

Vorlesungsskript zum Theorieiteil

Integrierter Kurs 1 - Klassische Mechanik

Prof. Dr. Ulrich Nowak, Fachbereich Physik, Universität Konstanz

im Wintersemester 2020/21

Ausarbeitung: Ina Schwarz, Matthias Aßmann, Ulrich Nowak

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung: Physikalische Größen und Einheiten	5
2	Vektoralgebra und physikalischer Raum	6
2.1	Orts- und Verschiebungsvektoren	6
2.2	Vektorraum und Skalarprodukt	9
2.3	Lineare Unabhängigkeit, Dimension, Basis	11
2.4	Vektor- oder Kreuzprodukt	14
2.5	Mehrfachprodukte	16
3	Mechanik des Massenpunktes	19
3.1	Bahnkurve, Geschwindigkeit und Beschleunigung	19
3.2	Vektoranalysis der Raumkurven und Kinematik von Massenpunk- ten	19
3.2.1	Bahnkurven	19
3.2.2	Differentiation: Geschwindigkeit und Beschleunigung	21
3.2.3	Integration und Bogenlänge	23
3.3	Die Newtonschen Axiome	25
3.4	Die statische Messung einer Kraft	25
3.4.1	Kräfte als Vektoren	25
3.5	Systeme mit veränderlicher Masse (Rakete)	25
3.6	Begleitendes Dreibein, Tangential- und Zentripetalbeschleunigung	26
3.7	Krummlinige Koordinatensysteme und ihre Basisvektoren	29
3.8	Geschwindigkeit und Beschleunigung in krummlinigen Koordinaten	33
3.9	Beschleunigte Bezugssysteme und Trägheitskräfte	35
3.10	Beschleunigte Bezugssysteme: Experimentelle Einsichten	39
3.10.1	Linear beschleunigte Bezugssysteme	39
3.10.2	Rotierende Bezugssystemen	39
3.11	Reibung	39
3.11.1	Coulomb-Reibung	39
3.11.2	Stokes-Reibung	39
3.11.3	Newton-Reibung	39

4	Einfache eindimensionale Systeme	40
4.1	Arbeit, Energie, Potential, Integration der Bewegungsgleichung .	40
4.2	Taylor-Reihe	44
4.3	Arbeit, Energie, Potential - Experimente und Beispiele	46
4.3.1	Arbeit und Leistung	46
4.3.2	Wegunabhängige Arbeit, Konservative Kraftfelder	46
4.3.3	Potentielle Energie	46
4.3.4	Der Energiesatz der Mechanik	46
4.3.5	Exkurs: Der Flaschenzug	46
4.3.6	Das Fadenpendel: Bestimmung der Gravitationskonstante	46
4.4	Komplexe Zahlen	47
4.5	Lineare Differentialgleichung	50
4.6	Linearer, harmonischer Oszillator	52
4.6.1	Freier Oszillator	52
4.6.2	Freier, gedämpfter Oszillator	54
4.6.3	Gedämpfter Oszillator unter Einwirkung einer äußerer Kraft	58
4.7	Der Duffing-Oszillator und Chaos	62
4.8	Experimente zum linearer Oszillator	63
5	Vektoranalysis	64
5.1	Felder	64
5.2	Partielle Ableitung	65
5.3	Kurvenintegrale	67
5.4	Gradient	68
5.5	Divergenz und lokale Quellstärke	70
5.6	Rotation und lokale Wirbelstärke	71
6	Bewegung in drei Dimensionen	73
6.1	Arbeit, Energie und Potential	73
6.2	Drehimpuls und Drehmoment	75
6.3	Zentralkräfte und effektives Potential	76
6.4	Drehimpuls und Drehmoment - Experimente	79
6.5	Gravitation und Planetenbewegung	79
6.5.1	Die Keplerschen Gesetze	79
6.5.2	Das Newtonsche Gravitationsgesetz	79
6.5.3	Experimentelle Prüfung des Gravitationsgesetzes	79
6.5.4	Planetenbewegung und Planetenbahnen	79
6.5.5	Erste und zweite kosmische Geschwindigkeit	79

6.5.6	Gezeiten u. Deformation d. Erde infolge d. Gravitations- und Zentrifugalkräfte	79
6.5.7	Das Gravitationsfeld ausgedehnter Körper	79
7	Erhaltungssätze in Mehrteilchensystemen	80
7.1	Schwerpunktsatz, Impulssatz und Drehimpulssatz	80
7.2	Energiesatz	82
7.3	Effektives Einteilchenproblem	84
8	Stoßgesetze	86
8.1	Erhaltungssätze und ihre Folgen	86
8.2	Elastischer Stoß	88
9	Dynamik starrer ausgedehnter Körper	89
9.1	Modell des starren Körpers	89
9.2	Definition des Massenschwerpunkts	89
9.3	Bewegung des starren Körpers	89
9.4	Kräfte und Kräftepaare	89
9.5	Trägheitsmoment und Rotationsenergie	89
9.6	Drehimpuls des starren Körpers	89
9.7	Kinematik starrer Körper	89
9.7.1	Zerlegung der Geschwindigkeiten	90
9.7.2	Kinetische Energie und Trägheitstensor	90
9.7.3	Drehimpuls	92
9.7.4	Hauptträgheitsachsen	93
9.7.5	Eulersche Gleichungen: Nutation des symmetrischen Kreisel	94
9.8	Experimente zur Dynamik starrer ausgedehnter Körper	96
9.8.1	Freie Achsen	96
9.8.2	Der kräftefreie symmetrische Kreisel	96
9.8.3	Präzession des symmetrischen Kreisels	96
9.8.4	Überlagerung von Nutation und Präzession	96

1 Einleitung: Physikalische Größen und Einheiten

2 Vektoralgebra und physikalischer Raum

In der Physik gibt es skalare und vektorielle Größen. Skalare Größen sind durch eine Zahl (mit Einheit) gegeben (Bsp Temperatur), vektorielle Größen haben zusätzlich eine Richtung (Bsp. Geschwindigkeit). In diesem Kapitel wollen wir uns speziell mit Vektoren beschäftigen.

2.1 Orts- und Verschiebungsvektoren

Gesucht wird eine mathematische Beschreibung von Verschiebungen, also Abständen und Richtungen. (im Euklidischen Raum)

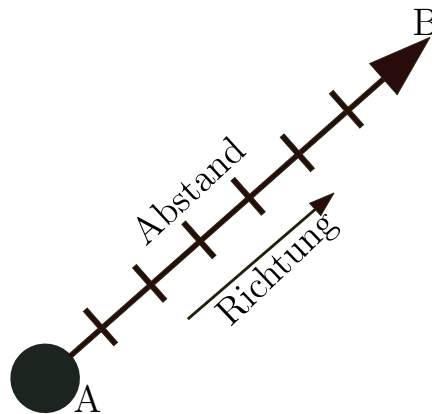


Abbildung 2.1: Skizze eines Vektors.

Definition 2.1. *Ein Vektor ist eine mehrdimensionale Größe, gekennzeichnet durch ihre Richtung im Raum und ihre Länge (Betrag).*

Vektoren können durch verschiedene Schreibweisen gekennzeichnet werden: \underline{v} , \vec{v} , \mathbf{v} .

Parallelverschiebung:

Vektoren lassen sich beliebig parallel im Raum verschieben, wie in [Abbildung 2.2](#) gezeigt.

gleiche Länge und gleiche Richtung \Rightarrow gleicher Vektor

\rightarrow Vektoren sind unabhängig vom Bezugspunkt.

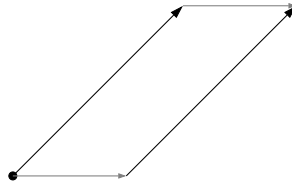


Abbildung 2.2: Parallelverschiebung eines Vektors.

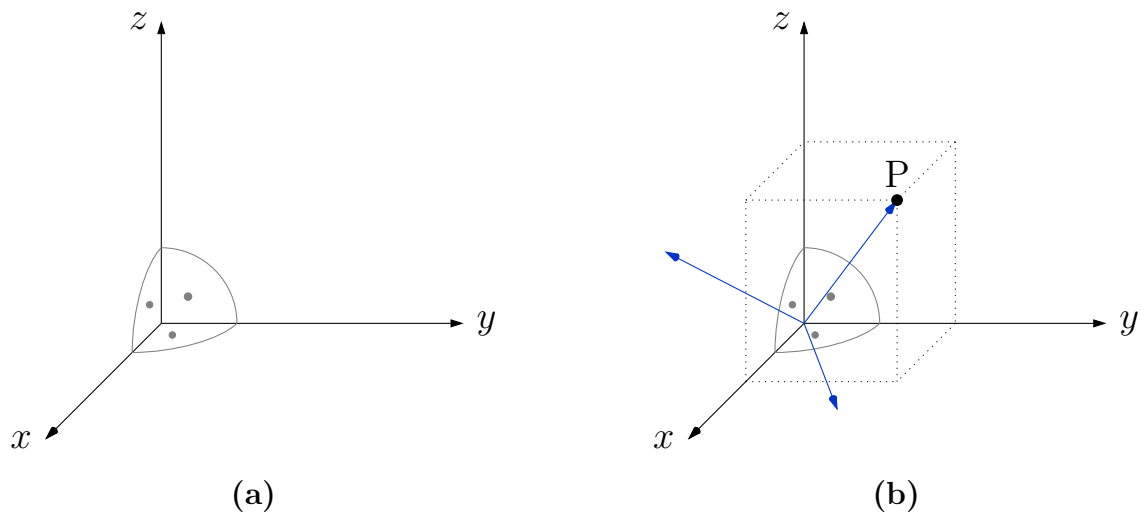


Abbildung 2.3: Skizze eines rechtshändigen kartesischen Koordinatensystems. In Skizze b) sind weitere Ortsvektoren in blau eingezeichnet.

Kartesisches Koordinatensystem:

Die Koordinatenachsen stehen rechtwinklig aufeinander, wie in [Abbildung 2.3 a\)](#) gezeigt.

Ein Punkt P im Raum ist durch drei Koordinaten (x, y, z) festgelegt, den man durch einen **Ortsvektor** darstellen kann. Bei diesen Vektoren liegt der Anfangspunkt im Ursprung $(0, 0, 0)$. Daraus ergibt sich, dass jeder Punkt im Raum einem Ortsvektor entspricht. Beispiele sind die blauen Vektoren in [Abbildung 2.3 b\)](#).

Die komponentenweise Notation von Ortsvektoren erfolgt als

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

und Länge (Betrag) $|\underline{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (folgt aus Satz des Pythagoras).

Einfache Operationen und Rechenregeln für Vektoren:

Für die **Addition** von Vektoren gilt: $\underline{a} + \underline{b}$ ergibt einen neuen Vektor.

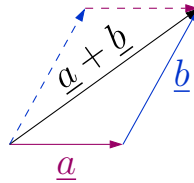


Abbildung 2.4: Addition zweier Vektoren ergibt einen neuen Vektor.

Eigenschaften der Vektoraddition:

1. Kommutativität:

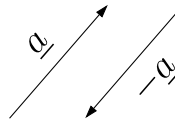
$$\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a} \quad (2.1)$$

2. Assoziativität:

$$(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) \quad (2.2)$$

3. Subtraktion:

$-\underline{a}$ ist antiparallel zu \underline{a}



$$\underline{b} - \underline{a} = \underline{b} + (-\underline{a}) \quad (2.3)$$

4. Nullvektor:

$$\underline{a} - \underline{a} = \underline{0} \quad (2.4)$$

Nullvektor $\underline{0}$ hat keine definierte Richtung.

→ Lösen von Gleichungen:

$$\underline{a} + \underline{R} = \underline{b}, \text{ ges : } \underline{R}$$

Subtrahiere \underline{a} auf beiden Seiten

$$(\underline{a} + \underline{R}) - \underline{a} = \underline{b} - \underline{a}$$

$$(\underline{R} + \underline{a}) - \underline{a} = \underline{b} - \underline{a}$$

$$\underline{R} + (\underline{a} - \underline{a}) = \underline{b} - \underline{a}$$

$$\underline{R} + \underline{0} = \underline{R} = \underline{b} - \underline{a}$$

Multiplikation mit einer reellen Zahl (Skalar):

Definition 2.2. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, dann gilt für $\alpha \underline{a}$:

1. $\alpha \underline{a}$ ist parallel zu \underline{a} falls $\alpha > 0$

2. $\alpha \underline{a}$ ist antiparallel zu \underline{a} falls $\alpha < 0$

3. $|\alpha \underline{a}| = |\alpha| |\underline{a}|$

Speziell gilt $0\underline{a} = \underline{0}$ und $(-1)\underline{a} = -\underline{a}$

Weiter gelten folgende Eigenschaften:

1. Distributivität:

$$(\alpha + \beta)\underline{a} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{a} \quad (2.5)$$

$$\alpha(\underline{a} + \underline{b}) = \alpha\underline{a} + \alpha\underline{b} \quad (2.6)$$

2. Assoziativität:

$$\alpha(\beta\underline{a}) = (\alpha\beta)\underline{a} = (\beta\alpha)\underline{a} \quad (2.7)$$

3. Einheitsvektor:

$$\underline{e}_{\underline{a}} = \frac{1}{|\underline{a}|} \cdot \underline{a} \rightarrow |\underline{e}_{\underline{a}}| = 1 \quad (2.8)$$

2.2 Vektorraum und Skalarprodukt

formal: Einführung von Vektoren als mathematische Objekte, die bestimmten Axiomen genügen. In diesem Falle:

”Linearer Vektorraum über den reellen Zahlen”

Orts- und Verschiebevektoren sind physikalische Realisierungen von Vektoren. Weitere Beispiele sind Geschwindigkeit, Impuls, Kraft. Rechenregeln für

- Addition und
- Multiplikation mit reellen Zahlen

wie zuvor. Zusätzlich brauchen wir das Skalarprodukt.

Das **Skalarprodukt** (oder inneres Produkt) $\underline{a} \cdot \underline{b}$ ordnet zwei Vektoren eine reelle Zahl (Skalar) zu.

Realisierung des Skalarproduktes am Beispiel der Verschiebevektoren, siehe Skizze 2.5:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = ab \cos(\vartheta) \text{ mit } a = |\underline{a}| \text{ und } b = |\underline{b}| \quad (2.9)$$

Dabei ist $a \cos(\vartheta)$ die Länge der Projektion des Vektors \underline{a} auf die Richtung von Vektor \underline{b} . Diese Definition des Skalarproduktes erfüllt die Axiome:

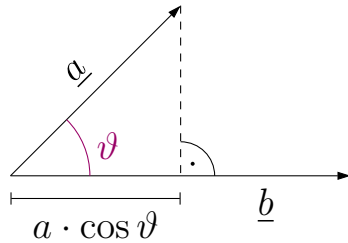


Abbildung 2.5: Realisierung des Skalarproduktes.

1. Kommutativität:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a} \quad (2.10)$$

2. Assoziativität: für $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(\alpha \underline{a}) \cdot \underline{b} = \underline{a} \cdot (\alpha \underline{b}) = \alpha(\underline{a} \cdot \underline{b}) \quad (2.11)$$

3. Distributivität:

$$\underline{a} \cdot (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{a} \cdot \underline{c} \quad (2.12)$$

kann durch Ausnutzen der freien Verschiebbarkeit bewiesen werden.

Orthogonalität: Die Vektoren \underline{a} und \underline{b} stehen senkrecht aufeinander, also $\vartheta = 90^\circ (= \pi/2)$ wenn gilt:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = 0 \text{ wenn } \underline{a} \neq \underline{0} \text{ und } \underline{b} \neq \underline{0} \quad (2.13)$$

Norm eines Vektors \underline{a} : (Betrag, Länge)

$$a = \sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}} \text{ mit } \underline{a} \cdot \underline{a} = |\underline{a}|^2 = a^2 \quad (2.14)$$

für den Einheitsvektor gilt: $\underline{e} \cdot \underline{e} = 1$

Weitere Eigenschaften des Skalarproduktes sind:

- Schwarzsche Ungleichung

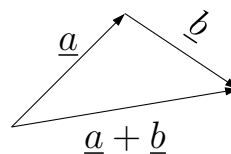
$$|\underline{a} \cdot \underline{b}| \leq |\underline{a}| |\underline{b}|, \quad (2.15)$$

weil $|\cos \vartheta| \leq 1$

- Dreiecksungleichung:

$$|a - b| \leq |\underline{a} + \underline{b}| \leq |a + b| \quad (2.16)$$

unmittelbar ersichtlich aus Skizze



2.3 Lineare Unabhängigkeit, Dimension, Basis

Gegeben sei ein Vektorraum \mathbb{V} und n Vektoren

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4, \dots, \underline{a}_n \in \mathbb{V}$$

sowie n Zahlen

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$$

Ein neuer Vektor \underline{b} kann dargestellt werden als

$$\underline{b} = \alpha_1 \underline{a}_1 + \alpha_2 \underline{a}_2 + \dots + \alpha_n \underline{a}_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{a}_i \quad (2.17)$$

Der Vektor \underline{b} heißt **Linearkombination** der Vektoren $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ mit den Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Beispiel:

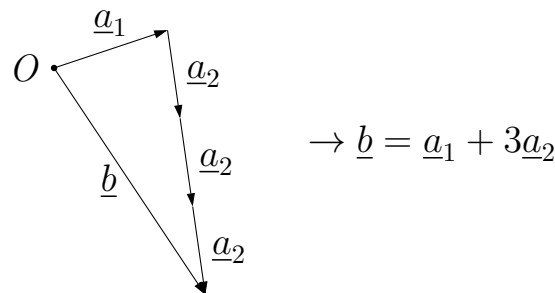


Abbildung 2.6: Linearkombination eines Vektors.

Definition 2.3. n Vektoren heißen **linear abhängig**, wenn Koeffizienten α_i existieren, so dass

$$\sum_i^n \alpha_i \underline{a}_i = \underline{0} \quad (2.18)$$

Dabei dürfen nicht alle $\alpha_i = 0$ sein.

Wenn

$$\sum_i^n \alpha_i \underline{a}_i = \underline{0} \quad (2.19)$$

nur für alle $\alpha_i = 0$ erfüllt werden kann, heißen die Vektoren **linear unabhängig**. (z.B. \underline{a}_1 und \underline{a}_2 in Abbildung 2.6)

Wenn für einen Vektorraum eine maximale Zahl n linear unabhängiger Vektoren existiert, ist dieses n die **Dimension** d des Vektorraumes.

Eine Menge von d linear unabhängigen Vektoren in einem d -dimensionalen Vektorraum ist eine **Basis**.

→ Jeder beliebige Vektor \underline{b} lässt sich als eine Linearkombination einer Basis $\{\underline{a}_i\}$ darstellen,

$$\underline{b} = \sum_i^d \alpha_i \underline{a}_i \quad (2.20)$$

Das **Kronecker-Symbol** ist definiert durch

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.21)$$

Für eine **orthonormale Basis** $\{e_i\}$ gilt damit

$$\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij} \quad (2.22)$$

D. h. unterschiedliche Basisvektoren stehen senkrecht aufeinander ($\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = 0$ für $i \neq j$) und sind Einheitsvektoren ($|\underline{e}_i|^2 = 1$).

Vektoren können nun in **Komponentendarstellung** ausgedrückt werden,

$$\underline{a} = \sum_{i=1}^d \alpha_i \underline{e}_i \quad (2.23)$$

wobei α_i die Komponenten von \underline{a} bezüglich der Basis $\{\underline{e}_i\}$ sind.
Es gilt

$$\underline{e}_i \cdot \underline{a} = \sum_{j=1}^d \alpha_j (\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j) = \sum_{j=1}^d \alpha_j (\delta_{ij}) = \alpha_i \quad (2.24)$$

Die Komponenten eines Vektors sind folglich die Projektion auf die Basisvektoren (da $|\underline{e}| = 1$) und sind dem Vektor eindeutig zugeordnet. Komponentendarstellung von \underline{a} :

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$$

Im folgenden wird eine Orthonormalbasis $\{\underline{e}_i\}$ der Dimension d vorausgesetzt.

Für die Vektoren gilt

$$\underline{a} = \sum_{i=1}^d a_i \underline{e}_i, \quad (2.25)$$

somit sind a_i die Komponenten vom \underline{a} in der Basis $\{\underline{e}_i\}$.

Rechenregeln für Vektorkomponenten:

1. Vektoraddition:

$$\underline{c} = \underline{a} + \underline{b} \rightarrow c_i = a_i + b_i \quad (2.26)$$

2. Multiplikation mit einer reellen Zahl:

$$\underline{b} = \alpha \underline{a} \rightarrow b_i = \alpha a_i \quad (2.27)$$

3. Skalarprodukt:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \left(\sum_{i=1}^d a_i \underline{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^d b_j \underline{e}_j \right) = \sum_{i=1, j=1}^d a_i b_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^d a_i b_i \quad (2.28)$$

Spezielle Vektoren:

- $\underline{0} = (0, 0, 0, \dots, 0)$
- $\underline{e}_i = (0, 0, 0, \dots, \underbrace{1}_{i\text{-te Stelle}}, \dots, 0)$

Betrag eines Vektors:

$$|\underline{a}| = \sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}} = \sqrt{\sum_{i=1}^d a_i^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_d^2} \quad (2.29)$$

Euklidischer Raum E_3 (Kartesische Koordinaten):

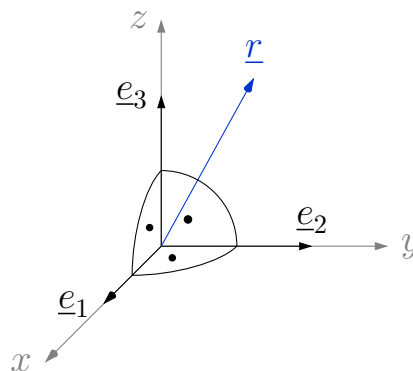


Abbildung 2.7: Euklidischer Vektorraum.

Basisvektoren:

$$\underline{e}_1 = \underline{e}_x, \quad \underline{e}_2 = \underline{e}_y, \quad \underline{e}_3 = \underline{e}_z \quad (2.30)$$

Ortsvektor:

$$\underline{r} = x\underline{e}_x + y\underline{e}_y + z\underline{e}_z = r_1\underline{e}_1 + r_2\underline{e}_2 + r_3\underline{e}_3 \quad (2.31)$$

$$= \sum_{i=1}^3 r_i \underline{e}_i = (x, y, z) \quad (2.32)$$

Beliebiger Vektor:

$$\underline{a} = a_x \underline{e}_x + a_y \underline{e}_y + a_z \underline{e}_z \quad (2.33)$$

Winkel ϑ zwischen \underline{a} und \underline{b} :

$$\cos(\vartheta) = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}||\underline{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \quad (2.34)$$

2.4 Vektor- oder Kreuzprodukt

Definition 2.4. Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

$$\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b} \quad (2.35)$$

ist eine Abbildung von zwei Vektoren auf einen Vektor \underline{c} , wobei

1.

$$|\underline{c}| = |\underline{a}||\underline{b}| \sin(\vartheta) \quad (2.36)$$

2. Der Vektor \underline{c} steht senkrecht auf \underline{a} und \underline{b} . Die Richtung wird durch die Händigkeit des Koordinatensystems bestimmt.

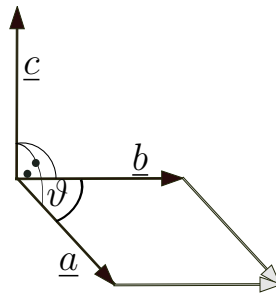


Abbildung 2.8: Beispiel für das Vektorprodukt.

Eigenschaften des Vektorprodukts:

1. Betrag des Kreuzprodukts ist die Fläche des Parallelogramms, das von \underline{a} und \underline{b} aufgespannt wird.

2. Es gilt:

$$\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0}, \quad (2.37)$$

wenn \underline{a} und \underline{b} die gleiche Richtung haben. (d. h. $\underline{b} = \beta \underline{a}$).

3. Antikommutativ:

$$\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a} \quad (2.38)$$

4. Distributiv:

$$(\underline{a} + \underline{b}) \times \underline{c} = (\underline{a} \times \underline{c}) + (\underline{b} \times \underline{c}) \quad (2.39)$$

5. Multiplikation mit einer Zahl:

$$\alpha(\underline{a} \times \underline{b}) = (\alpha \underline{a}) \times \underline{b} = \underline{a} \times (\alpha \underline{b}) \quad (2.40)$$

6. Das Vektorprodukt ist nicht assoziativ:

$$\underbrace{(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c}}_{\underline{d}_1} \neq \underbrace{\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c})}_{\underline{d}_2} \quad (2.41)$$

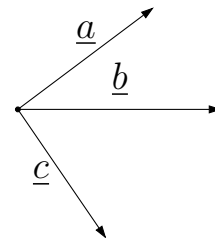
Beispiel: Die Vektoren \underline{a} , \underline{b} und \underline{c} liegen in der Ebene \mathbb{E}

$\rightarrow \underline{a} \times \underline{b}$ und $\underline{b} \times \underline{c}$ stehen senkrecht auf \mathbb{E}

$\rightarrow \underline{d}_1$ und \underline{d}_2 liegen in Ebene \mathbb{E}

aber:

$$\begin{aligned} \underline{d}_1 &\perp \underline{c} \\ \underline{d}_2 &\perp \underline{a} \\ \rightarrow \underline{d}_1 &\neq \underline{d}_2 \end{aligned}$$



Orthonormalbasis und Vektorprodukt: Eine Orthonormalbasis bildet ein Rechtssystem

$$\rightarrow \underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \underline{e}_3, \quad \underline{e}_2 \times \underline{e}_3 = \underline{e}_1$$

In kompakter Schreibweise

$$\underline{e}_i \times \underline{e}_j = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \underline{e}_k \quad (2.42)$$

Hierbei wurde das **Levi-Civita-Symbol** verwendet, das definiert ist als

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{falls } (ijk) = (123) \text{ und zyklische Vertauschungen} \\ -1, & \text{falls } (ijk) = (321) \text{ und zyklische Vertauschungen} \\ 0, & \text{falls 2 Indizes gleich} \end{cases} \quad (2.43)$$

Beispiele:

$$\begin{aligned}\epsilon_{123} &= \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1 \\ \epsilon_{321} &= \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = -1\end{aligned}$$

Das Levi-Civita-Symbol ist **total antisymmetrisch**, das heißt es wechselt bei beliebigem Tausch zweier Indices das Vorzeichen

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}. \quad (2.44)$$

Komponentenschreibweise des Vektorproduktes:

$$\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b} = \left(\sum_{i=1}^3 a_i \underline{e}_i \right) \times \left(\sum_{j=1}^3 b_j \underline{e}_j \right) = \sum_{i=1, j=1}^3 a_i b_j \underbrace{\underline{e}_i \times \underline{e}_j}_{\sum \epsilon_{ijk} \underline{e}_k} = \sum_{k=1}^3 c_k \underline{e}_k$$

mit

$$c_k = \sum_{i=1, j=1}^3 \epsilon_{ijk} a_i b_j \quad (2.45)$$

zum Beispiel

$$\begin{aligned}c_1 &= a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ c_2 &= a_3 b_1 - b_3 a_1 \\ c_3 &= a_1 b_2 - b_1 a_2\end{aligned}$$

oder, geschrieben als Determinante:

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

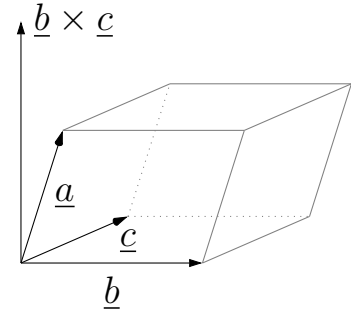
2.5 Mehrfachprodukte

Spatprodukt:

$$\begin{aligned}\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) &= \sum_{ijk} a_i b_j c_k \underbrace{\underline{e}_i \cdot (\underline{e}_j \times \underline{e}_k)}_{\sum_l \epsilon_{jkl} \underline{e}_l} \\ &= \sum_{ijkl} a_i b_j c_k \epsilon_{jkl} \underline{e}_i \cdot \underline{e}_l = \sum_{ijk} a_i b_j c_k \epsilon_{jki} \\ &= \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k\end{aligned} \quad (2.46)$$

oder, geschrieben als Determinante:

$$\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$



Der Betrag des Spatprodukts entspricht dem Volumen eines Parallelepipeds (auch Spats), ein Körper, der von sechs paarweise kongruenten und in parallelen Ebenen liegenden Parallelogrammen begrenzt wird (siehe Skizze).

Entwicklungssatz:

$$\begin{aligned} [\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c})]_k &= \sum_{ij} \epsilon_{ijk} a_i [\underline{b} \times \underline{c}]_j \\ &= \sum_{ij} \epsilon_{kij} a_i \sum_{lm} b_l c_m \epsilon_{lmj} \\ &= \sum_{ijlm} \epsilon_{kij} \epsilon_{jlm} a_i b_l c_m \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $[\]_k$ die k -te Komponente.

Lemma:

$$\sum_{ijlm} \epsilon_{kij} \epsilon_{jlm} = \sum_{ijlm} \delta_{kl} \delta_{im} - \delta_{km} \delta_{il}$$

Damit folgt

$$\sum_{ijlm} \epsilon_{kij} \epsilon_{jlm} a_i b_l c_m = \sum_{ilm} (\delta_{kl} \delta_{im} - \delta_{km} \delta_{il}) a_i b_l c_m$$

Ausführen der Summen über l und m ergibt schließlich

$$\rightarrow \sum_i a_i c_i b_k - a_i b_i c_k = \underline{b}_k (\underline{a} \cdot \underline{c}) - c_k (\underline{a} \cdot \underline{b})$$

Zusammen:

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c}(\underline{a} \cdot \underline{b}) = \underline{d} \quad (2.47)$$

Daraus folgt, dass die Vektoren $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ koplanar sind, das heißt sie liegen in einer Ebene.

Weitere Sätze:

- $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{c} \times \underline{d}) = (\underline{a} \cdot \underline{c})(\underline{b} \cdot \underline{d}) - (\underline{a} \cdot \underline{d})(\underline{b} \cdot \underline{c})$

- $(\underline{a} \times \underline{b})^2 = a^2 b^2 - (\underline{a} \cdot \underline{b})^2$, $a^2 b^2$ und $(\underline{a} \cdot \underline{b})^2$ i.A. nicht gleich (z.B. $\underline{a} \perp \underline{b}$)

3 Mechanik des Massenpunktes

3.1 Bahnkurve, Geschwindigkeit und Beschleunigung

3.2 Vektoranalysis der Raumkurven und Kinematik von Massenpunkten

Idealisierung:

- Beschreibung Körper durch Massenpunkt (MP) P
- Bewegung des MP wird beschrieben durch eine Bahn (Bahnkurve, Trajektorie)

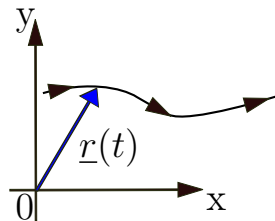


Abbildung 3.1: Skizze der Trajektorie eines Massenpunktes.

Bahn eines MP wird parametrisiert durch Parameter t (üblicherweise ist t die Zeit) $\rightarrow \underline{r}(t)$

3.2.1 Bahnkurven

Mathematisch: $\underline{r}(t)$ ist eine vektorwertige Funktion (wie auch Geschwindigkeit $\underline{v}(t)$, Beschleunigung $\underline{a}(t)$, Kraft $\underline{F}(t)$)

Eigenschaften der Funktion \rightarrow **Vektoranalysis**

Bahn des MP in zeitunabhängiger Orthonormalbasis $\{\underline{e}_i\}$:

$$\underline{r}(t) = \sum_{i=1}^3 x_i(t) \underline{e}_i = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \quad (3.1)$$

Punktfolge $\underline{r}(t)$ beschreibt Kurve im Raum. Zeit t ist nur eine Möglichkeit die Kurve zu parametrisieren.

Beispiel unterschiedlicher Parametrisierungen:

- Kreisbahn

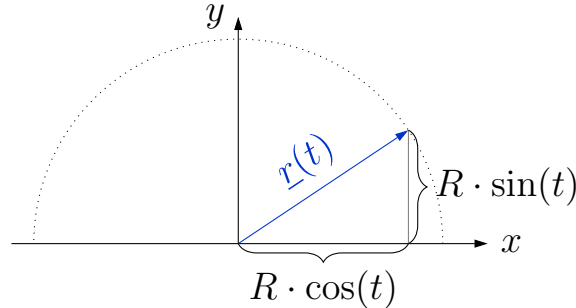


Abbildung 3.2: Kreisbahn.

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cos(t) \\ R \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

für $0 \leq t \leq \pi$

alternativ lässt sich $\tau = -R \cos(t)$ einführen, mit

$$\underline{r}(\tau) = \begin{pmatrix} -\tau \\ \sqrt{R^2 - \tau^2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.3) \quad \begin{array}{l} \text{NR: } R \cdot \sin(t) = R \cdot \sqrt{1 - \cos^2(t)} \\ \quad = \sqrt{R^2 - R^2 \cos^2(t)} \\ \quad = \sqrt{R^2 - \tau^2} \end{array}$$

für $-R \leq \tau \leq R$

→ beide Parametrisierungen beschreiben die gleiche Kurve.

Experimentell

- waagerechter Wurf, Parabelbahn der Wurf setzt sich aus zwei Bewegungen zusammen:

$$x(t) = vt \quad (\text{gleichförmige Bewegung})$$

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2 \quad (\text{konstante Beschleunigung})$$

Für die Form der Bahnkurve $y(x)$ mit $t(x) = x/v$ ergibt sich

$$y(x) = \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v^2} \rightarrow \text{Parabel}$$

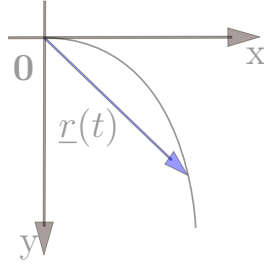


Abbildung 3.3: Waagerechter Wurf.

3.2.2 Differentiation: Geschwindigkeit und Beschleunigung

Wir führen jetzt die Differentiation eines Vektors $\underline{q}(t)$ nach Parameter t ein. Betrachte Differenzvektor:

$$\Delta \underline{q}(t, \Delta t) := \underline{q}(t + \Delta t) - \underline{q}(t)$$

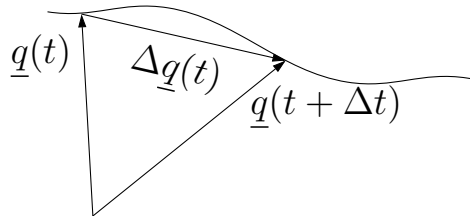


Abbildung 3.4: Differentialquotient für vektorwertige Funktionen.

Differentialquotient:

$$\frac{d\underline{q}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \underline{q}(t, \Delta t)}{\Delta t} = \dot{\underline{q}}(t) \quad (\text{Zeitableitung}) \quad (3.4)$$

Wenn $\{\underline{e}_i\}$ eine zeitunabhängige Orthonormalbasis ist, gilt

$$\begin{aligned} \underline{q}(t) &= \sum_i q_i(t) \underline{e}_i \\ \dot{\underline{q}}(t) &= \sum_i \dot{q}_i(t) \underline{e}_i \end{aligned}$$

mit

$$\dot{q}_i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q_i(t, \Delta t)}{\Delta t} \quad (3.5)$$

Es gelten folgende Rechenregeln (Beweis über Komponenten):

$$\frac{d}{dt} (\underline{a}(t) + \underline{b}(t)) = \dot{\underline{a}}(t) + \dot{\underline{b}}(t) \quad (3.6)$$

$$\frac{d}{dt} (f(t)\underline{a}(t)) = \dot{f}\underline{a} + f\dot{\underline{a}} \quad (3.7)$$

$$\frac{d}{dt} (\underline{a}(t) \cdot \underline{b}(t)) = \dot{\underline{a}} \cdot \underline{b} + \underline{a} \cdot \dot{\underline{b}} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\underline{a}(t)| &= \frac{d}{dt} \sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}} = \frac{d\sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}}}{d(\underline{a} \cdot \underline{a})} \frac{d(\underline{a} \cdot \underline{a})}{dt} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}}} 2\dot{\underline{a}} \cdot \underline{a} = \frac{1}{|\underline{a}|} \dot{\underline{a}} \cdot \underline{a} = \dot{\underline{a}}(t) \cdot \underline{e}_a(t) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Beispiel zu Geschwindigkeit folgt gleich.

$$\frac{d}{dt} (\underline{a}(t) \times \underline{b}(t)) = \dot{\underline{a}}(t) \times \underline{b}(t) + \underline{a}(t) \times \dot{\underline{b}} \quad (3.10)$$

In (3.9) wird die Kettenregel verwendet: $\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$.
(Beim Kreuzprodukt muss die Reihenfolge beachtet werden!)

Definition 3.1. *Geschwindigkeit und Beschleunigung:*

Für eine Bahnkurve $\underline{r}(t)$, die durch die Zeit t parametrisiert ist, gilt

1. *Geschwindigkeit:* $\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t)$
2. *Beschleunigung:* $\underline{a}(t) = \dot{\underline{v}}(t) = \ddot{\underline{r}}(t)$

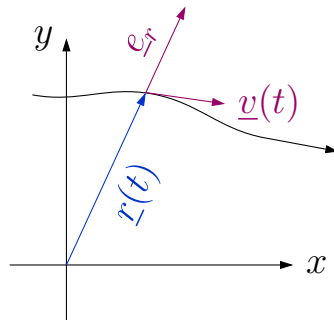


Abbildung 3.5: Geschwindigkeit als zeitliche Ableitung des Ortsvektors.

Anschaulich ist die Geschwindigkeit parallel zur Tangente.

Beispiel zu (3.9) für Geschwindigkeit: $\frac{d}{dt} |\underline{r}| = \dot{\underline{r}} \cdot \underline{e}_r = \underline{v} \cdot \underline{e}_r$.

3.2.3 Integration und Bogenlänge

Die Integration vektorwertiger Funktionen $\underline{a}(t)$ wird durchgeführt in den Komponenten bezüglich der zeitunabhängigen Basisvektoren $\{\underline{e}_i\}$:

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \int_{t_a}^{t_b} \underline{a}(t) dt = \int_{t_a}^{t_b} \sum_i a_i(t) \underline{e}_i dt \\ &= \sum_i \underline{e}_i \int_{t_a}^{t_b} a_i(t) dt \end{aligned} \quad (3.11)$$

Das heißt jede Komponente wird separat integriert.

Die **Bogenlänge** bezeichnet die Länge einer Raumkurve, gemessen entlang der Kurve und ausgehend von einem beliebigen Anfangspunkt (= Länge der "geradegezogen" Kurve). Die Bogenlänge ist die natürliche Parametrisierung einer Kurve.

Zur Berechnung wird das Intervall $[t_a, t_b]$ in N gleichlange Teilintervalle $\Delta t_N = (t_b - t_a)/N$ zerlegt. Verbinde Punkte durch Polygonzug für die Zeitpunkte

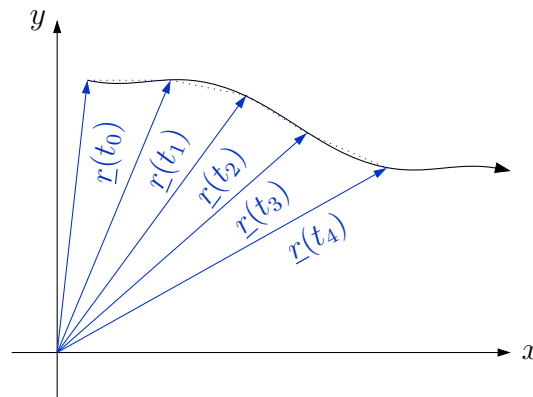


Abbildung 3.6: Zerlegung einer Bahnkurve.

$$t_n = t_a + n\Delta t_N \quad \text{für } n = 0, 1, 2, 3, \dots, N$$

Für die Länge L des Polygonzugs ergibt sich

$$L_N(t_b, t_a) = \sum_{n=0}^{N-1} |\underline{r}(t_{n+1}) - \underline{r}(t_n)| = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{|\underline{r}(t_{n+1}) - \underline{r}(t_n)|}{\Delta t_N} \Delta t_N$$

Definiere Bogenlänge S als

$$S(t_b, t_a) := \lim_{N \rightarrow \infty} L_N(t_b, t_a) \quad (3.12)$$

Dieser Ausdruck kann auf Ableitung und Integration zurückgeführt werden mit:

$$\frac{\underline{r}(t_{n+1}) - \underline{r}(t_n)}{\Delta t_N} \xrightarrow[\Delta t_N \rightarrow 0]{N \rightarrow \infty} \left. \frac{d\underline{r}}{dt} \right|_{t=t_n}$$

Damit wird im Sinne des Riemann-Integrals:

$$\boxed{S(t_b, t_a) = \int_{t_a}^{t_b} \left| \frac{d\underline{r}}{dt} \right| dt} \quad (3.13)$$

Für die differentielle Änderung der Bogenlänge gilt:

$$\frac{dS}{dt} = \left| \frac{d\underline{r}}{dt} \right| = |\dot{\underline{r}}(t)| \geq 0$$

→ S ist ein mit t monoton wachsender Parameter, d.h. Kurve ist durch S eindeutig parametrisiert (und $t(S)$ eindeutig).

→ $S(t)$ ist ein natürlicher Parameter für Bahnkurve.

Beispiel: Kreisbewegung

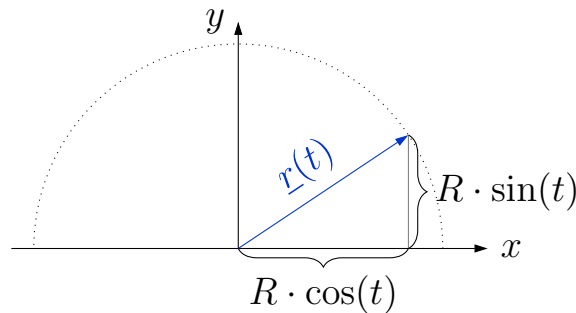


Abbildung 3.7: Kreisbahn.

$$\underline{r}(t) = R(\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0) \quad (3.14)$$

Mit dem Winkel $\varphi(t) = \omega t$ ist $\dot{\varphi} = \omega$ = Winkelgeschwindigkeit.

Damit gilt $\dot{\underline{r}}(t) = R\omega(-\sin(\omega t), \cos(\omega t), 0)$ und $|\dot{\underline{r}}(t)| = R\omega$. Damit ist die Bogenlänge:

$$S(t) = \int_0^{t_b} R\omega dt = R\omega t_b \quad (3.15)$$

also

$$t(S) = \frac{S}{R\omega} \quad (\text{linear !})$$

Die Bahnkurve parametrisiert durch S ist:

$$\underline{r}(S) = R \left(\cos \left(\frac{S}{R} \right), \sin \left(\frac{S}{R} \right), 0 \right)$$

3.3 Die Newtonschen Axiome

3.4 Die statische Messung einer Kraft

3.4.1 Kräfte als Vektoren

3.5 Systeme mit veränderlicher Masse (Rakete)

3.6 Begleitendes Dreiein, Tangential- und Zentripetalbeschleunigung

Gegeben sei eine Bahnkurve $\underline{r}(t)$. Gesucht wird nun ein "natürliches" (durch die Bogenlänge s bestimmtes) System von orthonormalen Vektoren in jedem Punkt von $\underline{r}(t) \rightarrow$ begleitendes Dreiein.

Definition 3.2. Ein *begleitendes Dreiein* bildet ein orthonormiertes Rechtssystem, bestehend aus dem Tangentialvektor: \underline{T} , dem Hauptnormalenvektor \underline{N} und dem Binormalenvektor \underline{B} .

Das heißt, es gilt $\underline{T} = \underline{N} \times \underline{B}$ und zyklische Vertauschungen. Da die Geschwindigkeit

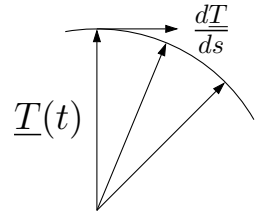
$$\dot{\underline{r}}(t) = \frac{d\underline{r}(t)}{dt} = \underline{v}(t)$$

tangential zur Bahnkurve ist, liegt es nahe den **Tangentialvektor** \underline{T} zu definieren als

$$\begin{aligned} \underline{T} &:= \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = \frac{d\underline{r}}{dt} \frac{dt}{ds} \quad \text{da} \quad \frac{ds}{dt} = |\underline{v}| \\ &= \frac{d\underline{r}}{ds} \quad (\text{Kettenregel}) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Für den **Hauptnormalenvektor** \underline{N} definiert man

$$\kappa \underline{N} := \frac{d\underline{T}}{ds} \quad (3.17)$$



\underline{N} steht senkrecht auf \underline{T} , weil

$$\underline{T}^2 = 1 \rightarrow \frac{d}{ds} \underline{T}^2 = 0 = \frac{d\underline{T}}{ds} \cdot \underline{T} + \underline{T} \cdot \frac{d\underline{T}}{ds} = 0 \rightarrow \underline{T} \cdot \frac{d\underline{T}}{ds} = 0 \quad \text{q.e.d.}$$

Normierung:

$$\underline{N} = \frac{\frac{d\underline{T}}{ds}}{\left| \frac{d\underline{T}}{ds} \right|} \quad (3.18)$$

Dabei ist $\kappa = \left| \frac{d\underline{T}}{ds} \right|$ die **Krümmung** (Maß für die Änderung von \underline{T}). Für $\kappa = 0$ liegt keine Krümmung vor (eine Gerade). Für den **Krümmungsradius** (Radius des eingepassten Kreises) gilt

$$\rho := \frac{1}{\kappa} \quad (3.19)$$

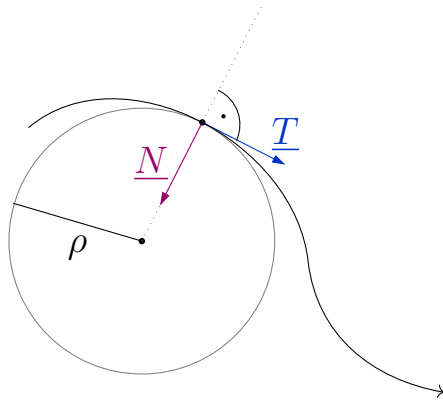


Abbildung 3.8: Beispiel für den Krümmungsradius.

Die von \underline{T} und \underline{N} aufgespannte Ebene heißt **Schmiegungeebene**.
Für den dritten Vektor (Binormalenvektor) berechnen wir

$$\underline{B} := \underline{T} \times \underline{N} \quad (3.20)$$

- \underline{B} steht senkrecht auf der Schmiegungeebene
- $\underline{B}(s)$ beschreibt die Bewegung der Schmiegungeebene.
- Für $\underline{B}(s) = \text{const} \rightarrow$ Bewegung in fester Ebene

Die Vektoren \underline{N} und \underline{B} spannen die **Normalenebene** auf.

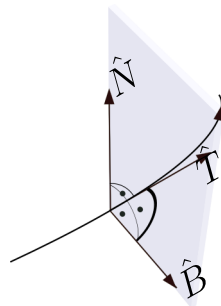


Abbildung 3.9: Beispiel für die Normalenebene.

COMPUTER: movie auf youtube

Beispiel: Kreisbewegung. Für die Bahn gilt

$$\underline{r}(t) = (R \cos(\omega t), R \sin(\omega t), 0), \text{ wobei } \omega = \frac{2\pi}{\tau}$$

$$\text{mit } s = R\omega t \Rightarrow \underline{r}(s) = \left(R \cos\left(\frac{s}{R}\right), R \sin\left(\frac{s}{R}\right), 0 \right)$$

$$\text{Tangentialvektor } \underline{T} = \frac{d\underline{r}}{ds} = \left(-\sin\left(\frac{s}{R}\right), \cos\left(\frac{s}{R}\right), 0 \right)$$

$$\frac{d\underline{T}}{ds} = \left(-\frac{1}{R} \cos\left(\frac{s}{R}\right), -\frac{1}{R} \sin\left(\frac{s}{R}\right), 0 \right)$$

$$\rightarrow \text{Krümmung } \kappa(s) = \left| \frac{d\underline{T}}{ds} \right| = \frac{1}{R}, \text{ mit Krümmungsradius } R$$

$$\rightarrow \text{Hauptnormalenvektor } \underline{N} = \left(-\cos\left(\frac{s}{R}\right), -\sin\left(\frac{s}{R}\right), 0 \right) = -\underline{e}_r$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{Binormalenvektor } \underline{B} = \underline{T} \times \underline{N} &= \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{s}{R}\right) \\ \cos\left(\frac{s}{R}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{s}{R}\right) \\ -\sin\left(\frac{s}{R}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin^2\left(\frac{s}{R}\right) + \cos^2\left(\frac{s}{R}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Binormalenvektor $\underline{B}(s) = \text{const.} \rightarrow$ Bewegung in x - y -Ebene (Schmiegeebene konstant)

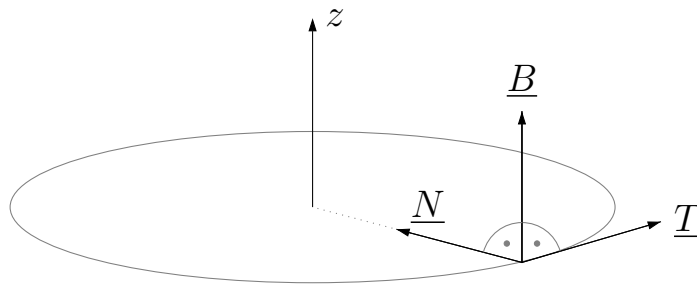


Abbildung 3.10: Tangential-, Hauptnormalen- und Binormalenvektor.

Zusammenhang mit **Geschwindigkeit und Beschleunigung:**

- Geschwindigkeit ist immer tangential zur Bahnkurve, denn

$$\underline{v}(t) = \frac{d\underline{r}}{dt} = \underbrace{\frac{d\underline{r}}{ds}}_{\underline{T}} \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{|\underline{v}|=v} = v\underline{T}$$

- Beschleunigung liegt in der Schmiegungeebene, denn

$$\begin{aligned}\underline{a}(t) &= \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\underline{T}) = \left(\frac{d}{dt}v\right)\underline{T} + v\frac{d\underline{T}}{dt} \\ &= \dot{v}\underline{T} + v \underbrace{\frac{d\underline{T}}{ds}}_{\kappa \underline{N}} \underbrace{\frac{ds}{dt}}_v \quad \text{mit } \kappa = \frac{1}{\rho} \\ &= \dot{v}\underline{T} + \frac{v^2}{\rho}\underline{N} =: a_t \underline{T} + a_z \underline{N}\end{aligned}$$

Tangentialkomponente: $a_t = \dot{v}$
Zentripetalkomponente: $a_z = \frac{v^2}{\rho}$

Für das Beispiel der Kreisbewegung oben ergibt sich

$$\begin{aligned}\dot{v} &= 0 \rightarrow a_t = 0 \\ a_z &= \frac{v^2}{\rho} = \frac{(R\omega)^2}{R} = R\omega^2\end{aligned}$$

3.7 Krummlinige Koordinatensysteme und ihre Basisvektoren

In vielen Fällen ist es außerordentlich hilfreich spezielle Koordinatensysteme zu verwenden, die an die jeweilige physikalische Situation angepasst sind und bei denen in jedem Raumpunkt ein Basissystem definiert ist.

Zylinderkoordinaten: Probleme, die rotationssymmetrisch bezüglich einer Achse im Raum sind, lassen sich oft einfacher in Zylinderkoordinaten beschreiben.

