

# pre-course lecture

Elias Gestrich

6. Oktober 2023

## 1. Day 1

Argumente/Begründungen/Beweise (Herz der Mathematik)

Beweise sind “immer wahr”

Beweise helfen beim verstehen

Beweise “zähmen die Unendlichkeit”

**Problem 1.1** Wie lange benötigt man zum Zersägen eines 7 m-langen Baumstamms in 1 m-Stücke, wenn jeder Schnitt eine halbe Minute dauert?

Lsg.: 3 min

Zwischenziel: 6 Schritte  $\rightarrow$  Mustererkennung  $n - 1$  Schnitte für  $n$  Teiler/Meter

**Proof 1.1** Jeder Schnitt erhöht die Anzahl der Stücke um eins.

Anfangs: 1 Stück, am Ende 7  $\Rightarrow$  man muss

$$7 - 1 = 6 \text{ Schnitte machen. usw.}$$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  natürliche Zahlen

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$  natürliche Zahlen mit der Null

### Problem 1.2

**Conjecture 1.1** Wenn zwei natürliche Zahlen gerade sind, dann ist auch ihre Summe gerade

Seien  $t_1, t_2 \in \mathbb{N}$

$$a = 2t_1$$

$$b = 2t_2$$

also gilt:

$$a + b = 2t_1 + 2t_2 = 2(t_1 + t_2) \implies \text{gerade Zahl}$$

**Problem 1.3** Mit wievielen Nullen endet 100!?

Primfaktorzerlegung:

20 durch 5 teilbare Zahlen

4 durch 5<sup>2</sup> teilbare Zahlen

$k$  Nullen am Ende einer natürlichen Zahl in Dezimalschreibweise: Zahl ist durch  $10^k = (2 \times 5)^k = 2^k \times 5^k$  teilbar.

5, 10, 15, ...

also bei

$$1 \times 5, 2 \times 5, 3 \times 5, \dots, 20 \times 5 \Rightarrow 20 \text{ Stück}$$

welche liefern 2 Fünfen

$$1 \times 5^2, 2 \times 5^2, 3 \times 5^2, 4 \times 5^2, \cancel{5 \times 5^2}$$

Anzahl der Nullen, mit denen  $100!$  enden, ist die größte natürliche Zahl  $k \in \mathbb{N}$ , für die

$$100! \text{ durch } 10^k \text{ teilbar ist.}$$

Weil  $10 = (2 \times 5)$ , ist das gleich der größten ganzen Zahl  $k$ , für die  $100!$  durch  $2^k \times 5^k$  teilbar ist,

$$\text{also durch } 5^k \text{ und } 2^k$$

Die 5 tritt als Faktor genau in den 20 Zahlen

$$5, 10, 15, \dots, 100,$$

und in den 4 Zahlen

$$25, 50, 75, 100$$

doppelt vor.

Somit folgt: die 5 tritt  $20 + 4 = 24$  mal als Faktor in  $100!$  auf.

Die 2 tritt als Faktor in 50 Zahlen auf:

$$2, 4, 6, 8, \dots, 100$$

(und einigen mehrfach)

$\Rightarrow$  Insgesamt endet  $100!$  mit 24 Nullen.

**Problem 1.4** Es sei  $n \in \mathbb{N}$ . Berechne die Summe der ersten  $n$  natürlichen Zahlen, also

$$\begin{array}{rcccccc} 1 & + 2 & + 3 & + \dots + n & & := S \\ + n & + n-1 & + n-2 & + \dots + 1 & & = S \\ \hline & = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) & & = S \\ = & & & n \times (n+1) & = S \end{array}$$

## 2. Tag 2

$\mathbb{P}$  = Menge aller Primzahlen

$\mathbb{P} = 2, 3, 5, 7, \dots$

Offene Fragen: Gibt es eine Formel für Primzahlen?

Fermat (1637):

**Conjecture 2.1**  $F(n) = 2^{2^n} + 1$  ist eine Primzahl für jedes  $n \in \mathbb{N}$

$$F(1) = 2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5$$

$$F(2) = 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17$$

$$F(3) = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$$

$$F(4) = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65537$$

100 Jahre später Euler:

651 teilt  $F(5)$ ,

also ist

$$F(5) = 4294967297$$

keine Primzahl.

### 3. Vorkurs

- mathematische Probleme formulieren
- Lösungen finden (Argumentieren) Beweisen

### 4. Mengen (Warm-up)

Skatspiel

Situation: Aus gemischtem Skatspiel werden zwei Karten gezogen. Sind es zwei Karten gleicher Farbe oder zwei Karten mit gleichem Wert, dann gewinnen wir.

Symbole: Kreuz, Pik, Herz, Karo

Werte: 7, 8, 9, 10, B, D, K, Ass

Definitionssymbol: “:=”

#### Example 4.1

11 := Bube

12 := Dame

13 := König

14 := Ass

$a$  := Kreuz

$b$  := Pik

$c$  := Herz

$d$  := Karo

Kartenmenge =  $\{a7, a8, \dots, a14, b7, b8, \dots, b14, c7, \dots, d14\}$

$\{\text{Kreuz}, 7\}$  = Karte Kreuz 7

$$\begin{aligned} \text{Kartenmenge} := & \{\{1, 7\}, \{2, 7\}, \{3, 7\}, \{4, 7\} \\ & \{1, 8\}, \{2, 8\}, \{3, 8\}, \{4, 8\}, \dots, \\ & \{1, 14\}, \{2, 14\}, \{3, 14\}, \{4, 14\}\} \end{aligned}$$

### 5. Mengen, Teilmengen, Mengenoperationen

**Definition 5.1** (naive Definition) Eine Ansammlung von (mathematischen) Objekten heißt **Menge**. Ein Mitglied dieser Ansammlung heißt **Element** der Menge.

Ist  $a$  ein Element der Menge  $A$ , so schreibt man  $a \in A$

Gehört  $a$  nicht zur Menge  $A$ , so schreibt man  $a \notin A$

Mit  $|A|$  bezeichnet man die Anzahl der Elemente in  $A$

#### Example 5.1

$$|\mathbb{N}| = \infty$$

Zwei Arten, Mengen zu beschreiben:

- aufzählende Mengenschreibweise  $A = \{2, 4, 6, \dots\}$ ,  $B = \{2, 8, 9\}$
- beschreibende Mengenschreibweise  $A = \{x \in \mathbb{N} | 3 \leq x \leq 8\}$ ,  $[a, b] := \{z \in \mathbb{R} | a \leq z \leq b\}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$

**Exercise 5.1**

$$M = \text{Menge aller ganzzahligen Vielfachen von } 42 \\ = \{x \in \mathbb{Z} : 42|x\} = \{42 \times x : x \in \mathbb{Z}\}$$

**Definition 5.2** Es sei  $A$  eine MengeEine Menge  $B$  heißt Teilmenge von  $A$ , in Zeichen:  $B \subseteq A$ , wenn jedes Element von  $B$  auch ein Element von  $A$  ist**Definition 5.3** Es seien  $A, B$  Teilmengen einer Menge  $M$ Schnittmenge von  $A$  und  $B$  ist  $A \cap B := \{x \in M : x \in A \wedge x \in B\}$ Vereinigungsmenge von  $A$  und  $B$  ist  $A \cup B := \{x \in M : x \in A \vee x \in B\}$ Differenz von  $A$  und  $B$  ist  $A \setminus B := \{x \in M : x \in A \wedge x \notin B\}$ Komplement von  $A$  in  $M$  ist die Menge  $A^c := \{x \in M : x \notin A\} = M \setminus A$ genau dann wenn  $A \subseteq B$  und  $B \subseteq A$ , dann  $A = B$ 

