pre-course lecture

Elias Gestrich

19. Oktober 2023

Important: TODO:

Which of the following is the best:

$$a \times b$$

(`a \times b`)

$$a \cdot b$$

(`a \cdot b`)

$$a \ast b$$

(`a \ast b`)

(`\times` can be redefined to any symbol)

1. Day 1

Argumente/Begründungen/Beweise (Herz der Mathematik)
Beweise sind “immer wahr”
Beweise helfen beim verstehen
Beweise “zähmen die Unendlichkeit”

Problem 1.1

Wie lange benötigt man zum Zersägen eines 7 m-langen Baumstamms in 1 m-Stücke, wenn jeder Schnitt eine halbe Minute dauert?

Lsg.: 3 min

Zwischenziel: 6 Schritte $\to$ Mustererkennung $n-1$ Schnitte für n Teiler/Meter

Proof 1.1

Jeder Schnitt erhöht die Anzahl der Stücke um eins.
Anfangs: 1 Stück, am Ende 7 $\Rightarrow$ man muss

$$7 - 1 = 6 \text{ Schnitte machen. usw.}$$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ natürliche Zahlen
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$ natürliche Zahlen mit der Null

Problem 1.2

Conjecture 1.1

Wenn zwei natürliche Zahlen gerade sind, dann ist auch ihre Summe gerade

Seien $t_1, t_2 \in \mathbb{N}$

$$a = 2t_1$$

$$b = 2t_2$$

also gilt:

$$a + b = 2t_1 + 2_t2 = 2(t_1 + t_2) \implies \text{gerade Zahl}$$

Problem 1.3

Mit wievielen Nullen endet 100!?
Primfaktorzerlegung:
20 durch 5 teilbare Zahlen
4 durch 5^2 teilbare Zahlen
k Nullen am Ende einer natürlichen Zahl in Dezimalschreibweise: Zahl ist durch $10^k = (2 \times 5)^k = 2^k \times 5^k$ teilbar.

$$5, 10, 15, ...$$

also bei

$$1 \times 5, 2 \times 5, 3 \times 5, ..., 20 \times 5 \Rightarrow 20\,\text{Stück}$$

welche liefern 2 Fünfen

$$1 \times 5^2, 2 \times 5^2, 3 \times 5^2, 4 \times 5^2, \cancel{5 \times 5^2}$$

Anzahl der Nullen, mit denen 100! enden, ist die größte natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$, für die

100! durch 10^k teilbar ist.

Weil $10 = (2 \times 5)$, ist das gleich der größten ganzen Zahl k, für die 100! durch $2^k \times 5^k$ teilbar ist,

also durch 5^k und 2^k

Die 5 tritt als Faktor genau in den 20 Zahlen

$$5, 10, 15, ..., 100,$$

und in den 4 Zahlen

$$25, 50, 75, 100$$

doppelt vor.
Somit folgt: die 5 tritt $20 + 4 = 24$ mal als Faktor in 100! auf.
Die 2 tritt als Faktor in 50 Zahlen auf:

$$2, 4, 6, 8, ..., 100$$

(und einigen mehrfach)
$\Rightarrow$ Insgesamt endet 100! mit 24 Nullen.

Problem 1.4

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Berechne die Summe der ersten n natürlichen Zahlen, also

$$\begin{array}{lllll} 1 & +2 & +3 & +\ldots+n & := S \\ +n & +n-1 & +n-2 & +\ldots+1 & = S \\ \hline =(n+1) & +(n+1) & +(n+1) & +\ldots+(n+1) & = S \\ = & & & n\times(n+1) & = S \end{array}$$

2. Tag 2

$\mathbb{P}$ = Menge aller Primzahlen
$\mathbb{P} = 2, 3, 5, 7, \ldots$
Offene Fragen: Gibt es eine Formel für Primzahlen?
Fermat (1637):

Conjecture 2.1

$F(n) = 2^{2^n} +$ ist eine Primzahl für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} F(1) &= 2^{2^1}+1 = 2^2+1 &&= 5 \\ F(2) &= 2^{2^2}+1 = 2^4+1 &&= 17 \\ F(3) &= 2^{2^3}+1 = 2^8+1 &&= 257 \\ F(4) &= 2^{2^4}+1 = 2^{16}+1 &&= 65537 \end{aligned}$$

100 Jahre später Euler:
651 teilt $F(5)$,
also ist

$$F(5) = 4294967297$$

keine Primzahl.

3. Vorkurs

- mathematische Probleme formulieren
- Lösungen finden (Argumentieren) Beweisen

4. Mengen (Warm-up)

Skatspiel

Situation: Aus gemischtem Skatspiel werden zwei Karten gezogen. Sind es zwei Karten gleicher Farbe oder zwei Karten mit gleichem Wert, dann gewinnen wir.

Symbole: Kreuz, Pik, Herz, Karo

Werte: 7, 8, 9, 10, B, D, K, Ass

Definitionssymbol: " := "

Example 4.1

$$\begin{aligned} 11 &:= \text{Bube} & a &:= \text{Kreuz} \\ 12 &:= \text{Dame} & b &:= \text{Pik} \\ 13 &:= \text{König} & c &:= \text{Herz} \\ 14 &:= \text{Ass} & d &:= \text{Karo} \end{aligned}$$

Kartenmenge $= \{a7, a8, ..., a14, b7, b8, ..., b14, c7, ..., d14\}$
$\{$Kreuz, 7$\}$ = Karte Kreuz 7

$$\begin{aligned} \text{Kartenmenge} := \{&\{1,7\},\ \{2,7\},\ \{3,7\},\ \{4,7\} \\ &\{1,8\},\ \{2,8\},\ \{3,8\},\ \{4,8\},..., \\ &\{1,14\},\{2,14\},\{3,14\},\{4,14\}\} \end{aligned}$$

5. Mengen, Teilmengen, Mengenoperationen

Definition 5.1

(naive Definition) Eine Ansammlung von (mathematischen) Objekten heißt **Menge**. Ein Mitglied dieser Ansammlung heißt **Element** der Menge.

Ist a ein Element der Menge A, so schreibt man $a \in A$

Gehört a nicht zur Menge A, so schreibt man $a \notin A$
Mit $|A|$ bezeichnet man die Anzahl der Elemente in A

Example 5.1

$$|\mathbb{N}| = \infty$$

Zwei Arten, Mengen zu beschreiben:

- aufzählende Mengenschreibweise $A = \{2, 4, 6, ...\}$, $B = \{2, 8, 9\}$
- beschreibende Mengenschreibweise $A = \{x \in \mathbb{N} | 3 \leq x \leq 8\}$, $[a, b] := \{z \in \mathbb{R} | a \leq z \leq b\} a, b \in \mathbb{R}$

Task 5.1

$$\begin{aligned} M &= \text{Menge aller ganzzahlingen Vielfachen von 42} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} : 42|x\} = \{42 \times x : x \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Definition 5.2

Es sei A eine Menge
Eine Menge B heißt Teilmenge von A, in Zeichen: $B \subseteq A$,
wenn jedes Element von B auch ein Element von A ist

Definition 5.3

Es seien A, B Teilmengen einer Menge M
Schnittmenge von A und B ist $A \cap B := \{x \in M : x \in A \wedge x \in B\}$
Vereinigungsmenge von A und B ist $A \cup B := \{x \in M : x \in A \vee x \in B\}$
Differenz von A und B ist $A \backslash B := \{x \in M : x \in A \wedge x \notin B\}$
Komponent von A in M ist die Menge $A^c := \{x \in M : x \notin A\} = M \backslash A\}$
genau dann wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$, dann $A = B$

Jede beliebeige Menge A hat die folgenden Teilmengen $\emptyset, A$ d.h. es git $\emptyset \subseteq A, A \subseteq A$
$\{\_\} \notin \{\_, \_\}$
$\_ \in \{\square, \circ, \triangle\}$ (bzw. $\_ \in \{\_, \_, \_\}$)
$\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\} = \{2, 1, 3\} = ...$

Task 5.2

Gilt $\{1, 2, 1, 1\} = \{1, 2\}$?
ja

Task 5.3

Falls $\{a\} = \{b\}$, dann folgt $a = b$
Falls $\{a\} = \{a, b\}$, dann folgt $a = b$

$\{1, 2\}$ hat Teilmengen $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$
Eine Menge mit n Elementen hat 2^n Teilmengen.

Definition 5.4

Potenzmenge einer Menge
Sei A eine Menge, dann heißt die Menge

$$\mathcal{P}(A)$$

aller Teilmengen von A die <u>Potenzmenge von A</u>

$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ $\mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, 1\}$

Definition 5.5

(kartesisches Produkt von zwei Mengen A und B)
Das kartesische Produkt von zwei Mengen A und B ist definiert durch

$$A \times B := \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}$$

In $A \times B$ sind zwei Elemente $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ genau dann gleich, wenn $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$

$$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}$$

$(1, 2) \in \mathbb{R}^2 \qquad (1, 2) \neq (2, 1)$
$(2, 1) \in \mathbb{R}^2$

6. Prof. Junk

Auf einem Baum saß ein Rabe mit einem Käse im Schnabel, als ein Fuchs vorbeikommt.
Sei $B \in$ Bäume und $R \in$ Raben sitze auf B mit $K \in$ Käsestückchen im Schnabel, als $F \in$ Füchse vorbeikommt.

Er überlegte wie er an den Käse kommt. Da sagte er zu dem Raben, ...
F überlegte wie F an K kommt. Da sagte F zu R, ...

allgemeine mathematische Situationen bestehen aus

- Eine Liste von Namen für mathematische Objekte
- Eine Liste von geltenden Aussagen über diese Objekte

Was kann man damit tun?

- Namen kann man austauschen ohne Bedeutungsänderung
- Situationen können <u>eintreten</u>; konkrete Situationen können auf allgemeine Situationen passen

Example 6.1

$A \coloneqq \{x \in \mathbb{N} : 3 \leq x \leq 8\}$
Schreibweise beschreib eine Menge, indem sie zwei Zugehörigkeits<u>regeln</u> kodiert

- besteht aus zwei allgemeinen Situationen:
  - Vorraussetzung
  - Folgerung

Regel 1: Sei x ein Objekt
Es gelte $x \in \mathbb{N}; 3 \leq; 8 \geq x \rightarrow$ Dann gilt $x \in A$
Regel 2: Sei x ein Objekt
Es gelte $x \in A \rightarrow$ Dann gilt $x \in \mathbb{N}; 3 \leq; 8 \geq x$
Gilt: $9 \in A$: $x \leftarrow 9$ $9 \in \mathbb{N}, 9 \geq 3, 9 \leq 8$
Vorraussetzung tritt nicht ein! Gilt: $9 \notin A$ $9 \in \mathbb{N}, 9 \geq 3, 9 \leq 8 \rightarrow$ Wiederspruch
$9 \not\leq 8 \rightarrow$ Gegenteil von Annahme stimmt

7. Aussagen (Logik)

Unsere mathematische Ergebnisse formulieren wir als (mathematische) Aussagen.
Als Aussage bezeichnen wir einen Ausdruck, der entweder wahr oder falsch sein kann.
$\rightsquigarrow$ Wahrheitswert der Aussage: wahr, w, 1; falsch, f, 0

Example 7.1

$$\begin{aligned} A &\coloneqq \text{“}1+2=3\text{”} \\ B &\coloneqq \text{“5 ist eine negative Zahl”} \\ C &\coloneqq \text{“Jede gerade Zahl } n > 2 \text{ kann als Sume zweier Primzahlen geschrieben werden.”} \end{aligned}$$

8. Aussageform

Example 8.1

Sei

$A(n) :=$ n ist gerade

Dann ist

$A(1)$ eine (falsche) Aussage

$A(2)$ eine (wahre) Aussage

Eine Aussageform ist eine Äußerung, die eine (oder mehrere) Variablen enthält und zu einer Aussage wird, wenn man zulässige Objekte für diese Variablen einsetzt.
Es seien A und B Aussagen.

Die Konjunktion (Und-Aussage) von A und B ist die Aussage

$A \wedge B$ "A und B"

die genau dann wahr ist, wenn A und B gleichzeitig wahr sind.

$A :=$ "24 ist gerade"

$B :=$ "24 ist durch 3 teilbar"

$C :=$ "24 ist durch 5 teilbar"

$A \wedge B = 1 \quad A \wedge C = 0$

Die Disjunktion (Oder-Aussage) von A und B ist Aussage

$A \vee B$ "A oder B"

die genau dann wahr ist, wenn mind. eine der beiden Aussagen A und B wahr ist.

Die Negation von A ist die Aussage

$\neg A$ "nicht A"

die genau dann wahr ist, wenn A falsch ist.

Implikation (Folgerung) "Wenn A, dann B" ist die Aussage

$A \implies B$ "aus A folgt B", A impliziert B")

die genau dann falsch ist, wenn A wahr ist und B falsch ist und sonst ist sie immer wahr.

Äquivalenz "A genau dann, wenn B" ist die Aussage

$A \iff B$

die genau dann wahr ist, wenn A und B beide wahr sind oder A und B beide falsch sind.

Eine zusammengesetzte Aussage heißt Tautologie, falls sie immer wahr ist, unabhängig davon, welche Wahrheitswerte die verknüpften Einzelaussagen haben.

Ist $A(n)$ eine Aussageform mit Wertebereich M, so können wir folgende Aussagen betrachten:

- für alle $n \in M$ gilt: $A(n)$
  in Zeichen: $\forall n \in M : A(n)$ z.B. $\forall n \in \mathbb{N} : 2 \mid n$
  $\rightarrow$ Allaussage ($\forall \leftarrow$ Allquantor)

- Es gibt ein $n \in M$, für das $A(n)$ gilt
  in Zeichen $\exists n \in M : A(n)$
  $\exists! n \in M : A(n)$ "es gibt genau ein $n \in M, \ldots$"

- Eine Aussage der Form

  $$\forall n \in M : A(n)$$

  ist immer wahr, wenn $M = \{\}$

- Reihenfolge der Quantoren spielt eine Rolle

  $$A : \forall n \in \mathbb{N} : (\exists m \in \mathbb{N} : m > n) \text{ (wahr)}$$

  $$B : \exists m \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : m > n \text{ (falsch)}$$

9. Negation von Aussagen

$\neg(\exists n \in M : A(n)) \iff \forall n \in M : \neg A(n)$ ist eine Tautologie d.h. die Negation der Aussage

$$\exists n \in M : A(n)$$

ist logisch Äquivalent zu der Aussage

$$\forall n \in M : \neg A(n)$$

$\neg(\forall n \in M : A(n)) \iff \exists n \in M : \neg A(n)$ ist eine Tautologie d.h. die Negation der Aussage

$$\forall n \in M : A(n)$$

ist logisch Äquivalent zu der Aussage

$$\exists n \in M : \neg A(n)$$

10. —

Theorem 10.1

1) Äquivalenzprinzip
   Ist A wahr und ist $A \iff B$, dann ist auch B wahr

2) Ableitungsregel
   $(A \wedge (A \implies B)) \implies B$ ist eine Tautologie

3) Syllogismusregel
   $((A \implies B) \wedge (B \implies C)) \implies A \implies C$ ist eine Tautologie

4) Kontraposition

$(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A)$ ist eine Tautologie

5) Ringschluss

$$((A \iff B) \wedge (B \iff C) \wedge (A \iff C))$$

$$\iff$$

$$((A \iff B) \wedge (B \iff C) \wedge (A \iff C))$$

11. Beweise und Beweisformen

Ein Beweis ist eine logisch vollständige Begründung einer Aussage. Oft möchten wir Aussagen vom Typ “Wenn A, dann B” zeigen.
Aussagen lassen sich meist in folgende Form bringen

- Vorraussetzung z.B. Sei $a \in \mathbb{N}$.
- Behauptung dann ist $2 =$ gerade

11.1. Direkter Beweis

Statt $A \implies B$ zu zeigen, zeigen wir $A \implies A_1 \implies A_2 \implies ... \implies B$

Situation: $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}, \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$, Rechenregeln: $+, -$ bekannt

Definition 11.1.1

Eine natürliche Zahl $b \in \mathbb{N}$ teilt eine natürliche Zahl $a \in \mathbb{N}$ (in Zeichen $b \mid a$), wenn es eine natürliche Zahl $c \in \mathbb{N}$ gibt, mit $a = b \times c$

Definition 11.1.2

Eine Zahl $a \in \mathbb{N}$ heißt gerade, falls $2 \mid a$ gilt, d.h. falls es ein $c \in \mathbb{N}$ mmit $a = 2 \times c$ gibt.
Eine Zahl $q \in \mathbb{N}$ heißt ungerade, falls q nicht gerade ist.

Conjecture 11.1.1

18 ist gerade.

Proof 11.1.1

$18 \in \mathbb{N}$, also können wir obrige Definition 11.1.2 anwenden.
Setze $c := 9$
Dann gilt $c \in \mathbb{N}$ und $18 = 2 \times 9$
Also gilt $2 \mid 18$. Also ist 18 gerade. $\square$

12. Apendix B von Junk/Traude

Definition 12.1 $\boxed{\text{B.10}}$ **Definitionen**

Nachweistext: Definition ★ wird $\boxed{\text{Blubb}}$ genannt, falls (...) gilt.
Schreibe: Zu zeigen (...)

Benutzungsbedingung: um zu benutzen, dass ein Objekt nach Definition ★ Blubb genannt wird, falls (...) gilt.
Schreibe: Nach Definition von "Blubb", folgt (...)

$\boxed{\text{B.7}}$ Existenzaussagen

Nachweistext: zu beweisen:

$$\exists x \in X : (\dots)$$

Schreibe:

Setze $x :=$ ___.

zu zeigen: $x \in X$ mit (...)

Benutzungstext: Es gilt

Example 12.1

Vor. Sei $a \in \mathbb{N}$
Bew. Dann ist $2 \times a$ gerade
Es sei $a \in \mathbb{N}$. Es gilt $2 \times a \in \mathbb{N}$. Nach Definition 11.1.2 zu geraden Zahlen ist zu zeigen:

$$2 \mid a$$

d.h. zu zeigen: $\exists c \in \mathbb{N} : s \times a = 2 \times c$
Setzte $c := a$
Dann gilt $c \in \mathbb{N}$ und

$$2 \times a = 2 \times c, \square$$

Definition 12.2 $\boxed{\text{B.6}}$ **Allaussagen**

Nachweistext: zu zeigen

$$\forall x \in X : (\dots)$$

Schreibe:
Sei ein $x \in X$ gegeben.
Zeige: (...)
Benutzungstext:

$$\forall x \in X : (\dots) anzuwenden \tag{1}$$

Dann muss ein $a \in X$ vorliegen
Wegen $a \in X$ folgt (aus der $\forall$-Aussage)
(...)

Task 12.1

Zeige, dass die Summe zweier geraden natürlichen Zahlen auch gerade ist
Vor.: Gegeben seien $a \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{N}$ gerade.
Setzte

$$c := a + b \in \mathbb{N}$$

Beh.: c ist gerade

Proof 12.1

Da $c \in \mathbb{N}$, kann man Definition 11.1.2 zu geraden Zahlen anwenden. Zu zeigen ist

$$2 \mid c$$

d.h. zu zeigen: $\exists k \in \mathbb{N} : c = 2 \times k$
Da a, b gerade, gilt nach Definition 11.1.2 zu geraden Zahlen

$$a = 2 \times m \text{ und} \tag{2}$$

$$b = 2 \times n, \tag{3}$$

mit $m, n \in \mathbb{N}$, sodass

$$c = a + b = 2 \times m + 2 \times n = 2 \times (m + n), \tag{4}$$

wobei wir für die erste Gleicheit 2 und 3, für die zweite Gleichheit die Rechenregeln für natürliche Zahlen benutzt haben.
Setze

$$k := m + n$$

Dann gilt

$$k \in \mathbb{N}$$

und wegen 4

$$c = 2 \times (m + n)$$

also

$$c = 2 \times k, \qquad \square$$

Definition 12.3 “ | ”

$a, b \in \mathbb{N}$
$b \mid a$, falls es $c \in \mathbb{N}$ mit $a = b \times c$ gibt.

$\Downarrow$
$a, b, c \in \mathbb{N}$
$b \times c \mid a \times c$, falls es $n \in \mathbb{N}$ mit $a \times c = (b \times c) \times n$ gibt.

Task 12.2 **Es seien $a, b \in \mathbb{N}$. Weiter gelte $b \mid a$. Dann gilt auch $b \times c \mid a \times c$**

Proof 12.2 **Vor.: Es seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $b \mid a$**

z.z.: $(b \times c) \mid (a \times c)$
d.h.: z.z.: es existiert $n \in \mathbb{N}$ mit

$$a \times c = n(b \times c)$$

nach Definition 12.3 von " | "
Da $b \mid a$, folgt (nach Definition von " | "), dass es

$$m \in \mathbb{N} \text{ gibt, mit}$$

$$a = b \times m \tag{5}$$

Multiplikation von 5 mit $c \in \mathbb{N}$ liefert

$$a \times c = (b \times m) \times c$$

Somit folgt (Rechengesetze für " $\times$ ")

$$a \times c = m \times b \times c,$$

also folgt

$$b \times c \mid a \times c$$

Setze $n := m$ Dann folgt

$$a \times c = n(b \times c)$$

und $b \times c \mid a \times c$

13. Input

Definition 13.1 **Primzahl**

Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl $p \in \mathbb{N}$, die genau zwei Teiler hat.

