

---

# Analysis I

---

## Contents

<b>I. Irgendwas</b>	<b>6</b>
<b>1. Natürliche Zahlen und elemntare Begriffe</b>	<b>7</b>
1.1. Zahlbereiche . . . . .	7
1.2. Vollständige Induktion . . . . .	8
1.2.1. Characterisierung der natürlichen Zahlen . . . . .	10
<b>2. Körper</b>	<b>13</b>
2.1. Was sind Strukturen? . . . . .	13
2.2. Körper . . . . .	13
2.3. Angeordnete Körper . . . . .	14
2.4. Der Betrag . . . . .	15
2.5. Das Archimedische Axiom . . . . .	16
2.6. Supremum, Infimum und die Supremumseigenschaft . . . . .	16
<b>3. Folgen und Konvergenz</b>	<b>18</b>
3.1. Reeel Folgen und Konvergenz . . . . .	18
3.2. Rechenregeln für Grenzwerte . . . . .	19
3.3. Stabilität der ' $\leq$ '-Relation unter Limesbildung . . . . .	21
3.4. Monotone Konvergenz, $e$ und Wurzeln . . . . .	21
3.5. Einige Grenzwerte - alt und neu . . . . .	24
<b>4. Vollständigkeit</b>	<b>26</b>
4.1. ??? . . . . .	26
4.2. Teilfolgen undn der Satz von Bolzano-Weierstraß . . . . .	27
4.3. Charakterisierung der Vollständigkeit . . . . .	28
<b>5. Reihen und deren Konvergenz</b>	<b>31</b>
5.1. Reihen, Konvergenz und absolute Konvergenz . . . . .	31
5.2. Konvergenzkriterien . . . . .	33
5.3. Umordnung von Reihen . . . . .	41
<b>II. Funktionen und Stetigkeit</b>	<b>43</b>
<b>6. Elementare topologische Konzepte in <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>44</b>
6.1. Offene und abgeschlossene Mengen . . . . .	44
6.2. Kompaktheit . . . . .	46
6.3. Dichtheit, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ . . . . .	47
<b>7. Funktionen und Stetigkeit</b>	<b>49</b>
7.1. Funktinen . . . . .	49

---

7.2. Stetigkeit . . . . .	49
7.3. Charakterisierung der Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen . . . . .	52
7.4. Sätze über stetige Funktionen . . . . .	53
<b>8. Funktionenfolgen und deren Konvergenz</b>	<b>55</b>
8.1. Funktionenfolgen und deren Konvergenz . . . . .	55
8.2. Normierte Vektorräume stetiger Funktionen . . . . .	56
<b>9. Potenzreihen</b>	<b>59</b>

## Organisation, Tipps & Tricks und Literaturhinweise

Mathe...

- ist intellektuell extrem herausfordernd
- kommt mit einem hohen Arbeitsaufwand
- oft falschen Erwartungen und
- ist wie Ausdauersport

aber dafür ist Mathe eines der schönsten Studien c:

Generelles Zeitmanagement:

- Vor- und Nachbereitung wahrscheinlich mehr als die gesetzten  $14 \times 3 \text{ h} = 4.2 \cdot 10^1 \text{ h}$
- Klausurvorbereitung auch mehr als  $3.9 \cdot 10^1 \text{ h}$
- Pro Woche  $2 \times 1.5 \text{ h}$ ,  $2 \times 2 \text{ h}$ ,  $1.5 \text{ h}$ ,  $1.0 \cdot 10^1 \text{ h}$
- Es gibt immer eine Aufgabe die man nicht lösen kann
- In die Vorlesungen kommen

Vorlesung:

- normal nicht alles zu verstehen
- Notizen was man nicht versteht
- Punkte konzise angehen
- **Mathe muss sich gedanklich setzen** - genügend Zeit zu verarbeiten

Übungen:

- zeitintensiv
- Ergebnisse vernünftig aufschreiben
- Weg zu einer korrekter Lösung ist sehr langwierig
- **nicht 10 Blätter Papier ab, von denen 9.5 inkonklusiv sind**
- also schön Aufschreiben

Wenn wir einen Satz gezeigt bekommen, dann bekommen wir nicht die gescheiterten Jahrelangen Versuche zur Schau, sondern nur die Ausgearbeitete Lösung → also bei uns auch langer weg, aber Aufschreiben nur klein

## Übungszettel:

- 50% muss richtig sein
- bis Freitag 10:00 Uhr
- in F4
- diese Woche nicht so umfangreich, weil weniger Zeit
- auf ILIAS Terminfindung Abstimmung
- Donnerstag Einteilung in Tutorien
- Blätter tackern :c
- alle zwei Wochen Beweismechanik Aufgaben, nur digital nicht in Papier (ist dann die letzte Aufgabe)

## Literaturempfehlung:

- Otto Forster: Analysis 1
  - kurz und knapp - aber konzise, und das hilft
  - ähnliche Struktur wie Vorlesung
  - weig motivation und wenige Querverbindungen
- Königsberger: Analysis 1
  - kurz - aber konzise
  - alle themen der Vorlesung, andere Struktur
  - mehr motivation und Querverbindungen
- Klaus Fritsche: Grundkurs Analysis 1
  - ausführlich
- Daniel Grieser: Analysis I
  - Ausführlich, aber mit Fokus auf das Wesentliche
  - alle Themen der Volesung enthalten, ähnliche Struktur
  - bunt??
- Harro Huser: Lehrbuch der Analysis Teil 1

- 
- extrem ausführlich, dick, an einigen Stellen sehr extensiv
  - alle und mehr Themen als Vorlesung
  - Querverbindungen
  - Walter Rudin: Analysis
    - sehr knapp und elegant
    - klassiker
    - alle Themen der Vorlesung, leicht andere Struktur
    - empfehlenswertes Buch fortgeschrittene Leser\*innen
    - nicht für Anfänger\*innen
  - Herber amann, Joachim Escher: Analysis I
    - strikt logischer Aufbau, damit teils länglich. Großes Bild
    - alle Themen, andere Struktur
    - auch nicht für Anfänger\*innen
  - Terence Tao: Analysis (englisch, aber gut)
  - Rober Denk, Reinhard Racke: Kompendium der Analysis
    - kurz und knapp, teils wie Nachschlagewerk
    - alle Themen
  - Florian Modler, Martin Kreh: Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1
    - kurz und knapp, teils wie Nachschlagewerk
    - von Studierenden für Studierende
    - aber enthält ein paar Fehler

# Part I.

## Irgendwas

# 1 Natürliche Zahlen und elemntare Begriffe

## 1.1 Zahlbereiche

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\mathbb{R} := \{ \text{reelle Zahlen} \}$$

Wir besprechen gar nicht was eine Menge ist, das ist zu philosophisch  
Es ist schwierig Mengen zu Definieren, man kommt schnell auf logische Widersprüche

- Notation: für  $x$  schreiben wir für eine Eigenschaft  $A$  “ $A(x)$ ”, falls  $x$   $A$  erfüllt.

→ Menge aller Objekte  $x$  mit  $A(x)$

$$\{x : A(x)\}$$

→ gibt es kein  $x$  mit  $A(x)$ , so nennen wir die Menge leer, “ $\emptyset$ ”

- $\exists \hat{=}$  Existenzquantor, “es existiert”
- $A, B$ , Eig.,  $M := \{x : x \text{ erf. } A\}$   
 $N := \{x : \text{erf. } B\}$   
 $M \subset N$ , falls  $\forall x \in M : x \in N$
- $M = N$ , falls  $M \subset N \vee N \subset M$
- “Echte Teilmenge”:  $M \subsetneq N$ , falls  $M \subset N, N \neq M$ .

### Example 1.1.1 (gerade Zahlen)

$$n \in \mathbb{N}_0 \text{ gerade} : \iff (\exists k \in \mathbb{N}_0 : n = 2k)$$

$$M := \{n \in \mathbb{N}_0 : \exists k \in \mathbb{N}_0 : n = 2k\} \tag{1}$$

$$= \{2k : k \in \mathbb{N}_0\} \tag{2}$$

### Example 1.1 $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$

Zu  $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} : \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ . Widerspruchsbeweis: Ang.,  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ , so  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ , mit  $p \in \mathbb{N}_0, q \in \mathbb{N}$ .  
 $(\exists p, q \text{ teilerfremd (d.h. Bruch ist vollständig gekürzt)})$ . Also  $p^2 = 2q^2$   
 $\implies p$  ist gerade. Also  $p = 2l$  mit  $l \in \mathbb{N}_0$ .  
 $\implies 4l^2 = p^2 = 2q^2 \implies 2l^2 = q^2 \implies q$  gerade.  
 $\implies p, q$  gerade.  $\implies p, q$  nicht teilerfremd. ■

## 1.2 Vollständige Induktion

- Ziel: Beweis von Aussagen für alle  $n \in \mathbb{N}_0$

**Dominoprinzip:** Wenn alle Steine umfallen sollen,

- müssen wir den 1. Stein umwerfen,
- muss stets der  $n$ -te Stein den  $(n+1)$ -ten umwerfen.

**Prinzip (vollst. Ind.)** Wollen wir eine Aussage  $A(n) \forall n \in \mathbb{N}$  zeigen; so zeigen wir

- (i)  $A(1)$  gilt (Induktionsanfang)
- (ii) Aus  $A(n)$  für  $n \in \mathbb{N}$  stets  $A(n+1)$  folgt. (Induktionsschritt)

### Definition 1.2 Summen

Für  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  definieren wir

$$\sum_{k=1}^n x_k := x_1 + \dots + x_n$$

### Example 1.3 Geometrische Summe

$\forall n \in \mathbb{N} :$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^n x^k}_{x^0 + x^1 + \dots + x^n} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad (3)$$

**I.A.**  $n = 1$

$$\sum_{k=0}^1 x^k = x^0 + x^1 = 1 + x = \frac{(1-x)(1+x)}{1-x} = \frac{1-x^2}{1-x}$$

**I.S.**

$$n \rightarrow n+1$$

Angenommen, (equation) gilt für ein  $n \in \mathbb{N}$ . z.z. (equation) gilt für  $n+1$

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \left( \sum_{k=0}^n x^k \right) + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1}$$

...



**Example 1.4** Für welche  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $n^2 < 2^n$ ?

- $n = 1 \rightarrow 1 < 2$
- $n = 2 \rightarrow n^2 = 4 \not< 4 = 2^2$
- $n = 3 \rightarrow n^2 = 9 \not< 2^3$
- $n = 4 \rightarrow n^2 = 16 \not< 16 = 2^4$
- $n = 5 \rightarrow n^2 = 25 < 32 = 2^5$

Wir versuchen die Aussage  $\forall n \geq 5$  zu zeigen.

**I.A.:**  $n = 5 : n^2 = 25 < 32 = 2^5$

**I.S.:** Ang., Aussage gilt für  $n \geq 5$ . Wir müssen zeigen:

$$(n+1)^2 < 2^{n+1}$$

$$(n+1)^2 = \underbrace{n^2}_{< 2^n} + 2n + 1 < 2^n + 2n + 1 \stackrel{?}{<} 2^{n+1} \text{ Angenommen, es gilt}$$

$$\forall n \geq 5 : 2n + 1 < 2^n \quad (4)$$

Dann:  $(n+1)^2 < \dots < 2^n + 2n + 1 = 2 * 2^n = 2^{n+1}$

- Wir zeigen (4) wiederum mit voll. Ind.

**I.A.:**  $n = 5 : 2n + 1 = 11 < 32 = 2^5$

**I.S.:** Ang., (4) gilt für  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:  $2(n+1) + 1 = 2n + 3 = (2n + 1) + 2 < 2^n + 2 < 2^n + 2^n = 2 * 2^n = 2^{n+1}$ .

Damit folgt (4 und damit die eigentliche Aussage ■

**Definition 1.5**

für  $n \in \mathbb{N}_0$  definieren wir die *Fakultät* via  $n! := n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$ , falls  $n \geq 1$ , und  $0! := 1$ . Für  $k \in \{0, \dots, n\}$  definieren wir den *Binomialkoeffizienten*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

**Lemma 1.6**

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $k \in \{1, \dots, n\}$ :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

**Proof**

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n! \binom{n-k+1}{k}}{k!(n-k)!(n-k+1)} + \frac{n! \binom{k}{k-1}}{(k-1)!(n-(k-1)k)!(k)} \\ &= \frac{n!n + n!}{k!(n-k+1)!} = \frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!} \end{aligned} \quad \blacksquare$$

**Example 1.7 (Binomische Formel)**

Für  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}_0$ :

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Sei also  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**I.A.:**  $n = 0$ .  $(x + y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 y^0$

**I.S.:** Gelte die Aussage für  $n \in \mathbb{N}_0$

$$(x + y)^{n+1} = (x + y)(x + y)^n = (x + y) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad (5)$$

$$= x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + y \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad (6)$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \quad (7)$$

Indexverschiebung:  $l = k + 1$ .  $l \in \{1, \dots, n + 1\}$

$$\begin{aligned} (7) &= \underbrace{\sum_{l=1}^n \binom{n}{l-1} x^l y^{n+1-l}}_{\text{Hier Indexverschiebung}} + \underbrace{\sum_{l=0}^n \binom{n}{l} x^l y^{n+1-l}}_{\text{Hier nennen wir einfach } k = l} \\ &= \binom{n}{n} x^{n+1} y^0 + \left( \sum_{k=0}^n \left( \binom{n}{l-1} + \binom{n}{l} \right) x^l y^{n+1-l} \right) + \binom{n}{0} x^0 y^{n+1} \\ &= \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} y^0 + \left( \sum_{l=1}^n \binom{n+1}{l} x^l y^{(n+1)-l} \right) + \binom{n+1}{0} x^0 y^{n+1} \\ &= \sum_{l=0}^{n+1} \binom{n+1}{l} x^l y^{(n+1)-l} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**1.2.1. Charakterisierung der natürlichen Zahlen****Definition 1.2.1**

Eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}$  heißt induktiv, falls

(i)  $1 \in M$

(ii)  $\forall x \in M : x + 1 \in M$

**Example 1.2.2**

- (a)  $\mathbb{N}$  sind ind. Menge.
- (b)  $A := \{2n : n \in \mathbb{N}_0\}$  nicht ind. Menge, da (i)  $1 \notin A$ , (ii)  $2n + 1$  ist immer ungerade
- (c)  $B := \{2n + 1 : n \in \mathbb{N}_0\}$  nicht ind.: (i), aber  $2n + 1 + 1 = 2(n + 1)$
- (d)  $\mathbb{Q}^+ := \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$  ist ind. Teilmenge

- Sei  $(A_i)_{i \in I}$  mit  $I$  Indexmenge eine Familie von Mengen. setze

$$\bigcap_{i \in I} := \{x : (\forall i \in I : x \in A_i)\} \quad \text{Schnitt}$$

$$\bigcup_{i \in I} := \{x : (\exists i \in I : x \in A_i)\} \quad \text{Vereinigung}$$

**Proposition 1.2.3**

Für eine Menge  $M \subset \mathbb{R}$  sind äquivalent

- (i)  $M = \mathbb{N}$
- (ii) Ist  $N \subset \mathbb{R}$  induktiv, so  $M \subset N$
- (iii)

$$M = \bigcap_{N \subset \mathbb{R}} N \text{ induktiv}$$

$$(i) \iff (ii) \iff (iii)$$

**Proof**

‘(i)  $\implies$  (ii)’: Sei  $N \subset \mathbb{R}$  beliebige ind. Teilmengen von  $\mathbb{R}$ . Zu zeigen:  $M \stackrel{(i)}{=} \mathbb{N} \subset N$   
 Aber  $1 \in \mathbb{N}$ , und  $1 \in N$  (da  $N$  ind. ), Da  $N$  ind. ist, ist mit jeder nat.  $x \in \mathbb{N}$  also auch  $x \in N$ . Damit  $x+1 \in \mathbb{N}$   $\mathbb{N} \subset N$ .

‘(ii)  $\implies$  (iii)’ Wir zeigen:

$$\bigcap_{N \text{ ind. Menge}} N$$

ist ind. Menge

$$\stackrel{(ii)}{\implies} M \stackrel{(ii)}{\subset} N \subset M. \text{ Also}$$

$$M = \bigcap_{N \text{ ind.}} N.$$

$$\bigcap_{N \text{ ind.}} N \text{ induktiv:}$$

(i)

$$(\forall N \text{ ind.: } 1 \in N) \implies 1 \in \bigcap_{N \text{ ind.}} N$$

(ii)

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \in \bigcap_{N \text{ ind.}} N \left( \implies x \in \bigcap_{N \text{ ind.}} N \right) \stackrel{\text{DEF.}}{\implies} \forall N \text{ ind. : } x+1 \in N \implies x+1 \in \bigcap_{N \text{ ind.}}$$

‘(iii)  $\implies$  (i)’ Noch zu zeigen (blöd glaube ich oder ÜA, wir hatten auf jeden Fall keine Zeit in der Vorlesung) ■

## 2 Körper

### 2.1 Was sind Strukturen?

### 2.2 Körper

#### Definition 2.2.1 Körper

in script of Prof. and on paper

#### Example 2.2.2

in script of Prof. and on paper

#### Example 2.2.3

in script of Prof. and on paper

#### Lemma 2.2.4

in script of Prof. and on paper

#### Lemma 2.2.5

in script of Prof. and on paper

$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	
$\uparrow$	$\uparrow$	Kontinuumshypothese
abzählbar	nicht abzählbar	

#### Definition 2.1

In der Situation von definition 2.2.1 sei  $n \in \mathbb{N}$ , sowie  $x_1, \dots, x_n \in K$ . Wir definieren rekursiv  $x_1 + \dots + x_n := (x_1 + \dots + x_{n-1}) + x_n, x_1 \cdot \dots \cdot x_n := (x_1 \cdot \dots \cdot x_{n-1}) \cdot x_n$

#### Definition 2.2

In der Situation von Definition 2.2.1 sei  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $x \in K$ . Wir definieren

$$x^0 := 1_K \text{ und } x^n := (x^{n-1} \cdot x, n \in \mathbb{N}$$

Ist  $x \in K \setminus \{0\}$ , so sei für  $n \in \mathbb{N} : x^{-n} := (x^{-1})^n$ .

#### Lemma 2.3

Für alle  $x, y \in K, m, n \in \mathbb{N}_0$ :

- i)  $x^n \cdot x^m = x^{n+m},$
- ii)  $(x^n)^m = x^{n \cdot m},$
- iii)  $x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$

Ist zudem  $x, y \neq 0_K$ , so gelten diese Identitäten auch für  $n, m \in \mathbb{Z}$

**Proof i**

Fixiere  $n \in \mathbb{N}_0$ , nun Induktion nach  $m$ .

$$\text{I.A. } m = 0. \quad x^n \cdot x^0 \stackrel{\text{Def.}}{=} x^n \cdot 1_K \stackrel{(\text{M2})}{=} 1_K \cdot x^n \stackrel{(\text{M3})}{=} x^n = x^{n+0}$$

**I.S.** Gelte die Aussage für ein  $m \in \mathbb{N}_0$ . Zeige für  $m \curvearrowright m+1$

$$x^n \cdot x^{m+1} \stackrel{\text{Def.}}{=} x^n (x^m) \cdot x \stackrel{(\text{M1})}{=} (x^n \cdot x^m) \cdot x \stackrel{\text{IV}}{=} x^{n+m} \cdot x \stackrel{\text{Def.}}{=} x^{n+m+1} \quad \blacksquare$$

**2.3 Angeordnete Körper**

- Ziel Vergleich von Elementen hinsichtlich “Größe”

**Definition 2.3.1**

Eine **Relation** auf einer Menge  $M$  ist eine Teilmenge  $R \subset M \times M$ . Ist  $(x, y) \in R$ , so schreiben wir auch  $xRy$  oder  $R(x, y)$  und sagen, dass  $x$  und  $y$  über  $R$  in Relation stehen.

**Example 2.3.2**

$M =$  Studierende im Hörsaal,  
 $(x, y) \in M \times M : xRy : \iff x$  kennt den Namen von  $y$

- **$R$  reflexiv?** (d.h.  $\forall x \in M : xRy$ )      Ja
- **$R$  symmetrisch?** ( d.h.  $\forall x, y \in M : xRy \iff yRx$ )      Nein
- **$R$  transitiv?** ( d.h.  $\forall x, y, z \in M : xRy \wedge yRx \implies xRz$ )      **Nein**

**Definition 2.3.3**

Sei  $R$  eine Relation auf einem Körper  $K$ .  $R$  heißt **Ordnung** auf  $K$ , falls gilt

- Trichotomie:**  $\forall x \in K : \text{Entweder } 0_K Rx, xR0_K \text{ oder } x = 0_K$
- Abgeschlossenheit bezüglich Addition**  $\forall x, y \in K : 0_K Rx, 0_K Ry \implies 0_K R(x + y)$
- Abgeschlossenheit bezüglich Multiplikation**  $\forall x, y \in K : 0_K Rx, 0_K Ry \implies 0_K R(x \cdot y)$

Das Tupel  $(K, R)$  heißt **angeordneter Körper**. (Schreibe auch ‘ $<$ ’ für  $R$ ).

Setze für  $a, b \in K$ :

$$\begin{aligned} a < b &: \iff 0_K < (b - a) \\ a > b &: \iff b < a \\ a \leq b &: \iff a < b \vee a = b \\ b \geq a &: \iff a \leq b \end{aligned}$$

**Lemma 2.3.4**

Sei  $(K, <)$  angeordneter Körper,  $a, b, c \in K$

- (i) Entweder  $a > b, a = b \vee a < b$ .
- (ii)  $a < b \wedge b < c \implies a < c$
- (iii)  $(a > 0 \implies (-a) < 0) \wedge (a < 0 \implies (-a) > 0)$
- (iv) Gilt  $a < b$ , so ist

$$\begin{aligned} ac &< bc, & c &> 0 \\ ac &> bc, & c &< 0 \\ a^2 &> 0, & a &\neq 0 \end{aligned}$$

$$a > 0 \implies a^{-1} > 0$$

$$a < 0 \implies a^{-1} < 0$$

$$b^{-1} < a^{-1}, \text{ falls } a > 0$$

$$a + c < b + c.$$

- (v)  $a < b \implies (-a) > (-b)$

**Proof (i)-(iii)**

(i) Da  $a < b \iff 0_K < b - a$ , folgt das aus Trichotomie und Def. von ' $>$ '.

(ii) zu zeigen:  $a < c$ , d.h.  $0_K < c - a$ .

$$c - a = (c + 0_K) - a = \underbrace{(c - b)}_{>0} + \underbrace{(b - a)}_{>0} > 0, \text{ d.h. } a < c$$

(iii)  $a > 0$ . Angenommen,  $(-a) > 0$ .  $\xRightarrow{\text{Abg. Add.}} 0_K = a + (-a) > 0_K \xRightarrow{\text{Trich.}} \text{E Ist } -a = 0$ , so  $a = 0$ , nach Trich. Wid. zu  $a > 0$ . Falls  $a < 0$ , analog. ■

**Corollary 2.3.5**

Es gibt keine Ordnung ' $<$ ' auf  $\mathbb{F}_2$ , die  $\mathbb{F}_2$  zu einem angeordneten Körper macht

**Proof**

Angenommen, ' $<$ ' sei Ordnung. Da  $0_K \neq 1_K$ , gilt entweder  $0_K < 1_K$  oder  $1_K < 0_K$  (nach Trich.). Falls  $0_K < 1_K$ . Dann  $0_K = 1_K + 1_K$  damit  $0_K = 1_K + 1_K > 0_K + 1 = 1_K$ . Widerspruch für  $1_K < 0_K$  argumentiere analog.

- PRINZIP:  $\mathbb{R} \wedge \mathbb{Q}$  sind angeordnete Körper

**2.4 Der Betrag**

('Abstand zur Null')

Für  $x \in \mathbb{R}$  definieren wir den Betrag  $|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

Der in Def 2.4.1 eingeführte Betrag erfüllt

- (i)  $\text{forall } x \in \mathbb{R} |x| \geq 0$
- (ii)  $|x| = 0 \iff x = 0$
- (iii) Multiplikativität:  $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- (iv) **Dreiecksungleichung:**  $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y|$
- (v)  $\forall x \in \mathbb{R} : |-x| = |x|$
- (vi)  $\forall x, y \in \mathbb{R} : y \neq 0 \implies \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$

PRINZIP-Arch. Axiom:  $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0 \exists n \in \mathbb{N} : x < n$

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ & & & & & & & & | \\ & & & & & & & & x^n \end{array}$$

- ## 2.6 Supremum, Infimum und die Supremumseigenschaft

- Eine nichtleere Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}$  heißt

- $A = N_0$  durch 0 nach unten, nach oben unbegrenzt
- $A = \{1, 2, \dots, 10\}$  durch 1 nach unten, und durch 10, 11, ... nach oben beschränkt

Sei  $a \subset \mathbb{R}$  nichtleer

- (i) Ist  $A$  nach oben beschränkt, so heißt  $s(=:\sup A)$  **Supremum** von  $A$ , falls  $s$  obere Schranke ist *und* **kleinste obere Schranke** ist d.h.  $\forall c \in \mathbb{R} : c \text{ obere Schranke von } A \implies s \leq c$ . Ist  $s \in A$  Supremum von  $A$ , so heißt  $s$  **Maximum** von  $A$ .



- (ii) Ist  $A$  nach oben unbeschränkt, so sei  $+\infty$  das Supremum von  $A$ .
- (iii) Ist  $A$  nach unten beschränkt, so nennen wir  $s' \in \mathbb{R}$  **Infimum** von  $A$ , falls  $s'$  untere Schranke und für jede andere untere Schranke  $d \in \mathbb{R}$  von  $A$ :  $d \leq s'$ . Ist  $s' \in A$  Infimum, so heißt  $s'$  **Minimum** von  $A$ .
- (iv) Ist  $A$  nach unten unbeschränkt, so sei  $-\infty$  das Infimum von  $A$ .

**Schreibweise:**  $\sup(A), \max(A), \inf(A), \min(A)$ .

#### Example 2.6.4

Für  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  sei  $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$   
 Dann:  $\sup((a, b)) = b \wedge \inf((a, b)) = a$ .

- Obere Schranke:  $\forall x \in (a, b) : x < b \implies b$  obere Schranke.
- Ist  $d$  andere obere Schranke, so  $b \leq d$ . Klar:  $d > a$ , also angenommen  $a < d < b$ .  
 Dann  $x := \frac{d+b}{2} \in (a, b), x > d \implies d$  keine obere Schranke  $\nexists$   
 Weiter  $b \notin (a, b)$ , also  $b$  Supremum, kein Maximum

PRINZIP (Supremumseigenschaft)

Jede nach oben beschränkte Menge  $A \subset \mathbb{R}$  hat ein Supremum in  $\mathbb{R}$  **Informell:**  $(1, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$  hat  $\sup = \sqrt{2}$  (später). Aber  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ , also gilt die Supremumseigenschaft für  $\mathbb{Q}$  nicht.

$\mathbb{R}$  ist

- Körper
- angeordnete Körper
- bewerteter Körper
- Archimedisch angeordnete Körper
- **Supremumseigenschaft**

### 3 Folgen und Konvergenz

#### 3.1 Reelle Folgen und Konvergenz

Folge  $a : \mathbb{N} \ni n \mapsto a(n) \in \mathbb{R}$ . Schreibweisen:

$$\left( \underbrace{a_n}_{(=a(n))} \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad (n \text{ Laufindex}), (a_n)$$

##### Example 3.1.1

$a_n := 2n \rightarrow$  Folge der geraden Zahlen

$a_n := 2n + 1 \rightarrow$  Folge der ungeraden Zahlen

##### Definition 3.1.2 Konvergenz

Sei  $(a_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  ( $(a_n) \subset \mathbb{R}$ ) und  $a \in \mathbb{R}$ . Wir sagen, dass  $(a_n)$  gegen  $a$  **konvergiert**, falls  $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon}$

Wir nennen  $a$  dann den **Grenzwert** oder **Limes** von  $(a_n)$  und schreiben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n := a$$

Gibt es  $a \in \mathbb{R}$  so, dass  $(a_n)$  gegen  $a$  konvergiert, so nennen wir  $(a_n)$  **konvergent**, andernfalls **divergent**.

##### Lemma 3.1.3

Sei  $(a_n) \subset \mathbb{R}$  eine Folge, die gegen  $a, b \in \mathbb{R}$  konvergiert. Dann  $a = b$ .

##### Proof

Sei  $\varepsilon > 0$  bel.. Dann

$$\begin{aligned} \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \implies \forall n \geq N : |a - b| = |(a - a_n) + (a_n - b)| \leq |a_n - a| + |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ \xRightarrow{\forall \varepsilon} a = b. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Für jedes  $\varepsilon > 0$ : Ab irgendeinem  $N$  bleibt die Folge für immer im  $\varepsilon$ -Streifen um  $a$ .

##### Example 3.1.4

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ . Vermute: Limes  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Mit Archimedes  $\exists N \in \mathbb{N} : \frac{1}{\varepsilon} < N$ . Dann  $\forall n \geq N : \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$ .  $\blacksquare$

##### Example 3.1.5

$\forall a \in \mathbb{R} : (a_n) = (a)$  (konstante Folge) konvergent gegeben  $a$

**Example 3.1.6**

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Nach 1.2.3  $\forall n \geq 5 : n^2 < 2^n$ . Nach Arch.  $\exists N \in \mathbb{N} : N \geq 5 \wedge \frac{1}{\varepsilon} < N$ .  $\implies \forall n \geq N : \left| \frac{n}{2^n} - 0 \right| = \frac{n}{2^n} \stackrel{\text{Ugl}}{<} \frac{1}{n} \stackrel{n \geq N}{\leq} \frac{1}{N} < \varepsilon$  ■

**Example 3.1.7**

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} := ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$   
**Beh.:**  $\neg \exists a \in \mathbb{R} : (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konv. gg  $a$ . Angenommen, es gäbe so ein  $a \in \mathbb{R}$ . Wähle  $0 < \varepsilon < 1$ .  
 Dann  $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |(-1)^n - a| < \varepsilon$ .  
 Dann:  $2 = |1 - (-1)| \leq \underbrace{|(1 - a)|}_{|a - (-1)^n|} \leq |(-a)^n - a| + \underbrace{|a + 1|}_{|a - (-1)^n|} < 2\varepsilon < 2$

**Example 3.1.8**

$(a_n)$  reelle Folge.

- $\exists \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$ .  
 Für  $\varepsilon = 1$  erfüllt die Folge aus example 3.1.7 dies!  
 Nicht äquivalent zu Konvergenz!
- $\forall \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$   
 Folge aus example 3.1.7 erfüllt dies - nicht äquivalent!

**3.2 Rechenregeln für Grenzwerte****Theorem 3.2.1**

Seien  $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$  konv. gegen  $a \in \mathbb{R}$  bzw.  $b \in \mathbb{R}$ . Dann

- (i)  $(a_n + b_n)$  konvergiert gegen  $a + b$   $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
- (ii)  $(a_n \cdot b_n)$  konvergiert gegen  $a \cdot b$
- (iii) Ist  $b \neq 0$  so existiert ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq N \implies b_n \neq 0$ , und es gilt:

$$\left( \frac{a_n}{b_n} \right)_{n \geq N} \text{ konv gg } \frac{a}{b}.$$

**Proof**

Sei  $\varepsilon > 0$

Wg. Konv.  $a_n \rightarrow a \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

Wg. Konv.  $b_n \rightarrow b \exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2 : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$(a_n), (b_n), a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b \implies a_n + b_n \rightarrow a + b$$

**Definition 3.2.2**

Wir sagen, dass  $(a_n) \subset \mathbb{R}$  **beschränkt** ist, falls  $\exists M > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq M$ .

**Lemma 3.2.3**

Konvergente Folgen sind beschränkt.

**Proof**

Angenommen,  $(a_n)$  konvergiert gegen  $a \in \mathbb{R}$ . Mit  $\varepsilon = 1$  ex.  $N \in \mathbb{N}$ :

$$(\forall n \geq N : |a_n - a| < 1) \implies \forall n \geq N : ||a_n| - |a|| < 1 \implies |a_n| \leq 1 + |a|$$

Setze  $M := \max\{|a_1|, \dots, |a_N|, 1 + |a|\}$ , so  $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq M$ . ■

Zurück zum Beweis von Satz 3.2.1 (b) und (c):

**Proof**

(b) zu zeigen  $a_n \rightarrow a \wedge b_n \rightarrow b \implies a_n b_n \rightarrow ab$

$$|a_n b_n - ab| = |(a_n b_n - ab_n) + (ab_n - ab)| \leq |b_n| \cdot |a_n - a| + |a| |b_n - b| \quad (8)$$

Sei  $\varepsilon > 0$ . Da  $(b_n)$  beschr., ex. nach Lemma 3.2.3 ein  $M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : |b_n| \leq M$ . Da  $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$

$$(1) \exists N_1 \in \mathbb{N} \forall n \geq N_1 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

$$(2) \exists N_2 \in \mathbb{N} \forall n \geq N_2 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{1+|a|}$$

$$(8) \implies \forall n \geq N := \max\{N_1, N_2\} : |a_n b_n - ab|$$

$$\stackrel{(8)}{\leq} M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |a| \cdot \underbrace{\frac{\varepsilon}{2(1+|a|)}}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Damit (b).

$$(c) a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b \neq 0 \implies \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$$

$$(1) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |b_n| \neq 0.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{N} \forall n \geq \tilde{N} : |b_n - b| < \varepsilon,$$

$$\text{d.h. } |b| - \varepsilon \leq |b_n|$$

Wende Dies auf  $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$  an.

Dann  $\forall n \geq \tilde{N} : 0 < \frac{|b|}{2} \leq |b_n|$ . setze nun  $n_0 := \tilde{N}$

$$(2) b_n \rightarrow b \neq 0, \text{ so } \frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}.$$

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{b_n b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n| \cdot |b|} \quad (9)$$

Für  $n \geq \tilde{N} : \frac{|b|}{2} < |b_n|$ , also  $\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}$ , also  $\frac{1}{|b_n| |b|} < \frac{2}{|b|^2}$

Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann  $\exists \tilde{\tilde{N}} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \tilde{\tilde{N}} : |b_n - b| < \frac{\varepsilon |b|^2}{2} \cdot \frac{2}{|b|^2} = \varepsilon$

$$(3) a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b \neq 0 \xrightarrow{(2)} (a_n \rightarrow a, \frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}) \xrightarrow{(b)} \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b} \quad \blacksquare$$

**Example 3.2.4**

$a, b, c, d \in \mathbb{R}, c \neq 0, d \neq 0.$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + b}{cn^2 + d} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{n^2}}{c + \frac{d}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$$

- $\frac{A}{n} \rightarrow 0$ , Thm. 3.2.1 (b) :  $\frac{b}{n^2} \rightarrow 0 \cdot 0 = 0 \xrightarrow{\text{Thm. 3.2.1 (b)}} \frac{b}{2} \rightarrow 0$   
 (+) Thm. 3.2.1 (a):  $a + \frac{1}{n^2} \rightarrow a$
- Nenner  $c + \frac{d}{n^2} \rightarrow c \xrightarrow{\text{Thm. 3.2.1 (c)}} \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{c}.$  ■

**3.3 Stabilität der ‘ $\leq$ ’-Relation unter Limesbildung****Theorem 3.3.1**

Seien  $(a_n), (b_n)$  zwei konvergente Folgen in  $\mathbb{R}$ : Seien  $a, b \in \mathbb{R}$

- (i) Gibt es  $N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n \leq a$ , so  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq a$ .
- (ii) Gibt es  $N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : b \leq b_n$ , so  $b \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

**Proof**

Sei  $\xi := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Für  $\varepsilon > 0$  finden wir  $\tilde{N} \in \mathbb{N} : n \geq \tilde{N} : |a_n - \xi| < \varepsilon$ . Damit

$$\xi = (\xi - a_n) + a_n \leq |\xi - a_n| + a_n \leq \xi + a_n \leq a + \varepsilon \implies \xi \leq a. \quad \blacksquare$$

**Bemerkung:** Satz falsch für ‘ $<$ ’ Bsp.

**Theorem 3.3.2 Sandwich-Thm**

Seien  $(a_n), (c_n) \subset \mathbb{R}$  konv. Folgen:  $a_n, c_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$  Ist  $(b_n) \subset \mathbb{R}$ , so dass  $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : a_n \leq b_n \leq c_n$ , so  $b_n \rightarrow a$

**Proof**

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, |c_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ Für solche } n : a - \varepsilon < a_n - \frac{\varepsilon}{2} \leq b_n - \frac{\varepsilon}{2} \leq c_n - \frac{\varepsilon}{2} < a + \varepsilon \implies b_n \rightarrow a. \quad \blacksquare$$

**3.4 Monotone Konvergenz,  $e$  und Wurzeln****Definition 3.4.1**

Eine Folge  $(a_n)$  heißt

- (i) mon. wachsend  $\iff \forall n \in \mathbb{N} a_n \leq a_{n+1}$
- (ii) streng mon. wachsend  $\iff \forall n \in \mathbb{N} a_n < a_{n+1}$
- (iii) mon. fallend  $\iff \forall n \in \mathbb{N} a_n \geq a_{n+1}$

(iv) streng mon. fallend  $\iff \forall n \in \mathbb{N} a_n > a_{n+1}$

### Theorem 3.4.2

Eine monotone beschränkte Folge konvergiert.

#### Proof

$(a_n)$  monoton wachsend und beschränkt, also existiert nach Supremumseigenschaft  $a := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} < \infty$

Zu zeigen  $a_n \rightarrow a$ . Sei  $\varepsilon > 0$  bel.. Dann nach Def. des Supremums  $\exists N \in \mathbb{N} : a - \varepsilon < a_N$ . Für  $n \geq N$  gilt  $a_N \leq a_n$  wegen Monotonie  $\implies |a_n - a| = a_n - a = a - a_N + \underbrace{a_N - a_n}_{\leq 0} \leq$

$a - a_N < \varepsilon$ . Also  $a_n \rightarrow a$ .  $\blacksquare$

### Corollary 3.4.3

Der Grenzwert  $e := \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$  existiert. Wir nennen  $e$  die **Eulerische Zahl**. Es gilt  $2 \leq e \leq 3$ .

### Lemma 3.4.4

Sei  $n \in \mathbb{N}_0, x > -1$ . Dann  $1 + nx \leq (1 + x)^n$ .

#### Proof Cor. 3.4.4

zu zeigen:  $(a_n) = \left((1 + \frac{1}{n})^n\right)$  mon. wachsend, beschr.

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} \\ &\stackrel{\text{Rechnen}}{=} \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\ &\stackrel{\text{Bernoulli mit } x = -\frac{1}{n^2}}{\leq} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n-1} \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\implies (a_n)$  mon. wachsend

Nun:  $(a_n)$  beschränkt. Bin. Formel:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$$|a_n| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \cdots \leq \frac{1}{k!}$$

$$2^{k-1} \leq k! \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Damit

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \underset{\text{von davor}}{\leq} 2 + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq 2 + 2 \cdot \sum_{k=2}^n n \frac{1}{2^k} \leq 2 + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \leq 2 + 2 \cdot 1 = 4$$

$\implies$  Zahl  $e$  existiert! ( nach Thm. 3.4.2 )

**Wiederholung:**

- Konvergent  $\implies$  Beschränkt
- Monoton + Beschränkt  $\implies$  Konvergent

#### Corollary 3.4.5 Existenz von Quadratwurzeln

Sei  $a \geq 0$ , Dann existiert ein  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x^2 = a$ . Speziell gilt: Ist  $x_0 > 0$  so konvergiert die durch

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

definierte Folge gegen die **eindeutige** positive Lösung  $x \in \mathbb{R}_{>0}$  der Gleichung  $x^2 = a$

**Proof**

(i) Beschränkt nach unten: Wir zeigen induktiv  $x_1 > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$

**I.A.:**  $x_0 > 0$  nach Voraussetzung

**I.S.:** Gelte  $x_n > 0$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  (I.V.). Dann ist

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( \underbrace{x_n}_{>0} + \frac{\overbrace{a}^{\geq 0}}{\underbrace{x_n}_{>0}} \right)$$

(ii) Monoton fallend:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right) - x_n \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{a}{x_n} - x_n \right) \\ &= \frac{1}{2 \underbrace{x_n}_{>0 \text{ nach (i)}}} (a - x_n^2) \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} a - x_{n+1}^2 &= a - \frac{1}{4} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)^2 \\ &= a - \frac{1}{4} x_n^2 - \frac{1}{2} a - \frac{1}{4} \cdot \frac{a^2}{x_n^2} \\ &= \frac{1}{2} a - \frac{1}{4} \left( x_n^2 + \frac{a^2}{x_n^2} \right) \\ &= -\frac{1}{4} \left( x_n - \frac{a}{x_n} \right)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Also ist  $(x_n)$  monoton fallend.

(iii) Es gilt  $l := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  und  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}$ .

Es folgt wegen  $x_n x_{n+1} = \frac{1}{2} (x_n^2 + a)$ , dass  $l^2 = \frac{1}{2} (l^2 + a)$  und damit  $l^2 = a$ .

(iv) **Eindeutigkeit:** Seien  $x, y > 0$  seien zwei Lösungen zu

$$x^2 = y^2 = a$$

Dann gilt  $0 = x^2 - y^2 = \underbrace{(x+y)}_{>0} (x-y)$ . Also ist  $x - y = 0$ , ■

### 3.5 Einige Grenzwerte - alt und neu

- Für  $k \in \mathbb{N}$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$  (Heratives Anwenden von Satz 3.2.1(i))



**Definition 3.5.1 Bestimmte Divergenz**

Eine Folge  $(a_n) \subset \mathbb{R}$  heißt

- Bestimmt divergent gegen  $+\infty$  (in Symbolen  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ), falls zu jedem  $k > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert mit  $a_n \geq k$  für alle  $n \geq N$
- Bestimmt divergent gegen  $-\infty$  (in Symbolen  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ ), falls zu jedem  $k < 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert mit  $a_n \leq k$  für alle  $n \geq N$ .
- Ist  $(a_n)$  weder konvergent noch bestimmt divergent, so nennen wir  $(a_n)$  **unbestimmt divergent** und sagen “ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  existiert nicht”.

- Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{falls } x > 1 \\ 1 & \text{falls } x = 1 \\ 0 & \text{falls } |x| < 1 \\ -\infty & \text{falls } x \leq -1 \end{cases}$$

- Für  $x > 1$  setze  $y := x - 1$ , mit Bernoullischer Ungleichung:

$$x^n = (1 + y)^n \geq 1 + ny \rightarrow \infty$$

- Für  $x = 1$  gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$   $x^n = 1$ .

- Für  $|x|^{-1} > 1$  (falls  $x \neq 0$ ) Sei  $\varepsilon > 0$

Also gilt es existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n \geq N$  gilt  $|x^{-n}| \geq \frac{1}{\varepsilon}$ , damit  $|x^n| < \varepsilon$  für alle  $n \geq N$

- Rest folgt mit Beispiel 3.1.7

–

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n x^k = \begin{cases} +\infty & \text{falls } x \geq 1 \\ \frac{1}{1-x} & \text{falls } |x| < 1 \\ \text{existiert nicht} & \text{falls } x \leq -1 \end{cases}$$

## 4 Vollständigkeit

### 4.1 ???

Supremumseigenschaft zeichnet  $\mathbb{R}$  aus.

Cauchy-Folgen

In  $\mathbb{R}$  sind Cauchy-Folgen und konvergente Folgen gleich, in  $\mathbb{Q}$  z.B. nicht.

Cauchy-Folgen sind beschränkt

es ist nicht so, dass alle Beschränkte Folgen, Cauchy-Folgen sind

#### Definition 4.1.1 Cauchyfolge

Eine reelle Folge  $(a_n)$  heißt **Cauchy** oder **Cauchyfolge**, falls für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, sodass  $|a_n - a_m| < \varepsilon$  für alle  $n, m \geq N$ .  $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N : |a_n - a_m| < \varepsilon}$

#### Theorem 4.1.2

Sei  $(a_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ . Dann gilt:

- (i) Ist  $(a_n)$  konvergent, so ist  $(a_n)$ -Cauchy.
- (ii) Ist  $(a_n)$  Cauchy, dann ist  $(a_n)$  beschränkt.
- (iii) Ist  $(a_n)$  konvergent, so ist  $(a_n)$  beschränkt.

#### Proof

- (i) Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Da  $(a_n)$  konvergent, existiert ein  $a \in \mathbb{R}$  und ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ .  
Seien  $n, m \in \mathbb{N}$ , dann gilt

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

- (ii) Setze  $\varepsilon = 1$ . Dann finden wir ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - a_m| < 1$  für alle  $n, m \geq N$ .  
Die Menge  $\{|a_1|, \dots, |a_N|\}$  ist endlich, hat also ein Maximum, nenne dieses  $M$ .  
Für alle  $n \geq N$  gilt also  $|a_n| \leq M$  falls  $1 \leq n \leq N$ ,

$$|a_n| \leq |a_n - a_N| + |a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| \leq 1 + M \text{ falls } n \geq N$$

Deswegen ist  $(a_n)$  durch  $1 + M$  beschränkt.

- (iii) Direkt aus (i) und (ii)

#### Example 4.1.3 Beschränktheit und nicht Cauchy

Betrachte  $(a_n) := (-1)^n$ . Dann ist  $|a_n| = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und speziell  $(a_n)$  beschränkt.  
Wähle  $0 < \varepsilon < 2$ . Dann gilt für bel  $N \in \mathbb{N}$

$$|a_n - a_{n+1}| = 2 > \varepsilon$$

## 4.2 Teilfolgen und der Satz von Bolzano-Weierstraß

•

$$((-1)^n) : \begin{cases} \text{gerade Folgenglieder: immer } +1 \\ \text{ungerade Folgenglieder: immer } -1 \end{cases}$$

### Definition 4.2.1

Sei  $(a_n) \subset \mathbb{R}$  Folge und  $n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine monoton wachsende Abbildung. Dann heißt  $(a_{n(k)})$  **Teilfolge**

### Example 4.2.2

$$(a_n) = ((-1)^n)$$

- $n(k) = 2k \rightsquigarrow (a_{n_k}) =$  Teilfolge der geraden Folgenglieder
- $n(k) = 2k - 1 \rightsquigarrow (a_{n_k}) =$  Teilfolge der ungeraden Folgenglieder

### Definition 4.2.3

Sei  $(a_n) \subset \mathbb{R}$  und  $(a_{n_k}) \subset (a_n)$  Teilfolge die gegen  $a \in \mathbb{R}$  konvergiert. Dann heißt  $a$  **Häufungspunkt** von  $(a_n)$ . Wir definieren dann den **Limes superior** via

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} := \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} a_k,$$

und den **Limes inferior** via

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} a_k.$$

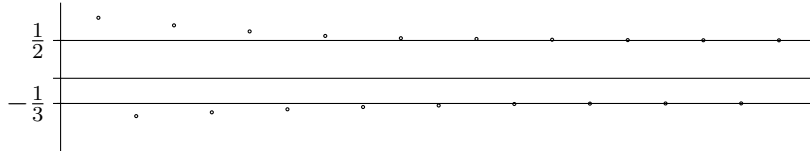
- $a$  HP von  $(a_n) \iff \forall \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon.$

### Example 4.2.4

$(a_n) = (a)$  für  $a \in \mathbb{R}$  (konstante Folge), so  $a$  einzelner Häufungspunkt; allgemeiner: Falls  $a_n \rightarrow a$  konvergiert, so ist  $a$  einzelner Häufungspunkt.

### Example 4.2.5

$(a_n) = (-1)^n$ , so sind  $+1$  und  $-1$  Häufungspunkte der Folge. Weiter  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = +1$  und  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$ .



### Theorem 4.2.6 Bolzano Weierstraß

Jede beschränkte Folge in  $\mathbb{R}$  besitzt eine konvergente Teilfolge.

### Lemma 4.2.7

Jede Folge in  $\mathbb{R}$  hat eine monotone Teilfolge.

**Proof**

Sei  $(a_n) \subset \mathbb{R}$  beschränkt. Nach Lem 4.2.7 gibt es eine monotone Teilfolge, die natürlich auch beschränkt ist. Nach dem Satz über monotone, beschränkte Folgen konvergiert diese Teilfolge. ■

Brauchen:

**Proof**

Sei  $(a_n) \subset \mathbb{R}$  bel. Wir nennen  $a_{n_0}$  ( $n_0 \in \mathbb{N}$ ) **Gipfelpunkt**, falls:

(i) **unendlich viele Gipfelpunkte:** Sei dann  $(a_{n_k})$  Teilfolge der Gipfelpunkte. Dann

$$n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \dots \text{ und}$$

$$a_{n_1} \geq a_{n_2} \geq a_{n_3} \geq \dots$$

Also ist  $(a_{n_k})$  monoton fallend.

(ii) **endlich viele oder keine Gipfelpunkte:** Hier existiert

$$N \in \mathbb{N} : n \geq N \implies a_n$$

kein Gipfelpunkt. Also gilt nicht: D. h.  $\exists n_1 \geq N : a_N < a_{n_1} \implies a_{n_1}$  kein Gipfelpunkt  $\implies \exists N_2 \geq n_1 : a_{n_1} < a_{n_2}$ , usf. Dann ist  $(a_{n_k})$  monoton wachsend. ■

### 4.3 Charakterisierung der Vollständigkeit

Für  $a \leq b$  sei  $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ . Der Durchmesser von  $[a, b]$ :  $\text{diam}([a, b]) = b - a$

**Lemma 4.3.1**

Sei  $(a_n)$  Cauchyfolge, die eine gegen  $a \in \mathbb{R}$  konvergente Teilfolge besitzt. Dann konvergiert  $(a_n)$  gegen  $a$ .

**Proof**

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N : |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Wähle zu  $\varepsilon > 0$  ein solches  $N \in \mathbb{N}$ . Dann gibt es wegen konvergenter Teilfolge einen Index  $\tilde{N} \geq N : |a - a_{\tilde{N}}| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Dann  $\forall n \geq N$ :

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= |(a_n - a_{\tilde{N}}) + (a_{\tilde{N}} - a)| \\ &< \underbrace{|a_n - a_{\tilde{N}}|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_{\tilde{N}} - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon \end{aligned}$$

**Theorem 4.3.2**

Die folgenden Prinzipien sind auf  $\mathbb{R}$  äquivalent:

- (i) **Supremumseigenschaft:** Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge hat ein Supremum.
- (ii) **Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft:** Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge

(iii) **Vollständigkeit:** Jede Cauchyfolge konvergiert

(iv) **Intervallschachtelungsprinzip:** Sind  $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$  mit  $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \wedge [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}([a_n, b_n]) = 0$ , so **existiert genau ein**

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n].$$

### Proof

Plan:  $(i) \implies (ii) \implies (iii) \implies (iv) \implies (i)$

**Ad**  $(i) \implies (ii)$  Die Supremumseigenschaft ist die einzige Zutat, um Bolzano-Weierstraß zu zeigen. Damit folgt  $(ii)$  aus  $(i)$

**Ad**  $(ii) \implies (iii)$  Sei  $(a_n)$  Cauchyfolge. Nach letzter Vorlesung ist  $(a_n)$  beschränkt, und nach  $(ii)$  hat  $(a_n)$  also konvergiert Teilfolge. Nach Lem 4.3.1 konvergiert dann aber bereits  $(a_n) \implies (iii)$

**Ad**  $(iii) \implies (iv)$  Sei  $([a_n, b_n])$  eine **Intervallschachtelung** mit  $\text{diam}([a_n, b_n]) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \underbrace{\text{diam}([a_n, b_n])}_{b_n - a_n} < \varepsilon$$

. Dann  $\forall n, m \geq N : a_m \in [a_n, b_n]$  (da Intervallschachtelung), also:

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - b_n| < \varepsilon \implies (a_n) \text{ Cauchy.}$$

Ähnlich:  $(b_n)$  Cauchy  $\xrightarrow{(iii)} \exists a, b \in \mathbb{R} : a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$ .

$$|a - b| = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{|a_n - b_n|}_{\text{diam}([a_n, b_n])} = 0 \implies a = b.$$

Kurz zu

$$a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] : (a_n) \text{ monoton wachsend, } (b_n) \text{ monoton fallend}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Stabilität der KG-Relation} \\ \implies \left. \begin{array}{l} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a \\ b \geq \dots \geq b_2 \geq b_1 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \implies a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a = b \leq \dots \leq b_2 \leq b$$

hier fehlt noch was ...

**Ad (iv)  $\implies$  (i)** Sei  $A \subset \mathbb{R}$  nichtleer und nach oben beschränkt. Zu zeigen  $A$  besitzt Supremum. Wähle  $x_0 \in A$ , sowie  $y_0 \in \mathbb{R}$  eine obere Schranke von  $A$ . Seien für  $n \in \mathbb{N}_0$  die Intervalle  $[x_0, y_0], \dots, [x_n, y_n]$  definiert. Setze dann

$$x_{n+1} := \begin{cases} x_n, & \text{falls } [\frac{x_n+y_n}{2}, y_n] \cap A \neq \emptyset \\ \xi \in [\frac{x_n+y_n}{2}, y_n] \cap A & \text{sonst} \end{cases}$$

$$y_{n+1} := \begin{cases} \frac{x_n+y_n}{2}, & \text{falls } [\frac{x_n+y_n}{2}, y_n] \cap A \neq \emptyset \\ y_n & \text{sonst} \end{cases}$$

- $[x_{n+1}, y_{n+1}] \subset [x_n, y_n] : \%$  (sieht man ja)
- Beh.:  $|x_n - y_n| \leq 2^{-n}|x_0 - y_0| \forall n \in \mathbb{N}_0$  (reference star)

**I.A.:** erfüllt.

**I.S.:**  $n \rightsquigarrow n+1$ . Gelte (star) für ein  $n \in \mathbb{N}_0$ . Entweder

$$(a) |x_{n+1} - y_{n+1}| = |x_n - (\frac{x_n+y_n}{2})| = \frac{1}{2}|x_n - y_n| \stackrel{IV}{\leq} 2^{-(n+1)}|x_0 - y_0|$$

$$(b) |x_{n+1} - y_{n+1}| = |\xi - y_n| = y_n - \xi \leq y_n - \frac{1}{2}(x_n + y_n) = \frac{1}{2}(x_n - y_n) \stackrel{IV}{\leq} 2^{-(n+1)}|x_0 - y_0|$$

$\implies \text{diam}([x_n, y_n]) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . Nach (iv)  $\exists! x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} [x_n, y_n]$ . **Zeige nun:**  $x = \sup(A)$ .  $x$  **obere Schranke**. Hierzu:  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ . Also  $\forall z \in A$ :

$$z \leq y_n \stackrel{\forall n}{\overset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow}} x \implies z \leq x \implies \text{obere Schranke}$$

$x$  **kleinste obere Schranke:** Angenommen es gäbe  $x' \in \mathbb{R}, x' \not\leq x \wedge x'$  obere Schranke. Aber  $x_n \rightarrow x$  Aber  $\forall n \in \mathbb{N}_0 : x_n \in A$ . Dann aber  $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : x' < x_n < x$ . (Wähle  $\varepsilon = \frac{1}{2}|x - x'|$ ). Widerspruch, da  $x'$  keine obere Schranke. Also gilt (i) ■

### Example einfach Beispiel aus Vorlesung

Ich glaube das soll zeigen, dass irgendwas an  $\mathbb{R}$  besonders

$$[\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + \frac{1}{n}]$$

$$\sqrt{2} - \frac{2}{n} \leq a_n \leq \sqrt{2} - \frac{1}{n}$$

$$\sqrt{2} + \frac{1}{n} \leq b_n \leq \sqrt{2} + \frac{1}{n}$$

$$[a_n, b_n], a_n, b_n \in \mathbb{Q}$$

## 5 Reihen und deren Konvergenz

### 5.1 Reihen, Konvergenz und absolute Konvergenz

#### Definition 5.1.1

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  eine Folge. Dann heißt die Folge  $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit

$$s_k := \sum_{n=1}^k a_n$$

die **Reihe** (u  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  assoziiert):

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_n.$$

Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  heißt **konvergent**, falls die Folge  $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert, und wir bezeichnen dann mit  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  auch ihren Limes. Andernfalls heißt die **Reihe divergent**.

Verschärfung:

#### Definition 5.1.2

Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  heißt **absolut konvergent**, falls  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  konvergiert.

#### Lemma 5.1.3

Absolute Konvergenz impliziert Konvergenz.