Jede beliebige Menge  $A$  hat die folgenden Teilmengen  $\emptyset, A$  d.h. es gilt  $\emptyset \subseteq A, A \subseteq A$   
 $\{\_\} \notin \{\_, \_\}$   
 $\_ \in \{\square, \circ, \triangle\}$  (bzw.  $\_ \in \{\_, \_, \_\}$ )  
 $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\} = \{2, 1, 3\} = \dots$

**Exercise 5.2** Gilt  $\{1, 2, 1, 1\} = \{1, 2\}$ ?

ja

**Exercise 5.3** Falls  $\{a\} = \{b\}$ , dann folgt  $a = b$ Falls  $\{a\} = \{a, b\}$ , dann folgt  $a = b$ 

$\{1, 2\}$  hat Teilmengen  $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$   
 Eine Menge mit  $n$  Elementen hat  $2^n$  Teilmengen.

**Definition 5.4** Potenzmenge einer MengeSei  $A$  eine Menge, dann heißt die Menge

$$\mathcal{P}(A)$$

aller Teilmengen von  $A$  die Potenzmenge von  $A$ 

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} \quad \mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, 1\}$$

**Definition 5.5** (kartesisches Produkt von zwei Mengen  $A$  und  $B$ )Das kartesische Produkt von zwei Mengen  $A$  und  $B$  ist definiert durch

$$A \times B := \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}$$

In  $A \times B$  sind zwei Elemente  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  genau dann gleich, wenn  $x_1 = x_2$  und  $y_1 = y_2$ 

$$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$\begin{aligned} (1, 2) &\in \mathbb{R}^2 & (1, 2) &\neq (2, 1) \\ (2, 1) &\in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

## 6. Prof. Junk

Auf einem Baum saß ein Rabe mit einem Käse im Schnabel, als ein Fuchs vorbeikommt.

Sei  $B \in \text{Bäume}$  und  $R \in \text{Raben}$  sitze auf  $B$  mit  $K \in \text{Käsestückchen}$  im Schnabel, als  $F \in \text{Füchse}$  vorbeikommt.

Er überlegte wie er an den Käse kommt. Da sagte er zu dem Raben, ...

$F$  überlegte wie  $F$  an  $K$  kommt. Da sagte  $F$  zu  $R$ , ... allgemeine mathematische Situationen bestehen aus

- Eine Liste von Namen für mathematische Objekte
- Eine Liste von geltenden Aussagen über diese Objekte

Was kann man damit tun?

- Namen kann man austauschen ohne Bedeutungsänderung
- Situationen können eintreten; konkrete Situationen können auf allgemeine Situationen passen

**Example 6.1**  $A := \{x \in \mathbb{N} : 3 \leq x \leq 8\}$

Schreibweise beschreib eine Menge, indem sie zwei Zugehörigkeitsregeln kodiert

- besteht aus zwei allgemeinen Situationen:
  - Voraussetzung
  - Folgerung

Regel 1: Sei  $x$  ein Objekt

Es gelte  $x \in \mathbb{N}; 3 \leq x \leq 8 \rightarrow$  Dann gilt  $x \in A$

Regel 2: Sei  $x$  ein Objekt

Es gelte  $x \in A \rightarrow$  Dann gilt  $x \in \mathbb{N}; 3 \leq x \leq 8$

Gilt:  $9 \in A: \quad x \leftarrow 9 \quad 9 \in \mathbb{N}, 9 \geq 3, 9 \leq 8$

Voraussetzung tritt nicht ein! Gilt:  $9 \notin A \quad 9 \in \mathbb{N}, 9 \geq 3, 9 \leq 8 \rightarrow$  Widerspruch  
 $9 \not\leq 8 \rightarrow$  Gegenteil von Annahme stimmt

## 7. Aussagen (Logik)

Unsere mathematische Ergebnisse formulieren wir als (mathematische) Aussagen.

Als Aussage bezeichnen wir einen Ausdruck, der entweder wahr oder falsch sein kann.

$\rightsquigarrow$  Wahrheitswert der Aussage: wahr, w, 1; falsch, f, 0

**Example 7.1**

$A := "1 + 2 = 3"$

$B := "5 \text{ ist eine negative Zahl}"$

$C := "Jede \text{ gerade Zahl } n > 2 \text{ kann als Summe zweier Primzahlen geschrieben werden.}"$

## 8. Aussageform

**Example 8.1** Sei

$A(n) := n \text{ ist gerade}$

Dann ist

$A(1)$  eine (falsche) Aussage

$A(2)$  eine (wahre) Aussage

Eine Aussageform ist eine Äußerung, die eine (oder mehrere) Variablen enthält und zu einer Aussage wird, wenn man zulässige Objekte für diese Variablen einsetzt.  
Es seien  $A$  und  $B$  Aussagen.

Die Konjunktion (Und-Aussage) von  $A$  und  $B$  ist die Aussage

$$A \wedge B \text{ "A und B"}$$

die genau dann wahr ist, wenn  $A$  und  $B$  gleichzeitig wahr sind.

$$A := \text{"24 ist gerade"}$$

$$B := \text{"24 ist durch 3 teilbar"}$$

$$C := \text{"24 ist durch 5 teilbar"}$$

$$A \wedge B = 1 \quad A \wedge C = 0$$

Die Disjunktion (Oder-Aussage) von  $A$  und  $B$  ist Aussage

$$A \vee B \text{ "A oder B"}$$

die genau dann wahr ist, wenn mind. eine der beiden Aussagen  $A$  und  $B$  wahr ist.

Die Negation von  $A$  ist die Aussage

$$\neg A \text{ "nicht A"}$$

die genau dann wahr ist, wenn  $A$  falsch ist.

Implikation (Folgerung) "Wenn  $A$ , dann  $B$ " ist die Aussage

$$A \implies B \text{ "aus A folgt B", A impliziert B"}$$

die genau dann falsch ist, wenn  $A$  wahr ist und  $B$  falsch ist und sonst ist sie immer wahr.

Äquivalenz "A genau dann, wenn B" ist die Aussage

$$A \iff B$$

die genau dann wahr ist, wenn  $A$  und  $B$  beide wahr sind oder  $A$  und  $B$  beide falsch sind.

Eine zusammengesetzte Aussage heißt Tautologie, falls sie immer wahr ist, unabhängig davon, welche Wahrheitswerte die verknüpften Einzelaussagen haben.

Ist  $A(n)$  eine Aussageform mit Wertebereich  $M$ , so können wir folgende Aussagen betrachten:

- für alle  $n \in M$  gilt:  $A(n)$   
in Zeichen:  $\forall n \in M : A(n)$  z.B.  $\forall n \in \mathbb{N} : 2 \mid n$   
→ Allaussage ( $\forall \leftarrow$  Allquantor)
- Es gibt ein  $n \in M$ , für das  $A(n)$  gilt  
in Zeichen  $\exists n \in M : A(n)$   
 $\exists! n \in M : A(n)$  "es gibt genau ein  $n \in M, \dots$ "
- Eine Aussage der Form

$$\forall n \in M : A(n)$$

ist immer wahr, wenn  $M = \{\}$

- Reihenfolge der Quantoren spielt eine Rolle

$$A : \forall n \in \mathbb{N} : (\exists m \in \mathbb{N} : m > n) \text{ (wahr)}$$

$$B : \exists m \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : m > n \text{ (falsch)}$$