Lemma 13.1 **Lemma von Euklid**

Es seien $a, b \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{P}$ eine Primzahl.
Falls

$$p \mid (a \times b)$$

gilt, so folgt

$$p \mid a \vee p \mid b.$$

$$(\forall p \in \mathbb{P} : p \mid (a \times b) \implies p \mid a \vee p \mid b).$$

Task 13.1

Vor.: Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit n^2 gerade.
Beh.: Dann ist n gerade, d.h. $2 \mid n$

Proof 13.1

Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit n^2 gerade gegeben.
Da n^2 gerade ist, gilt $2 \mid n$
z.z.: $2 \mid n$
Wir wenden das "Lemma von Euklid" (Lemma 13.1) an mit $p = 2$ (beachte $2 \in \mathbb{P}$) und

$a := n, b := n$. Dann gilt

$$(2 \mid n \times n \implies 2 \mid n \vee 2 \mid n) \iff (2 \mid n^2 \implies 2 \mid n). \qquad \square$$

(Bsp. für $\boxed{\text{B.9}}$ Sätze von Prof. Junk).
(Benutzungstext)

14. Widerspruchsbeweise

Definition 14.1 Irrationale Zahlen

Eine reele Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \notin \mathbb{Q}$ heißt irrational.

14.1. Struktur von Widerspruchsbeweisen

1. Wir machen Annahme B.
   nehmen an, dass B gilt

2. Wir leiten Widerspruch her.
   z.B. $1 \neq 0$
   $\boxed{\pi \notin \mathbb{Q} \wedge \pi \in \mathbb{Q}}$

3. Wir haben gezeigt, dass $\neg B$ gilt

Theorem 14.1.1

π ist irrational

Proof 14.1.1

Situation:
Vor.: A
Beh.: B
zeige $(A \wedge \neg B) \implies f$
Beh.: $2\pi + 3$ ist irrational
d.h.: $2\pi + 3$ ist nicht rational
Bew.:
Wir führen einen Beweis durch Widerspruch und nehmen dazu an, dass $2\pi + 3 \in \mathbb{Q}$ gilt. Dann

ist auch

$$\frac{(2\pi+3)-3}{2} \in \mathbb{Q}$$

Also folgt

$$\pi \in \mathbb{Q}$$

Wiederspruch dazu, dass $\pi \notin \mathbb{Q}$ gilt.
Somit war die Annahme

$$2\pi + 3 \in \mathbb{Q}$$

falsch. Also muss

$$2\pi + 3 \notin \mathbb{Q}$$

wahr sein, □

Theorem 14.1.2

$\sqrt{2}$ ist irrational

Proof 14.1.2

Wir führen einen Widerspruchsbeweis und wir nehmen dazu an, dass

$$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$$

gilt.
Dann gibt es $a, b \in \mathbb{N}$, die keinen gemeinsamen Teiler größer als 1 haben mit

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}.$$

Quadriere:

$$2 = \frac{a^2}{b^2},$$

also

$$2b^2 = a^2. \tag{6}$$

Da $2 \mid (2b^2)$ gilt, folgt $2 \mid a^2$
Anwenden des "Lemma von Euklid" (Lemma 13.1) liefert

$$2 \mid a$$

Da $2 \mid a$ gilt, existiert $a' \in \mathbb{N}$ mit

$$a = 2a' \tag{7}$$

Einsetzen von 7 in 6 liefert

$$2b^2 = (2a')^2 \tag{8}$$

Aus 8 folgt

$$b^2 = 2(a')^2.$$

Also da $2 \mid 2(a')^2)$ folgt

$$2 \mid b^2.$$

Wieder nach "Lemma von Euklid" (Lemma 13.1 folgt

$$2 \mid b$$

Insgesamt haben wir

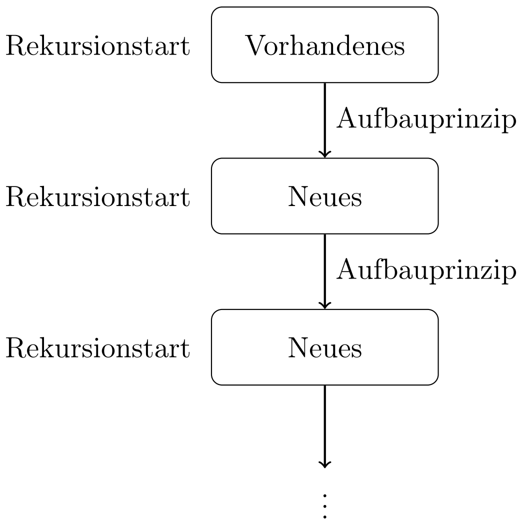
$$2 \mid a \wedge 2 \mid b,$$

Widerspruch dazu, dass a und b keine gemeinsamen Teiler > 1 haben.
Somit haben wir gezeit $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ nicht gilt, Also gilt $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, □

15. Prof. Junk

"Mathematik" $\hat{=}$ "Ganz genau erklären"
Erklären ist rekursiv

- worüber gesprochen wird (Objekte)
- wie gesprochen wird (Aussagen)
- was wahr ist (Beweise)



Objekte:

- Grundobjekte
  - $0, 1, 2, ..., 100, ...$
  - $\mathbb{N}_0$
- Aufbauprinzipien

– Aufzählungsmenge zu angegebenen Elementen ist wieder ein Element
  Bsp.: $\{1\}j$

– Regel: mathematisches Objekt, für das eine Elementaussage gilt
  $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, A \times B$

Aussagen:

- Grundaussagen:
  - $x = y$
  - x, y mathematische Objekte
  - $x \in y$
- Aufbauprinzip
  - $\iff$, $\implies$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, Q ($\forall$, $\exists$, $\exists!$), “:”

Definition 15.1 Teilermenge

Es sei $a \in \mathbb{N}$. Dann sei $\mathcal{T}(n)$ die Menge aller positiven Teiler von a, die größer als eins sind.