#### Proof

Ist  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  konvergent, so ist  $(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|)_{k \in \mathbb{N}}$  Cauchy.

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists k_0 \in \mathbb{N} \forall k \geq l \geq k_0 :$$

$$\sum_{n=l+1}^k |a_n| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{n=1}^k a_n - \sum_{n=1}^l a_n \right|$$

$$= \left| \sum_{n=l+1}^k a_n \right|$$

$$\stackrel{\text{DUG}}{\leq} \sum_{n=l+1}^k |a_n|$$

$$\leq \varepsilon$$

Also  $\left( \sum_{n=1}^k a_n \right)_k$  Cauchy, also fertig wg Voll. ax. ■

**Example 5.1.4 Geometrische Reihe**

Sei  $q \in \mathbb{R}$ . Dann konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$$

genau dann, wenn  $|q| < 1$ . Aus Kapitel 1 wissen wir, dass

$$\sum_{n=0}^N q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}, \text{ also}$$

$$\sum_{n=1}^N q^n = \frac{q - q^{N+1}}{1 - q} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{q}{1 - q}.$$

Speziell konvergiert die Reihe (absolut).

•

$$q = 1 : \sum_{n=1}^N q^n = N \rightarrow \infty, N \rightarrow \text{infity}.$$

•

$$q > 1 : \sum_{n=1}^N q^n, \text{ also } \sum_{n=1}^N \rightarrow \infty, N \rightarrow \text{infity}.$$

•

$$q \leq -1 \rightsquigarrow \text{Alternation, keine Konvergenz}$$

**Example 5.1.5**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

•

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \text{ konvergiert}$$

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n-1} = \frac{A(n-1) + Bn}{n(n-1)} = \frac{\overbrace{-A}^1 + \overbrace{(A+B)}^{=0} n}{n(n-1)}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^N \frac{1}{n(n-1)} &= \sum_{n=2}^N \left( -\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} \right) \\ &= \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N} \\ &= 1 - \frac{1}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1. \end{aligned}$$



Damit:

$$\forall N \in \mathbb{N}, N \geq 2 : \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^2} \leq 1 + \underbrace{\sum_{n=2}^N \frac{1}{n(n-1)}}_{\text{beschränkt in } \mathbb{N}} \Rightarrow \left( \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \right)_{N \in \mathbb{N}} \text{ beschränkt}$$

### Example 5.1.6 Harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergent.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{n}}_{2^k \text{ - Summanden}} \leq 1 + \underbrace{\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{2^{k+1}}}_{\frac{2^k}{2^{k+1}}} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$$

### Lemma 5.1.7

Konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

so ist  $(a_n)$  eine Nullfolge.

### Corollary 5.1.8 Trivialkriterium

Ist  $(a_n)$  **keine Nullfolge**, so divergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

### Proof Lem 5.1.7

Nach Voraussetzung ist

$$\left( \sum_{n=1}^k a_n \right)_{k \in \mathbb{N}}$$

Cauchy. Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig, so  $\exists k_0 \in \mathbb{N} \forall k, l \geq k_0 : \left| \sum_{n=1}^k a_n - \sum_{n=1}^l a_n \right| < \varepsilon \overset{k=l+1}{\rightsquigarrow} \forall l \geq k_0 : |a_{l+1}| < \varepsilon \Rightarrow (a_n) \text{ Nullfolge}$

## 5.2 Konvergenzkriterien

- Leibniz  $\rightsquigarrow$  alternierende Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

**Proposition 5.2.1** Leibnizkriterium

Ist  $(a_n) \subset \mathbb{R}$  **monoton fallende Nullfolge**, so **konvergiert** die alternierende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

Bemerkung: Satz 5.2.1 sagt **nichts** über absolute Konvergenz. Denn sei  $(a_n) = (\frac{1}{n})$ . Dann ist  $(a_n)$  monoton fallende Nullfolge

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

**Proof (Satz 5.2.1)**

Für

$$k \in \mathbb{N} : s_k := \sum_{n=1}^k (-1)^n a_n$$

- **gerade Indices:**  $k = 2j, j \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} s_{2j} &= -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \cdots + \overbrace{(-1)^{2j-1}}^{=-1} + a_{2j} \\ &= -a_1 + a_2 - a_3 \cdots - a_{2j-1} + a_{2j} - a_{2j+1} + \underbrace{a_{2j+2}}_{\substack{a_{2(j+1)} \\ \leq 0}} \end{aligned}$$

$$\implies s_{2j} \geq s_{2(j+1)}$$

und  $s_{2j} \geq -a_1 + a_{2j}$  und  $a_{2j} \rightarrow 0 \implies (s_{2j})$  nach unten beschränkt. Satz über monotone beschränkte Folgen:  $(s_{2j})$  konvergiert  $s_{2j} \rightarrow s$

- **Analog:**  $(s_{2j+1})$  monoton wachsend und nach oben beschränkt  $\implies (s_{2j+1})$  konvergiert,  $s_{2j+1} \rightarrow s'$
- $S = s' : |s - s'| = \lim_{j \rightarrow \infty} \underbrace{|s_{2j+1} - s_{2j}|}_{\left| \sum_{k=1}^{2j+1} (-1)^k a_k - \sum_{k=1}^{2j} (-1)^k a_k \right|} = \lim_{j \rightarrow \infty} |(-1)^{2j+1} a_{2j+1}| = \lim_{j \rightarrow \infty} |a_{2j+1}| = 0.$

Zu zeigen : Die ganze Reihe konvergiert gegen  $s$ :

Sei  $\varepsilon > 0$ :

**Fall 1:**

$$\exists k_1 \in \mathbb{N} \forall k \geq k_1 : \left| \sum_{n=1}^k 2k(-1)^n a_n - s \right| < \varepsilon$$

**Fall 2:**

$$\exists k_2 \in \mathbb{N} \forall k \geq k_2 : \left| \sum_{n=1}^k 2k+1(-1)^n a_n - s \right| < \varepsilon$$

Sei nun  $N := \max\{2k_1, 2k_2 + 1\}$ . Dann  $\forall j \geq N$ :

$$\left| \sum_{n=1}^j (-1)^n a_n - s \right| < \varepsilon.$$

Damit folgt die Behauptung ■

**Example 5.2.2** Alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{1}{n}}_{a_n}$$

konvergiert nach Leibniz, da  $(a_n)$  eine monoton fallende Nullfolge

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{9n^2 - n + 100}{20n^3 + n^2 + 4}$$

dann muss man feststellen, dass gegen Null und ab einem gewissen Zeitpunkt monoton fallend

**Ab jetzt: Kriterien für absolute Konvergenz****Proposition 5.2.3** (Majorantenkriterium/Minorantenkriterium)

Seien  $(a_n), (b_n) \in \mathbb{R}$  so, dass

(a)  $|a_n| \leq |b_n| \forall n \in \mathbb{N}$  und

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty.$$

Dann konvergiert  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  absolut.

(b)  $|a_n| \leq |b_n| \forall n \in \mathbb{N}$  und

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty.$$

Dann divergiert  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

**Proof** (Satz 5.2.3)

Sei  $\varepsilon > 0$ . Da

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$$

gibt es

$$N \in \mathbb{N} : \forall k, m \geq N : \sum_{n=k}^m |b_n| < \varepsilon \text{ (Cauchyfolge/Partialsummen der Beträge)}$$

Daher auch

$$\sum_{n=k}^m |a_n| \stackrel{\text{Vor.}}{\leq} \sum_{n=k}^m |b_n| < \varepsilon.$$

Also ist

$$\left( \sum_{n=1}^N |a_n| \right)_{N \in \mathbb{N}}$$

Cauchy, und damit folgt (a) nach Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$ . (b) Analog. ■

## Vergleich mit geometrischen Reihen

## Proposition 5.2.4 (Quotientenkriterium)

Sei  $(a_n) \subset \mathbb{R}$

(a) Es gebe  $0 \leq q < 1 \wedge N \in \mathbb{N}$  so, dass

$$a_n \neq 0 \wedge \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q \quad \forall n \geq N$$

Dann konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

absolut.

(b) Es gebe  $1 \leq q < \infty \wedge N \in \mathbb{N}$  so, dass

$$a_n \neq 0 \wedge \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q \quad \forall n \geq N$$

Dann divergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

## Proof (Satz 5.2.4)

(a) Zuerst:

$$a_n \neq 0, \underbrace{\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q (< 1)}_{|a_{n+1}| \leq q|a_n|} \quad \forall n \geq N$$

**Beh.:**  $\forall j \in \mathbb{N}_0 : |a_{N+j}| \leq q^j |a_N|$ .

**I.A.**  $j = 0$  yus is correct

**I.S.**  $j \leadsto j + 1$ .

$$|a_{N+j+1}| \stackrel{\text{Nach Vor.}}{\leq} q|a_{N+j}| \stackrel{\text{I.V.}}{\leq} q^{j+1}|a_N|$$

■

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} &= \underbrace{\sum_{n=1}^{N-1} |a_n|}_{< \infty} + \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \\ &= \left( \sum_{n=1}^{N-1} \right) + \sum_{j=0}^{\infty} |a_{N+j}| \\ &= \underbrace{\left( \sum_{n=1}^{N-1} \right)}_{< \infty} + \underbrace{|a_N| \sum_{j=0}^{\infty} q^j}_{< \infty \text{ } q < 1 \text{ geometrische Reihe}} \end{aligned}$$

(b) Via Induktion.:  $|a_n| \neq 0, \forall j \in \mathbb{N}_0 : |a_{N+1}| \geq q^j |a_N|$

$|a_{N+1}| \geq q^j |a_N| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \not\rightarrow 0. \implies (a_n) \text{ keine Nullfolge} \implies [\text{Trivialkriterium}]$  ■

### Corollary 5.2.5

Ist  $(a_n) \subset \mathbb{R}$  so, dass  $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n \neq 0$ . Konvergiert

$$\left( \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right)$$

mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \dots$$

### Example 5.2.6

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n!}{2^n}}_{=a_n}$$

1.

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0$$

2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \dots$$

### Proposition 5.2.7 (Wurzelkriterium)

Sei  $(a_n) \subset \mathbb{R}$ . Dann:

(i) Es gebe  $0 \leq q < 1 \wedge N \in \mathbb{N}$  mit  $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \forall n \geq N$ . Dann konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

absolut.

(ii) Es gebe  $1 \leq q < \infty \wedge N \in \mathbb{N}$  mit  $\sqrt[n]{|a_n|} > q \forall n \geq N$ . Dann divergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

### Proof

Analog zum Quotientenkriterium, ab  $n = N$  nutze  $|a_N| \leq q^n + \text{Geom}$

### Example

Konvergiert  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  vielleicht sogar absolut? Nullfolge? -> nein reihe divergent Trivialkriterium

-> ja:

Alternierende Reihe -> ja Leibniz -> konvergenz/Divergenz  
 -> nein: Quotient -> ja Quotientenkriterium  
 -> nein: Potent -> ja Wurzelkriterium  
 -> nein: geeignete Maj.? -> nein: Tricky

### Corollary 5.2.8 Wurzelkriterium in Limesform

Ist  $a_n \subset \mathbb{R}$  Folge mit

(i)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

, so konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

absolut.

(ii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

, so divergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

### Example 5.2.9

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left( \frac{2n+1}{3n+2} \right)^n}_{a_n},$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+2} \\ &= \frac{2}{3} < 1 \implies \text{absolute Konvergenz nach Wurzelkriterium} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a,$$

falls  $a, a_1, \dots \in \mathbb{R}_{>0}$

Das bedeutet: Liefert das Quotientenkriterium eine Entscheidung, so auch das Wurzelkriterium. Aber **Vorsicht**, das bedeutet nicht, dass das Wurzelkriterium "leichter" anzuwenden ist.

**Proposition 5.2.10** Reihenverdichtungskriterium

Sei  $(a_n) \subset \mathbb{R}_{>0}$  eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

genau dann, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

konvergiert. (verdichtete Reihe)

**Proof Satz 5.2.10**

$\forall N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2^N} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^N \underbrace{\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} a_n}_{2^{k-1}\text{-Summanden}} \\ &\geq a_1 + \sum_{k=1}^N 2^{k-1} a_{2^k} \\ &= a_1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N 2^k a_{2^k}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

so auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{2^N} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^N \sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} \underbrace{a_n}_{\leq a_{2^{k-1}+1}} \\
&\leq a_1 + \sum_{k=1}^N 2^{k-1} a_{2^{k-1}+1} \\
&= a_1 + a_2 + \sum_{k=2}^N 2^{k-1} a_{2^{k-1}+1} \\
&= a_1 + a_2 + \sum_{j=1}^{N-1} 2^j \underbrace{a_{2^j+1}}_{\leq a_{2^j}} \\
&\leq a_1 + a_2 + \sum_{j=1}^{N-1} 2^j a_{2^j+1}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n},$$

so auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

■

### Example 5.2.11

Für welche  $s > 0$  konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^s}}_{a_n}?$$

- Quotientenkriterium:  $\rightarrow 1$  FAIL
- **Reihenverdichtung:** Verdichtete Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{ns}} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(2^{1-s})^n}_q.$$

Das ist eine **geometrische Reihe**, die genau für  $|q| < 1$ . aber  $q = 2^{1-s} < 1$  genau dann wenn  $s > 1$



### 5.3 Umordnung von Reihen

#### Definition 5.3.1

Wir nennen eine bijektive Abbildung  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine **Umordnung**. Ist  $(a_n) \subset \mathbb{R}$ , so heißt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

die (zu  $\sigma$  gehörige) Umordnung der Reihe.

Wir nennen die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

**unbedingt konvergent**, falls **jede** Umordnung der Reihe gegen denselben Wert konvergiert. Konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

aber nicht unbedingt, so heißt die Reihe **bedingt konvergent**.

#### Proposition 5.3.2 Dirichletscher Umordnungssatz

Eine absolut konvergente Reihe ist unbedingt konvergent.

