Rechnersysteme und -netze Wintersemester 2023/2024

Bastian Goldlücke, Gregor Diatzko, Elias Bleckmann, Oliver Leenders, Anna Puchkina, Tobias Retzlaff, Sarah Rothenhäusler

2. Übungsblatt - zu bearbeiten bis 6.11.2023

Aufgabe 1 Boolesche Algebra / Schaltalgebra

a) Was versteht man unter einer Booleschen Algebra, was unter einer Schaltalgebra? Wie viele Zustände gibt es in einer Booleschen Algebra, wie viele in einer Schaltalgebra? Wie können diese Zustände interpretiert werden?

b) Wofür stehen die Operatoren $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ in einer Schaltalgebra?

c) Vereinfachen Sie den Ausdruck $\neg(a \vee b) \vee b$ schrittweise zu $\neg a \vee b$ und geben Sie die Rechenschritte sowie die verwendeten Rechenregeln/Äquivalenzen an. Die Rechenregeln finden Sie auf der Vorlesungfolie „Boolesche Algebra: Definition".

d) Verwenden Sie eine Wahrheitstafel, um sich zu vergewissern, daß die folgende Regel gilt:

$$a \vee (\neg a \wedge b) = a \vee b.$$

e) Zeigen Sie durch schrittweises Anwenden der Rechenschritte und Rechenregeln aus der Vorlesung (Boolesche Algebra: Definition) und der Gleichung aus d), dass die folgende Äquivalenz gilt.

$$(\neg c \wedge d) \vee (d \wedge (a \vee \neg b)) \vee c = c \vee d.$$

Aufgabe 2 Boolesche Algebra / Schaltalgebra

a) Zeigen Sie, ausgehend von den in der Vorlesung behandelten DeMorganschen Gesetzen für zwei Boolesche Variablen, d.h., ausgehend von

$$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b \qquad \text{und} \qquad \neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b,$$

daß für n Boolesche Variablen a_1 bis a_n, $n \geq 2$, allgemein gilt:

$$\begin{aligned} \neg(a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n) &= \neg a_1 \vee \neg a_2 \vee \ldots \vee \neg a_n \qquad \text{und} \\ \neg(a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n) &= \neg a_1 \wedge \neg a_2 \wedge \ldots \wedge \neg a_n, \end{aligned}$$

oder kompakter geschrieben:

$$\neg\left(\bigwedge_{i=1}^{n} a_i\right) = \bigvee_{i=1}^{n} \neg a_i \qquad \text{und} \qquad \neg\left(\bigvee_{i=1}^{n} a_i\right) = \bigwedge_{i=1}^{n} \neg a_i.$$

b) Welche anderen Axiome/Gesetze kann man in analoger Weise verallgemeinern? Wie sehen die verallgemeinerten Gesetze/Regeln aus?

Aufgabe 3 Boolesche Algebra / Schaltalgebra

Zeigen Sie mit Hilfe der Gesetze/Axiome der Booleschen Algebra, daß folgende Terme äquivalent (gleichbedeutend) sind! Geben Sie für jeden Schritt das verwendete Gesetz/Axiom der Booleschen Algebra an!

Term 1: $(a \wedge \overline{c}) \vee b$

Term 2: $\overline{(\overline{a} \wedge \overline{b} \wedge \overline{c})} \wedge (a \vee b \vee \overline{c}) \wedge \overline{(c \wedge \overline{b})}$

Auf welche andere Weise könnte man zeigen, daß die beiden Terme äquivalent sind?

Aufgabe 4 Disjunktive und konjunktive Normalform

a) Was versteht man unter einer disjunktiven Normalform (*sum of products, SOP*), was unter einer konjunktiven Normalform (*product of sums, POS*)?

b) Wann ist die disjunktive, wann die konjunktive Normalform günstiger?

c) Gegeben sei die Boolesche Funktion

$$f(a, b, c) = (b \wedge \neg a) \vee (a \wedge b \wedge \neg c).$$

Geben Sie die zugehörige Wahrheitstafel an! Wählen Sie anschließend zwischen disjunktiver und konjunktiver Normalform aus, begründen Sie Ihre Wahl und geben Sie die Funktion in der gewählten Darstellung an!

d) Angenommen, Sie müßten nun die in Teilaufgabe c) gegebene Funktion allein durch die Operation „|“ (Sheffer-Strich) oder allein durch die Operation „↓“ (Peirce-Pfeil) darstellen, welche von beiden Möglichkeiten würden Sie wählen und warum?