Example 15.1

$$\mathcal{T}(5) = \{5\}, \mathcal{T}(6) = \{2, 3, 6\}$$

Bem.: $\forall a \in \mathbb{N} : \mathcal{T}(a) \in \mathbb{N}$

Wahrheiten:

- Grundaxiome:
  - $0 \in \mathbb{N}$
  - $1 \in \mathbb{N}$
  - $x = x$ für definierte Objektausdrücke
- Aufbauprinzip:
  - Nachweisregeln,
  - Benutzungsregeln

16. Inklusion von Mengen

Example 16.1

Es sei X eine Menge $A, B \subseteq X$ Teilmengen.
Zeige $A \cap B \subseteq A$.
Zu zeigen $\forall x \in (A \cap B) : x \in A$. Sei dazu $x \in A \cap B$ gegeben. Zu zeigen: $x \in A$. Da $x \in A \cap B$ folgt (nach Definition zu "$\cap$")

$$x \in A \land x \in B$$

Es gilt also insbesondere

$$x \in A, \qquad \square$$

Important:

Man benutzt statt

$$\subseteq$$

auch oft

$$\subset$$

oder seltener

$$\subseteqq$$

$$A \subsetneqq B \iff A \subseteq B \land A \neq B$$

($\boxed{\text{B.2}}$):
Sind U, V Aussagen
Will man

$$U \iff V \text{zeigen, so ist es äquivalent dazu}$$

$$(U \implies V) \land (V \implies U)$$

zu zeigen.

($\boxed{\text{B.12}}$):
Um für Mengen C, D die Gleichheit $C = D$ zu zeigen, zeigt man $C \subseteq D \land D \subseteq C$

$$A = B \iff A \subseteq B \land B \subseteq A$$

Task 16.1

Es seien X Menge und $A, B \subseteq X$ zwei Teilmengen.
Beweisen Sie folgende Äquivalenz

$$A \cup B = X \text{ und } A \cap B \neq \emptyset \iff A = X \setminus B$$

Proof 16.1 to Task 16.1

Wir beweisen die Äquivalenz durch Beweis der beide Implikationen " $\Longrightarrow$ " und " $\Longleftarrow$ ".

" $\Longrightarrow$ ": Wir nehmen an, dass

$$A \cup B = X \wedge A \cap B = \emptyset$$

gilt z.z.: $A = X \setminus B$.
Dazu genügt es, die Inklusion

$$\underbrace{A \subseteq X \setminus B}_{1.} \wedge \underbrace{X \setminus B \subseteq A}_{2.}$$

z.z.

1. Wir zeigen $A \subseteq X \setminus B$
   Es sei $x \in A$. z.z $x \in X \setminus B$
   Da $A \subseteq X$ gilt, $x \in X$.
   Es bleibt z.z., dass

   $$x \notin B$$

   Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen dazu an, dass $x \in B$ gilt. Dann folt aber $a \in A \wedge x \in B$, also $x \in A \cap B$. Wiederspruch, da $A \cap B = \emptyset$
   Also muss $x \notin B$ gelten. Insgesamt folgt

   $$x \in X \setminus B$$

   Da $x \in A$ beliebig war, ist somit $A \subseteq X \setminus B$ bewiesen.
2. Wir zeigen $X \setminus B \subseteq A$. Sei $x \in X \setminus B$. Dann gilt

   $$x \in X \wedge x \notin B$$

   Da $X = A \cup B$, folgt $x \in A \vee x \in B$. Da aber

   $$x \notin B, \text{ folgt } x \in A$$

   Da $x \in X \setminus B$ beliebig war, ist $X \setminus B \subseteq A$ bewiesen.

Damit (mit 1. und 2.) ist die Gleichheit $A = X \setminus B$ bewiesen.

" $\Longleftarrow$ ": Wir nehmen an, dass $A = X \setminus B$ gilt.
z.z.: Es gilt $\underbrace{A \cup B = X}_{I}$ und $\underbrace{A \cap B = \emptyset}_{II}$
Zum Beweis von I zeigen wir

1. $A \cup B \subseteq X$
2. $X \subseteq A \cup B$

1. Zeige $A \cup B \subseteq X$. Sei $x \in A \cup B$. DAnn gilt $(x \in A) \vee (x \in B)$. Gilt $x \in A$, so folgt wegen $A \subseteq X$ sofort $x \in X$. Gilt $x \in B$, so folgt wegen $B \subseteq X$ sofort $x \in X$. In beiden Fällen folgt also $x \in X$, wie gewünscht.

2. Zeige $X \subseteq A \cup B$: Sei $x \in X$.
z.z.: $x \in A \vee x \in B$
1. Fall: $x \in A \implies x \in A \vee x \in B$
2. Fall: $x \notin A$ z.z. $x \in B$
(Annahme von $x \notin B$. Dann gilt

$$x \in X \setminus B$$

Da aber $X \setminus B = A$ folgt $x \in A$, was zu einem Wiederspruch führt.
Also muss $x \in B$ gelten.) Da $A = X \setminus B$ folgt

$$x \notin X \setminus B$$

Also gilt

$$\neg(x \in X \land x \notin B)$$

$$x \notin X \lor x \in B$$

Fall 1: $x \notin X$ Wiederspruch zur Vor. $x \in X$, also muss Fall 2:

$$x \in B$$

gelten.

Insgesamt $x \in A \cup B$, wie gewünscht

Lemma 16.1

Es sei $a \in \mathbb{N}$. Dann gilt

(i) $a \in \mathcal{T}(a)$

(ii) $\mathcal{T}(a) \neq \emptyset$

Proof 16.2

Es sei $a \in \mathbb{N}$ Es gilt $a \mid a$, denn $a = 1 \times a$, also $\exists c \in \mathbb{N} : (a = c \times a)$, nämlich $c := 1$.
Da $a \mid a$ gilt und $a > 1$ ist, folgt sofort (nach Definition 15.1) $a \in \mathcal{T}(a)$. Dies beweist (i).
Da nach (i) gilt, dass $a \in \mathcal{T}(a)$ folgt sofort $\mathcal{T}(a) \neq \emptyset$. Was (ii) beweist.