- Koordinaten:

$$\begin{aligned}\varrho &: 0 \leq \varrho \leq \infty \\ \varphi &: 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ z &: -\infty \leq z \leq \infty\end{aligned}$$

- Ortsvektor:

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho \cos(\varphi) \\ \varrho \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

- Koordinatenlinien: (Halte zwei Koordinaten fest, variiere die dritte)

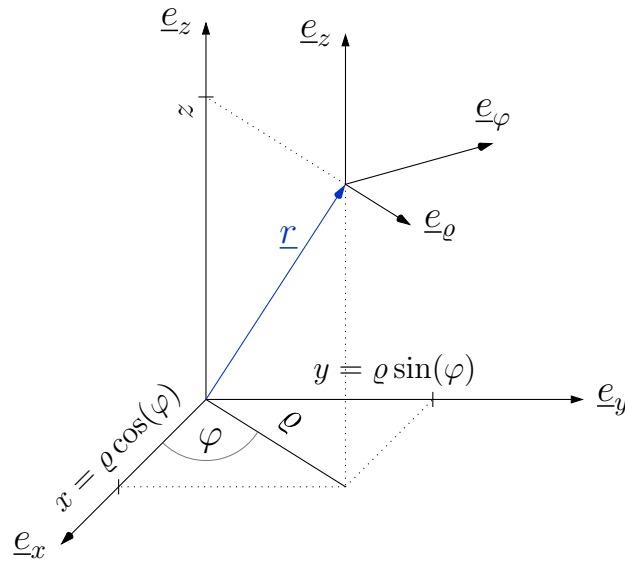


Abbildung 3.11: Zylinderkoordinaten.

fest	variabel	
ϱ, z	φ	Kreis um z-Achse
z, φ	ϱ	Gerade \perp z-Achse
φ, ϱ	z	Gerade \parallel z-Achse

Tabelle 3.1: Koordinatenlinien für Zylinderkoordinaten

Definieren Basisvektoren, die in jedem Punkt tangential zu den Koordinatenlinien sind $\{\underline{e}_\varrho, \underline{e}_\varphi, \underline{e}_z\}$:

$$\underline{e}_\varrho = \frac{\frac{d\underline{r}}{d\varrho}}{\left| \frac{d\underline{r}}{d\varrho} \right|} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

$$\underline{e}_\varphi = \frac{\frac{d\underline{r}}{d\varphi}}{\left| \frac{d\underline{r}}{d\varphi} \right|} = \begin{pmatrix} -\varrho \sin(\varphi) \\ \varrho \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\varrho} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

$$\underline{e}_z = \frac{\frac{d\underline{r}}{dz}}{\left| \frac{d\underline{r}}{dz} \right|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Differential des Ortsvektors, d. h. die vektorielle Änderung bei infinitesimaler Änderung der Koordinaten

$$\text{kartesisch} \quad d\underline{r} = dx \underline{e}_x + dy \underline{e}_y + dz \underline{e}_z \quad (3.24)$$

$$\text{zylindrisch} \quad d\underline{r} = d\varrho \underline{e}_\varrho + \varrho d\varphi \underline{e}_\varphi + dz \underline{e}_z \quad (3.25)$$

Berechnung: (Einschub über totales Differential: für Funktion mehrerer Veränderlicher $f(x, y, z)$ gilt $df = \frac{\partial f}{\partial x}|_{y,z}dx + \frac{\partial f}{\partial y}|_{x,z}dy + \frac{\partial f}{\partial z}|_{x,y}dz$)

$$\begin{aligned} d\underline{r} &= d \begin{pmatrix} \varrho \cos(\varphi) \\ \varrho \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\varrho \cos(\varphi) - \varrho \sin(\varphi)d\varphi \\ d\varrho \sin(\varphi) + \varrho \cos(\varphi)d\varphi \\ dz \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{e}_\varrho} d\varrho + \varrho \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{e}_\varphi} d\varphi + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{e}_z} dz \end{aligned}$$

Kugelkoordinaten: Für Systeme die kugelsymmetrisch sind, bietet sich die Benutzung der Kugelkoordinaten an.

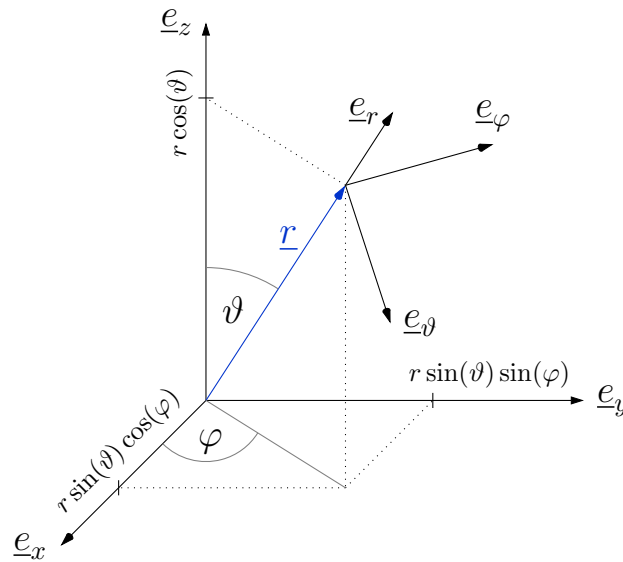


Abbildung 3.12: Kugelkoordinaten.

- Koordinaten:

$$r : 0 \leq r \leq \infty$$

$$\vartheta : 0 \leq \vartheta \leq \pi$$

$$\varphi : 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

- Ortsvektor:

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ r \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

- Koordinatenlinien: (Halte zwei Koordinaten fest, variiere die dritte)

fest	variabel	
r, φ	ϑ	Längenkreis
r, ϑ	φ	Breitenkreis
φ, ϑ	r	Radiusstrahl

Tabelle 3.2: Koordinatenlinien für Kugelkoordinaten

Die Basisvektoren lassen berechnen:

$$\underline{e}_r = \frac{\frac{d\underline{r}}{dr}}{\left| \frac{d\underline{r}}{dr} \right|} = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

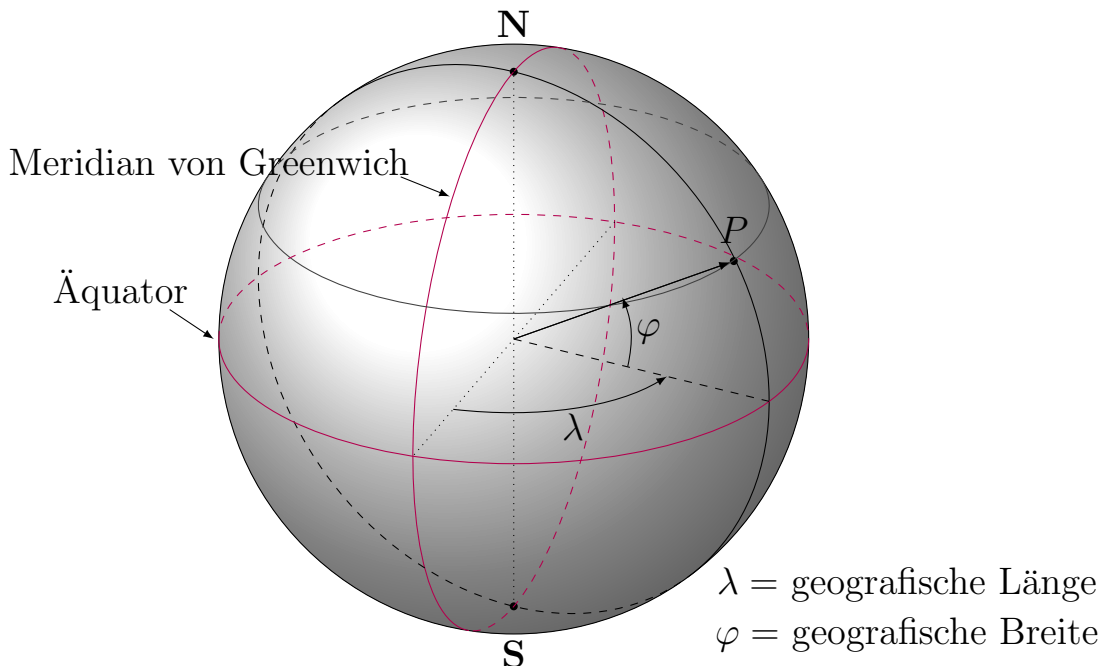
$$\underline{e}_\vartheta = \frac{\frac{d\underline{r}}{d\vartheta}}{\left| \frac{d\underline{r}}{d\vartheta} \right|} = \begin{pmatrix} r \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \\ r \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \\ -r \sin(\vartheta) \end{pmatrix} \frac{1}{r} = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \\ -\sin(\vartheta) \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

$$\underline{e}_\varphi = \frac{\frac{d\underline{r}}{d\varphi}}{\left| \frac{d\underline{r}}{d\varphi} \right|} = r \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{r \sin(\vartheta)} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

und das Differential ist

$$d\underline{r} = dr \underline{e}_r + r d\vartheta \underline{e}_\vartheta + r \sin(\vartheta) d\varphi \underline{e}_\varphi \quad (3.29)$$

Ausflug zu geografischen Koordinaten...



3.8 Geschwindigkeit und Beschleunigung in krummlinigen Koordinaten

In kartesischen Koordinaten ist die Basis ortsunabhängig, d.h. es gilt

$$\underline{r}(t) = x(t)\underline{e}_x + y(t)\underline{e}_y + z(t)\underline{e}_z + \dots$$

und damit

$$\dot{\underline{r}}(t) = \dot{x}(t)\underline{e}_x + \dot{y}(t)\underline{e}_y + \dot{z}(t)\underline{e}_z + \dots$$

In krummlinigen Koordinaten ist die Basis ortsabhängig und muss bei der Differentialbildung mit berücksichtigt werden.

- **Ebene Polarkoordinaten:** Der Ortsvektor liegt in Richtung \underline{e}_ϱ

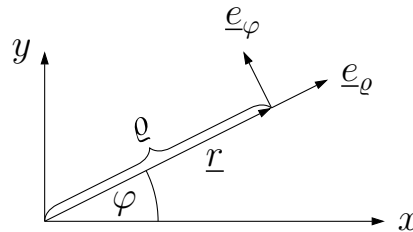


Abbildung 3.13: Ebene Polarkoordinaten.

$$\begin{aligned}\underline{r}(t) &= \varrho \underline{e}_\varrho \\ d\underline{r} &= d\varrho \underline{e}_\varrho + \varrho d\varphi \underline{e}_\varphi \\ \underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} &= \frac{d\varrho}{dt} \underline{e}_\varrho + \varrho \frac{d\varphi}{dt} \underline{e}_\varphi = \dot{\varrho} \underline{e}_\varrho + \varrho \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi\end{aligned}$$

Andererseits

$$\dot{\underline{r}}(t) = \frac{d}{dt} (\varrho \underline{e}_\varrho) = \dot{\varrho} \underline{e}_\varrho + \varrho \dot{\underline{e}}_\varrho$$

Vergleiche beide Ausdrücke $\rightarrow \dot{\underline{e}}_\varrho = \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi$

Für Beschleunigung benötigen wir $\dot{\underline{e}}_\varphi$. Durch direktes berechnen erhält man

$$\begin{aligned}\frac{d\underline{e}_\varphi}{dt} &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} -\sin(\varphi(t)) \\ \cos(\varphi(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(\varphi)\dot{\varphi} \\ -\sin(\varphi)\dot{\varphi} \end{pmatrix} \\ &= - \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}}_{\underline{e}_\varrho} \dot{\varphi} \\ &\rightarrow \dot{\underline{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \underline{e}_\varrho\end{aligned}$$

Beschleunigung:

$$\begin{aligned}
 \underline{a}(t) &= \underline{\dot{v}}(t) = \frac{d}{dt} (\dot{\varrho} \underline{e}_\varrho + \varrho \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi) \\
 &= \ddot{\varrho} \underline{e}_\varrho + \underbrace{\dot{\varrho} \underline{\dot{e}}_\varrho}_{=\dot{\varphi} \underline{e}_\varphi} + \dot{\varrho} \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi + \varrho \ddot{\varphi} \underline{e}_\varphi + \varrho \dot{\varphi} \underbrace{\underline{\dot{e}}_\varphi}_{=-\dot{\varphi} \underline{e}_\varrho} \\
 &= \underbrace{(\ddot{\varrho} - \varrho \dot{\varphi}^2)}_{a_\varrho} \underline{e}_\varrho + \underbrace{(\varrho \ddot{\varphi} + 2\dot{\varrho} \dot{\varphi})}_{a_\varphi} \underline{e}_\varphi
 \end{aligned}$$

• **Zylinderkoordinaten:**

$$\begin{aligned}
 \underline{r} &= \varrho \underline{e}_\varrho + z \underline{e}_z \\
 \underline{\dot{e}}_\varrho &= \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi, \quad \underline{\dot{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \underline{e}_\varrho, \quad \underline{\dot{e}}_z = 0 \\
 \underline{v} &= \dot{\varrho} \underline{e}_\varrho + \varrho \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi + \dot{z} \underline{e}_z \\
 \underline{a} &= a_\varrho \underline{e}_\varrho + a_\varphi \underline{e}_\varphi + \ddot{z} \underline{e}_z
 \end{aligned}$$

• **Kugelkoordinaten:**

$$\begin{aligned}
 \underline{\dot{e}}_r &= \dot{\vartheta} \underline{e}_\vartheta + \sin(\vartheta) \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi \\
 \underline{\dot{e}}_\vartheta &= -\dot{\vartheta} \underline{e}_r + \cos(\vartheta) \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi \\
 \underline{\dot{e}}_\varphi &= -\sin(\vartheta) \dot{\varphi} \underline{e}_r - \cos(\vartheta) \dot{\varphi} \underline{e}_\vartheta
 \end{aligned}$$

Damit lässt sich analog berechnen

$$\begin{aligned}
 \underline{r} &= r \underline{e}_r \\
 \underline{v} &= \underline{\dot{r}} = \dot{r} \underline{e}_r + r \dot{\vartheta} \underline{e}_\vartheta + r \sin(\vartheta) \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi \\
 \underline{a} &= \underline{\dot{v}} = a_r \underline{e}_r + a_\vartheta \underline{e}_\vartheta + a_\varphi \underline{e}_\varphi
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 a_r &= \ddot{r} - r \dot{\vartheta}^2 - r \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 \\
 a_\vartheta &= \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\vartheta}) - r \dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \\
 a_\varphi &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta)
 \end{aligned}$$

Test und Diskussion, z. B. für $\vartheta = \pi/2$:

$$a_\vartheta = 0$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$$

$$\begin{aligned} a_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) \\ &= \frac{1}{r} (2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi}) \\ &= 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} \end{aligned}$$

3.9 Beschleunigte Bezugssysteme und Trägheitskräfte

Betrachte Newtonsche Bewegungsgleichung $\underline{F} = m\underline{\ddot{r}}$ in beschleunigten Bezugssystemen.

Definition 3.3. Inertialsysteme sind Koordinatensysteme, in denen ein kräftefreier Körper im Zustand der Ruhe oder der geradlinig gleichförmigen Bewegung verharrt.

Deren Existenz ist Inhalt des 1. Newtonschen Axioms, anschaulich ein ruhendes Koordinatensystem. Betrachtet werden nun die Kräfte in relativ zueinander gleichförmig bewegten Koordinatensystemen.

A) Gleichförmige Bewegung (Galilei Transformation):

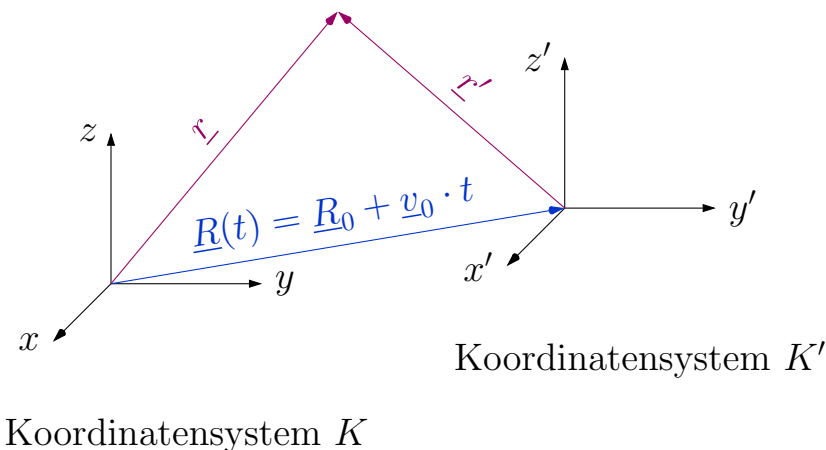


Abbildung 3.14: Gleichmäßige Bewegung eines Bezugssystems.

Für Trajektorien im Koordinatensystem K' gilt

$$\underline{r}(t) = \underline{r}'(t) + \underline{R}(t)$$

unter einer Kraft $\underline{F}(\underline{r}, t)$. Für die Newtonschen Bewegungsgleichungen gilt nun

$$\begin{aligned}\underline{F} &= m\ddot{\underline{r}} = m \frac{d^2}{dt^2} \underline{r}(t) = m \frac{d^2}{dt^2} (\underline{r}'(t) + \underline{R}(t)) \\ &= m \frac{d^2}{dt^2} \underline{r}'(t) + m \frac{d^2}{dt^2} (\underline{R}_0 + \underline{v}_0 t) \\ &= m\ddot{\underline{r}}'(t) = \underline{F}'\end{aligned}$$

⇒ Die Kraft in K' ist gleich.

$$\underline{F}' = \underline{F}$$

→ gleiche Bewegungsgleichungen

- Kein mechanisches Experiment kann verschiedene Inertialsysteme unterscheiden.
- Alle Inertialsysteme sind äquivalent (**Relativitätsprinzip**)
- Trotzdem sind Geschwindigkeiten verschieden $\dot{\underline{r}}'(t) = \dot{\underline{r}}(t) - \underline{v}_0$

B) Reine Linearbeschleunigung:

$$\underbrace{\underline{r}(t)}_{\text{Inertialsystem}} = \underbrace{\underline{r}'(t)}_{\text{beschleunigtes Koord.}} + \underbrace{\underline{R}(t)}_{\text{translatorische Bewegung}}$$

Wenn eine Kraft vorliegt

$$\underline{F} = m\ddot{\underline{r}}(t) = m\ddot{\underline{r}}'(t) + m\ddot{\underline{R}}(t)$$

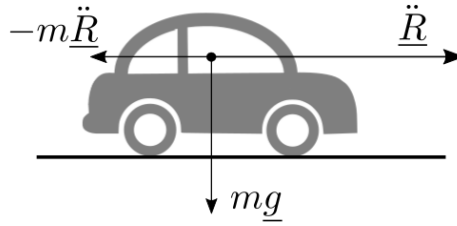
Aus Sicht des beschleunigten Bezugssystems ist die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\underline{r}}'(t) = \underline{F} - m\ddot{\underline{R}}(t) = \underline{F}'$$

- Beschleunigung des Bezugssystems führt zu einer zusätzlichen Kraft $-m\ddot{\underline{R}}(t)$ (Trägheitskraft).
- Diese Kraft hat keine physikalische Ursache (Scheinkraft).
- Die Scheinkraft erklärt die Bahnkurve im beschleunigten Bezugssystem.

C) Drehung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit:

Die Drehachse sei \underline{e}_z (d.h. die z -Achse wird entsprechend gewählt), die Winkelgeschwindigkeit wird mit ω bezeichnet. Als Koordinatensystem bieten sich



Zylinderkoordinaten an, da die Basisvektoren im Inertialsystem und im beschleunigten System übereinstimmen. Die Koordinaten werden bezeichnet mit

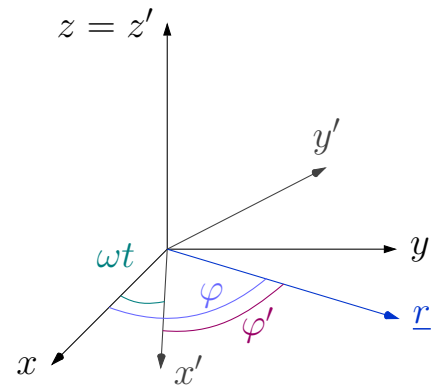
$$\begin{aligned} (\varrho, \varphi, z) &\rightarrow \text{IS} \\ (\varrho', \varphi', z') &\rightarrow \text{rotierendes KS} \end{aligned}$$

Zusammenhang

$$\varrho = \varrho', \quad \varphi = \varphi' + \omega t, \quad z = z'$$

Die Newtonschen Bewegungsgleichungen im IS,

$$\underline{F} = m \underline{a}$$



lautet in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} F_\varrho &= m(\ddot{\varrho} - \varrho\dot{\varphi}^2) \\ F_\varphi &= m(\varrho\ddot{\varphi} + 2\dot{\varrho}\dot{\varphi}) \\ F_z &= m\ddot{z} \end{aligned}$$

Für die Koordinaten gilt:

$$\begin{aligned}\dot{\varrho} &= \dot{\varrho}', & \dot{\varphi} &= \dot{\varphi}' + \omega, & \dot{z} &= \dot{z}' \\ \ddot{\varrho} &= \ddot{\varrho}', & \ddot{\varphi} &= \ddot{\varphi}', & \ddot{z} &= \ddot{z}'\end{aligned}$$

Die Newtonschen Bewegungsgleichungen in den transformierten Koordinaten lauten:

$$F_\rho = m (\ddot{\varrho}' - \varrho'(\dot{\varphi}' + \omega)^2) = m (\ddot{\varrho}' - \varrho'\dot{\varphi}'^2 - 2\varrho'\dot{\varphi}'\omega - \varrho'\omega^2)$$

Gleiche Form wie im Inertialsystem

$$F_{\varrho} + \underbrace{m\varrho'\omega^2 + 2m\varrho'\dot{\varphi}'\omega}_I = \underbrace{m(\ddot{\varrho}' - \varrho'\dot{\varphi}'^2)}_{II} = F'_{\varrho'}$$

Term I enthält zusätzliche Kraftterme \rightarrow Trägheitskräfte

Term II sieht aus wie im Inertialsystem

Analog:

$$F_\varphi \underbrace{- 2m\omega\dot{\varphi}}_I = \underbrace{m(\varrho'\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}'\dot{\varphi}')}_{II} = F'_{\varphi'}$$

$$F_z = m\ddot{z}' = F'_{z'}$$

→ Die Newtonschen Bewegungsgleichungen in beschleunigten Bezugssystemen haben die übliche Form, wenn Trägheitskräfte eingeführt werden.

Klassifizierung:

- **Zentrifugalkraft** $\underline{F}_Z = m\omega^2\varrho'\underline{e}_\varrho$
 Sie zeigt immer nach außen, da $m\omega^2\varrho' \geq 0$
 Sie ist auch für "ruhende" Massenpunkte vorhanden
- **Corioliskraft** $\underline{F}_C = 2m\omega\varrho'\dot{\varphi}'\underline{e}_{\varrho'} - 2m\omega\dot{\varphi}'\underline{e}_{\varphi'}$
 tritt auf für Bewegungen, das heißt für $\dot{\varphi}' \neq 0$ und/oder $\dot{\varphi}' \neq 0$
 Proportional zur Winkelgeschwindigkeit ω , d.h. Vorzeichenwechsel bei Drehsinnwechsel
 Beachte: $\dot{\underline{r}}' = \dot{\varphi}'\underline{e}_{\varphi'} + \varrho'\dot{\varphi}'\underline{e}_{\varrho'} + \dot{z}'\underline{e}_{z'}$, das heißt $\underline{F}_C \cdot \dot{\underline{r}}' = 0$. Die Corioliskraft wirkt somit immer senkrecht zur Geschwindigkeit (und Drehachse).

Vektorielle Beschreibung:

Unabhängige Beschreibung für allgemeine Drehachsen mit $\underline{\omega} = \omega\underline{e}_\omega$ (dabei beschreibt die Richtung von $\underline{\omega}$ die Drehachse):

$$\underline{F}_Z = -m\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}') \quad (3.30)$$

Bsp: für $\omega || \underline{e}_z$ ist: $\underline{e}_{z'} \times \underline{r}' || \underline{e}_{\varphi'}$ und $\underline{e}_{z'} \times \underline{e}_{\varphi'} || -\underline{e}_{\varrho'}$ und damit $F_Z = m\omega^2\varrho'\underline{e}_{\varrho'}$ (wie zuvor)

$$\underline{F}_C = -2m(\underline{\omega} \times \dot{\underline{r}}') \quad (3.31)$$

Die Corioliskraft tritt nur für $\dot{\underline{r}}' \neq 0$ und $\dot{\underline{r}}' \nparallel \underline{\omega}$.

Für den Fall $\underline{\omega} || \underline{e}_z$ ergibt sich die Form oben,

$$\underline{F}_C = 2m\omega\varrho'\dot{\varphi}'\underline{e}_{\varrho'} - 2m\omega\dot{\varphi}'\underline{e}_{\varphi'}$$

D) Allgemeiner Fall:

- allgemeine Translation $\underline{R}(t)$

- allgemeine Rotation $\underline{\omega}(t)$

Dann gilt im bewegten Koordinatensystem:

$$\begin{aligned} m\underline{\ddot{r}}' &= \underline{F} \quad \text{Kraft im Intertialsystem} \\ &- m\underline{\ddot{R}} \quad \text{Scheinkraft durch Beschleunigung} \\ &- m\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}') \quad \text{Zentrifugalkraft} \\ &- 2m(\underline{\omega} \times \underline{\dot{r}}') \quad \text{Corioliskraft} \\ &- m\underline{\dot{\omega}} \times \underline{r}' \quad \text{zusätzliche Scheinkraft} \end{aligned}$$

3.10 Beschleunigte Bezugssysteme: Experimentelle Einsichten

3.10.1 Linear beschleunigte Bezugssysteme

3.10.2 Rotierende Bezugssystemen

3.11 Reibung

3.11.1 Coulomb-Reibung

3.11.2 Stokes-Reibung

3.11.3 Newton-Reibung

4 Einfache eindimensionale Systeme

In diesem Kapitel soll die Dynamik einiger wichtiger physikalischer Systeme, wie z.B. die des harmonischen Oszillators, diskutiert werden. Dafür sollen zunächst wichtige physikalische Größen eingeführt werden.

4.1 Arbeit, Energie, Potential, Integration der Bewegungsgleichung

Wir betrachten die Bewegung eines Massenpunktes unter dem Einfluss einer Kraft \underline{F} von \underline{r} nach $\underline{r} + d\underline{r}$. Dafür führt man eine mechanische Hilfsgröße ein, die **Arbeit**:

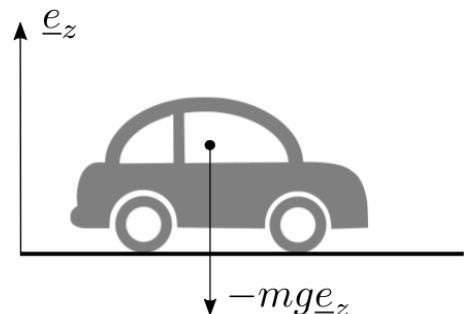
$$dA = \underline{F} \cdot d\underline{r} \quad (4.1)$$

Man sagt Kraft verrichtet an dem MP Arbeit. Im eindimensionalen Fall vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$dA = F(x, \dot{x}, t) dx$$

Für endliche Zeitintervalle gilt dann:

$$A = \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} F(x, \dot{x}, t) dx$$



Verrichtet keine Arbeit!

Wichtiger Spezialfall sind **Konservative Kräfte**:

Wenn eine Kraft nicht von t und \dot{x} abhängt, ist sie **konservativ** (in einer Dimension). Für die Arbeit gilt dann

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$$

und es existiert eine Stammfunktion $V(x)$, so dass:

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} \quad (4.2)$$

- $V(x)$ heißt **Potential** der Kraft F
- Das Vorzeichen (”–”) ist Konvention
- Das Potential $V(x)$ ist definiert bis auf eine additive Konstante, dass heißt

$$V'(x) = V(x) + C$$

ergibt die gleiche Kraft F

Damit gilt:

$$A(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{dV(x)}{dx} dx = -V(x_2) + V(x_1) = V_1 - V_2 \quad (4.3)$$

Arbeit = Potentialdifferenz

Unter der Wirkung der Kraft \underline{F} (nicht unbedingt konservativ) wird der MP beschleunigt und eine Geschwindigkeitsänderung tritt auf. Dies führt zu einer weiteren wichtigen Größe, der **kinetischen Energie**. Dazu formulieren wir die verrichtete Arbeit um:

$$\begin{aligned} A &= \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{F(x(t), \dot{x}(t), t)}_{\text{Newton: } F=m\ddot{x}} \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{\dot{x}(t)} dt \\ &= m \int_{t_1}^{t_2} \ddot{x}(t) \dot{x}(t) dt && \text{Kettenregel} \\ &= m \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x}(t))^2 dt \\ &= \frac{m}{2} [\dot{x}^2(t_2) - \dot{x}^2(t_1)] \end{aligned}$$

Verrichtung von Arbeit bewirkt eine Änderung der Größe $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$
Die **kinetische Energie** wird definiert als

$$T = E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{p^2}{2m}, \quad p = m\dot{x} \quad (4.4)$$

$\rightarrow A = T_2 - T_1$ beschreibt die Umwandlung von Arbeit in kinetische Energie
Für konservative Kräfte gilt dann der Energiesatz der Punktmechanik:

$$\underbrace{T_2 - T_1}_{\text{kinetischer Energieunterschied}} = A = \underbrace{V_1 - V_2}_{\text{Potentialdifferenz}}$$

daraus folgt

$$T_2 + V_2 = T_1 + V_1 = E$$

d. h. die **Gesamtenergie** E bleibt konstant bei der Bewegung.

Satz 1. Energieerhaltungssatz:

Bei einer Bewegung im konservativen Kraftfeld bleibt die Gesamtenergie erhalten.

Dies widerspricht ein wenig der Anschauung, weil erfahrungsgemäß Bewegungen zur Ruhe kommen. Das liegt aber an der Reibung, die nicht konservativ ist, weil sie geschwindigkeitsabhängig ist. Es gibt aber auch übergeordnete Energieerhaltungssätze, z. B. in der Thermodynamik, die Reibung als Umwandlung mechanischer Energie in Wärme mit einbeziehen würde.

Dimensionsbetrachtung:

$$\left[T = \frac{1}{2}mv^2 \right] = \text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$$

$$[V \propto Fx] = Nm = \text{kg m}^2 \text{s}^{-2} = [E] = \text{J} \quad (\text{Joule})$$

Potentiallandschaft $V(x)$:

Aus Definition der kinetischen Energie folgt $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \geq 0$, d. h. eine Bewegung in einer Potentiallandschaft ist nur möglich im Bereich: $T = E - V(x) \geq 0$
 → Definiert erreichbares Raumgebiet!

Geschwindigkeit ist wegen $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = E$:

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2(E - V(x))}{m}}$$

Somit $\dot{x} = 0$ für $E = V(x)$

Integration der Bewegungsgleichung:

Anfangsbedingungen: $t = t_l$ (linker Umkehrpunkt!), $x = x_l$, E = Gesamtenergie

Annahme: $\dot{x} \geq 0$

Aus der Energieerhaltung folgt eine Bewegungsgleichung, also eine Differentialgleichung, deren Lösung $x(t)$ die Bewegung des MP beschreibt:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x(t)))}$$

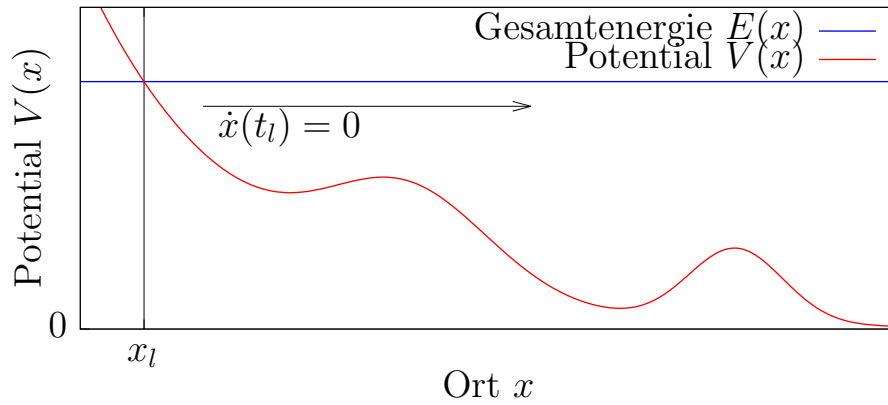


Abbildung 4.1: Beispiel einer Potentiallandschaft: gebundene/ungebundene Bewegung, stabile/labile Ruhelage, Anfangsbedingungen.

Lösung durch **Trennung (Separation) der Variablen:**

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$

$$t - t_l = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_l}^x \frac{1}{\sqrt{E - V(x')}} dx' := \underbrace{f(x)}_{\text{Stammfunktion des Integrals}} - f(x_l)$$

Bei eindimensionalen Problemen kann die Bewegungsgleichung direkt über den Energiesatz integriert werden.

Arten der Bewegung:

- A Ungebundene Bewegung: Wenn für $x > x_l$ die Stammfunktion $f(x)$ existiert (d.h. $V(x) < E$) folgt eine infinite Bewegung.
- B Gebundene Bewegung: Gibt es ein $x_r > x_l$ mit $V(x_r) = E$ dann gilt dort $\dot{x}(t_r) = 0$, das heißt der MP stoppt. Wegen Newtonscher Bewegungsgleichung, $\ddot{x} = -\frac{1}{m} \frac{dV}{dx}$, wird die Geschwindigkeit negativ, $\rightarrow \dot{x}(t \rightarrow t_r) < 0$ (Bewegungsumkehr). Danach gilt:

$$\dot{x} = -\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$$

Integration:

$$t - t_r = -\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_r}^x \frac{1}{\sqrt{E - V(x')}} dx' = f(x_r) - f(x)$$

Bewegung bis zu linken Umkehrpunkt x_l :

$$\text{d.h. } V(x_l) = E \quad (\text{bei } t = t_l)$$

$$\text{Es gilt } t_l - t_r = f(x_r) - f(x_l) := \frac{\tau}{2}$$

Zeit von x_r nach x_l

$$t_l - t_r = -\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_r}^{x_l} \frac{1}{\sqrt{E - V(x)}} dx = f(x_r) - f(x_l) = \frac{\tau}{2}$$

Für $t > t_l$: Massenpunkt geht wieder nach rechts

$$t - t_l = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_l}^x \frac{1}{\sqrt{E - V(x')}} dx' = f(x) - f(x_l)$$

Bei $x = x_r$ (Zeit $t_r^{(1)}$)

$$t_r^{(1)} - t_l = f(x_r) - f(x_l) = \frac{\tau}{2}$$

Bemerkungen:

- Laufzeit $l \rightarrow r = \text{Laufzeit } r \rightarrow l$
- identische Bedingung zu Zeiten $t + \tau$ und $t \rightarrow$ periodische Bewegung im Potenzialtopf
- Periodendauer:

$$\tau = 2 [f(x_r) - f(x_l)] = \sqrt{2m} \int_{x_l}^{x_r} \frac{1}{\sqrt{E - V(x')}} dx'$$

wobei $V(x_l) = V(x_r) = E$

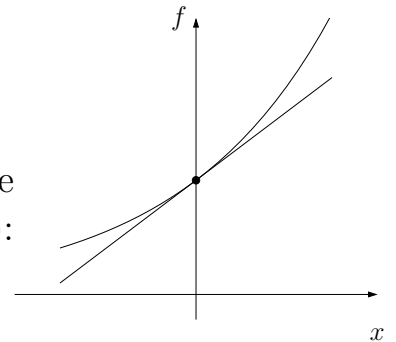
4.2 Taylor-Reihe

Annäherung einer Funktion durch Potenzreihe (um $x = 0$)

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Bestimmung der a_n durch n -fache Ableitung and der Stelle $x = 0$ (d. h. $f(x)$ muss an der Stelle $x = 0$ analytisch sein):

$$\frac{d^n f}{dx^n} = f^{(n)}(0) = n! a_n \rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$



⇒ **Taylorreihe** einer Funktion $f(x)$ um $x = 0$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad (4.5)$$

Beispiele:

- Exponentialfunktion e^x :

$$f^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n} e^x \rightarrow f^{(n)}(0) = 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$$

(ist auch eine Definition der e-Funktion)

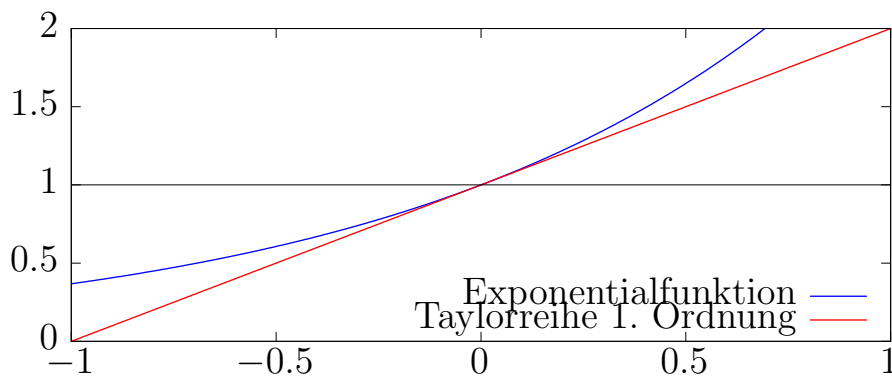


Abbildung 4.2: Taylor-Approximation 1. Ordnung der Exponentialfunktion

- Sinusfunktion $\sin(x)$:

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin(x)$$

$$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos(x), \text{ für } n = 0, 1, \dots$$

$$\rightarrow$$

$$f^{(2n)}(0) = 0$$

$$f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$$

$$\rightarrow \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - x^3/6 + x^5/120$$

Für den Cosinus gilt:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - x^2/2 + x^4/24$$

4.3 Arbeit, Energie, Potential - Experimente und Beispiele

4.3.1 Arbeit und Leistung

4.3.2 Wegunabhängige Arbeit, Konservative Kraftfelder

4.3.3 Potentielle Energie

4.3.4 Der Energiesatz der Mechanik

4.3.5 Exkurs: Der Flaschenzug

4.3.6 Das Fadenpendel: Bestimmung der Gravitationskonstante

4.4 Komplexe Zahlen

Erweiterung der Zahlenmenge (wie zuvor: natürlich - ganz - rationale - reelle).
Neu dazu kommen jetzt die
imaginäre Zahlen:

- Einheit der imaginären Zahlen

$$i^2 = -1, \quad i = \sqrt{-1} \quad (4.6)$$

- allgemeine imaginäre Zahl

$$ia, \quad a \in \mathbb{R} \quad (4.7)$$

z.B. $\sqrt{-4} = \sqrt{-1}\sqrt{4} = 2i$ und $i^3 = i \cdot i^2 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$

Definition 4.1. Komplexe Zahlen lassen sich darstellen als

$$z = x + iy \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{C} \quad (4.8)$$

wobei

$$\begin{aligned} x &= \text{Realteil} \\ y &= \text{Imaginärteil} \end{aligned}$$

Die Zahl

$$z^* = x - iy \quad (4.9)$$

wird als **komplex konjugierte** Zahl zu z bezeichnet.
Es gelten die üblichen **Rechenregeln:**

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + iy_1 \\ z_2 &= x_2 + iy_2 \end{aligned}$$

- Addition:

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2) \quad (4.10)$$

- Produkt:

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \quad (4.11)$$

- Betragsquadrat:

$$|z|^2 = z z^* = (x + iy)((x - iy) = x^2 + y^2 \quad (4.12)$$

- Quotient:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + i(y_1 x_2 - y_2 x_1)}{x_2^2 + y_2^2} \quad (4.13)$$

Real- und Imaginärteil

$$x = \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + z^*) = \frac{1}{2}(x + iy + x - iy) \quad (4.14)$$

$$y = \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - z^*) = \frac{1}{2i}(x + iy - x + iy) \quad (4.15)$$

Komplexe Zahlenebene: (Polardarstellung)

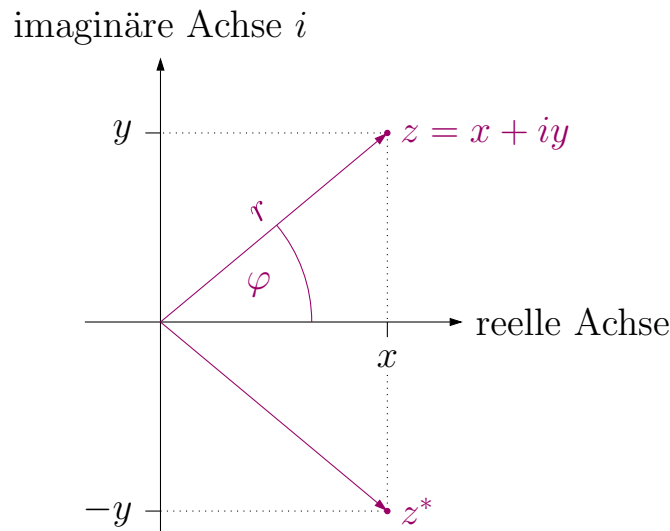


Abbildung 4.3: Komplexe Zahlenebene.

Analog zum Vektor kann ein Betrag definiert werden

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Des Weiteren kann man den **Polarwinkel** (Phase) φ einführen:

$$\begin{aligned} z = x + iy &= |z| \cos(\varphi) + i|z| \sin(\varphi) \\ \rightarrow \frac{y}{x} &= \tan(\varphi) \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\rightarrow \varphi = \arctan(y/x) \quad (\text{beachte Mehrdeutigkeit des arctan}) \quad (4.17)$$

Die komplex konjugierte z^* ist die an der reellen Achse gespiegelte komplexe Zahl.

Exponentialform komplexer Zahlen:

Satz 2. Die **Eulersche Identität (Formel)**

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi) \quad (4.18)$$

Beweis über Taylorentwicklung:

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!}$$

Aufteilen in gerade und ungerade Potenzen

$$= \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2m}}{(2m)!}}_{\text{gerade } n=2m} + \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2m+1}}{(2m+1)!}}_{\text{ungerade } n=2m+1}$$

Benutze: $i^{2m} = (-1)^m$ und $i^{2m+1} = (-1)^m i$

$$= \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\varphi^{2m}}{(2m)!}}_{\cos(\varphi)} + i \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\varphi^{2m+1}}{(2m+1)!}}_{\sin(\varphi)} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

Polardarstellung:

$$\begin{aligned} z &= |z|(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \\ &= |z|e^{i\varphi} \\ z^* &= |z|e^{-i\varphi} \\ &= |z|(\cos(\varphi) - i \sin(\varphi)), \text{ da } \cos(\varphi) = \cos(-\varphi) \text{ und } \sin(\varphi) = -\sin(-\varphi) \end{aligned}$$

Umkehrformeln:

$$\begin{aligned} \cos(\varphi) &= \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \quad (\text{aus } z + z^*) \\ \sin(\varphi) &= \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) \quad (\text{aus } z - z^*) \end{aligned}$$

Konsequenz: Jede komplexe Zahl ist periodisch in φ mit der Periode 2π .

$$|z|e^{i\varphi} = |z|e^{i(\varphi+2\pi)} = |z|e^{i\varphi} \underbrace{e^{i2\pi}}_{=1}$$

Besondere Werte:

$$e^{i\pi/2} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{i3\pi/2} = -i$$

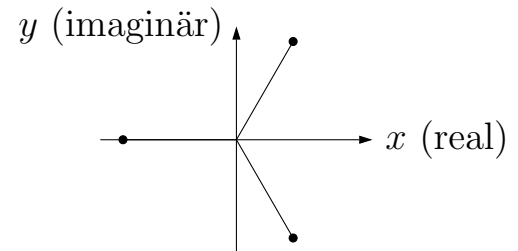
Rechnen in Polardarstellung:

$$\begin{aligned}
 |e^{i\varphi}| &= 1 \\
 z_1 z_2 &= |z_1| |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \\
 |z_1 z_2| &= |z_1| |z_2| \\
 \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \\
 z^n &= |z|^n e^{in\varphi} \\
 \sqrt[n]{z} &= \sqrt[n]{|z|} e^{i\varphi/n + i2\pi k/n} \quad \text{mit } k = (0, 1, 2, \dots, n-1)
 \end{aligned}$$

n -te Wurzel hat im komplexen n Lösungen.

Beispiel:

$$\begin{aligned}
 \sqrt[3]{-8} &= \sqrt[3]{8e^{i\pi}} = 2e^{i\pi/3 + i2\pi k/3} \quad \text{mit } k = (0, 1, 2) \\
 &= (2e^{i\pi/3}, 2e^{i\pi}, 2e^{i5\pi/3})
 \end{aligned}$$



4.5 Lineare Differentialgleichung

Bei Differentialgleichungen (Dgl.) treten neben der Funktion $x(t)$ selbst auch beliebig hohe Ableitungen der Funktion als Terme auf. Wir schreiben die Ableitung n -ter Ordnung als

$$\frac{d^n}{(dt)^n} x(t) = x^{(n)}(t) \tag{4.19}$$

Eine Differentialgleichung n -ter Ordnung lässt sich nun allgemein schreiben als

$$f(x^{(n)}, x^{(n-1)}, \dots, \dot{x}, x, t) = 0 \tag{4.20}$$

Allgemeine Lösung $x = x(t, a_1, a_2, \dots, a_n)$ (auch Integral genannt) ist eine Lösungsschar, die von n unabhängigen Parametern $i = 1, \dots, n$ abhängt. Jeder Satz dieser Parameter führt zu einer speziellen (partikulären) Lösung der Dgl., umgekehrt ist jede Lösung der Dgl., die von n unabhängigen Parametern abhängt, die allgemeine Lösung.

Oft sind die $\{a_i\}$ die Anfangswerte $x(t_0), \dot{x}(t_0), \dots, x^{(n)}(t_0)$. Die Anfangswerte sind unabhängig wählbar und legen die spezielle Lösung fest.

- oft nicht analytisch lösbar
- Raten ist eine mögliche Strategie (und dann einsetzen und zeigen, dass Dgl. gelöst wird)

Lineare Dgl.:

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i(t) x^{(i)}(t) = \beta(t) \quad (4.21)$$

Begriffsbildung:

- n -ter Ordnung, wenn $\alpha_n \neq 0$
- homogen, wenn $\beta(t) = 0$
- mit konstanten Koeffizienten, wenn $\alpha_i = \text{const}$

Beispiel für Dgl. 2. Ordnung:

$$\overbrace{m\ddot{x}(t)}^{2. \text{ Ordnung}} = \underbrace{-mg}_{\text{inhomogen}} - \alpha\dot{x}(t) - \overbrace{\beta\dot{x}^2(t)}^{\text{nicht-linear}}$$

Für **homogene lineare Dgl.** gilt: Seien $x_1(t)$ und $x_2(t)$ Lösungen der Dgl. Dann ist auch die Linearkombination $b_1x_1(t) + b_2x_2(t)$ Lösung für beliebige b_1, b_2 .

Lineare Unabhängigkeit, Fundamentalsystem

m Lösungen heißen linear unabhängig, wenn

$$\sum_{k=1}^m b_k x_k(t) = 0$$

nur gilt für $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$.

Für lineare, homogene Dgl. n -ter Ordnung gibt es genau n linear unabhängige Lösungen $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$. Man sagt, die Dimension des Lösungsraums ist n . Die allgemeine Lösung der Dgl. kann geschrieben werden als:

$$x(t, a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i(t)$$

Jedes System von n linear unabhängigen Lösungen bildet eine mögliche Basis (Fundamentalsystem). Ziel: Auffinden von n linear unabhängigen Lösungen.

Inhomogene lineare Dgl.:

Sei $x_{ih}(t)$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung und $x_h(t)$ eine Lösung der homogenen Gleichung.

$\Rightarrow x_{ih}(t) + x_h(t)$ ist ebenfalls Lösung der inhomogenen Gleichung.

Sei speziell $x_h(t) = x_h(t, a_1, \dots, a_n)$ die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung.

$\Rightarrow x_{ih}(t) + x_h(t, a_1, \dots, a_n)$ ist auch die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung, denn sie hängt bereits von n Parametern ab.

Vorgehen:

- Suche Fundamentalsystem $x_h(t)$ der homogenen Gleichung
- Suche eine spezielle Lösung $x_p(t)$ (**partikuläre Lösung**) der Inhomogenen Dgl.
- dann ist die Summe $x_p(t) + x_h(t)$ die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl.

Lösung einer inhomogenen, linearen Differentialgleichung ist die Summe der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

4.6 Linearer, harmonischer Oszillator

4.6.1 Freier Oszillator

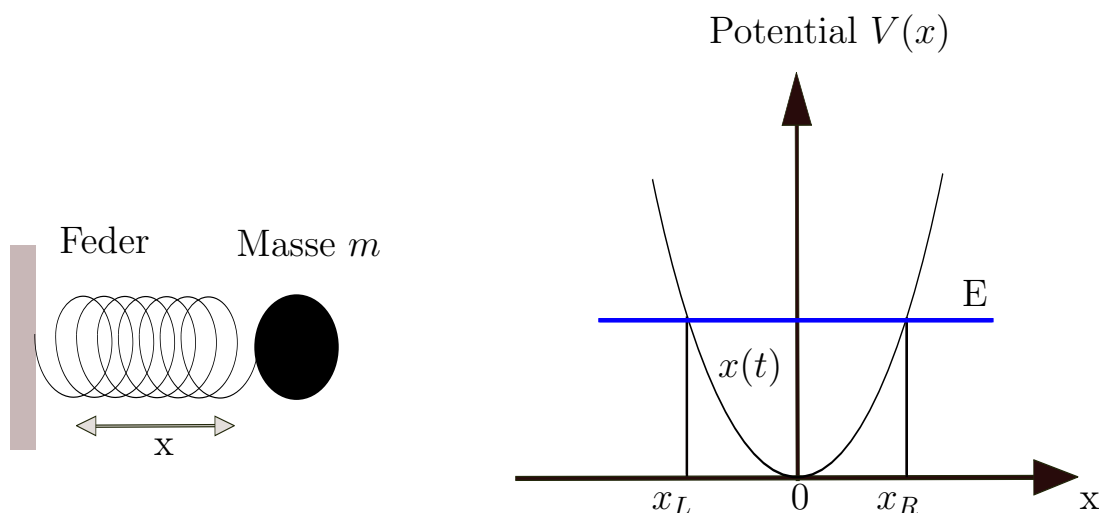


Abbildung 4.4: Realisierung und Potential eines harmonischen Oszillators.

Beim harmonischen Oszillator ist die rückstellende Kraft proportional zur Auslenkung (Bsp, Feder mit Hookschen Gesetz).

Differentialgleichung:

$$m\ddot{x} + \underbrace{kx}_{\text{Kraft}} = 0 \quad (4.22)$$

Potential:

$$V(x) = \frac{k}{2}x^2 \quad \text{mit} \quad \frac{dV}{dx} = kx = -F$$

Lösungsstrategien zur Bestimmung der Bahn $x(t)$:

A) aus Energiesatz:

$$\dot{x}(t) = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$$

Lösung durch Separation der Variablen wie zuvor.

B) Lösen der linearen Dgl. 2. Ordnung mit dem Ansatz

$$\begin{aligned} x_1(t) &\sim \cos(\omega t) \\ x_2(t) &\sim \sin(\omega t) \\ \rightarrow x(t) &= A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \\ \rightarrow \ddot{x}(t) &= -A\omega^2 \sin(\omega t) - B\omega^2 \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Die Kreisfrequenz ist durch die Federkonstante und die Masse festgelegt. A, B sind zwei unabhängige Parameter, die durch Anfangsbedingungen festgelegt werden:

$$\begin{aligned} x(t=0) &= x_0 = B \\ v(t=0) &= v_0 = \dot{x} = A\omega \end{aligned}$$

Spezielle (partikuläre) Lösung der Dgl. ist

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) + x_0 \cos(\omega t)$$

C) komplexer Ansatz:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

Wähle als Ansatz eine Exponentialfunktion mit komplexem Argument

$$z = \exp(\alpha t), \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad x = \operatorname{Re}(z)$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\ddot{z} + \omega^2 z &= (\alpha^2 + \omega^2) \exp(\alpha t) = 0 \\ \rightarrow \alpha^2 &= -\omega^2 \\ \rightarrow \alpha &= \pm i\omega\end{aligned}$$

Die Lösungen $\exp(i\omega t)$, $\exp(-i\omega t)$ sind linear unabhängig. Die allgemeine Lösung ist komplex,

$$z(t) = A^+ \exp(i\omega t) + A^- \exp(-i\omega t), \quad (4.23)$$

wobei $A^+ = a^+ + ib^+$ und $A^- = a^- + ib^-$ komplexe Parameter sind.

Bemerkung: Alle physikalischen Größen sind reell, die komplexe Schreibweise ist ein Hilfsmittel. Die Auslenkung ist also

$$\begin{aligned}x(t) &= \operatorname{Re}(z(t)) \\ &= \operatorname{Re}((a^+ + ib^+)(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) + (a^- + ib^-)(\cos(\omega t) - i \sin(\omega t))) \\ &= \underbrace{(a^+ + a^-)}_{=x_0} \cos(\omega t) + \underbrace{(b^- - b^+)}_{=v_0/\omega} \sin(\omega t)\end{aligned}$$

Damit hängt $x(t)$ von zwei **unabhängigen reellen** Parametern ab, es handelt sich also um die **allgemeine Lösung**.

Die ist ein in der Physik üblicher Trick: Rechnen im Komplexen, physikalische Größen sind dann durch den Realteil gegeben. Die ist nur richtig, solange ausschließlich lineare Operationen vorkommen, denn es gilt z. B., $(\operatorname{Re}(z))^2 \neq \operatorname{Re}(z^2)$.

4.6.2 Freier, gedämpfter Oszillator

Allgemeine Lösung mit Stokesscher Reibung

$$\begin{aligned}m\ddot{x} + R\dot{x} + kx &= 0 \\ \text{mit } \beta &= \frac{R}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \\ \rightarrow \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0\end{aligned} \quad (4.24)$$

Dgl. 2ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Wir wählen einen komplexen Lösungsansatz

$$z(t) = \exp(\lambda t), \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

Damit ergibt sich das **charakteristische Polynom**:

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (4.25)$$

Die Lösungen sind

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Falls $\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \neq 0$ existieren zwei linear unabhängige Lösungen

$$z(t) = a_1 \exp(\lambda_1 t) + a_2 \exp(\lambda_2 t)$$

Unterscheide mathematisch

1. $\beta^2 - \omega_0^2 < 0 \rightarrow 2$ konjugiert komplexe Lösungen $\lambda_1^* = \lambda_2$
2. $\beta^2 - \omega_0^2 > 0 \rightarrow 2$ reelle Lösungen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
3. $\beta^2 - \omega_0^2 = 0 \rightarrow 1$ reelle Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = -\beta$

1) Schwache Dämpfung: $\beta^2 < \omega_0^2$

Definiere

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \rightarrow \lambda_{1,2} = -\beta \pm i\omega$$

Die Allgemeine Lösung ist

$$z(t) = \exp(-\beta t) (a_1 \exp(i\omega t) + a_2 \exp(-i\omega t)) \quad (4.26)$$

Einfluss der Reibung:

- Kleinere Schwingungsfrequenz $\omega < \omega_0$
- Zeitlich exponentiell abklingende Amplitude $\propto \exp(-\beta t)$

Reale Lösungen ergeben sich aus den Realteil von $z(t)$ mit den Anfangsbedingungen $x(t=0) = x_0$, $\dot{x}(t=0) = v_0$:

$$x(t) = \exp(-\beta t) \left(x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0 + \beta x_0}{\omega} \sin(\omega t) \right)$$

Mit den Additionstheorem $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$ lässt sich der Ausdruck vereinfachen zu

$$x(t) = A \exp(-\beta t) \sin(\omega t + \varphi)$$

mit $\tan(\varphi) = \frac{\omega x_0}{v_0 + \beta x_0}$ und $A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \beta x_0}{\omega} \right)^2}$

Die Schwingungsperiode beträgt $T = \frac{2\pi}{\omega}$ mit $\omega < \omega_0$.

2) Starke Dämpfung (Kriechfall): $\gamma^2 = \beta^2 - \omega_0^2 > 0$

Lösung: $\lambda_{1,2} = -\beta \pm \gamma < 0$

Damit wird die allgemeine Lösung

$$x(t) = \exp(-\beta t)(a_1 \exp(\gamma t) + a_2 \exp(-\gamma t))$$

Überlagerung von zwei exponentiell abklingenden Lösungen, wobei der 2. Term wesentlich schneller abfällt.

$$a_1 = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{v_0 + \beta x_0}{\gamma} \right)$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(x_0 - \frac{v_0 + \beta x_0}{\gamma} \right)$$

3) aperiodischer Grenzfall: $\beta = \omega_0$

Zwei gleiche reelle Lösungen: $\lambda_1 = \lambda_2 = -\beta$

$$x_1(t) = a_1 \exp(-\beta t)$$

Es fehlt eine zweite, linear unabhängige Lösung. Um die zu bestimmen benutzen wir das Verfahren der **Variation der Konstanten**

$$x_2(t) = a(t) \exp(-\beta t) \quad (4.27)$$

$$\dot{x}_2 = (\dot{a} - a\beta) \exp(-\beta t)$$

$$\ddot{x}_2 = (\ddot{a} - 2\beta\dot{a} + \beta^2 a) \exp(-\beta t)$$

Einsetzen in Dgl. $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ ergibt:

$$\ddot{a} - 2\dot{a}\beta + \beta^2 a + 2\beta\dot{a} - 2a\beta^2 + \omega_0^2 a = 0$$

$$\text{mit } \omega_0 = \beta \rightarrow \ddot{a} = 0$$

Lösung

$$a(t) = a' + a''t$$

Weitere Lösung (mit $a' = 0$)

$$x_2(t) = a_2 t \exp(-\beta t)$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung

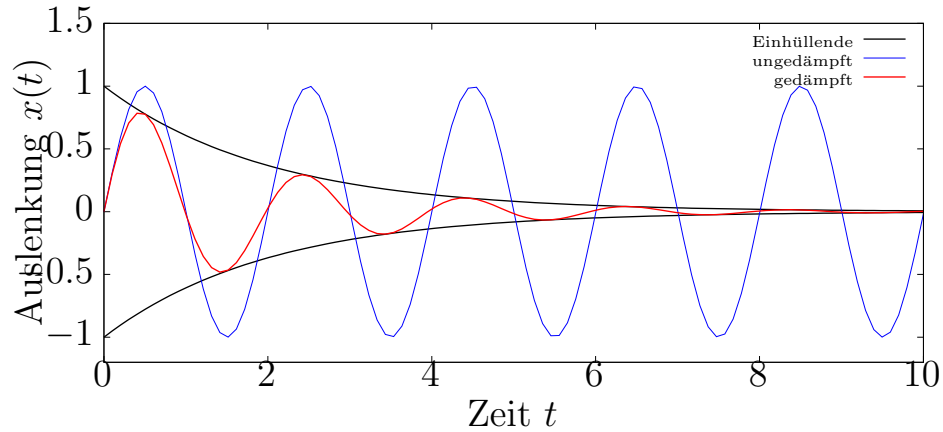
$$x(t) = (a_1 + a_2 t) \exp(-\beta t) \quad (4.28)$$

Mit den Anfangsbedingungen: $x(t=0) = x_0$, $\dot{x}(t=0) = v_0$ erhält man

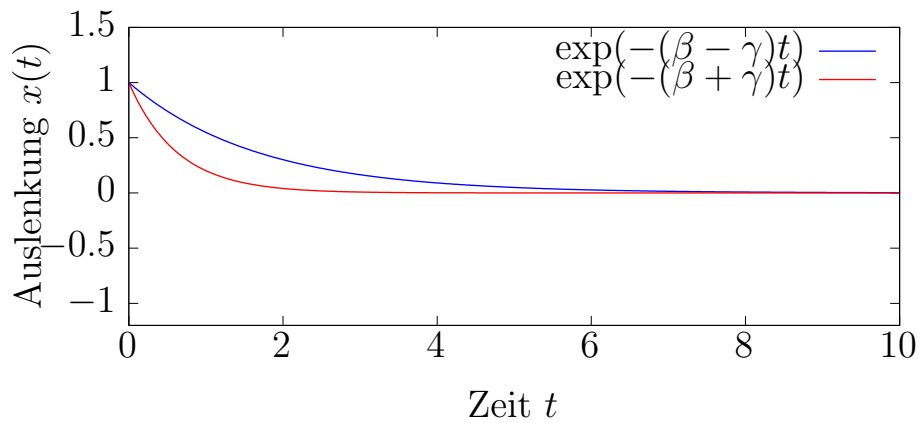
$$x(t) = (x_0 + (v_0 + \beta x_0)t) \exp(-\beta t)$$

- Lösung kann einen Nulldurchgang haben für $t_N = -\frac{a_1}{a_2}$
- Kommt schneller zur Ruhe als im Kriechfall

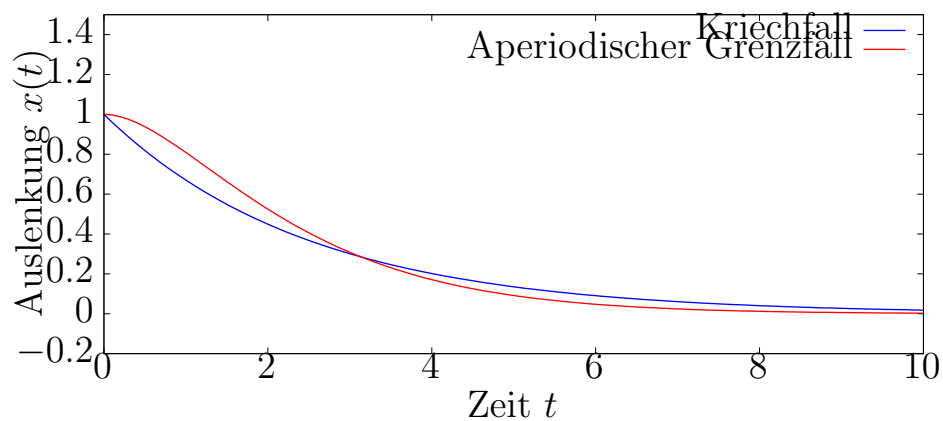
COMPUTER



(a) Gedämpfte und ungedämpfte Schwingung



(b) Zwei Fälle von überdämpften Schwingungen



(c) Der aperiodische Grenzfall

Abbildung 4.5: Verschiedene Fälle von Schwingungen

4.6.3 Gedämpfter Oszillator unter Einwirkung einer äußerer Kraft

In diesem Fall lautet die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0 x = \frac{1}{m}F(t) \quad (4.29)$$

wobei β der Reibungskoeffizient und ω_0 die Eigenfrequenz ist. Außerdem wird eine äußere periodische Kraft mit der Frequenz $\bar{\omega}$ und Amplitude f betrachtet:

$$F(t) = f \cos(\bar{\omega}t).$$

Gesucht wird nun die spezielle Lösung der inhomogenen Dgl. (das homogene System wurde in Abschnitt 4.6.2 gelöst). Übergang zu komplexer Dgl. für $z(t)$, wobei $x_S = \operatorname{Re}(z)$:

$$\ddot{z} + 2\beta\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{f}{m} \exp(i\bar{\omega}t)$$

Vermutung: Nach Einschwingvorgang folgt der Oszillator im wesentlichen der äußeren Kraft.

Ansatz:

$$z(t) = A \exp(i\bar{\omega}t), \quad A \in \mathbb{C}$$

Eingesetzt in Dgl. ergibt sich

$$\begin{aligned} A(-\bar{\omega}^2 + 2i\beta\bar{\omega} + \omega_0^2) \exp(i\bar{\omega}t) &= \frac{f}{m} \exp(i\bar{\omega}t) \\ \Rightarrow A &= -\frac{f}{m} \frac{1}{\bar{\omega}^2 - \omega_0^2 - 2i\beta\bar{\omega}} = -\frac{f}{m} \frac{\bar{\omega}^2 - \omega_0^2 + 2i\beta\bar{\omega}}{(\bar{\omega}^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\bar{\omega}^2} = |A| \exp(i\varphi) \end{aligned}$$

Amplitude:

$$|A| = \frac{f}{m} \frac{1}{\sqrt{(\bar{\omega}^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\bar{\omega}^2}}$$

Real- und Imaginärteil:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(A) &= -\frac{m}{f} |A|^2 (\bar{\omega}^2 - \omega_0^2) \\ \operatorname{Im}(A) &= -\frac{m}{f} |A|^2 2\beta\bar{\omega} < 0 \end{aligned}$$

Polardarstellung

$$\begin{aligned} z &= \frac{a + ib}{a^2 + b^2} \\ \Rightarrow z^* z &= \frac{a^2 + b^2}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{1}{a^2 + b^2} \\ \Rightarrow |z| &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

Polarwinkel (Phase):

$$\tan \varphi = \frac{\operatorname{Im}(A)}{\operatorname{Re}(A)} = \frac{2\beta\bar{\omega}}{\bar{\omega}^2 - \omega_0^2}$$

Spezielle Lösung der inhomogenen Dgl. ist $z(t) = |A| \exp(i(\bar{\omega}t + \varphi))$

$$x_s(t) = \operatorname{Re}(z(t)) = |A| \cos(\bar{\omega}t + \varphi)$$

Allgemeine Lösung:

$$x(t) = x_{\text{hom}}(t) + x_s(t)$$

Diskussion:

- Die homogene Lösung $x_{\text{hom}}(t)$ hat asymptotisch die Form $\propto \exp(-\beta t)$, d.h. für $t \gg 1/\beta$ ist x_{hom} vernachlässigbar und die spezielle Lösung bestimmt die Schwingung.
- Solange $x_{\text{hom}}(t)$ eine Rolle spielt, spricht man vom Einschwingvorgang.
- Im Langzeitlimes $t \gg 1/\beta$: Oszillator schwingt mit Frequenz der äußeren Kraft, unabhängig von den Anfangsbedingungen.

COMPUTER: getriebener Oszillator

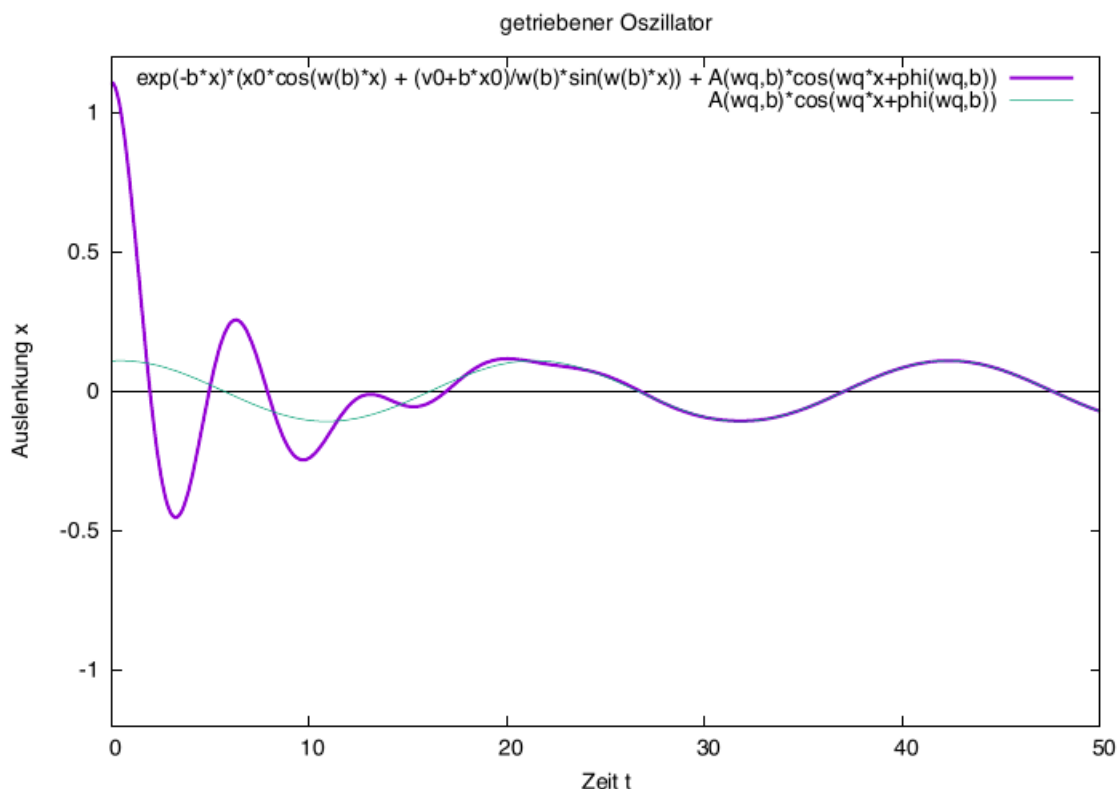


Abbildung 4.6: Getriebener Oszillator, $x(t)$.

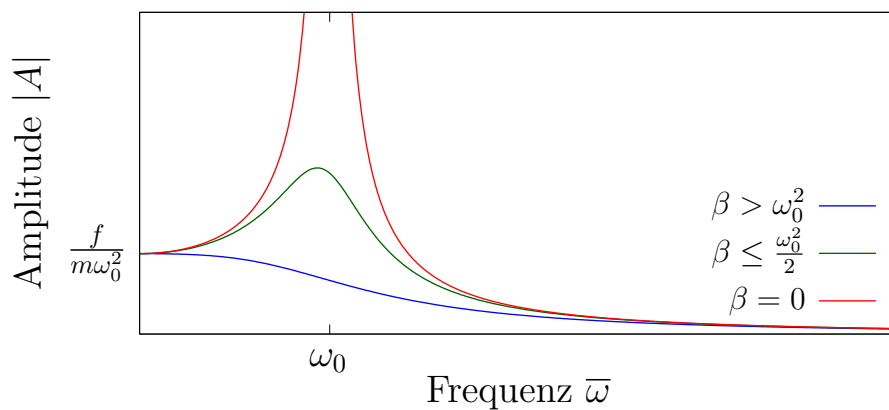


Abbildung 4.7: Verhalten der Amplitude.

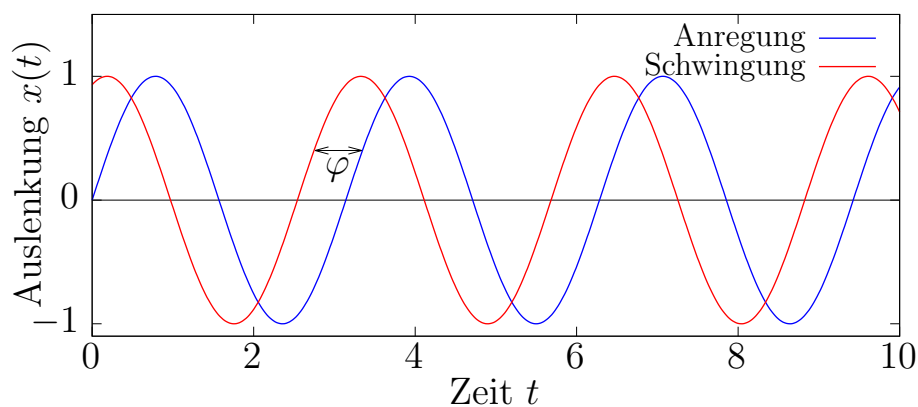


Abbildung 4.8: Definition der Phase.

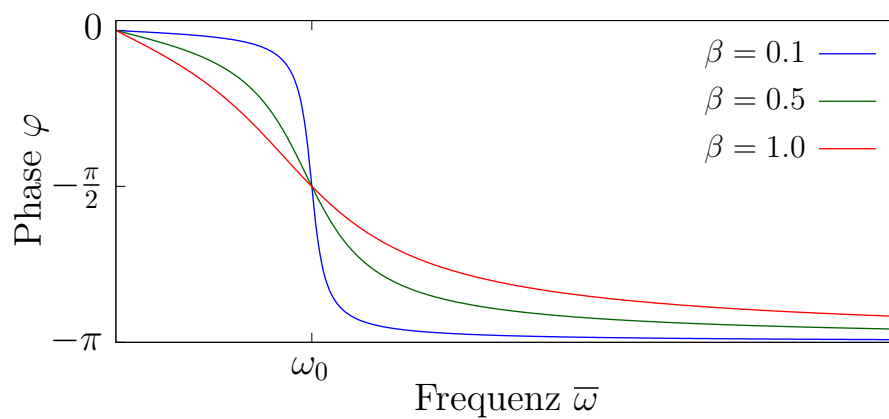


Abbildung 4.9: Verhalten der Phase

Grenzfälle:

- $\bar{\omega} \rightarrow 0 \Rightarrow |A| \rightarrow \frac{f}{m\omega_0^2}$ Die Amplitude bleibt endlich.
- $\bar{\omega} \rightarrow \infty \Rightarrow |A| \sim \frac{1}{\bar{\omega}^2} \rightarrow 0$ Die Schwingung verschwindet.

Maximale Amplitude:

$$\frac{d}{d\bar{\omega}} [(\bar{\omega}^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\bar{\omega}] = 0$$

$$\Rightarrow 2(\bar{\omega}^2 - \omega_0^2)2\bar{\omega} + 4\beta^2 = 0$$

$$\Rightarrow \bar{\omega} = 0 \text{ ist eine Nullstelle}$$

$$\Rightarrow \bar{\omega}^2 - \omega_0^2 + 2\beta^2 = 0$$

$$\bar{\omega}_{\pm} = \pm \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Übungsblatt

ω_{\pm} sind die **Resonanzfrequenzen**. Für die maximale Amplitude ergibt sich

$$|A_{\max}| = \frac{f}{2m} \frac{1}{\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

Übungsblatt

- ω_{\pm} sind nur dann Resonanzfrequenzen, wenn $2\beta^2 < \omega_0^2$
- Für $2\beta^2 > \omega_0^2$ nur ein Maximum bei $\bar{\omega} = 0$

Resonanzkurven:

- Amplitude steigt mit abnehmender Dämpfung
- Resonanzfrequenz sinkt mit zunehmender Dämpfung
- Bei sehr schwacher Dämpfung ($\beta \ll \omega_0$) gilt: Resonanzfrequenz = Eigenfrequenz ω_0 . Gleichzeitig: $|A| \propto \frac{1}{\beta} \rightarrow \infty$ **Resonanzkatastrophe**
- Bei realen Systemen ist dann die Bedingung kleiner Auslenkung nicht mehr erfüllt

Beispiele für eine Resonanzkatastrophe sind der Einsturz der Tacoma Narrows Bridge (1940), bei der Torsionsschwingungen durch Windströmungen angeregt wurden, und das Marschieren von Soldaten im Gleichschritt über eine Brücke.

Phasenverschiebung:

$$\text{Im}(A) < 0, \quad \text{Im}(A) = |A| \sin(\varphi)$$

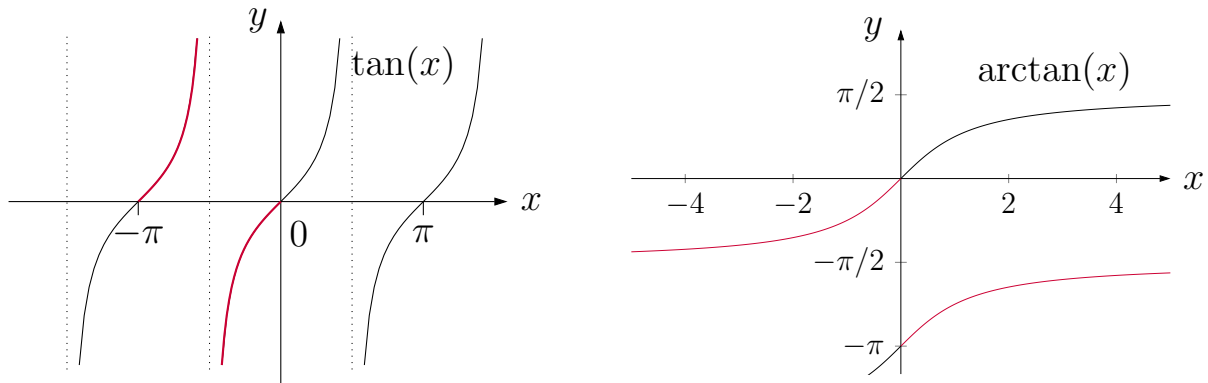
$$\rightarrow -\pi \leq \varphi \leq 0$$

Die Phasenverschiebung φ mit der der Oszillator der Kraft folgt, ist ≤ 0 , das heißt die Bewegung folgt hinterher (Maxima werden später erreicht).

Speziell gilt für $\varphi(\bar{\omega} \rightarrow \omega_0)$:

$$\tan(\varphi) = \frac{2\beta\bar{\omega}}{\bar{\omega}^2 - \omega_0^2} \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{2\beta\bar{\omega}}{\bar{\omega}^2 - \omega_0^2}\right) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$



4.7 Der Duffing-Oszillator und Chaos

Bislang waren gebundene Bewegungen regelmäßig und $\propto \cos(\omega t + \varphi)$. Ist das immer so?

- Einerseits: Potential $V(x)$ kann um Ruhelage $x = 0$ entwickelt werden und $V(x) \propto x^2 \rightarrow$ harmonischer Oszillator für kleine Auslenkung
- Andererseits: Was ist bei anharmonischen Potentialen und größeren Auslenkungen?

