Integrierter Kurs I (WiSe 2023/24)

Prof. M. Müller, Prof. U. Nowak, T. Dannegger

Universität Konstanz

Übungsblatt Nr. 6

Abgabe in Ilias bis zum 11.12.2023, 08:00 Uhr.
Besprechung am 13.12.2023 in der Übung.

Aufgabe 1: Komplexe Zahlen (7 Punkte)

a) Berechnen Sie **(3 Punkte)**

i) $\frac{1}{\mathrm{i}}$, iii) $\sqrt[5]{1-\mathrm{i}}$, v) 1^{i},

ii) $z \cdot z^*$ mit $z = 2 - 6\mathrm{i}$, iv) $(3 + 10\mathrm{i})(3 - 2\mathrm{i})$, vi) i^{i}.

Hinweis: Bei uneindeutigen Ausdrücken sind alle Lösungen gesucht.

b) Zeichnen Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene. **(3 Punkte)**

i) $M_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |2z - 1 + \mathrm{i}| \leq 2\}$,

ii) $M_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(2\mathrm{i}z^2) = 0\}$,

iii) $M_3 := \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}(z^3)| < \frac{1}{2}|\mathrm{Re}(z^3)|\}$.

c) