

BMA

Vor.: $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ und $0 < a_1 < b_1$ Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen, rekursiv definiert durch

$$a_{n+1} := \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} \text{ und } b_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Beh.:

- (a) (i) $0 < a_n < b_n$,
(ii) $a_n \leq a_{n+1}$ und $b_n \geq b_{n+1}$
(iii) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$
- (b) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren gegen den gleichen Limes und $(a_n - b_n)$ ist eine Nullfolge
- (c) $\exists! x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$ und für dieses x gilt $x = \sqrt{a_1 b_1}$

Proof

- (a) (i) **I.V.** $\exists n : 0 < a_n < b_n$

I.A. $n = 1$

$0 < a_n < b_n$ gegeben.

I.S. $n \leadsto n + 1$

zu zeigen $0 < a_{n+1} < b_{n+1}$, also zu zeigen:

$$0 < \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} < \frac{a_n + b_n}{2}$$

$$0 < \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} < \frac{a_n + b_n}{2}$$

$$0 < 4a_nb_n < (a_n + b_n)^2$$

$$0 < 4a_nb_n < a_n^2 + 2a_nb_n + b_n^2$$

$$-4a_nb_n < 0 < a_n^2 - 2a_nb_n + b_n^2$$

$$\underbrace{-4a_nb_n}_{\text{da } a_n > 0 \text{ und } b_n > 0} < 0 < (a_n - b_n)^2$$

da $a_n > 0$ und $b_n > 0$

■

(ii)

$$a_n \leq 1 \cdot a_n$$

$$a_n \leq \frac{2b_n}{b_n + b_n} a_n \quad | \quad \text{da } a_n + b_n \leq b_n + b_n \iff \frac{1}{b_n + b_n} \leq \frac{1}{a_n + b_n}$$

$$a_n \leq \frac{2b_n}{a_n + b_n} a_n$$

$$a_n \leq a_{n+1}$$

$$b_n \geq 1 \cdot b_n$$

$$b_n \geq \frac{2b_n}{2} \quad | \quad \text{da } a_n + b_n \leq b_n + b_n$$

$$b_n \geq \frac{a_n + b_n}{2}$$

$$b_n \geq b_{n+1} \quad \blacksquare$$

(iii) Also zu zeigen: $\forall x \in [a_{n+1}, b_{n+1}] : x \in [a_n, b_n]$. Sei $x \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$ gegeben, zu zeigen: $x \in [a_n, b_n]$.

Also zu zeigen $a_n \leq x \leq b_n$. Es gilt, da $x \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$: $a_n \leq a_{n+1} \leq x \leq b_{n+1} \leq b_n$ \blacksquare

(b) zu zeigen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Da $(a_n), (b_n)$ monoton und durch sich gegenseitig beschränkt, gilt $(a_n), (b_n)$ konvergent, also $\exists a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $\exists b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, wähle ein solches a und b . Zu zeigen $a = b$.

Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + b_n}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{a + b}{2}$$

$$b = \frac{a + b}{2}$$

$$2b = a + b$$

$$b = a$$

Und zu zeigen $(b_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Also $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n)$ \blacksquare

(c) zu zeigen Existiert $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$ und Eindeutigkeit dieses x 'es Setze $x := \sqrt{a_1 b_1}$ zu zeigen $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$

I.V. $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}} = a_1 b_1$

I.A. $n = 1$

$a_1 b_1 = a_1 b_1$ gegeben.

i.S. $n \rightsquigarrow n + 1$

$$a_{n+1} b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \cdot \frac{a_n + b_n}{2}$$

$$a_{n+1} b_{n+1} = a_n b_n \quad | \quad \text{nach I.V.}$$

$$a_{n+1} b_{n+1} = a_1 b_1$$

Also $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = a_1 b_1$

Also $a_1 b_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)^2$

Also $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{a_1 b_1} = x$

Also $x \geq a_n$ und $x \leq b_n$, also $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$. Noch zu zeigen Eindeutigkeit von x

Da $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}([a_n, b_n]) = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ gilt das Intervallschachtelungsprinzip, also $\exists! \textit{guenter} \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$, also folgt für ein soches *guenter*, $x = \textit{guenter}$ und da *guenter* eindeutig ist, ist auch x eindeutig. ■

(d)

$$[a_1, b_1] = [1, 2]$$

$$[a_2, b_2] = \left[\frac{4}{3}, \frac{3}{2} \right]$$

$$[a_3, b_3] = \left[\frac{24}{17}, \frac{17}{12} \right]$$

$$[a_4, b_4] = \left[\frac{816}{577}, \frac{577}{408} \right]$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{3}{2}$$

$$x_3 = \frac{17}{12}$$

$$x_4 = \frac{577}{408}$$