Ein einfaches Beispiel ist der **Duffing Oszillator**

$$\underbrace{\ddot{x} = -2\beta\dot{x} + \gamma \cos(\omega t) + \alpha x}_{I} - \underbrace{\alpha' x^3}_{II} \quad (4.30)$$

Term I wird für $\alpha < 0$ ein getriebener gedämpfter harmonischer Oszillator. Term II sorgt für $\alpha > 0, \alpha' > 0$ für Nichtlinearitäten.

$$\rightarrow V(x) = \frac{\alpha'}{4}x^4 - \frac{\alpha}{2}x^2$$

COMPUTER: Duffing

- In den zwei Minima, gilt wieder die harmonische Näherung (kleine γ)
- mit zunehmender treibender Kraft wird die Bewegung erst komplizierter, dann chaotisch

Für die Fälle

- $\gamma = 0.0$: keine Bewegung nach Einschwingvorgang

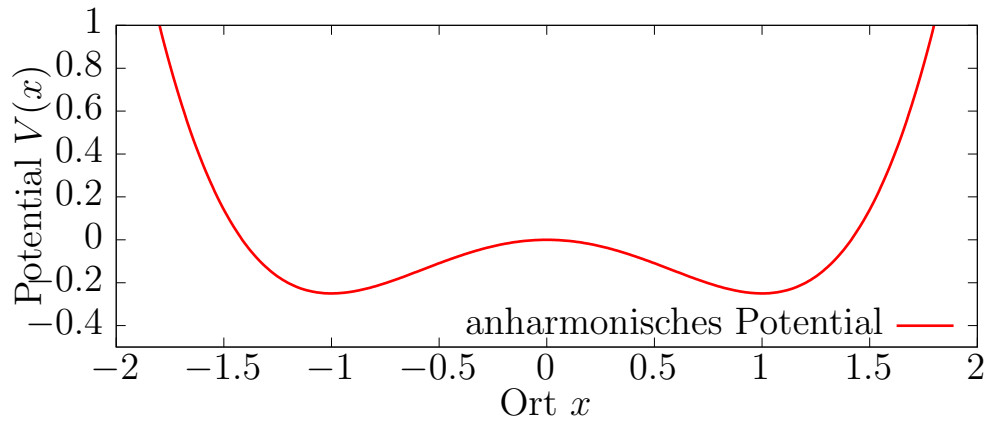


Abbildung 4.10: Anharmonisches Potential für Duffing-Oszillator.

- $\gamma = 0.1$: harmonische Schwingung
- $\gamma = 0.4$: Asymmetrie
- $\gamma = 0.7$: kompliziertere Schwingung
- $\gamma = 0.8$: Chaos
- $\gamma = 1.0$: regelmäßige, komplizierte Schwingung
- $\gamma = 1.5$: einfache Schwingung

Zum **Chaos** gehört

- Starke Abhängigkeit (Suszeptibilität) von Anfangsbedingungen
- Frequenzvervielfachungen
- Im Phasenraum (x, p) gibt es keine geschlossenen Bahnen, sondern einen sogenannten "seltsamer Attraktor".

4.8 Experimente zum linearer Oszillator

5 Vektoranalysis

In diesem Kapitel werden wichtige Aspekte der Differential- und Integralrechnung von vektorwertigen Funktionen vorgestellt und erläutert.

5.1 Felder

A) skalare Felder:

Skalarwertige Funktion des Ortes $\varphi(\underline{r}) = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ (mit $\underline{r} = (x_1, x_2, x_3)$)

Zum Beispiel: Temperaturverteilung im Raum

Beispiele:

$$\begin{aligned}\varphi(\underline{r}) &= \underline{r}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ \varphi(\underline{r}) &= \frac{1}{|\underline{r}|} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \\ \varphi(\underline{r}) &= \underline{a} \cdot \underline{r} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3\end{aligned}$$

Veranschaulichung:

- Farbkodierung
- Durch Höhenlinien in 2D bzw. Äquipotentialflächen in 3D, definiert durch $\varphi(\underline{r}) = \text{const.}$

COMPUTER

B) vektorielle Felder:

Vektorwertige Funktion des Ortes

$$\underline{A}(\underline{r}) = (A_1(x_1, x_2, x_3), A_2(x_1, x_2, x_3), A_3(x_1, x_2, x_3))$$

Zum Beispiel: Windgeschwindigkeit im Raum

Beispiele:

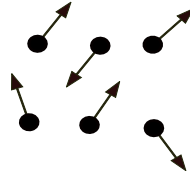
$$\underline{A} = \underline{r}$$

$$\underline{A} = \underline{B} \text{ mit } \underline{B} = \text{const}$$

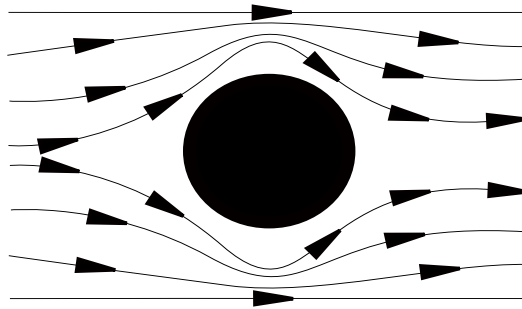
$$\underline{A} = \frac{1}{2} \underline{B} \times \underline{r}$$

Veranschaulichung:

- Vektoren an Gitternetz:



- Stromlinien: Folgen lokaler Richtung von \underline{A} , Betrag von \underline{A} durch Liniendichte gegeben



COMPUTER

5.2 Partielle Ableitung

Ableitung eines Feldes $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ erfordert Richtungsangabe (z.B. Koordinatenachsen).

Skalarfeld: partielle Ableitung nach x_1

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) - \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \partial_1 \varphi$$

Bsp:

$$\begin{aligned} \varphi(\underline{r}) &= |\underline{r}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} &= 2x_1 \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \frac{x_1}{|\underline{r}|} \end{aligned}$$

Vektorfeld: partielle Ableitung komponentenweise

$$\frac{\partial \underline{A}}{\partial x_1} = (\partial_1 A_1, \partial_1 A_2, \partial_1 A_3)$$

Höhere partielle Ableitungen:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \right) \right) \right) \varphi = \frac{\partial^k}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} \varphi$$

Es gilt: partielle Ableitungen sind vertauschbar, z.B.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\varphi(x, y + \Delta y) - \varphi(x, y)}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \overbrace{\varphi(x, y + \Delta y) - \varphi(x + \Delta x, y)}^{\text{vertausche}}}{\Delta x \Delta y} \\ &\quad \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\Delta y \rightarrow 0}}_{\text{vertausche}} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \Delta x, y) - \varphi(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \end{aligned}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \varphi &= xyz \\ \partial_x \varphi &= yz, \quad \partial_y \varphi = xz \\ \partial_y \partial_x \varphi &= z = \partial_x \partial_y \varphi \end{aligned}$$

Kettenregel:

Einfach:

$$\frac{\partial}{\partial t_1} (\varphi(x(t_1), y(t_2))) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t_1}$$

Aber was ist?

$$\frac{d}{dt} \varphi(x(t), y(t))$$

Dazu eine Rechnung:

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t)) - \varphi(x(t), y(t))}{\Delta t} \\ \text{mit : } & \Delta x = x(t + \Delta t) - x(t) \\ & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \varphi(x, y + \Delta y) + \varphi(x, y + \Delta y) - \varphi(x, y)}{\Delta t} \\ & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \varphi(x, y + \Delta y)}{\Delta x}}_{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} \underbrace{\frac{\Delta x}{\Delta t}}_{\frac{dx}{dt}} + \underbrace{\frac{\varphi(x, y + \Delta y) - \varphi(x, y)}{\Delta y}}_{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} \underbrace{\frac{\Delta y}{\Delta t}}_{\frac{dy}{dt}} \end{aligned}$$

Daraus folgt die allgemeine Kettenregel:

$$\frac{d}{dt} \varphi(x(t), y(t)) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (5.1)$$

5.3 Kurvenintegrale

Kurvenintegrale werden auch als Weg- oder Linienintegrale bezeichnet, ein Beispiel ist die Arbeit $dA = \underline{F} \cdot \underline{dr}$.

Definition 5.1. Das **Kurvenintegral** ist (wie bei Bogenlänge)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \underbrace{\underline{A}(\underline{r}_i) \cdot \Delta \underline{r}_i}_{\text{Skalar}} = \int_{\underline{r}_a}^{\underline{r}_b} \underline{A}(\underline{r}) \cdot \underline{dr} \quad (5.2)$$

Berechnungsverfahren:

A) Kurven in Parameterform gegeben: $\rightarrow \underline{r}(t)$

$$\int_{\underline{r}_a}^{\underline{r}_b} \underline{A}(\underline{r}) \cdot \underline{dr} = \int_{t_a}^{t_b} \underline{A}(\underline{r}(t)) \cdot \frac{d\underline{r}}{dt} dt$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \underline{A}(\underline{r}) &= \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}, \quad \underline{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \text{ für } 0 \leq t \leq 1 \\ \rightarrow \underline{A}(t) &= \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}, \quad \frac{d\underline{r}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \\ \rightarrow \int_0^1 (t^2 + 2t^2) dt &= 3 \int_0^1 t^2 dt = t^3 \Big|_0^1 = 1 \end{aligned}$$

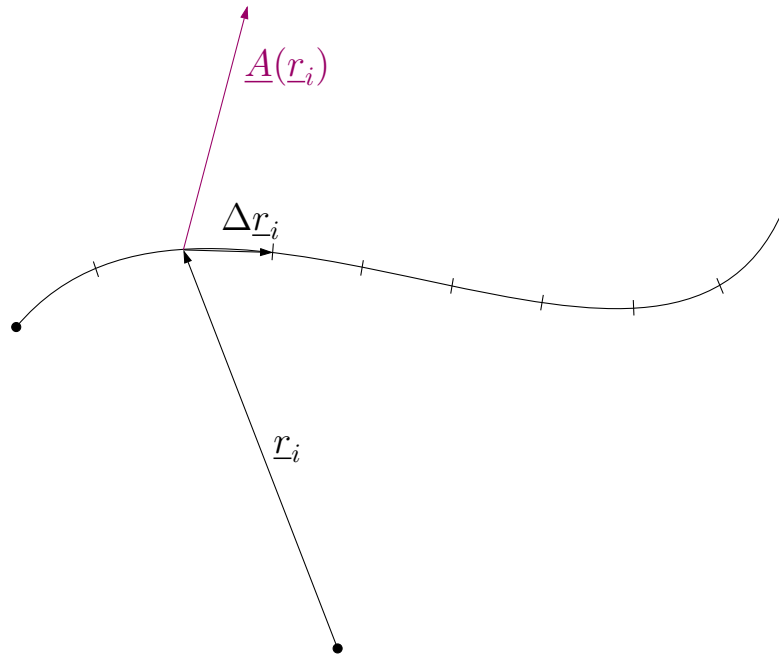


Abbildung 5.1: Beispiel für ein Kurvenintegral

B) Komponentenschreibweise:

$$\int_{\underline{r}_a}^{\underline{r}_b} \underline{A}(\underline{r}) \cdot d\underline{r} = \int_{x_a}^{x_b} A_x(x, y(x)) dx + \int_{y_a}^{y_b} A_y(x(y), y) dy$$

Kurve in $y(x)$ (bzw. $x(y)$) enthalten.

Gleiches Beispiel:

$$\begin{aligned} x &= t, \quad y = t^2 \rightarrow y(x) = x^2, \quad x(y) = \sqrt{y} \\ A_x &= y, \quad A_y = x \\ &\rightarrow \int_0^1 A_x dx + \int_0^1 A_y dy \\ &= \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 \sqrt{y} dy = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 + \frac{2}{3} y^{3/2} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \end{aligned}$$

5.4 Gradient

Definition 5.2. Definiere den Gradienten als ein Vektorfeld, das aus einem skalaren Feld $\varphi(\underline{r})$ berechnet wird als:

$$\underbrace{\text{grad } \varphi}_{**} := \left(\underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}}_{***}, \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}}_{***}, \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}}_{***} \right) \quad (5.3)$$

** : vektorwertige Größe und *** : partielle Ableitung

- Schreibweise: $\mathbf{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{r}}$, da häufig formales Ableiten nach \underline{r} möglich ist.

Beispiel:

$$\begin{aligned}\varphi(\underline{r}) &= \underline{a} \cdot \underline{r} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \\ \text{direkt: } (\partial_1 \varphi, \partial_2 \varphi, \partial_3 \varphi) &= (a_1, a_2, a_3) = \underline{a} \\ \text{formal: } \mathbf{grad} \varphi &= \frac{\partial}{\partial \underline{r}} \underline{a} \cdot \underline{r} = \underline{a}\end{aligned}$$

Letzteres geht nur, wenn φ sich geeignet als Funktion von \underline{r} darstellen lässt.

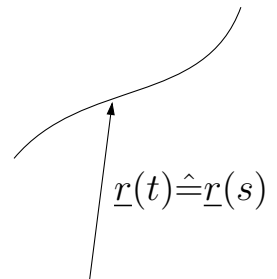
Eigenschaften von $\mathbf{grad} \varphi$:

- Die Änderung eines Feldes $\varphi(\underline{r})$ in einer beliebiger Richtung \underline{e} (mit $|\underline{e}| = 1$) ist die sogenannte **Richtungsableitung** $\underline{e} \cdot \mathbf{grad} \varphi$.

Mit der Kettenregel für die Bogenlänge s gilt:

$$\frac{d\varphi(\underline{r}(s))}{ds} = \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial s} = \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \underbrace{(\underline{e}_i)}_{*} = \underline{e} \cdot \mathbf{grad} \varphi$$

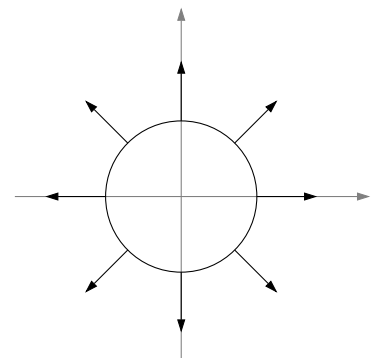
(*: Tangenteneinheitsvektor $\underline{T} = \frac{d\underline{r}}{ds} = \underline{e}$)



- Höhenlinien definiert durch $\varphi = \text{const.}$ \rightarrow für Tangentialrichtung \underline{e} gilt $(\mathbf{grad} \varphi) \cdot \underline{e} = 0$. $\Rightarrow \mathbf{grad} \varphi$ steht senkrecht auf Höhenlinien und zeigt in Richtung der stärksten Zunahme von φ .
- $|\mathbf{grad} \varphi|$ = gibt die Stärke der Änderung des Feldes $\varphi(\underline{r})$ an (= Dichte der Höhenlinien).

Beispiel: $\varphi(\underline{r}) = x^2 + y^2 = \underline{r}^2$ mit $z = 0$

$$\Rightarrow \mathbf{grad} \varphi = (2x, 2y) = 2\underline{r}$$



Definition 5.3. Der vektorwertige Differentialoperator ∇ ("Nabla") ist definiert als

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right). \quad (5.4)$$

- Ein Operator ist eine "Rechenvorschrift", die auf alle dahinter stehenden Terme angewendet wird.
- alternativ: $\nabla = \underline{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \underline{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \underline{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$
- auch $\nabla = \underline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}$
- damit $\mathbf{grad} \varphi = \nabla \varphi$
- Operator der Richtungsableitung: $\underline{e} \cdot \mathbf{grad} \varphi = \underbrace{(\underline{e} \cdot \nabla)}_{\text{skalarwertig}} \varphi$
- Rechenregeln:

$$\nabla(\varphi + \psi) = \nabla \varphi + \nabla \psi$$

$$\nabla(\varphi \cdot \psi) = (\nabla \varphi) \psi + \varphi (\nabla \psi)$$

Rechenregeln gehen komponentenweise auf die üblichen Regeln zurück.

5.5 Divergenz und lokale Quellstärke

Gegeben sei ein Vektorfeld $\underline{A}(\underline{r})$

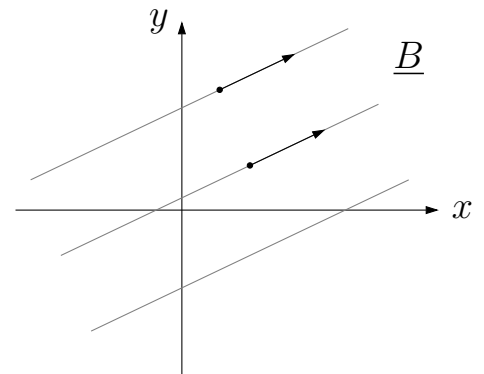
Definition 5.4. Die **Divergenz** ist definiert als skalare Größe

$$\mathbf{div} \underline{A} = \nabla \cdot \underline{A} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_i}{\partial x_i}. \quad (5.5)$$

Rechenregeln:

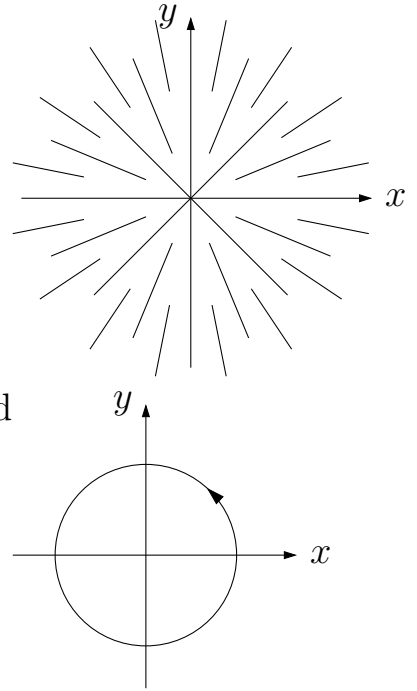
$$\nabla \cdot (\underline{A} + \underline{B}) = \nabla \cdot \underline{A} + \nabla \cdot \underline{B}$$

$$\nabla(\varphi \underline{A}) = \underbrace{(\nabla \varphi)}_{\mathbf{grad}} \cdot \underline{A} + \varphi \underbrace{(\nabla \cdot \underline{A})}_{\mathbf{div}}$$



Beispiele:

- $\underline{A}(\underline{r}) = \underline{B} \rightarrow \mathbf{div} \underline{A} = 0$
- $\underline{A}(\underline{r}) = \underline{r} \rightarrow \mathbf{div} \underline{A} = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = 3$
- $\underline{A} = \underline{B} \times \underline{r}$. Mit $\underline{B} = \underline{e}_z$ ist $\underline{A} = -\underline{e}_x B y + \underline{e}_y B x$
 $\rightarrow \mathbf{div} \underline{A} = -\partial_x B y + \partial_y B x = 0 \rightarrow$ reines Wirbelfeld
 ist divergenzfrei.



Die Divergenz ist ein Maß für die lokale **Quellstärke**.

5.6 Rotation und lokale Wirbelstärke

Definition 5.5. Definiere vektorielle Größe **Rotation** (engl: curl)

$$\mathbf{rot} \underline{A} = \nabla \times \underline{A} \quad (5.6)$$

Komponentenweise ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} (\nabla \times \underline{A})_1 &= \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 \\ (\nabla \times \underline{A})_2 &= \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 \\ (\nabla \times \underline{A})_3 &= \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \end{aligned}$$

Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\underline{A} + \underline{B}) &= \nabla \times \underline{A} + \nabla \times \underline{B} \\ \nabla \times (\varphi \underline{A}) &= (\nabla \varphi) \times \underline{A} + \varphi (\nabla \times \underline{A}) \\ \nabla \cdot (\underline{A} \times \underline{B}) &= (\nabla \times \underline{A}) \cdot \underline{B} - \underline{A} \cdot (\nabla \times \underline{B}) \end{aligned}$$

Beweis:

$$\sum_{ijk} \partial_i \epsilon_{ijk} A_j B_k \rightarrow \sum_{ijk} \left[\underbrace{\epsilon_{ijk} (\partial_i A_j) B_k}_{\epsilon_{kij} \partial_i A_j = (\nabla \times \underline{A})_k} + \underbrace{\epsilon_{ijk} A_j (\partial_i B_k)}_{-\epsilon_{jik} \partial_i B_k = -(\nabla \times \underline{B})_j} \right]$$

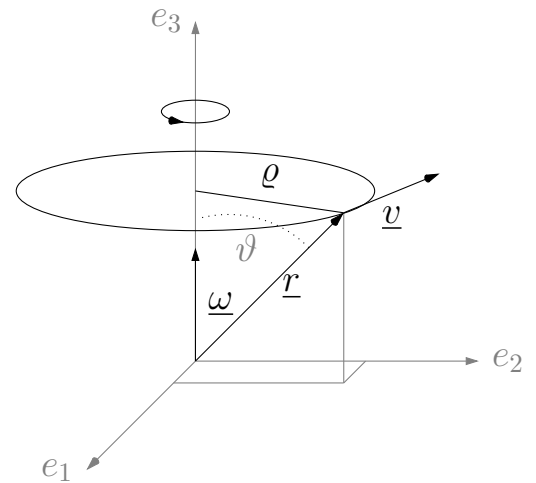
Lokale Wirbelstärke anhand eines Beispiels:

Drehung eines starren Körpers mit Winkelgeschwindigkeitsvektor $\underline{\omega} = \omega \underline{e}_3$.

Geschwindigkeitsfeld $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{\omega} \times \underline{r} = -\underline{e}_1 \omega x_2 + \underline{e}_2 \omega x_1$

- $\underline{v} \perp \underline{\omega}, \underline{r}$
- $|\underline{v}| = r\omega \sin \theta = \omega \varrho = \frac{2\pi \varrho}{T}$

$$\begin{aligned} (\mathbf{rot} \underline{v})_3 &= \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \\ &= \partial_1(\omega x_1) - \partial_2(-\omega x_2) \\ &= 2\omega \end{aligned}$$



Die anderen Komponenten sind $= 0$.

$$\rightarrow \mathbf{rot} (\underline{\omega} \times \underline{r}) = 2\underline{\omega}$$

Allgemein: $\mathbf{rot} \underline{A}(\underline{r})$ ist die lokale **Wirbelstärke**.

Rotation eines Gradientenfeldes:

$$\begin{aligned} (\mathbf{rot} \mathbf{grad} \varphi)_1 &= \partial_2(\mathbf{grad} \varphi)_3 - \partial_3(\mathbf{grad} \varphi)_2 \\ &= \partial_2 \partial_3 \varphi - \partial_3 \partial_2 \varphi = 0 \end{aligned}$$

Entsprechend für die anderen Komponenten.

$$\rightarrow \nabla \times (\nabla \varphi) = 0$$

Gradientenfelder sind **wirbelfrei**. Umkehrung (ohne Beweis): gilt $\mathbf{rot} \underline{A} = 0$, so kann \underline{A} als **grad** φ dargestellt werden und φ ist eindeutig bis auf eine additive Konstante.

Beispiel aus der Physik: Kraftfeld $\underline{F}(\underline{r})$

Gilt $\mathbf{rot} \underline{F} = 0$, so gibt es ein V mit

$$\underline{F} = -\mathbf{grad} V(\underline{r})$$

$V(\underline{r})$ ist dann das Potential der Kraft F (potentielle Energie) und \underline{F} ist ein **konservativer Kraft**. Das Minuszeichen ist Konvention. (In einer Dimension war das einfacher!)

6 Bewegung in drei Dimensionen

In diesem Kapitel wird die Bewegung eines Massenpunktes in drei Dimensionen behandelt.

6.1 Arbeit, Energie und Potential

Wir diskutieren zunächst eine allgemeine Kraft $\underline{F}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t)$ und definieren die **Arbeit** entlang eines Wegstücks $d\underline{r}$ als:

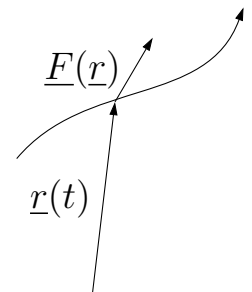
$$dW = \underline{F}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) \cdot d\underline{r}$$

Für einen endlichen Weg von $\underline{r}(t_1) = \underline{r}_1$ nach $\underline{r}(t_2) = \underline{r}_2$ ergibt sich die verrichtete Arbeit dann als ein Wegintegral (Kurvenintegral):

$$W_{21} = \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{F}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) \cdot d\underline{r}$$

Mit der Parametrisierung der Raumkurve $\underline{r}(t)$ (mit $d\underline{r} = \frac{d\underline{r}}{dt} dt$) ergibt sich dann:

$$W_{21} = \int_{t_1}^{t_2} \underline{F} \cdot \frac{d\underline{r}}{dt} dt$$



Wir definieren nun die **Leistung** (Arbeit pro Zeit) als:

$$\frac{dW}{dt} = P(t) = \underline{F}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) \cdot \dot{\underline{r}} \quad \text{momentane Leistung}$$

$$\text{Damit ist: } W_{21} = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt$$

Die **Kinetische Energie** ergibt sich wie zuvor aus einer Betrachtung der Newtonschen Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} \underline{F} &= m\ddot{\underline{r}} & | \cdot \dot{\underline{r}} \\ \underline{F} \cdot \dot{\underline{r}} &= \frac{dW}{dt} = m\ddot{\underline{r}} \cdot \dot{\underline{r}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{\underline{r}}^2 \right) \end{aligned}$$

Die **kinetische Energie** in drei Dimensionen ist (wie zuvor) definiert als

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m \dot{\underline{r}}^2} \quad (6.1)$$

\Rightarrow Verrichtung von Arbeit bewirkt Änderung der kinetischen Energie

$$W_{21} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(T(t)) dt = T_2 - T_1 = \frac{1}{2} m (\dot{\underline{r}}^2(t_2) - \dot{\underline{r}}^2(t_1))$$

$$W_{21} > 0 \rightarrow T_2 > T_1$$

Wenn (positive) Arbeit verrichtet wird, steigt die kinetische Energie

Energieerhaltungssatz:

Für ein konservatives Kraftfeld existiert ein skalares Potential $V(\underline{r})$, so dass

$$\boxed{\underline{F}(\underline{r}) = -\mathbf{grad} V(\underline{r})}$$

Es folgt für die potentielle Energie

$$\frac{d}{dt}V(\underline{r}(t)) = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \underbrace{(\mathbf{grad} V)}_{-\underline{F}} \cdot \frac{d\underline{r}}{dt} \stackrel{Newton}{=} -m\ddot{\underline{r}} \cdot \dot{\underline{r}} = -\frac{d}{dt} \underbrace{\left(\frac{1}{2} m \dot{\underline{r}}^2 \right)}_T$$

Das heißt, es folgt der **Energieerhaltungssatz**:

$$\boxed{\frac{d}{dt}(T + V) = 0} \quad (6.2)$$

Dabei ist $E = T + V$ die Energie des MP (auch: Gesamtenergie).

Wann existiert ein Potential?

