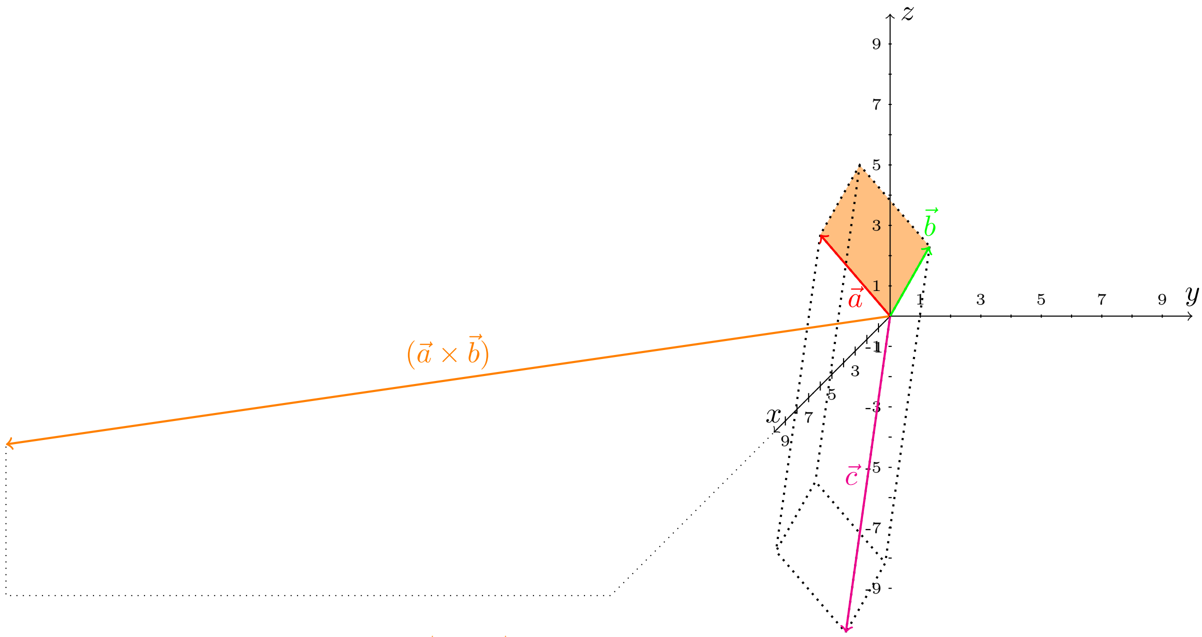
a) Die Vektorprojektion $\vec{a}_b$ des Vektors $\vec{a}$ auf die Richtung des Vektors $\vec{b}$ ist:

$$\begin{aligned}\vec{a}_b &= a \cdot \frac{\vec{a}\vec{b}}{ab} \cdot \frac{\vec{b}}{b} \\ &= \frac{\vec{a}\vec{b}}{b^2}\vec{b} \\ &= \frac{6 \cdot 7 + 0 + 5 \cdot 5}{\sqrt{7^2+4^2+5^2}^2} \cdot \vec{b} \\ &= \frac{67}{90} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\end{aligned}$$



b) $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0-20 \\ -(6 \cdot 5 - 5 \cdot 7) \\ 6 \cdot 4 - 0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -20 \\ 5 \\ 24 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{400+25+24^2} = \sqrt{1001}$, also ist die Fläche des Parallelogramms $\sqrt{1001}$

c) $\vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \vec{c} \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 5 \\ 24 \end{pmatrix} = 9 \cdot (-20) + 2 \cdot 5 + (-7) \cdot 24 = -180 + 10 - 168 = -338$, also ist das Volumen 288



An dem Bild erkennt man, dass $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ gleich der Grundfläche vom Parallelepipeds ist, da die Richtung von $\vec{a} \times \vec{b}$ orthogonal zu der Grundfläche steht, ist die Abbildung von $\vec{c}$ auf $\vec{a} \times \vec{b}$ die Höhe des Parallelepipeds und $c \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$ ist das Volumen.

Aufgabe 3: Vektoraddition

a) Damit der Schwimmer die kürzeste Strecke nimmt, muss seine Bahnkurve den kürzesten Weg von einem Ufer zu anderen Beschreiben, d.h. die Vektoren $\vec{v}_F$ und $\vec{v}$ müssen summiert längs dem kürzesten Weg von einem Ufer zum anderen sein, also orthogonal zur Bewegungsrichtung des Wassers. Also gilt $(\vec{v} + \vec{v}_F) \cdot \vec{v}_F = 0$:

$$
\begin{aligned}
0 &= (\vec{v} + \vec{v}_F) \cdot \vec{v}_F \\
0 &= \vec{v} \cdot \vec{v}_F + (\vec{v}_F)^2 \\
0 &= ||\vec{v}||||\vec{v}_F|| \cos(\alpha) + \left(0.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 \\
0 &= 0.5\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \cos(\alpha) + 0.25\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \\
-0.25\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} &= 0.5\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \cos(\alpha) \\
-0.5 &= \cos(\alpha) \\
\arccos(-0.5) &= \alpha \\
\alpha &= \frac{2\pi}{3}
\end{aligned}
$$

Wenn $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, dann ist $|\vec{v}_{\mathrm{res}}| = \sqrt{(1\,\mathrm{m/s})^2 - (0.5\,\mathrm{m/s})^2} = \sqrt{0.75}\,\mathrm{m/s}$, also braucht der Schwimmer $\frac{156\,\mathrm{m}}{\sqrt{0.75}\,\mathrm{m/s}} \approx 180\,\mathrm{s}$. Er brauch also etwa 3 Minuten.

b) $\sqrt{(1\,\mathrm{m/s})^2 + (0.5\,\mathrm{m/s})^2} = \sqrt{1.25}\,\mathrm{m/s}$