Corollary 16.1

Es sei $a \in \mathbb{N}$, $a > 1$.
Da $\mathcal{T}(a)$ eine nicht leere Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist, hat $\mathcal{T}(a)$ ein kleinstes Element

Theorem 16.1

Es sei $a \in \mathbb{N}$, $a > 1$
Dann gibt es eine Primzahl $p \in \mathbb{P}$ mit $p \mid a$

$$\forall a \in \mathbb{N}_{>1} : \exists p \in \mathbb{P} : p \mid a$$

Proof 16.3

Es sei $a \in \mathbb{N}_{>1}$ beliebig.
zu zeigen: $\exists p \in \mathbb{P} : p \mid a$
Betrachten $\mathcal{T}(a)$. Diese hat ein kleinstes Element. Nennen wir dieses β.
Beh.: $\beta \in \mathbb{P}$.
Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass $\beta \notin \mathbb{P}$. Dann hat β einen Teiler $q \in \mathbb{N}$ mit

$$1 < q < \beta.$$

Da $q \mid \beta$ und $\beta \mid a$, folgt nach Teilbarkeitsregeln $q \mid a$. Also (beachte $q > 1$) $q \in \mathcal{T}$.
Widerspruch, da $q < \beta$ und β das kleinste Element von $\mathcal{T}(a)$ ist. somit muss

$$\beta \in \mathbb{P}$$

□

Theorem 16.2 (Euklid)

Es gibt unendlich viele Primzahlen

Proof 16.4 Widerspruchsbeweis

Wir nehmen dazu an, dass es nur endlich viele Primzahlen gibt. Sagen wir

$$p_1, p_2, ..., p_n \quad (\text{d.h. } \mathbb{P} = \{p_1, p_2, ...p_n\})$$

Wir betrachten

$$a := p_1 \times p_2 \times ... \times p_n + 1$$

Es gilt $a \in \mathbb{N}$, $a > 1$. Somit (nach vorigem Satz 16.1) existiert $p \in \mathbb{P}$ mit $p \mid a$. Also gilt $p \in \{p_1, p_2, ..., p_n\}$
Also folgt $p \mid (p_1 \times p_2 \times ... \times p_n)$
Somit folt (beachte $p \mid a$)

$$p \mid \underbrace{(a - p_1 \times p_2 \times ... \times p_n)}_{=1}$$

Also $p \mid 1 \implies$ Widerspruch: Also war unsere Annahme falsch und es muss unendlich vile Primzahlen geben □

17. Vollständige Induktion

Theorem 17.1 Vollständige Induktion

Sei $A(n)$ eine Eigenschaft für natürliche Zahlen
Es gelte

(i) $A(1)$, d.h. 1 hat diese Eigenschaft

(ii) $\forall a \in \mathbb{N} : A(n) \implies A(n+1)$

d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn n die Eigenschaft hat, dann hat $n+1$ die Eigenschaft. Dann gilt $A(n)$ für <u>alle</u> $n \in \mathbb{N}$

Induktionsanfang (I.A.)

$A(1)$ überprüfen auf Wahrheitswert (muss wahr sein)

Induktionsschritt (I.S.)

Es sei $n \in N$

$$\underbrace{A(n)}_{\text{Induktionsvoraussetzung (I.V.)}} \implies A(n+1)$$

Task 17.1

Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion, dass für all $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$7 \mid \left(5^{2\cdot n} - 2^{2\cdot n}\right) \qquad A(n)$$

Proof 17.1

I.A. $(n = 1)$ Z.z.: $7 \mid \left(5^{2\cdot 1} - 2^{2\cdot 1}\right)$
Da $5^2 - 2^2 = 21 = 7 \cdot 3$, also folgt $7 \mid \left(5^{2\cdot 1} - 2^{2\cdot 1}\right)$

I.S. Es sei $n \in \mathbb{N}$

I.V. Es gelte $A(n)$ d.h. wir nehmen an, dass

$$7 \mid \left(5^{2n} - 2^{2n}\right)$$

z.z.: (I. Behauptung) $A(n+1)$ gilt,
d.h.: $7 \mid \left[5^{2\cdot(n+1)} - 2^{2\cdot(n+1)}\right]$
Es gilt

$$\begin{aligned}
5^{2\cdot(n+1)} - 2^{2\cdot(n+1)} &= 5^{2n+2} - 2^{2n+2} \\
&= 25 \cdot 5^{2n} - 4 \cdot 2^{2n} \\
&= 25 \cdot 5^{2n} - 25 \cdot 2^{2n} + 25 \cdot 2^{2n} - 4 \cdot 2^{2n} \\
&= 25 \cdot \left(5^{2n} - 2^{2n}\right) + (25 - 4) \cdot 2^{2n}
\end{aligned}$$

Da nach 17.1 die Teilbarkeit

$$7 \mid \left(5^{2n} - 2^{2n}\right)$$

gilt und auch $7 \mid (25-4)$ gilt, folgt (Teilbarkeitsregeln !) $7 \mid \left(5^{2\cdot(n+1)} - 2^{2\cdot(n+1)}\right)$, $\square$

Mit Induktionsprinzip ergibt insgesamt

$$\forall n \in \mathbb{N} : 7 \mid \left(5^{2n} - 2^{2n}\right)$$

Definition 17.1

Wir wollen die Behauptung beweisen:

$$\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$$

Teil 1: I.A.