- $\underline{F} = -\mathbf{grad} V$ ist äquivalent zu $\mathbf{rot} \underline{F} = 0$
(wegen $\nabla \times (\nabla V) = 0$)
- Linienintegral:

$$W_{21}(c_1) = \int_{c_1} \underline{F} \cdot d\underline{r} = - \int_{c_1} \mathbf{grad} V \cdot d\underline{r}$$

$$= - \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{grad} V \cdot \frac{d\underline{r}}{dt} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{dV}{dt} dt = - (V(\underline{r}_2) - V(\underline{r}_1))$$

hängt nur von Anfangs- und Endpunkt ab \rightarrow Arbeit, die nur von konservativer Kraft verrichtet wird, ist wegunabhängig.

- für geschlossenes Wegintegral gilt dann:

$$W_{11} = \oint \underline{F} \cdot d\underline{r} = V(\underline{r}_1) - V(\underline{r}_1) = 0$$

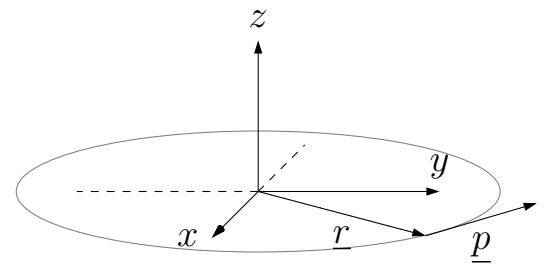
Bestimmung von V bei gegebenem $\underline{F}(\underline{r})$:

- Test, ob \underline{F} konservativ ist ($\text{rot } \underline{F} = 0$ oder Linienintegral wegunabhängig)
- Bestimme $V(\underline{r})$ aus:
 1. $\underline{F} = -\text{grad } V$, d.h. lösen von
 $F_x(x, y, z) = -\frac{\partial}{\partial x} V(x, y, z), \dots$
 2. $V(\underline{r}) - V(\underline{r}_0) = -\int_{\underline{r}_0}^{\underline{r}} \underline{F} \cdot d\underline{r}'$ (entlang "geeignetem" Weg)
- Konstanten Anteil ($V(\underline{r}_0)$) festlegen (Potentialaichung), z.B. $V(\underline{r} = 0) = 0$ oder $V(\underline{r} \rightarrow \infty) = 0$

6.2 Drehimpuls und Drehmoment

Diese Größen sind speziell zur Beschreibung von Drehbewegungen interessant. Wir beginnen wieder mit der Newtonscher Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned}
 m\ddot{\underline{r}} &= \underline{F} & | \underline{r} \times \dots \\
 m\underline{r} \times \ddot{\underline{r}} &= \underbrace{\underline{r} \times \underline{F}}_{= \underline{M} \text{ (Drehmoment)}} \\
 &= \frac{d}{dt} m (\underline{r} \times \dot{\underline{r}}) = \frac{d}{dt} \underbrace{(\underline{r} \times \underline{p})}_{= \underline{L} \text{ Drehimpuls}} \\
 &\rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \underline{L} = \underline{M}} \quad \text{Drehimpulssatz}
 \end{aligned}$$

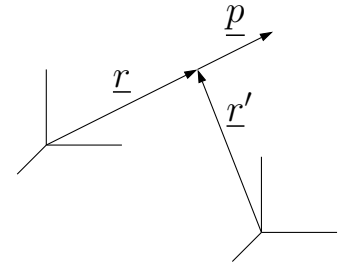


Das Drehmoment bewirkt eine Änderung des Drehimpulses.
Diskussion:

- \underline{L} hängt vom gewählten Ursprung ab.
Koordinatentransformation

$$\begin{aligned}\underline{r}' &= \underline{r} + \underline{a}, \quad \underline{\dot{r}} = \underline{\dot{r}}' \quad \Rightarrow \underline{p} = \underline{p}' \\ \underline{L}' &= \underline{r}' \times \underline{p}' = (\underline{r} + \underline{a}) \times \underline{p} \\ &= \underline{r} \times \underline{p} + \underline{a} \times \underline{p} = \underline{L} + \underline{a} \times \underline{p}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{L} \neq \underline{L}'$$

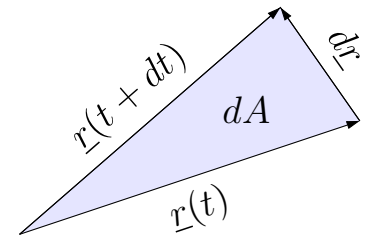


- Kräftefreier Fall: $\underline{F} = 0 \rightarrow \underline{p} = \text{const.}$
mit Drehimpulssatz: $\dot{\underline{L}} = \underline{M}$ folgt auch $\underline{L} = \text{const.}$

- Richtung von \underline{L} senkrecht zur Ebene, die durch \underline{r} und $\underline{\dot{r}}$ aufgespannt wird.
Für $\underline{L} = \text{const}$ findet die Bewegung also in einer Ebene statt.

- Vom Fahrstrahl (Ortsvektor) überstrichene Fläche (Flächensatz):

$$\begin{aligned}dA &= \frac{1}{2} |\underline{r} \times d\underline{r}| \\ &= \frac{1}{2} |\underline{r} \times \underline{\dot{r}}| dt \\ &= \frac{|\underline{L}|}{2m} dt \\ \Rightarrow \frac{dA}{dt} &= \frac{|\underline{L}|}{2m}\end{aligned}$$



Zeitliche Änderung der überstrichenen Fläche ist durch Betrag des Drehimpulses gegeben. (siehe 2. Keplersches Gesetz später).

6.3 Zentralkräfte und effektives Potential

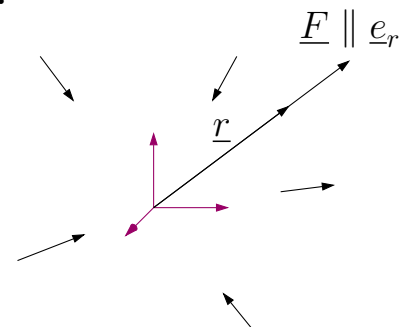
Gegeben sei zunächst eine **allgemeine Zentralkraft**:

$$\underline{F} = f(r, \dot{r}, t) \underline{e}_r$$

Wegen $\underline{r} \times \underline{e}_r = 0$ folgt $\underline{M} = 0$ und damit

$$\underline{L} = \text{const.}$$

die Drehimpulserhaltung.



Konsequenzen:

- Bewegung findet in Ebene \perp zu \underline{L} statt (Ebene enthält Ursprung. Anfangsbedingungen legen Ebene fest.).
- $\dot{A} = \frac{|\underline{L}|}{2m} = \text{const.} \rightarrow$ Die Überstrichene Fläche nimmt linear mit der Zeit zu (**Flächensatz**).
 \rightarrow 2. Keplersches Gesetz: Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen

Wichtiger Spezialfall in der Physik ist die **konservative Zentralkraft**:

$$\underline{F}(\underline{r}) = f(r)\underline{e}_r, \quad f(r) \text{ ist Kugelsymmetrisch}$$

$\underline{F} = -\mathbf{grad} V$ steht immer \perp zu Äquipotentialflächen (wenn V existiert) \rightarrow diese müssten Kugeloberflächen sein \rightarrow für das Potential gilt:

$$V(\underline{r}) = V(r), \quad \text{wobei}$$

$$\underline{F} = -\mathbf{grad} V(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} \underline{e}_r$$

mit dem Gradienten in Kugelkoordinaten: $\nabla V = \underline{e}_r \frac{\partial V}{\partial r} + \underline{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} + \underline{e}_\varphi \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial V}{\partial \varphi}$

$$\text{d.h. } f(r) = -\frac{dV(r)}{dr} \text{ und } \underline{F} \text{ ist konservativ}$$

Effektives Potential:

Es gelten für konservative Zentralkräfte also zwei Erhaltungssätze:

1. Energie: $E = \frac{1}{2} m \dot{\underline{r}}^2 + V(r) = \text{const.}$
2. Drehimpuls: $\underline{L} = m \underline{r} \times \dot{\underline{r}} = \text{const.}$

Damit ist eine Vereinfachung der Bewegungsgleichungen durch die Erhaltungssätze möglich.

$\underline{L} = \text{const.} \rightarrow$ Bewegung in $x - y$ -Ebene.

Wähle Kugelkoordinaten mit $\vartheta = \pi/2$. Dann sind r und φ die zeitabhängigen Koordinaten und es gilt:

$$\underline{r} = r \underline{e}_r, \quad \dot{\underline{r}} = \dot{r} \underline{e}_r + r \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi$$

$$\underline{L} = m \underline{r} \times \dot{\underline{r}} = m r^2 \dot{\varphi} \underbrace{\underline{e}_r \times \underline{e}_\varphi}_{\underline{e}_z}$$

$$|\underline{L}| = L = m r^2 \dot{\varphi} = \text{const.}$$

Diese Gleichung ergibt den Zusammenhang zwischen $r(t)$ und $\dot{\varphi}(t)$. Jetzt eliminieren wir $\dot{\varphi}$ aus der Energiegleichung:

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{m}{2} r^2 \dot{\varphi}^2 + V(r) = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2}}_{V_{\text{eff}}(r)} + V(r)$$

Dies ist ein Energiesatz einer eindimensionalen Bewegung im **effektiven Potential**

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \quad (6.3)$$

Diese Gleichung kann man wie zuvor bei eindimensionalen Bewegungen integrieren. Aus $\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{eff}}(r))}$ ergibt sich das Integral:

$$t - t_0 = \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{eff}}(r'))}}$$

Sofern man dieses Integral für ein gegebenes Potential berechnen kann, erhält man $t(r)$ und durch invertieren $r(t)$. Den Winkel $\varphi(t)$ erhält man anschließend aus $\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2(t)}$.

$$\rightarrow \varphi - \varphi_0 = \int_{t_0}^t \frac{L}{mr^2(t')} dt' \rightarrow \varphi(t)$$

Die Bahnkurve $r(\varphi)$ erhält man aus:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dr} &= \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{dr} = \frac{L}{mr^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{eff}}(r))}} \\ \rightarrow \varphi - \varphi_0 &= \int_{r_0}^r \frac{L}{mr^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{eff}}(r))}} dr' \end{aligned}$$

Zusammenfassung:

- Zentralpotential $V(r)$ ($\rightarrow \underline{F} = -\frac{dV}{dr} \underline{e}_r$)
- Erhaltungssätze für E und \underline{L}
 \rightarrow Reduktion auf effektive eindimensionale Bewegung im effektiven Potential $V_{\text{eff}}(r)$
- die Anfangbedingungen stecken in den Erhaltungsgrößen Energie und Drehimpuls

6.4 Drehimpuls und Drehmoment - Experimente

6.5 Gravitation und Planetenbewegung

6.5.1 Die Keplerschen Gesetze

6.5.2 Das Newtonsche Gravitationsgesetz

6.5.3 Experimentelle Prüfung des Gravitationsgesetzes

6.5.4 Planetenbewegung und Planetenbahnen

6.5.5 Erste und zweite kosmische Geschwindigkeit

6.5.6 Gezeiten u. Deformation d. Erde infolge d. Gravitations- und Zentrifugalkräfte

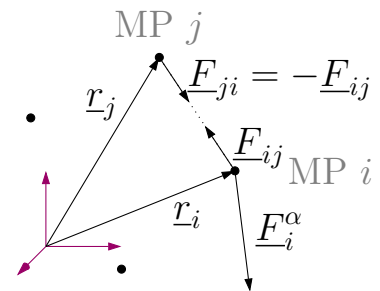
6.5.7 Das Gravitationsfeld ausgedehnter Körper

7 Erhaltungssätze in Mehrteilchensystemen

7.1 Schwerpunktsatz, Impulssatz und Drehimpulssatz

In diesem Kapitel betrachten ein Mehrteilchensystem, bestehend aus N Massenpunkten mit $i = 1, \dots, N$. Es sei:

- \underline{r}_i : Ort des i -ten MP
- \underline{F}_i : Gesamtkraft auf i . Wird aufgeteilt in:
 - \underline{F}_i^a : äußere Kraft auf i
 - \underline{F}_{ij} : innere Kraft auf i durch Existenz von j (Wechselwirkung $\underline{F}_{ij} = -\underline{F}_{ji}$ wegen actio = reactio)



Die Newtonsche Bewegungsgleichung gilt für jeden MP:

$$m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i = \underline{F}_i^a + \sum_{j=1}^N \underline{F}_{ij} \quad \text{mit} \quad \underline{F}_{ii} = 0$$

Für das Gesamtsystem gilt also:

$$\sum_i m_i \ddot{\underline{r}}_i = \sum_i \underline{F}_i^a + \underbrace{\sum_{ij} \underline{F}_{ij}}_{=\sum_{i<j} (\underline{F}_{ij} + \underline{F}_{ji}) = 0} = \sum_i \underline{F}_i^a$$

Zur Beschreibung des Gesamtsystems führen wir folgende Größen ein:

- $M = \sum_i m_i$: Gesamtmasse
- $\underline{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \underline{r}_i$: Schwerpunkt (Orte werden mit Faktor m_i/M gewichtet)
- $\underline{P} = \sum_i m_i \dot{\underline{r}}_i$: Gesamtimpuls

- $\underline{F}^a = \sum_i \underline{F}_i^a$: äußere Gesamtkraft (auch resultierende äußere Kraft)

Beachte: Das Attribut "äußere" kann man auch weglassen, da die Summe der inneren Kräfte Null ist. Insgesamt gilt also:

$$\Rightarrow \boxed{M \ddot{\underline{R}} = \underline{F}^a} \quad (7.1)$$

Damit gilt der **Schwerpunktsatz**: Der Schwerpunkt des Vielteilchensystems bewegt sich wie ein MP mit Gesamtmasse M , auf den die resultierende äußere Kraft wirkt.

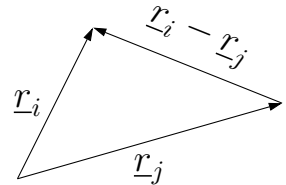
Für den Gesamtimpuls gilt damit:

$$\Rightarrow \dot{\underline{P}} = \underline{F}^a \quad \boxed{\text{ist } \underline{F}^a = 0 \text{ gilt } \underline{P} = \text{const.}} \quad (7.2)$$

Damit gilt der **Impulssatz**: Gesamtimpulserhaltung gilt in sogenannten abgeschlossenen Systemen in denen keine äußeren Kräfte wirken, d. h. $\underline{F}_i^a = 0$ für alle i .

Wir führen jetzt den Gesamtdrehimpuls ein:

$$\begin{aligned} \underline{L} &= \sum_{i=1}^N \underline{L}_i = \sum_i m \underline{r}_i \times \dot{\underline{r}}_i \\ \Rightarrow \dot{\underline{L}} &= \sum_i m_i (\underbrace{\dot{\underline{r}}_i \times \dot{\underline{r}}_i}_{=0} + \underline{r}_i \times \ddot{\underline{r}}_i) = \sum_i \underline{r}_i \times \underline{F}_i^a + \sum_{ij} \underline{r}_i \times \underline{F}_{ij} \\ \sum_{ij} \underline{r}_i \times \underline{F}_{ij} &= \frac{1}{2} \left[\sum_{ij} \underline{r}_i \times \underline{F}_{ij} + \sum_{ij} \underline{r}_j \times \underline{F}_{ji} \right] = \frac{1}{2} \sum_{ij} (\underline{r}_i - \underline{r}_j) \times \underline{F}_{ij} \\ &= 0, \quad \text{wenn } \underline{F}_{ij} \parallel (\underline{r}_i - \underline{r}_j) \end{aligned}$$



Die letzte Bedingung ist in Zentralpotentialen (etwa Gravitation) immer erfüllt. → Innere Zentralkräfte tragen also nicht zur Drehimpulsänderung bei und es gilt dann:

$$\rightarrow \dot{\underline{L}} = \sum_i \underline{r}_i \times \underline{F}_i^a = \sum_i \underbrace{\underline{r}_i \times \underline{F}_i^a}_{\substack{\text{äußeres Drehmoment} \\ \text{auf i-ten MP}}} = \underbrace{\sum_i \underline{r}_i \times \underline{F}_i^a}_{\substack{\text{äußeres} \\ \text{Gesamtdrehmoment}}}$$

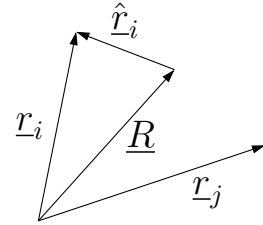
Damit gilt der **Drehimpulssatz**: Falls $\underline{M}^a = 0$ ist (d. h. keine äußeren Kräfte, abgeschlossenes System) und innere Kräfte Zentralkräfte sind gilt **Gesamtdrehimpulserhaltung**

$$\boxed{\underline{L} = \text{const.}}$$

Zerlegung des Gesamtdrehimpulses:

Wir führen jetzt die Schwerpunktkoordinate ein und spalten einen Drehimpulsanteil ab, der sich auf den Schwerpunkt bezieht:

$$\begin{aligned}
 \underline{L} &= \sum_i m_i \underline{r}_i \times \dot{\underline{r}}_i \\
 &= \sum_i m_i (\underline{R} + \hat{\underline{r}}_i) \times (\dot{\underline{R}} + \dot{\hat{\underline{r}}}_i) \\
 &= \sum_i m_i (\underline{R} \times \dot{\underline{R}} + \underbrace{\underline{R} \times \dot{\hat{\underline{r}}}_i}_{=0} + \underbrace{\hat{\underline{r}}_i \times \dot{\underline{R}}}_{=0} + \hat{\underline{r}}_i \times \dot{\hat{\underline{r}}}_i)
 \end{aligned}$$



weil,

$$\begin{aligned}
 \sum_i m_i \hat{\underline{r}}_i &= \sum_i m_i \underline{r}_i - \sum_i m_i \underline{R} = M \underline{R} - M \underline{R} = 0 \\
 \Rightarrow \text{auch } \sum_i m_i \dot{\hat{\underline{r}}}_i &= 0, \quad \text{Summe der Relativimpulse} = 0.
 \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also:

$$\underline{L} = \underline{R} \times \underline{P} + \sum_i \hat{\underline{r}}_i \times \hat{\underline{p}}_i = \underline{L}_S + \underline{L}_R$$

mit

- \underline{L}_S : Drehimpuls der im Schwerpunkt vereinigt gedachten Gesamtmasse
- \underline{L}_R : Drehimpuls bezogen auf den Schwerpunkt

Dies ist besonders interessant, wenn man das Koordinatensystem in den Schwerpunkt legt:

7.2 Energiesatz

Die Herleitung des Energieerhaltungssatzes beginnt wieder mit der Newtonschen Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned}
 \sum_i m_i \ddot{\underline{r}}_i &= \sum_i \underline{F}_i \\
 \Rightarrow \underbrace{\sum_i m_i \ddot{\underline{r}}_i \cdot \dot{\underline{r}}_i}_* &= \underbrace{\sum_i \underline{F}_i \cdot \dot{\underline{r}}_i}_{**} = \sum_i \underline{F}_i^a \cdot \dot{\underline{r}}_i + \sum_{ij} \underline{F}_{ij} \cdot \dot{\underline{r}}_i
 \end{aligned}$$

Annahme: äußere und innere Kräfte seien konservativ:

$\underline{F}_i = -\nabla_i V(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \dots, \underline{r}_N)$ d.h es existiert ein Potenzial V für alle Kräfte

$$** : \sum_i \underline{F}_i \cdot \dot{\underline{r}}_i = - \sum_i (\nabla_i V) \cdot \dot{\underline{r}}_i = - \frac{dV(\underline{r}_1(t), \dots, \underline{r}_N(t))}{dt} \quad (\text{Kettenregel})$$

$$* : \sum_i m_i \ddot{\underline{r}}_i \cdot \dot{\underline{r}}_i = \frac{d}{dt} \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\underline{r}}_i^2 = \frac{d}{dt} \sum_i T_i = \frac{dT}{dt}$$

T: kinetische Gesamtenergie

$\rightarrow T + V = \text{const.} = E$ **Gesamtenergieerhaltung**

Die Energieerhaltung folgt unmittelbar aus der Existenz eines Potentials.

Zerlegung der kinetischen Energie:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{r}}_i &= \dot{\underline{r}}_i + \dot{\underline{R}} \\ \dot{\underline{r}}_i^2 &= (\dot{\underline{r}}_i + \dot{\underline{R}})(\dot{\underline{r}}_i + \dot{\underline{R}}) = \dot{\underline{r}}_i^2 + 2\dot{\underline{r}}_i \cdot \dot{\underline{R}} + \dot{\underline{R}}^2 \end{aligned}$$

Mit $\sum_i m_i \dot{\underline{r}}_i = 0$ gilt

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\underline{r}}_i^2 + \frac{1}{2} M \dot{\underline{R}}^2 \quad (7.3)$$

Die kinetische Gesamtenergie ist die Summe aus der kinetischen Energie eines gedachten Teilchen mit Gesamtmasse M am Ort des Schwerpunktes \underline{R} und der Summe der kinetischen Energien relativ zum Schwerpunkt.

Zerlegung des Potentials nach Krafttypen:

Wir setzen voraus, dass alle inneren Kräfte Zentralkräfte sind,

$$\underline{F}_{ij} = -\underline{F}_{ji} \parallel \underline{r}_i - \underline{r}_j = \underline{r}_{ij}$$

und kugelsymmetrisch:

$$|\underline{F}_{ij}| = |\underline{F}_{ij}(r_{ij})|, \quad \text{mit } r_{ij} = |\underline{r}_i - \underline{r}_j|$$

Dann führen wir Potentiale für die inneren Kräfte ein:

$$V_{12} = f(r_{12}) \Rightarrow V_{12} = V_{21} \Rightarrow \underline{F}_{12} = -\nabla_1 V_{12} = -\underline{F}_{21} = \nabla_2 V_{12}$$

Dieses Potential beschreibt sowohl die potentielle Energie von MP 1 im Feld von MP 2 als auch umgekehrt. Damit gilt:

$$V_{ij} = V_{ji}$$

Insgesamt kann man daher das Potential des N -Teilchensystems schreiben als:

$$V(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \dots, \underline{r}_N) = \underbrace{\sum_{i=1}^N V_i(\underline{r}_i)}_1 + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{ij} V_{ij}(\underline{r}_{ij})}_2$$

mit:

1: führt zu äußeren Kräften $\underline{F}_i^a = -\nabla V_i(\underline{r}_i)$

2: führt zu inneren Kräften $\underline{F}_{ij} = -\nabla_i V_{ij}(\underline{r}_{ij})$

Dies ist allgemein die Struktur des Gesamtpotentials, wenn innere Kräfte kugelsymmetrische Zentralkräfte sind, was in der Physik häufig vorkommt.

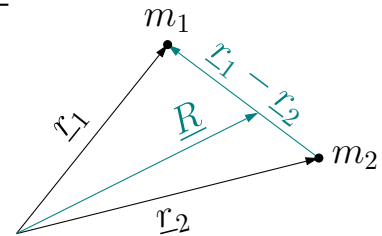
7.3 Effektives Einteilchenproblem

Ein wichtiger Spezialfall ist $N = 2$, weil der sich vereinfachen lässt. Wir führen dazu die Schwerpunktskoordinate ein:

$$\underline{R} = \frac{m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2}{M}$$

Und die Relativkoordinate:

$$\underline{r} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2$$



Das Zweiteilchenproblem ist jetzt in den Koordinaten \underline{R} , \underline{r} einfacher. Die Rücktransformation in die ursprüngliche Koordinaten erfolgt dann dann über:

$$\begin{aligned} \underline{r}_1 &= \underline{R} + \frac{m_2}{M} \underline{r} \\ \underline{r}_2 &= \underline{R} - \frac{m_1}{M} \underline{r} \end{aligned}$$

Wir nehmen ein abgeschlossenes System an mit $\underline{F}_i^a = 0$. Für den Schwerpunkt \underline{R} gilt dann:

$$M \ddot{\underline{R}} = 0, \quad \underline{P} = M \dot{\underline{R}} = \text{const.} \quad (\text{Impulssatz})$$

Für die Relativkoordinate \underline{r} gilt nach Newton:

$$\ddot{\underline{r}} = \ddot{\underline{r}}_1 - \ddot{\underline{r}}_2 = \frac{\underline{F}_{12}}{m_1} - \frac{\underline{F}_{21}}{m_2} = \underline{F}_{12} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$$

$$\rightarrow \mu \ddot{\underline{r}} = \underline{F}_{12}$$

$$\text{mit reduzierter Masse } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Für die sogenannte reduzierte Masse μ gilt:

- $m_2 \rightarrow \infty \Rightarrow \mu = m_1$
- für $m_1 = m_2 = m \Rightarrow \mu = \frac{m}{2}$.

Damit sind die beiden ursprünglichen Bewegungsgleichungen zerlegt in Schwerpunkt- und Relativanteil. m_1 bewegt sich bezüglich des Ortes von m_2 wie die reduzierte Masse im Feld der inneren Kraft \underline{F}_{12} . Unser Zweiteilchenproblem ist jetzt reduziert auf ein **effektives Einteilchenproblem**.

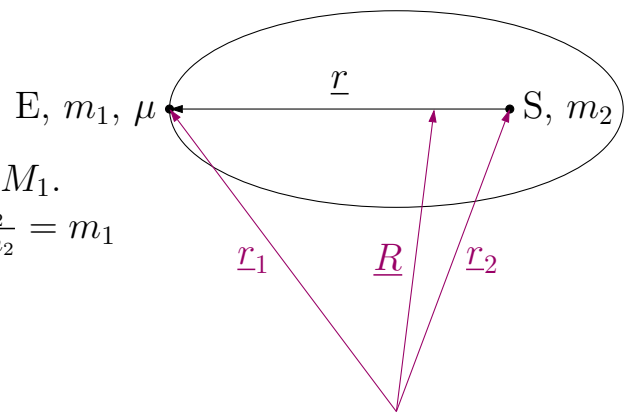
Anwendung auf das Kepler-Problem:

- $\mu \ddot{\underline{r}} = \underline{F}_{12}$ beschreibt Planetenbewegung
→ Ellipsen für Relativkoordinate \underline{r}
- Reduzierte Masse ersetzt Planetenmasse M_1 .
Allerdings: $\mu(m_2 \gg m_1) \approx \lim_{m_2 \rightarrow \infty} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = m_1$
- Die Sonne bewegt sich ebenfalls.
Allerdings ist $\underline{r}_2 = \underline{R} - \frac{m_1}{M} \underline{r} \approx \underline{R}$,
da $m_1 \ll M$
- Im Schwerpunktsystem ($\underline{R} = 0$) gilt:

$$\underline{r}_1 = \frac{m_2}{M} \underline{r}$$

$$\underline{r}_2 = -\frac{m_1}{M} \underline{r}$$

Beide Massen bewegen sich auf gleichsinnig durchlaufenen Ellipsen um den gemeinsamen Schwerpunkt.