## 9. Negation von Aussagen

$\neg(\exists n \in M : A(n)) \iff \forall n \in M : \neg A(n)$  ist eine Tautologie d.h. die Negation der Aussage

$$\exists n \in M : A(n)$$

ist logisch Äquivalent zu der Aussage

$$\forall n \in M : \neg A(n)$$

$\neg(\forall n \in M : A(n)) \iff \exists n \in M : \neg A(n)$  ist eine Tautologie d.h. die Negation der Aussage

$$\forall n \in M : A(n)$$

ist logisch Äquivalent zu der Aussage

$$\exists n \in M : \neg A(n)$$

## 10. —

### Theorem 10.1

- 1) Äquivalenzprinzip  
Ist  $A$  wahr und ist  $A \iff B$ , dann ist auch  $B$  wahr
- 2) Ableitungsregel  
 $(A \wedge (A \implies B)) \implies B$  ist eine Tautologie
- 3) Syllogismusregel  
 $((A \implies B) \wedge (B \implies C)) \implies A \implies C$  ist eine Tautologie
- 4) Kontraposition  
 $(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A)$  ist eine Tautologie
- 5) Ringschluss

$$\begin{aligned} & ((A \iff B) \wedge (B \iff C) \wedge (A \iff C)) \\ & \iff \\ & ((A \iff B) \wedge (B \iff C) \wedge (A \iff C)) \end{aligned}$$

## 11. Beweise und Beweisformen

Ein Beweis ist eine logisch vollständige Begründung einer Aussage. Oft möchten wir Aussagen vom Typ “Wenn  $A$ , dann  $B$ ” zeigen.

Aussagen lassen sich meist in folgende Form bringen

- Voraussetzung z.B. Sei  $a \in \mathbb{N}$ .
- Behauptung dann ist  $2 = \text{gerade}$

### 11.1. Direkter Beweis

Statt  $A \implies B$  zu zeigen, zeigen wir  $A \implies A_1 \implies A_2 \implies \dots \implies B$

Situation:  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ ,  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ , Rechenregeln:  $+$ ,  $-$  bekannt

**Definition 11.1.1** Eine natürliche Zahl  $b \in \mathbb{N}$  teilt eine natürliche Zahl  $a \in \mathbb{N}$  (in Zeichen  $b \mid a$ ), wenn es eine natürliche Zahl  $c \in \mathbb{N}$  gibt, mit  $a = b \times c$

**Definition 11.1.2** Eine Zahl  $a \in \mathbb{N}$  heißt gerade, falls  $2 \mid a$  gilt, d.h. falls es ein  $c \in \mathbb{N}$  mit  $a = 2 \times c$  gibt.

Eine Zahl  $q \in \mathbb{N}$  heißt ungerade, falls  $q$  nicht gerade ist.

**Conjecture 11.1.1** 18 ist gerade.

**Proof 11.1.1**  $18 \in \mathbb{N}$ , also können wir obige Definition 11.1.2 anwenden.

Setze  $c := 9$

Dann gilt  $c \in \mathbb{N}$  und  $18 = 2 \times 9$

Also gilt  $2 \mid 18$ . Also ist 18 gerade,  $\square$

## 12. Apendix B von Junk/Traude

### Definition 12.1

**B.10** Definitionen

Nachweistext: Definition  $\star$  wird **Blubb** genannt, falls  $(\dots)$  gilt.

Schreibe: Zu zeigen  $(\dots)$

Benutzungsbedingung: um zu benutzen, dass ein Objekt nach Definition  $\star$  Blubb genannt wird, falls  $(\dots)$  gilt.

Schreibe: Nach Definition von “Blubb”, folgt  $(\dots)$

**B.7** Existenzaussagen

Nachweistext: zu beweisen:

$$\exists x \in X : (\dots)$$

Schreibe:

Setze  $x := \_\_\_$ .

zu zeigen:  $x \in X$  mit  $(\dots)$

Benutzungstext: Es gilt

### Example 12.1

Vor. Sei  $a \in \mathbb{N}$

Bew. Dann ist  $2 \times a$  gerade

Es sei  $a \in \mathbb{N}$ . Es gilt  $2 \times a \in \mathbb{N}$ . Nach Definition 11.1.2 zu geraden Zahlen ist zu zeigen:

$$2 \mid a$$

d.h. zu zeigen:  $\exists c \in \mathbb{N} : 2 \times a = 2 \times c$

Setzte  $c := a$

Dann gilt  $c \in \mathbb{N}$  und

$$2 \times a = 2 \times c, \square$$