#### Proof Satz 5.3.2

Sei

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

absolut konvergent und  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  bijektiv. Sei  $\varepsilon > 0$

1

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

konvergiert

$$\implies \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq m \geq n_0 : \sum_{k=m}^n |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$$

(Partialsummen Cauchy)

2 Ist

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|,$$

so

$$\exists n_1 \geq n_0 : \left| \sum_{k=1}^{n_1} a_k - s \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

3 Wähle  $m_1 \in \mathbb{N} : \{1, \dots, n_1\} \subset \{\sigma(1), \dots, \sigma(m_1)\} (\rightsquigarrow \sigma \text{ bijektiv})$

Sei  $n \geq m_1$  beliebig. Dann  $\exists n_2, \dots, n_l \in \mathbb{N} : n_1 < n_2 < \dots < n_l$

$$\{1, \dots, n_1, n_2, \dots, n_l\} = \{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\}.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^n a_{\sigma(k)} - \sum_{k=1}^{n_1} a_k \right| &= \left| \sum_{j=2}^l a_{n_j} \right| \\ &\leq \sum_{k=n_2}^{n_l} |a_k| \\ &\stackrel{1}{<} \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Nun

$$\begin{aligned} \forall n \geq m : \left| s - \sum_{k=1}^n a_{\sigma(k)} \right| \\ \leq \underbrace{\left| s - \sum_{k=1}^n a_k \right|}_{\stackrel{2}{\leq} \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\left| \sum_{k=1}^{n_1} a_k - \sum_{k=1}^n a_{\sigma(k)} \right|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon \end{aligned} \quad \blacksquare$$

### Proposition 5.3.3 Riemannscher Umordnungssatz

Sei

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

konvergent nicht absolut konvergent. Dann gibt es zu jedem  $s \in \mathbb{R}$  eine Umordnung  $\sigma$  mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = s.$$

**Teil II:** Funktionen und Stetigkeit

**Part II.**

**Funktionen und Stetigkeit**

## 6 Elementare topologische Konzepte in $\mathbb{R}$

### 6.1 Offene und abgeschlossene Mengen

#### Definition 6.1.1

Eine Menge  $A \subset \mathbb{R}$  heißt **abgeschlossen** falls der Grenzwert jeder konvergenten Folge  $(x_n) \subset \mathbb{R}$  auch zu  $A$  gehört:  $x_1, x_2, \dots \in A$  und  $x_n \rightarrow x \in \mathbb{R} \implies x \in A$ . Ist hingegen  $\mathbb{R} \setminus A$  abgeschlossen, so heißt  $A$  **offen**.

#### Example 6.1.2

$a < b$ ,  $A := [a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$  Sei  $(x_n) \subset A$ , d.h.,  $x_1, x_2, \dots \in A$  mit  $x_n \rightarrow x (x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$

Stabilität von ' $\leq$ ', ' $\geq$ ' unter Limesbildung  $\xRightarrow{a \leq x_n \leq b} a \leq x, x \leq b \implies x \in A \implies A$  abgeschlossen.  
Setzte für  $\varepsilon > 0, x \in \mathbb{R} : B_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < \varepsilon\}$  "offener  $\varepsilon$ -Ball um  $x$ "

#### Lemma 6.1.3

Eine Menge  $A \subset \mathbb{R}$  ist offen genau dann, wenn

$$\forall x \in A \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset A$$

#### Proof Lemma 6.1.3

" $\implies$ " Angenommen  $\exists x \in A \forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \not\subset A$   
 $\implies \exists x \in A \forall n \in \mathbb{N} : \exists x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap (\mathbb{R} \setminus A)$ .  $\implies (x_n) \subset \mathbb{R} \setminus A \wedge x_n \rightarrow x \in A$ . Also kann  $\mathbb{R} \setminus A$  nicht abgeschlossen sein, also  $A$  nicht offen.  $\implies (A \text{ offen} \implies \text{Bedingung gilt})$  ■

" $\impliedby$ " zu zeigen ... gilt  $\implies A$  offen. ( $\iff \mathbb{R} \setminus A$  enthalten)  
Sei  $(x_n) \subset \mathbb{R} \setminus A$  konvergent gegen  $x \in \mathbb{R}$ . Angenommen,  $x \in A$ . Nach Stern  $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset A$ . Da  $x_n \rightarrow x : \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : x_n \in B_\varepsilon(x) \subset A$ . Damit  $\forall n \geq N : x_n \in A$  Widerspruch zu  $x_n \in \mathbb{R} \setminus A$  ■

#### Theorem 6.1.4 (offene Teilmenge als Topologie)

Das System  $T$  aller offenen Teilmengen von  $\mathbb{R}$  hat folgende Eigenschaften

T1)  $\emptyset, \mathbb{R} \in T$

T2)  $A, B \in T \implies A \cap B \in T$

T3) Ist  $I$  eine Indexmenge und  $(A_i)_{i \in I} \subset T$ , so ist  $\bigcup_{i \in I} A_i \in T$

Das bedeutet, dass  $T$  eine **Topologie** auf  $\mathbb{R}$  ist.

- Allgemein: Topologien  $\hat{=}$  Systeme offener Mengen

#### Proof

Alles nach Lem. 6.1.3

(T1)  $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{T}$

$$A \text{ offen} \iff \forall x \in A : \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset A$$

$A = \emptyset$ , so trivialerweise erfüllt. für  $A = \mathbb{R}$ :

$$\forall x \in \mathbb{R}; \forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \implies (T1)$$

(T2) zz.:  $A, B$  offen  $\implies A \cap B$  offen

$$(i) A \cap B = \emptyset \xrightarrow{(T1)} a \cap B \in T$$

$$(ii) A \cap B \neq \emptyset \implies \exists x : x \in A \wedge x \in B.$$

$$A \wedge B \text{ offen} \implies \exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 : B_{\varepsilon_1}(x) \subset A \wedge B_{\varepsilon_2}(x) \subset B.$$

$$\begin{aligned} \text{Dann } B_\varepsilon(x) &\subset B_{\varepsilon_1}(x) \subset A \wedge B_\varepsilon(x) \subset B_{\varepsilon_2}(x) \subset B \\ \implies B_\varepsilon(x) &\subset A \cap B \implies A \cap B \in \mathcal{T} \end{aligned}$$

(T3)  $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{T}$  (d.h.  $\forall i \in I : A_i$  ist offen)

zu zeigen  $\bigcup_{i \in I} A_i$  offen. Sei  $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ . Dann  $\exists i_0 \in I : x \in A_{i_0}$ . Aber  $A_{i_0}$  offen, also  $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset A_{i_0}$ . Damit  $B_\varepsilon(x) \subset A_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ . Also  $\bigcup_{i \in I} A_i$  offen. ■

### Lemma 6.1.5

Seien  $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ . Dann ist  $(a, b)$  offen und für  $-\infty < a \leq b < \infty$  das Intervall  $[a, b]$  abgeschlossen.

### Proof Lem 6.1.5

$(a, b)$  offen:  $x \in (a, b)$   $\varepsilon := \min\{d_1, d_2\} \implies B_\varepsilon(x) \subset (a, b)$  enthalten.  
 $\implies (a, b)$  offen.  $[a, b]$  abgeschlossen.: Hierzu  $\mathbb{R} \setminus [a, b]$  offen. Aber  $\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$ .  
 Das ist nach Thm 6.1.4 offen  $\implies [a, b]$  abgeschlossen. ■

### Definition 6.1.6 Häufungs-, Berührungspunkte

Sei  $A \in \mathbb{R} \wedge a \in \mathbb{R}$ . Wir nennen  $a$  einen

- i) **Berührungspunkt** von  $A$ , falls in jedem  $B_\varepsilon(a)$   $\varepsilon > 0$ , mindestens ein Element aus  $A$  liegt.
- ii) **Häufungspunkt** von  $A$ , falls in jedem  $B_\varepsilon(a)$ ,  $\varepsilon > 0$ , unendlich viele Elemente aus  $A$  liegen

### Example 6.1.7

$$A = (0, 1] \cup \{2\}$$

- Dann ist  $a = 0$  Berührungspunkt und Häufungspunkt

Formal: Sei  $\varepsilon > 0$  und sei  $(x_n) = (\frac{1}{n})$ . Dann  $(x_n) \subset (0, 1]$  und  $x_n \rightarrow 0$ . D.h.  $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |x_n| < \varepsilon$ , also  $0 < x_n < \varepsilon$ . Damit ist 0 Häufungspunkt von  $A$ .

- Dann ist  $a = 2$  Berührungspunkt, aber kein Häufungspkt.  
 Ist  $0 < \varepsilon < 1$ , so  $B_\varepsilon(2) \cap A = \{2\}$ . Also ist  $a = 0$  Berührungspunkt, aber kein Häufungspunkt von  $A$

## 6.2 Kompaktheit

### Definition 6.2.1

Wir nennen eine Menge  $A \subset \mathbb{R}$  **kompakt** falls jede Folge in  $A$  eine Teilfolge hat, die gegen ein Element aus  $A$  konvergiert. D.h.: Ist  $(x_n) \subset A$ , so  $\exists (x_{n_k}) \subset (x_n) \exists x \in A : x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$ .

### Example 6.2.2

Wir betrachten

$$A := \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$B := [0, 1],$$

$$C := [0, \infty) (= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\})$$

- $A$  ist **nicht kompakt**: Betrachte  $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ .  
Per Def:  $(x_n) \subset A$ . Aber  $x \rightarrow 0$ . Jede Teilfolge von  $(x_n)$  konvergiert auch gegen  $x = 0$ . Aber  $0 \notin A$ . Damit konvergiert jede Teilfolge von  $(x_n)$  gegen  $0 \notin A$ , also  $A$  nicht kompakt
- $B$  ist **kompakt**: Sei  $x_n \subset [0, 1]$ . Also  $(x_n)$  beschränkt. Nach Bolzano-Weierstraß hat  $(x_n)$  eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k}) : x_{n_k} \rightarrow x \in \mathbb{R}$ . Aber  $[0, 1]$  ist abgeschlossen, also  $x \in [0, 1]$ . Da  $(x_n)$  beliebig,  $B$  kompakt
- $C$  ist **nicht kompakt**: ( $C = [0, \infty)$ ). Betrachte  $(x_n) = (n)$ . Dann  $(x_n) \subset C$  und jede Teilfolge divergiert gegen  $+\infty$ . Also konvergiert keine Teilfolge und damit  $C$  nicht kompakt

### Theorem 6.2.3 Heine-Borel

Eine Menge  $A \subset \mathbb{R}$  ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

### Proof Theorem 6.2.3

“  $\Rightarrow$  ” zu zeigen:  $A$  kompakt  $\Rightarrow A$  abgeschlossen und beschränkt

**Abgeschlossen:** zu zeigen  $(x_n) \subset A$  konvergiert mit  $x_n \rightarrow x \in \mathbb{R}$ , so  $x \in A$ .

Sei  $(x_n)$  eine solche Folge. Dann konvergiert  $x_n$  gegen  $x \in \mathbb{R}$ . Nach Kompaktheit  $\exists (x_{n_k}) \subset (x_n) \exists x \in A : x_{n_k} \rightarrow x$ . Aber **jede** Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert gegen denselben Limes. Also  $x_{n_k} \rightarrow x, k \rightarrow \infty$ . Aber Limiten sind eindeutig, also  $x = y \in A$ . Also  $x \in A$ , also ist  $A$  abgeschlossen

**Beschränkung:** Angenommen,  $A$  ist nicht beschränkt, (nach oben unbeschränkt). Dann gibt es eine Folge  $x_n \subset A$ , die monoton gegen  $+\infty$  divergiert. Dann aber auch jede Teilfolge, und damit kann keine Teilfolge konvergieren  $\Rightarrow$  Widerspruch zu Kompaktheit.  
 $\Rightarrow A$  ist beschränkt

“  $\Leftarrow$  ” Sei  $A \subset \mathbb{R}$  abgeschlossen und beschränkt. Sei  $(x_n) \subset A$ . Da  $A$  beschränkt, ist  $(x_n)$  beschränkt. Nach Bolzano-Weierstraß  $\exists (x_{n_k}) \subset (x_n) \exists x \in \mathbb{R} : x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$ . Aber  $A$  ist abgeschlossen und damit  $x \in A$ . Also ist  $A$  kompakt ■

- Maximum ist Supremum, das in der Menge enthalten ist, und Minimum ist Infimum, das in der Menge enthalten ist

### Theorem 6.2.4

Ist  $K \subset \mathbb{R}$  kompakt, so existieren  $\max(K) \wedge \min(K)$ .

**Proof Thm. 6.2.4**

(Für Maximum. Sei  $m := \sup(K)$ . Nach Heine-Borel:  $K$  beschränkt, also  $m < \infty$ . Da  $m = \sup(K)$ ,  $\exists(x_n) \subset K : x_n \rightarrow m$ . Nach Heine-Borel:  $K$  abgeschlossen  $\implies m = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in K$ . Damit ist  $m$  Maximum. ■

- $[0, 1]$  kompakt,  $\min[0, 1] = 0, \max[0, 1] = 1$ .
- $(0, 1)$  nicht kompakt,  $\inf(0, 1) = 0 \notin (0, 1)$
- $[0, \infty)$  nicht kompakt,  $\sup[0, \infty) = \infty \notin \mathbb{R}$ .

**6.3 Dichtheit,  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R}$** 

Dichtheit bezieht sich auf Approximierbarkeit.

**informell:**  $B \in \mathbb{R}$  liegt **dicht** in  $\mathbb{R}$ , falls jedes Element aus  $\mathbb{R}$  durch Elemente aus  $B$  approximiert werden kann.