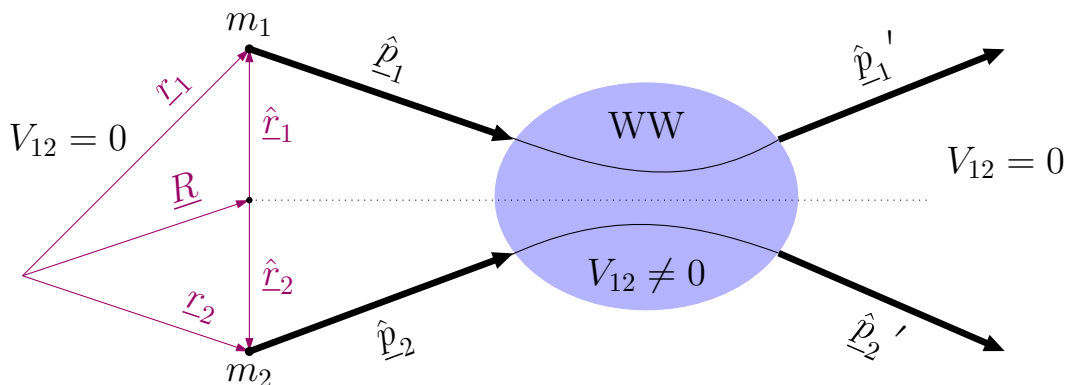


8 Stoßgesetze

8.1 Erhaltungssätze und ihre Folgen

Beim sogenannten **Stoß** (Streuung) handelt es sich um die Wechselwirkung zweier Massen, die ein abgeschlossenes System bilden. Zur Diskussion dieses Vorgangs, der in der Physik sehr häufig ist, macht man spezielle Annahmen.

- Das Potential, das die Wechselwirkung beschreibt, soll nur vom Abstand abhängen und kurzreichweitig sein



→ in großer Entfernung ist die Bewegung gleichförmig und geradlinig

- \underline{p}_1 , \underline{p}_2 sein als Anfangsbedingung bekannt, wie sind \underline{p}_1' , \underline{p}_2' ? Das sind 6 Unbekannte!

Wir betrachten dazu zwei Bezugssysteme:

- **Laborsystem** (LS): $\underline{r}_i, \dot{\underline{r}}_i, \dots$ ($i = 1, 2$)
- **Schwerpunktsystem** (SS): $\underline{\hat{r}}_i, \dot{\underline{\hat{r}}}_i, \dots$ (auch ein Inertialsystem, da der Schwerpunkt sich im abgeschlossenen System linear, gleichförmig bewegt). Es gilt:

$$\underline{r}_i = \underline{R} + \underline{\hat{r}}_i$$

$$\rightarrow \underbrace{\dot{\underline{r}}_i - \dot{\underline{\hat{r}}}_i}_{\text{vorher}} = \dot{\underline{R}} = \text{const.} = \underbrace{\dot{\underline{\hat{r}}}_i' - \dot{\underline{\hat{r}}}_i}_{\text{nachher}} \quad \text{für } i = 1, 2$$

- **Impulserhaltung:**

$$\text{im LS: } \underline{p}_1 + \underline{p}_2 = \underline{p}'_1 + \underline{p}'_2 = \underline{P}$$

$$\text{im SS: } \hat{\underline{p}}_1 + \hat{\underline{p}}_2 = \hat{\underline{p}}'_1 + \hat{\underline{p}}'_2 = 0, \text{ weil Summe der Relativimpulse } = 0$$

$$\rightarrow \hat{\underline{p}}_1 = -\hat{\underline{p}}_2 \text{ und } \boxed{\hat{\underline{p}}'_1 = -\hat{\underline{p}}'_2}$$

Der Impulssatz liefert also 3 Gleichungen für 6 Unbekannte.

- **Energieerhaltung:**

$$\text{im LS: } \sum_{i=1}^2 \frac{p_i^2}{2m_i} = \sum_{i=1}^2 \frac{p_i'^2}{2m_i} + \mathcal{Q}$$

Die Größe \mathcal{Q} berücksichtigt eine mögliche Verletzung der mechanischen Energieerhaltung, also eine Umwandlung von mechanischer Energie in Wärme.

$$\text{im SS: } \sum_{i=1}^2 \frac{\hat{p}_i^2}{2m_i} = \sum_{i=1}^2 \frac{\hat{p}_i'^2}{2m_i} + \hat{\mathcal{Q}}$$

\mathcal{Q} ist in beiden Bezugssystemen gleich, weil:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \sum_i \frac{p_i^2 - p_i'^2}{2m_i} = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{r}_i^2 - \dot{r}_i'^2) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \left((\dot{\underline{r}}_i + \underline{\dot{R}})^2 - (\dot{\underline{r}}_i' + \underline{\dot{R}})^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \left[\dot{\underline{r}}_i^2 - \dot{\underline{r}}_i'^2 + \underbrace{2\dot{\underline{r}}_i \cdot \underline{\dot{R}}}_{=0} - \underbrace{2\dot{\underline{r}}_i' \cdot \underline{\dot{R}}}_{=0} \right] \quad (\text{Summe der Relativimpulse}) \\ &= \hat{\mathcal{Q}} \\ &\rightarrow \mathcal{Q} = \hat{\mathcal{Q}} \end{aligned}$$

Mit Hilfe von \mathcal{Q} kann man den Stoßprozess in verschiedene Kategorien einteilen:

- $\mathcal{Q} = 0$: elastischer Stoß
- $\mathcal{Q} > 0$: inelastischer Stoß (kin. Energie geht verloren)
- $\mathcal{Q} < 0$: inelastischer Stoß (kin. Energie kommt hinzu)

Folge des Energiesatzes:

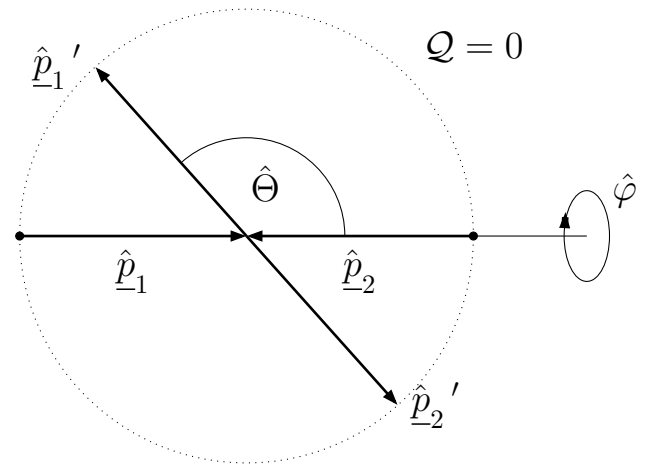
$$\text{wir wissen: } \hat{p}_1^2 = \hat{p}_2^2, \hat{p}'_1{}^2 = \hat{p}'_2{}^2$$

$$\rightarrow T_S = \frac{\hat{p}_1^2 m_2}{2m_1 m_2} + \frac{\hat{p}_2^2 m_1}{2m_2 m_1} = \underbrace{\frac{\hat{p}_i^2}{2\mu}}_{\text{für } i=1,2} = \underbrace{\frac{\hat{p}'_i{}^2}{2\mu}}_{\text{nachher}} + Q$$

$$\Rightarrow \hat{p}'_i = \sqrt{\hat{p}_i^2 - 2\mu Q}$$

Wir erhalten dadurch eine weitere Beziehung für die Impulse nach dem Stoß. Wir haben also insgesamt 4 Gleichungen für 6 Unbekannte. Das Ergebnis kann man grafisch zusammenfassen:

- $Q > 0 \rightarrow \hat{p}'_i < \hat{p}_i$
- $Q = 0 \rightarrow \hat{p}'_i = \hat{p}_i$
- $Q < 0 \rightarrow \hat{p}'_i > \hat{p}_i$
- der sogenannte Streuwinkel $\hat{\Theta}$ und der Azimutwinkel $\hat{\varphi}$ bleiben unbestimmt. Diese hängen von den Details der Wechselwirkung ab.



8.2 Elastischer Stoß

9 Dynamik starrer ausgedehnter Körper

9.1 Modell des starren Körpers

9.2 Definition des Massenschwerpunkts

9.3 Bewegung des starren Körpers

9.4 Kräfte und Kräftepaare

9.5 Trägheitsmoment und Rotationsenergie

9.6 Drehimpuls des starren Körpers

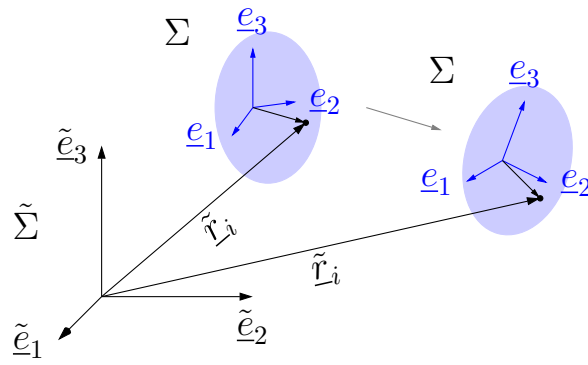
9.7 Kinematik starrer Körper

In diesem Kapitel diskutieren wir die physikalischen Eigenschaften eines sogenannten starren Körpers, bei dem man die Ausdehnung nicht vernachlässigt und die Masse zu einem Massenpunkt abstrahiert.

Definition 9.1. *Ein **starrer Körper** ist ein System von fest miteinander verbundenen Massenpunkten.*

Zur physikalischen Beschreibung betrachten wir zwei Bezugssysteme:

- $\tilde{\Sigma}$, raumfestes System: Inertialsystem mit Ursprung O und kartesischen Achsen \tilde{e}_l ($l = 1, 2, 3$)
- Σ körperfestes System: Bezugssystem mit Ursprung S (z.B. aber nicht notwendigerweise, im Schwerpunkt) und im Körper festen Achsen $e_l(t)$



9.7.1 Zerlegung der Geschwindigkeiten

Betrachten jeden MP i ($i = 1 \dots N$) mit seinem Ortsvektor:

$$\text{mit } \tilde{\Sigma} : \quad \underline{\tilde{r}}_i(t) = \sum_{l=1}^3 \tilde{x}_{il}(t) \underline{\tilde{e}}_l$$

$$\text{mit } \Sigma : \quad \underline{r}_i(t) = \sum_{l=1}^3 x_{il}(t) \underline{e}_l$$

Führen Koordinaten von S in $\tilde{\Sigma}$ ein: $\underline{r}_0(t)$

$$\rightarrow \underline{\tilde{r}}_i(t) = \underbrace{\underline{r}_o(t)}_{\text{Translation}} + \underbrace{\underline{r}_i(t)}_{\text{Rotation}}$$

Die Bewegung des starren Körpers lässt sich so in eine Translation und eine Rotation zerlegen. Damit gilt für die Geschwindigkeit eines MPs:

$$\underline{\dot{\tilde{r}}}_i(t) = \underline{\dot{r}}_o(t) + \underbrace{\underline{\omega}(t) \times \underline{r}_i}_{\text{Rotation um zeitabhängige Achse } \underline{\omega}(t)}$$

9.7.2 Kinetische Energie und Trägheitstensor

Die Kinetische Energie ist im Inertialsystem:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\underline{\tilde{r}}}_i^2(t)$$

Wenn wir uns auf die reine Rotation beschränken gilt damit:

$$T = T_R = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\underline{\omega} \times \underline{r}_i)^2$$

Nebenrechnung:

$$\left[(\underline{A} \times \underline{B}) \cdot (\underline{A} \times \underline{B}) = (AB \sin \vartheta)^2 = A^2 B^2 (1 - \cos^2 \vartheta) = A^2 B^2 - (\underline{A} \cdot \underline{B})^2 \right]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\underline{\omega} \times \underline{r})^2 &= \omega^2 r^2 - (\underline{\omega} \cdot \underline{r})^2 = \sum_{l=1}^3 \omega_l^2 r^2 - \sum_{l,k=1}^3 \omega_l x_l \omega_k x_k \\ &= \sum_{lk} \omega_l \omega_k (\delta_{lk} r^2 - x_l x_k) \end{aligned}$$

Damit gilt, wenn wir alles MPs aufsummieren:

$$T_R = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{l,k=1}^3 \omega_l \omega_k}_{\text{unabhängig vom Körper}} \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i (\delta_{lk} \underline{r}_i^2 - x_{il} x_{ik})}_{:= J_{lk} \text{ Körperspezifisch}}$$

Hierbei sind J_{lk} die Komponenten des **Trägheitstensors** $\underline{\underline{J}}$, der eine 3×3 Matrix ist.

$$\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix}$$

Damit ist die Rotationsenergie:

$$T_R = \frac{1}{2} \sum_{l,k=1}^3 \omega_l J_{lk} \omega_k = \frac{1}{2} \underline{\omega}^T \underline{\underline{J}} \underline{\omega} \quad (9.1)$$

mit $\underline{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$ und $\underline{\omega}^T = (\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3)$.

Beispiel: reine Rotation um x -Achse mit $\underline{\omega} = (\omega, 0, 0)$:

$$T_R = \frac{1}{2} J_{11} \omega^2$$

Dies ist analog zum Fall der kinetischen Energie einer translatorischen Bewegung,

$$T_t = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \underline{v}^T m \underline{v} = \frac{1}{2} \sum_l v_l m v_l,$$

nur dass hier eine skalare Größe ausreicht um die Trägheit der Masse zu beschreiben.

Eigenschaften des Trägheitstensors:

- Im kontinuierlichen Fall:

$$J_{lk} = \sum_i m_i \frac{\Delta V_i}{\Delta V_i} \dots = \int \varrho(\underline{r}) d^3r \dots = \int d^3r \varrho(\underline{r}) (\delta_{lk} r^2 - x_l x_k)$$

Beispiele:

$$J_{11} = \int d^3r \varrho(\underline{r}) \underbrace{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_1)}_{x_2^2 + x_3^2} = \int d^3r \varrho(\underline{r}) (x_2^2 + x_3^2)$$

$$J_{23} = \int d^3r \varrho(\underline{r}) (-x_2 x_3)$$

- $\underline{\underline{J}}$ hängt von der Wahl des Koordinatensystems ab
- $\underline{\underline{J}}$ ist eine Eigenschaft des starren Körpers, d.h. unabhängig von Rotationsrichtung und Rotationsachse.
- es gilt $J_{lk} = J_{kl}$, d. h. der Trägheitstensor ist symmetrisch
- $\underline{\underline{J}}$ heißt übrigens Tensor, weil er bestimmte Eigenschaften unter Drehtransformationen des Koordinatensystems hat.

9.7.3 Drehimpuls

Der Drehimpuls des starren Körpers ist:

$$\begin{aligned} \underline{L} &= \sum_i m_i \underline{r}_i \times \dot{\underline{r}}_i = \sum_i m_i \underline{r}_i \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_i) \\ &= \sum_i m_i (\underline{\omega} r_i^2 - \underline{r}_i (\underline{r}_i \cdot \underline{\omega})) \end{aligned}$$

$$\text{Eine Komponente: } (\underline{\omega} r^2 - \underline{r}(\underline{r} \cdot \underline{\omega}))_l = r^2 \omega_l - x_l \sum_k x_k \omega_k$$

$$\begin{aligned} &= \sum_k \underbrace{(r^2 \delta_{kl} - x_k x_l)}_{= J_{lk} \text{ wenn über alle } i \text{ summiert wird}} \omega_k \\ \Rightarrow (\underline{L})_l &= \sum_k J_{lk} \omega_k \text{ oder } \underline{L} = \underline{\bar{J}} \underline{\omega} \end{aligned}$$

Es gilt also nicht(!) etwa

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

was bedeutet, dass im Allgemeinen der Drehimpuls nicht parallel zur Drehachse ist. Dies ist eine vielleicht etwas überraschende Erkenntnis, die folgende Bedeutung hat:

- beim kräftefreien Körper (konstanter Drehimpuls) ist die Drehachse zeitlich nicht konstant. Dies nennt man Nutation, eine Bewegung, die im letzten Unterkapitel behandelt wird.
- bei fester Drehachse muss im Allgemeinen ein Drehmoment wirken. Dies nennt man Unwucht.

9.7.4 Hauptträgheitsachsen

Ohne Beweis:

Jede symmetrische Matrix kann durch Rotation des Koordinatensystems auf Diagonalform gebracht werden.

Dies bedeutet, dass für jeden starren Körper ein körperfestes Koordinatensystem existiert, in dem $\underline{\underline{J}}$ diagonal ist.

Definition 9.2. Die Achsen des Koordinatensystems, in dem der Trägheitstensor diagonal ist, heißen **Hauptträgheitsachsen**. Es gilt dann:

$$\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} J_{11} & 0 & 0 \\ 0 & J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J_{33} \end{pmatrix}$$

wobei die $J_{ii} = J_i$ die **Hauptträgheitsmomente** sind.

Bei Rotation um eine dieser 3 Achsen gilt dann

$$\underline{L} = J_i \underline{\omega}$$

d. h. \underline{L} und $\underline{\omega}$ sind dann parallel. Die Hauptträgheitsachsen sind stets Symmetrieachsen des Körpers und können oft geraten werden.

Beispiel Quader mit Kantenlängen a, b, c und homogener Massendichte ϱ :

$$\begin{aligned}
 J_{11} &= \int d^3r \varrho(y^2 + z^2) = \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz \varrho(y^2 + z^2) \\
 &= a\varrho \int dy \int dz (y^2 + z^2) = a\varrho \left[\frac{y^3}{3} z + \frac{z^3}{3} y \right]_{-b/2, -c/2}^{b/2, c/2} \\
 &= a\varrho \left[2 \frac{b^3}{8 \cdot 3} c + 2 \frac{c^3}{8 \cdot 3} b \right] = a\varrho \frac{1}{12} (b^3 c + c^3 b) \\
 &= \frac{M}{12} (b^2 + c^2)
 \end{aligned}$$

mit Gesamtmasse M . Für die anderen Diagonalelemente ergibt sich analog

$$J_{22} = \frac{M}{12} (a^2 + c^2), \quad J_{33} = \frac{M}{12} (a^2 + b^2)$$

Die Nebendiagonalelemente berechnen sich zu:

$$\begin{aligned}
 \text{z.B. } J_{12} &= \int d^3r \varrho(-xy) = c\varrho \int dx dy (-xy) \\
 &= -c\varrho \left[\frac{x^2 y^2}{4} \right]_{-b/2, -c/2}^{b/2, c/2} = 0
 \end{aligned}$$

9.7.5 Eulersche Gleichungen: Nutation des symmetrischen Kreisels

Im Folgenden diskutieren wir einen sogenannten **Kreisel**. Dies ist ein starrer Körper mit Drehung um einen raumfesten Punkt. Damit hat der Kreisel 3 Freiheitsgrade der Rotation.

Ausgangspunkt zur Herleitung der Bewegungsgleichungen ist der Drehimpulsatz im Inertialsystem:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$$

Diesen kann man umformulieren für das mitrotierende Bezugssystem, wobei die Koordinatenachsen die Hauptträgheitsachsen sein sollen. Dies führt (ohne Beweis) auf die **Eulersche Gleichung**:

$$J_1 \dot{\omega}_1 - (J_2 - J_3) \omega_2 \omega_3 = M_1 \quad (9.2)$$

$$J_2 \dot{\omega}_2 - (J_3 - J_1) \omega_3 \omega_1 = M_2 \quad (9.3)$$

$$J_3 \dot{\omega}_3 - (J_1 - J_2) \omega_1 \omega_2 = M_3 \quad (9.4)$$

Das sind 3 gekoppelte nicht-lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung für die Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}$ im Hauptachsensystem.

Beispiele im kräftefreien Fall, $\underline{M} = 0$:

1) $\underline{\omega}(t=0) = (\omega, 0, 0)$:

$$\dot{\omega}_1 = \frac{J_2 - J_3}{J_1} \omega_2 \omega_3 = 0$$

entsprechend für $\omega_2, \omega_3 \rightarrow \underline{\omega} = \text{const.}$ Eine Stabilitätsanalyse zeigt jedoch, dass die Rotation um die Achse mit dem mittleren Trägheitsmoment instabil ist.

2) $\underline{\omega}(t=0)$ beliebig aber symmetrischer Kreisel mit $J_1 = J_2 \neq J_3$

$$\Rightarrow J_3 \dot{\omega}_3 = 0 \rightarrow \omega_3 = \text{const}$$

$$J_2 \dot{\omega}_2 = (J_3 - J_1) \omega_3 \omega_1$$

$$J_1 \dot{\omega}_1 = (J_2 - J_3) \omega_2 \omega_3 = -(J_3 - J_1) \omega_2 \omega_3 \quad \text{weil } J_1 = J_2$$

$$\Rightarrow \dot{\omega}_2 = \Omega \omega_1 \quad \text{und} \quad \dot{\omega}_1 = -\Omega \omega_2$$

$$\text{mit: } \Omega = \frac{J_3 - J_1}{J_1} \omega_3$$

Bei den beiden letzten Gleichungen handelt es sich um Differentialgleichungen, die man mit einem Ansatz lösen kann:

$$\omega_1(t) \propto \cos(\Omega t)$$

$$\omega_2(t) \propto \sin(\Omega t)$$

Die $\omega_{1,2}$ Komponenten schwingen also was eine Rotation in der 1-2 Ebene beschreibt, mit:

$$\underline{\omega}(t) = (A \cos(\Omega t), A \sin(\Omega t), \omega_3)$$

$$\text{mit } |\underline{\omega}| = \sqrt{A^2 + \omega_3^2} = \text{const}$$

Diese Drehung der Rotationsachse heißt **Nutation**.

Bei äußeren Kräften (Drehmoment \underline{M}) kommt noch die Präzession dazu.

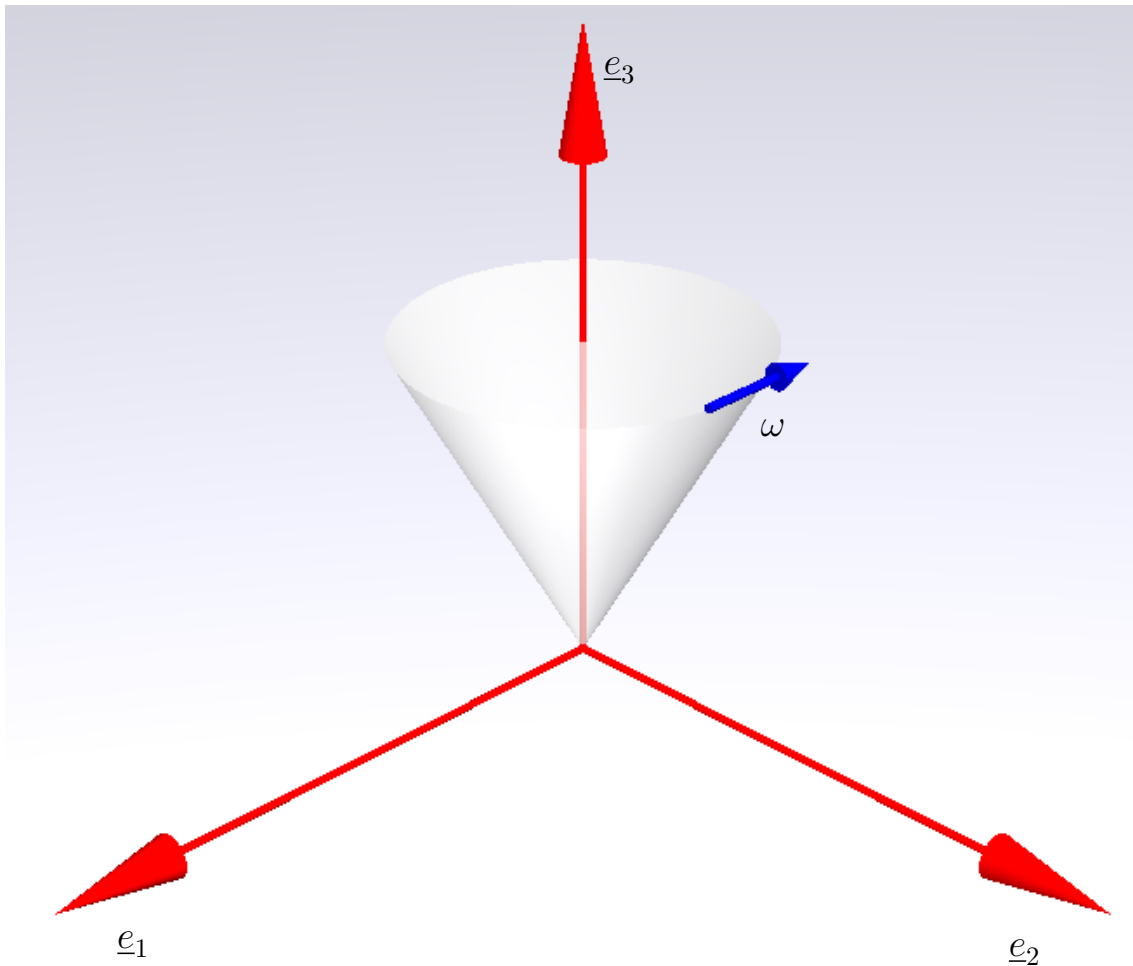


Abbildung 9.1: Dynamik eines Kreisels.

9.8 Experimente zur Dynamik starrer ausgedehnter Körper

9.8.1 Freie Achsen

9.8.2 Der kräftefreie symmetrische Kreisel

9.8.3 Präzession des symmetrischen Kreisels

9.8.4 Überlagerung von Nutation und Präzession