Wir beweisen, dass $A(1)$ gilt
Tail 2: I.S.
von n nach $n+1$

I.V.: Es gelte $A(n)$ für $n \in \mathbb{N}$
Z.z.: Es gilt auch $A(n+1)$

$$\implies \forall n \in \mathbb{N} : A(n)$$

Task 17.2

Proof 17.2 $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$

I.A. ($n = 1$)
z.z.: $\sum_{k=1}^{1} (2k-1) = 1^2$
Es gilt

$$\sum_{k=1}^{1} (2k-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

und

$$1^2 = 1$$

was 17.2 beweist

I.S. z.z. (I. Beh.)

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = (n+1)^2$$

I.V. Es sei $n \in \mathbb{N}$, es gelte

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (2k-1)}_{\text{ersten } n \text{ Summanden}} + \underbrace{(2(n+1)-1)}_{n+1\text{-ter Summand}}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) &= n^2 + (2(n+1)-1) \\ &= n^2 + 2n + 2 - 1 \\ &= n^2 + 2n + 2 \\ &= (n+1)^2,\end{aligned}$$

□

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion könnnen wir folgern, dass gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} = n^2.$$

In reiner Zahlentheorie betrachtete man die Induktion als Axiom

Axiom 17.1 Induktionsaxiom

Es sei $M \subseteq \mathbb{N}$ eine teilmenge mit

(i) $1 \in M$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N} : n \in M \implies n+1 \in M$

Dann ist

$$M = \mathbb{N}$$

Dieses Axiom ermöglicht das Beweisverfahren durch vollständige Induktion, denn:
Es sei $M := \{n \in \mathbb{N} : A(n)\}$, Gilt

(i) $1 \in M$, d.h. es gilt $A(1)$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N} : Wenn n \in M$ 8also $A(n)$ gilt), folgt $n+1 \in M$ (also $A(n+1)$ gilt)

Dann folgt nach Axiom

$$M = \mathbb{N}$$

d.h. $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$

18. Abbildung (Funktionen)

Definition 18.1

Es seien X, Y bel. Mengen.
Eine Abbildung (oder Funktion) f von X nach Y ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in X$ genau ein Element $y_x \in Y$ zuordnet.

$$f : \begin{cases} X \to Y \\ x \mapsto y_x \end{cases} \quad f \text{ ist Abbildung von } X \text{ nach } Y,\ x \text{ wird auf } y_x \text{ abgeblidet}$$

Das dem Element $x \in X$ in eindutiger Weise durch f zugeordnete Element y_x wird auch mit

$$f(x)$$

bezeichnet; $f(x)$ heißt das Bild von x unter $f(x)$, oder der Wert von f an der Stelle x.

Xheißt auch Definitionsbereich von f, (Auch $\operatorname{Def}(f)$)

Y heißt auch Zielbereich von f und

$$W_f := \{y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y\}$$

der (exakte) Wertebereich von f oder kurz das Bild von f. Andere Bezeichnungen für W_f : $\operatorname{Bild}(f)$ oder $f(X)$

Definition 18.2

Ein $x \in X$ heißt Urbild von $y \in Y$, falls $f(x) = y$ gilt.

Example 18.1

$X, Y \in \mathbb{R}$. Betrachte

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$

$\mathrm{Def}(f) = \mathbb{R}$, Zielbereich von $\mathbb{R}$; $\mathrm{Bild}(f) = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{\geq 0} = \mathbb{R}^+$

Example 18.2 keine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} (x-1), & \textbf{falls } x \geq 1 \\ x+2, & \textbf{falls } x \leq 1 \end{cases}$

- Urbilder von 4 unter $f:$ für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = 4? : 2, -2$
- Urbilder von $-2 \in \mathbb{R} = Y$ unter f? Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = -2$? d.h. $x^2 = -2 \perp$ kein $x \in \mathbb{R}$
- Urbilder von i unter f? $\perp$ kann man nicht fragen. $i \notin \mathbb{R}$

Definition 18.3 Graph

Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung, dann heißt

$$\mathrm{Graph}(f) \coloneqq \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$$

der Graph von f.

Example 18.3

$$g : X = \{1, 2, 3\} \to \{-2, -1, 0, 1, 2\} = Y, \begin{cases} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 0 \end{cases}$$

$\mathrm{Def}(g) = \{1, 2, 3\}$, $\mathrm{Bild}(g) = g(X) = \{1, 2, 0\}$

- Urbilder von 0: 3
- Urbilder von -2: keine

$$\begin{aligned} g^{-1}(\{0, 2\}) \coloneqq& \{x \in \{1, 2, 3\} : g(x) = 0 \vee g(x) = 2 \\ =& \{x \in \{1, 2, 3\} : g(x) \in \{0, 2\}\} \end{aligned}$$

$$g(\{1, 3\}) \coloneqq \{g(x) : x \in \{1, 3\}\} = \{g(1), g(3)\} = \{1, 0\}$$

Definition 18.4

Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung

(1) Für eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt

$$\begin{aligned} f(A) \coloneqq &\{f(x) \mid x \in A\} \subseteq Y \\ =&\{y \in Y \mid \exists x \in A : f(x) = y\} \end{aligned}$$

Bild der Menge A unter f.

(2) Für eine Teilmenge $B \subseteq Y$ heißt die Menge

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\} = \{x \in X : \exists y \in B : f(x) = y\}$$

das Urbild von B unter f

Falls $B = \{y\}$
Für $y \in Y$ ist das Urbild von y unter f die Menge

$$f^{-1}(y) \coloneqq \{x \in X : f(x) \in \{y\} = \{x \in X : f(x) = y\}$$

Example 18.4 $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to x^2 \end{cases}$

$$f([0,1]) = \{x^2 : x \in [0,1]\} \overset{!?}{=} [0,1]$$