**Definition 6.3.1**

Sei  $A \subset \mathbb{R}$ . Eine Teilmenge  $B \subset A$  heißt **dicht in  $A$** , falls

$$\forall x \in A \forall \varepsilon > 0 \exists y \in B_\varepsilon(x) : y \in B.$$

**Theorem 6.3.2  $\mathbb{Q}$  ist dicht in  $\mathbb{R}$** 

- Bereits in Kapitel 3 gesehen:  $\sqrt{2}$  kann durch rationale Zahlen approximiert werden. D.h.  $\exists(x_n) \subset \mathbb{Q} : x_n \rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ . (speziell  $\mathbb{Q}$  nicht abgeschlossen) Thm 6.3.2: Das geht für alle  $x \in \mathbb{R}$

**Theorem 6.3.3 Dezimaldarstellungen**

$$\forall x \in [0, 1] \forall k \in \mathbb{N} \exists! a_k \in \{0, \dots, 9\} : x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 10^{-k}. \quad (10)$$

**Proof Satz 6.3.3**

10 entspricht  $0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$   
(Übungsblatt 6 Aufgabe 3) ■

**Proof Satz 6.3.2**

Sei  $x \in [0, 1] \wedge x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 10^{-k}$  die Dezimaldarstellung aus Satz 6.3.3. Definiere  $(x_n)$  via  $x_n := \sum_{k=1}^n a_k 10^{-k} \in \mathbb{Q}$ . Aber  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , also ist  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$  dicht in  $[0, 1]$ . Ist  $x \in \mathbb{R}$ , so sei  $m \in \mathbb{Z}$  die größte ganze Zahl mit  $m \leq x$ . Dann  $x = m + \Theta, \Theta \in (0, 1]$ . Nach erstem Teil  $\exists(\Theta_n) \subset \mathbb{Q} \cap [0, 1] : \lim_{n \rightarrow \infty} \Theta_n$ . Dann  $(m + \Theta_n) \subset \mathbb{Q} \wedge x = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{m + \Theta_n}_{\in \mathbb{Q}}$ . Also  $\mathbb{Q}$  dicht in  $\mathbb{R}$ . ■ **Erinnerung:**  $\mathbb{Q}$  abzählbar (Cantorsches Diagonalschema, Kapitel 1)

**Theorem 6.3.4**

$\mathbb{R}$  ist überabzählbar

**Proof 6.3.5   Satz 6.3.4**

Angenommen  $\mathbb{R}$  abzählbar, so auch  $(0, 1)$ . Dann  $\exists x_n \subset (0, 1) : \forall x \in (0, 1) \exists n \in \mathbb{N} : x = x_n$ .  
 Nach 6.3.3 können wir schreiben:

$$\forall a_{ij} \in \{0, \dots, 9\}$$

$$x_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13} \dots$$

$$x_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23} \dots$$

$$x_3 = 0, a_{31}a_{32}a_{33} \dots$$

$$\vdots =$$

$$b_{jj} := \begin{cases} a_{jj} + 2 & = \text{falls } a_{jj} \leq 5 \\ a_{jj} - 2 & = \text{falls } a_{jj} > 5 \end{cases}$$

Betrachte  $z := 0, b_{11}b_{22}b_{33}b_{44} \dots$ . Damit  $\forall j \in \mathbb{N} : |z - x_j| \geq 10^{-j}$ , also  $\forall j \in \mathbb{N} : x_j \neq z$ .  
 $\Rightarrow \mathbb{R}$  ist überabzählbar. ■

$ \sum_{k=1}^{\infty} b_k k 10^{-k} - \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} 10^{-k}  = \text{something}$
---



## 7 Funktionen und Stetigkeit

### 7.1 Funktinen

$$\Omega \subset \mathbb{R}, f : \Omega \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$$

Setze  $\text{Gr}(f) := \{(x, f(x)) : x \in \Omega\}$  “**Graph**” von  $f : \text{Gr}(f) \subset \mathbb{R}$ .

#### Example 7.1.1

Ist  $n \in \mathbb{N}_0, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  mit  $a_n \neq 0$  Dann:  $\gamma : \mathbb{R} \ni x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$  **Polynomfunktion** vom Grad  $n$ . Kurz: Polinom

#### Example 7.1.2

Sind  $p, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Polynome, so heißt

$$\frac{p}{q} : \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : q(x) = 0\} \ni x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$$

**rationale Funktion**

#### Example 7.1.3

$$|\cdot| : \mathbb{R} \ni x \mapsto |x| = \begin{cases} x & = x \geq 0 \\ -x & = x < 0 \end{cases}$$

“Betragfunktion”

#### Example 7.1.4

Für  $x \in \mathbb{R}$   
 $\lfloor x \rfloor := \max \{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$   
 $\lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} \ni x \mapsto \lceil x \rceil \in \mathbb{Z}$  “Gaußklammer”

#### Example 7.1.5

$$\text{Für } x \in \mathbb{R} : \text{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & = x > 0 \\ 0, & = x = 0 \\ -1, & = x < 0 \end{cases} \text{ “Signumsfunktion”}$$

### 7.2 Stetigkeit

**Idee:** Kleine Änderung der Argumente  $\Rightarrow$  kleine Änderung der Funktionswerte

#### Definition 7.2.1

Sei  $A \subset \mathbb{R}$  nichtleer. Eine Funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **stetig in**  $x_0 \in A$ , falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Ist  $f$  in **jedem**  $x_0 \in A$  stetig, so nennen wir  $f$  **stetig** (in  $A$ )

Ist  $f$  in  $x_0 \in A$  nicht stetig, so heißt  $f$  in  $x_0$  **unstetig**

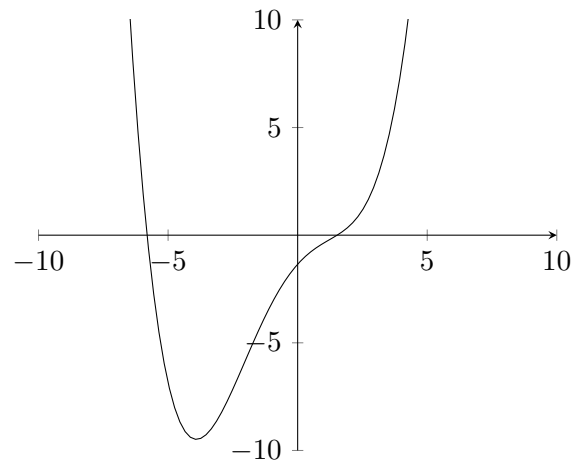


Figure 1: Test000

**Example 7.2.2**

- Konstante Funktion:  $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto c \in \mathbb{R}$ .  
Ist  $\varepsilon > 0, x_0 \in \mathbb{R}$ . Für alle  $\delta > 0 : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ .  
 $\implies$  Stetigkeit
- $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto x \in \mathbb{R}$  (Identität)  
Ist  $\varepsilon > 0, x_0 \in \mathbb{R}$ , so setze  $\delta := \varepsilon$ . Dann:  $|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .  $\implies$  Stetigkeit
- $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ .

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x + x_0| |x - x_0| \leq (|x| + |x_0|) |x - x_0|. \quad (11)$$

Sei  $x_0 \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ . Wir setzten  $\underbrace{\delta}_{\text{Hängt nun von } x_0 \text{ ab}} := \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{2|x_0|+1} \right\}$ .

Dann:  $|x - x_0| < \delta$ , so mit (11)

$$|f(x) - f(x_0)| \stackrel{(11)}{\leq} (|x - x_0| + 2|x_0|) \cdot \delta \leq (1 + 2|x_0|) \cdot \frac{\varepsilon}{2|x_0|+1} = \varepsilon.$$

**Example 7.2.3**

$A \subset \mathbb{R}$  nichtleer,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  **Lipschitz**  $\iff \exists L \geq 0$  (Lipschitzkonst.)  $\forall x, y \in A : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ .

Sei  $x_0 \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ . Setzte  $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$ , so ist  $|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| \leq L \cdot |x - x_0| \leq L \cdot \delta = L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$ . **Stetig!** "Lipschitzstetig"

**Example 7.2.4**

Für  $x \in \mathbb{R} : \text{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$  "Signumsfunktion"

Sei  $0 < \varepsilon < 1$ . Dann gilt  $\forall \delta > 0 : |\text{sgn}(\frac{\delta}{2}) - \text{sgn}(0)| = |1 - 0| = 1 > \varepsilon$ , aber  $|\frac{\delta}{2} - 0| = \frac{\delta}{2} < \delta$

Falls "  $\delta$  nur von  $\varepsilon$ " abhängt:

**Definition 7.2.5**

Sei  $A \subset \mathbb{R}$  nichtleer.  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **gleichmäßig stetig** in  $A$ , falls  
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x_0 \in A : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

Stetigkeit von  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0 : \forall x_0 \in \mathbb{R} : \exists \delta > 0 : \forall y \in \mathbb{R} : \\ |x_0 - y| < \delta \implies |f(x_0) - f(y)| < \varepsilon$$

Gleichmäßige Stetigkeit:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, y \in \mathbb{R} : \\ |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

**Example 7.2.6**

Die Funktion  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.

Funktionen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  können multipliziert und addiert werden.

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &:= f(x) + g(x) & x \in \mathbb{R} \\ (f \cdot g)(x) &:= f(x) \cdot g(x) & x \in \mathbb{R} \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &:= \frac{f(x)}{g(x)} & x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

**Theorem 7.2.7**

Sei  $R \subseteq \mathbb{R}$  nichtleer, sowie  $f, g : R \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0 \in R$ . Dann sind  $f + g$ , sowie  $f \cdot g$  stetig in  $x_0$ . Gilt weiter  $g(x_0) \neq 0$ , so ist auch  $\frac{f}{g}$  stetig in  $x_0$ . Sind also  $f, g : R \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $R$ , so sind  $f + g, f \cdot g$  stetig in  $R$ , und  $\frac{f}{g}$  ist stetig auf  $\{x \in R : g(x) \neq 0\}$ .

**Proof Theorem 7.2.7.**

(i) Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann finden wir  $\delta_1 > 0$  und  $\delta_2 > 0$ , sodass

$$\begin{aligned} |x - x_0| < \delta_1 &\implies |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ |x - x_0| < \delta_2 &\implies |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

Setze  $\delta := \min \{\delta_1, \delta_2\}$ . Dann gilt für alle  $x \in R$  mit  $|x - x_0| < \delta$ , dass

$$\begin{aligned} |(f + g)(x) - (f + g)(x_0)| &= |f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)| \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

$\implies (f + g)$  stetig in  $x_0$

(ii) Sei  $\varepsilon > 0, M := |g(x_0)| + 1$ . Dann finden wir  $\delta_1 > 0$  und  $\delta_2 > 0$ , sodass

$$\begin{aligned} |x - x_0| < \delta_1 &\implies |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2M}, \\ |x - x_0| < \delta_2 &\implies |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2|f(x_0)|}, \end{aligned}$$

und  $\delta_3 > 0$

$$\forall x \in R : |x - x_0| < \delta_3 \implies |g(x) - g(x_0)| < 1 \quad (\implies |g(x) - g(x_0)| < M)$$

Setze  $\delta := \min \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ . Sei  $x \in R$  mit  $|x - x_0| < \delta$ , dann gilt

$$\begin{aligned} |(fg)(x) - (fg)(x_0)| &= |f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)| \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |g(x)||f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)||g(x) - g(x_0)| \\ &< M \frac{\varepsilon}{2M} + |f(x_0)| \frac{\varepsilon}{2|f(x_0)|} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

$\implies (fg)$  stetig in  $x_0$

(iii) Übungsaufgabe

### Example 7.2.8

1. Beispiel 7.2.2  $f1 : \mathbb{R} \ni x \mapsto x \in \mathbb{R}$  stetig ist.
2. Induktiv folgt  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^n$  ist stetig (nach Theorem 7.2.7)
3. Da konstante Funktionen stetig sind, folgt nach Theorem 7.2.7, dass für jedes  $a \in \mathbb{R} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto ax$  stetig ist.
4. Jede rationale Funktion ist stetig.

### Theorem 7.2.9 (Präsenzaufgabe)

Seien  $R_1, R_2 \subset \mathbb{R}$  nichtleer sowie  $f : R_1 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : R_2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0$  bzw. in  $f(x_0)$ . Dann ist  $g \circ f : R_1 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0$ , wobei

$$(g \circ f)(x) := f(g(x)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

## 7.3 Charakterisierung der Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen

### Theorem 7.3.1 Folgencharakter der Stetigkeit

Sei  $A \subset \mathbb{R}$  nichtleer. Eine Funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig in  $x \in A$ , genau dann wenn für jede Folge  $(x_n) \subset A$  mit  $x_n \rightarrow x$  gilt, dass  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ .

### Proof 7.3.2 Theorem 7.3.1

“ $\implies$ ” Sei  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x \in A$  und  $(x_n) \subset A$  mit  $x_n \rightarrow x$ . Dann gibt es ein  $\delta > 0$ , sodass  $\forall y \in A$  mit  $|x - y| < \delta$  impliziert, dass  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ . Da  $x_n \rightarrow x$ , gibt es ein

$N \in \mathbb{N}$  mit  $|x_n - x| < \delta \quad \forall n \geq N$ . Sei  $n \geq N$ . Dann gilt also  $|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon$ . Also  $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ .

“ $\Leftarrow$ ” Angenommen  $f$  ist nicht stetig in  $x$ . Dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , sodass  $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in A : |x_n - x| < \frac{1}{n}, \delta > 0$  und  $|f(x) - f(x_n)| \geq \varepsilon$ . Also  $x_n \rightarrow x$ , aber  $f(x_n)$  konvergiert nicht gegen  $f(x)$ . ■

### Definition 7.3.3

Sei  $A \subset \mathbb{R}$  nichtleer und  $x_0 \in \mathbb{R}$  ein Berührungspunkt von  $A$ .

1. Dann definieren wir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) := \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A}} f(x) := c$$

falls für jede Folge  $x_n$

2. Rechtsseitiger Limes von  $f$  in  $x_0$  :  $\lim_{x \searrow x_0} f(x) = c$ , falls  $x_0$  Berührungspunkt von  $A$  und für jede Folge  $(x_n) \subset (x_0, \infty)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$ .

Sei  $A$  nach oben unbeschränkt, dann schreibe

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) := c,$$

falls  $\forall (x_n) \subset A$  mit  $x_n \rightarrow \infty$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$ .

Analog:  $\lim_{n \nearrow \infty} f(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .

### Corollary 7.3.4

Sei  $A \subset \mathbb{R}$  nichtleer. Dann ist eine Funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  genau dann stetig, wenn  $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad \forall x_0 \in A$  gilt.

### Example 7.3.5

Sei  $x_0 \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{x \searrow x_0} \lfloor x \rfloor = x_0$$

$$\lim_{x \nearrow x_0} \lfloor x \rfloor = x_0 - 1$$

## 7.4 Sätze über stetige Funktionen

### Theorem 7.4.1

Seien  $-\infty < a < b < \infty$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit  $f(a), f(b) < 0$ . Dann  $\exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) = 0$

### Proof Theorem 7.4.1

CE  $f(a) < 0$  und  $f(b) > 0$  (ansonsten betrachte  $-f$ ).

Es sei  $I_0 := [a, b]$ . Ist  $I_n = [a_n, b_n]$  für  $n \in \mathbb{N}$  definiert, so setze

$$I_{n+1} := \begin{cases} [a_n, \frac{a_n+b_n}{2}], & \text{falls } f(\frac{a_n+b_n}{2}) > 0 \\ [\frac{a_n+b_n}{2}, b_n], & \text{sonst.} \end{cases}$$

Induktiv folgt  $\text{diam}(I_n) = 2^{-n}(b-a)$  f.a.  $n \in \mathbb{N}$ . Weiter ist  $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$ . Also ist  $(I_n)$  eine Schachtelung abgeschlossener Intervalle mit  $\text{diam}(I_n) \rightarrow 0$ . Nach Theorem 4.3.2 gibt es genau ein  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ . Speziell  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x$  ist stetig, also gilt

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq 0$$

#### Example 7.4.2 Eindimensionaler Brouwer

Sei  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  stetig. Dann hat  $f$  einen Fixpunkt d.h. es gibt ein  $x_0 \in [0, 1]$  mit  $f(x_0) = x_0$ , denn die Hilfsfunktion  $g(x) := f(x) - x$ . Diese ist stetig und es gibt  $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x, y \in K : |x - y| < \delta$  und  $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$ .

Wähle solches  $\varepsilon > 0$ . Dann finden wir für alle  $n \in \mathbb{N}$   $x_n, y_n \in K$  mit  $|x_n - y_n| < 2^{-n}$  und  $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ . Da  $K$  kompakt, hat  $(x_n)$  eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})$  mit Grenzwert  $x \in K$ . Nun ist

$$|y_{n_k} - x| \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| \rightarrow 0.$$

Also konvergiert auch  $(y_{n_k})$  gegen  $x$ .

#### Theorem 7.4.3

weiß nicht könnte alles sein

#### Theorem 7.4.4

Sei  $K \subseteq \mathbb{R}$  kompakt und  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann nimmt  $f$  sowohl Maximum als auch Minimum in  $K$  an.

#### Proof Theorem 7.4.4

Wir zeigen,  $f(K)$  ist kompakt. Sei  $(y_n) \subset f(K)$  eine Folge. Nach Def. des Bildes gibt es also zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein  $x_n \in K$  mit  $f(x_n) = y_n$ . Da  $K$  kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k}) \subset K$  mit Grenzwert  $x \in K$ . Da  $f$  stetig ist, folgt  $f(x) = f(\lim_{n_k \rightarrow \infty} x_{n_k}) \stackrel{\text{stetig}}{=} \lim_{n_k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n_k \rightarrow \infty} y_{n_k}$

## 8 Funktionenfolgen und deren Konvergenz

### 8.1 Funktionenfolgen und deren Konvergenz

Ist  $\Omega \subset \mathbb{R}$  nichtleer und für jedes  $n \in \mathbb{N}$  eine Funktion  $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definiert, so nennen wir  $(f_n)$  eine Funktionenfolge

#### Example 8.1.1

Sei für  $n \in \mathbb{N}$   $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^n$ . z.B.

1.  $f_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$
2.  $f_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$
3. usw.

#### Definition 8.1.2 Punktweise Konvergenz

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}$  nichtleer und  $f, f_1, f_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

Wir sagen  $(f_n)$  **konvergiert punktweise gegen**  $f$ , falls  $\forall x \in \Omega$  die Folge  $(f_n(x))$  gegen  $f(x)$  konvergiert.

Gibt es ein  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass  $(f_n)$  punktweise gegen  $f$  konvergiert, so nennen wir  $(f_n)$  **punktweise konvergent**.

Wir nennen dann  $f$  **Grenzfunktion** von  $(f_n)$ .

Das bedeutet:

$$\forall x \in \Omega : \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

#### Example 8.1.3

Sei  $\Omega = [0, 1]$ . Wir betrachten  $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f_n(x) = x^n, x \in [0, 1]$ .

Ist  $x \in [0, 1)$ , so  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ . Hingegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1$  für  $x = 1$ . Also konvergiert  $(f_n)$  punktweise gegen

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

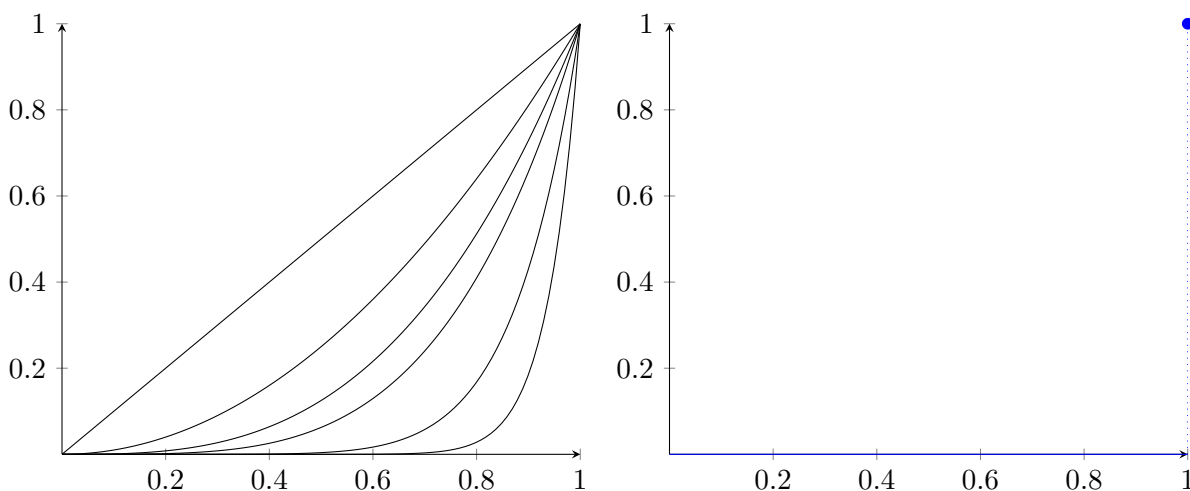


Figure 2: Definition 8.1.2

**Definition 8.1.4**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}$  nichtleer und  $f, f_1, f_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir sagen  $(f_n)$  **konvergiert gleichmäßig gegen**  $f$ , falls für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, sodass  $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$  f.a.  $x \in \Omega$  und alle  $n \geq N$  gilt.

Das bedeutet:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : \forall x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

**Lemma 8.1.5**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}$  nichtleer und  $f, f_1, f_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  so, dass  $(f_n)$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert. Dann konvergiert  $(f_n)$  auch punktweise gegen  $f$ .

**Example 8.1.6**

Die Folge aus Beispiel 8.1.3 konvergiert nicht gleichmäßig.  
Sei  $1 > \varepsilon > 0, N \in \mathbb{N}$  beliebig. Setze  $x := \sqrt[N]{\varepsilon}$ . Dann ist  $x_0 \in (0, 1)$  und  $f_n(x_0) = \varepsilon$ , d.h.  $|f_n(x_0) - f(x_0)| = |f_n(x_0)| = \varepsilon \geq \varepsilon$

**Theorem 8.1.7**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}$  nichtleer und  $f_1, f_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen. Konvergiert  $(f_n)$  gleichmäßig gegen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , so ist  $f$  stetig.

**Proof Theorem 8.1.7**

Sei  $x_0 \in \Omega$  und  $\varepsilon > 0$  beliebig. Dann finden wir wegen glm. Konv. ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \dots$

$(f_n), f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  Funktion.

können wir Konzepte der Folgen auch auf Funktionenfolgen anwenden?

$(a_n) \subset \mathbb{R} \mapsto (f_n : \Omega \ni x \mapsto a_n)$   $f, f_1, f_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f_n \rightarrow f$  punktweise Konvergent  $\iff \forall x \in \Omega : f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$

Sind alle  $f_n$ 's stetig, so nicht unbedingt  $f$ !

**Verschärfung:**  $f_n \rightarrow f$  **gleichmäßig**, falls  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \forall x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ .

**Punktweise Konvergenz:**  $\forall x \in \Omega : \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

- Bei gleichmäßiger Konvergenz  $f_n \rightarrow f$  : Alle  $f_n$ 's stetig  $\implies f$  stetig.

**8.2 Normierte Vektorräume stetiger Funktionen****In Vektorräumen:**

- Addition möglich
- Multiplikation mit Skalaren möglich
- Nullvektor ( $\hat{=}$  neutrales Element der Addition)

$\Omega \subset \mathbb{R}$  nichtleer, dann bilden die stetigen Funktionen auf  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  einen **Vektorraum** (über  $\mathbb{R}$ ), den wir  $C(\Omega)$  nennen. Für  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, f, g \in C(\Omega) : \lambda f + \mu g : \Omega \ni x \mapsto \lambda f(x) + \mu g(x) \in \mathbb{R}$ .

Der Nullvektor ist hier die Nullfunktion,  $\mathbf{0} : \Omega \ni x \mapsto 0 \in \mathbb{R}$ .



**Ziel:** Ordne Funktionen eine “Länge” zu.

### Definition 8.2.1

Sei  $X$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Eine Abbildung  $||\cdot|| : \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  heißt **Norm** (Längenfunktion), falls:

- (i)  $||x|| = 0 \iff x = 0$ .
- (ii)  $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \forall x \in X : ||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$
- (iii)  $\forall x, y \in X : ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ . (Dreiecksungleichung)

### Example 8.2.2

$C_b(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ stetig und beschränkt}\}$ . ( $f$  beschränkt  $\iff \exists M \geq 0 \forall x \in \Omega : |f(x)| \leq M$ ). Dies ist auch ein Vektorraum, und es definiert  $||f||_{\infty, \Omega} := \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$ ,  $f \in C_b(\Omega)$  eine **Norm** darauf. (Auf  $C(\Omega)$  **nicht**: z.B.  $\Omega = (0, 1)$ ,  $f(x) := \frac{1}{x}$ , dann  $||f||_{\infty, \Omega} \not< \infty$ )

$||\cdot||_{\infty, \Omega}$  “Supremumsnorm” ( $\hat{=}$  Länge/Größe von Funktion)

(0)  $||\cdot||_{\infty, \Omega} : C_b(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ . (Hier geht ein:  $f \in C_b(\Omega)$  beschränkt)

(i)  $f \in C_b(\Omega) \wedge \underbrace{||f||}_{\infty, \Omega} = 0$ , zu zeigen  $\boxed{f = 0}$

$$\sup_{x \in \Omega} |f(x)| = 0 \implies (\forall x \in \Omega : f(x) = 0) \implies f = 0.$$

$$\text{und } ||f||_{\infty, \Omega} = \sup_{x \in \Omega} 0 = 0.$$

(ii)  $\lambda \in \mathbb{R}, f \in C_b(\Omega)$ , so ist  $\forall x \in \Omega : |\lambda f(x)| =$

$$\begin{aligned} &= |\lambda| |f(x)| \implies ||\lambda f||_{\infty, \Omega} \\ &= \sup_{x \in \Omega} |\lambda f(x)| \\ &= \sup_{x \in \Omega} |\lambda| \cdot |f(x)| \\ &= |\lambda| \sup_{x \in \Omega} |f(x)| \\ &= |\lambda| \cdot ||f||_{\infty, \Omega}. \end{aligned}$$

(iii)  $f, g \in C_b(\mathbb{R})$ . Dann  $\forall x \in \Omega : |f(x) + g(x)| \leq \underbrace{|f(x)|}_{\leq ||f||_{\infty, \Omega}} + \underbrace{|g(x)|}_{\leq ||g||_{\infty, \Omega}} \leq ||f||_{\infty, \Omega} + ||g||_{\infty, \Omega}$ . Supremum in  $x$

- Beachte:  $(\mathbb{R}, ||\cdot||)$  ist auch normierter Raum.

**Konvergenz:**  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : ||x_n - x|| < \varepsilon$

### Definition 8.2.3

Sei  $(X, ||\cdot||)$  normierter Vektorraum, sowie  $x, x_1, x_2, \dots \in X$ . Wir sagen,  $(x_n)$  **konvergiert** bezüglich  $||\cdot||$  gegen  $x$ , falls  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : ||x_n - x|| < \varepsilon$

**Proposition 8.2.4**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}$  nichtleer,  $f, f_1, \dots \in C_b(\Omega)$ . Dann konvergiert  $(f_n)$  genau dann gleichmäßig gegen  $f$ , wenn  $(f_n)$  bezüglich  $\|\cdot\|_{\infty, \Omega}$  gegen  $f$  konvergiert.  $\iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\infty, \Omega} = 0$

“ $\implies$ ”

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : (\forall x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \left( \sup_{x \in \Omega} : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \right)$$

$$(\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \|f_n(x) - f(x)\|_{\infty, \Omega} \leq \varepsilon) \implies f_n \rightarrow f, \|\cdot\|_{\infty, \Omega} \quad \blacksquare$$

**Example 8.2.5**

$$f_n : \mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{1}{n(1+x^2)} \in \mathbb{R}.$$

**Punktweise Konvergenz**  $f_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \left( \frac{1}{1+x^2} \right) \rightarrow 0$ . Also  $f_n \rightarrow 0$  punktweise konvergent.

**Gleichmäßig Konvergent** bedeutet nach Proposition 8.2.4:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - \underbrace{f(x)}_0| &= \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\infty, \omega} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Hier:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - \underbrace{f(x)}_{=0}| = \frac{1}{n} \underbrace{\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}}_{=1} = \frac{1}{n},$$

also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\infty, \Omega} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

gleichmäßige Konvergenz

**Example 8.2.6**

$$f_n : [0, 1] \ni x \mapsto x^n \in \mathbb{R},$$

so  $f_n \rightarrow f$  punktweise konvergent mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

Haben

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1)} |x^n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

## 9 Potenzreihen

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_Nx^N = \sum_{n=0}^N a_nx^n$$

### Definition 9.0.1

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R} \wedge x_0 \in \mathbb{R}$ . Dann heißt der **formale Ausdruck**

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

**Potenzreihe** mit **Entwicklungspunkt**  $x_0$ . Die **Konvergenzmenge** von  $f$  ist

$$D_f := \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \text{ konv.} \right\}$$

Wir nennen dann  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  die durch die Potenzreihe **dargestellte Funktion** (kurz auch Potenzreihe)

### Example 9.0.2

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Dies konvergiert genau dann wenn  $|x| < 1$ .

Geometrische Reihe:  $f(x) = \frac{1}{1-x} = \underbrace{1 + x + x^2 + \dots}$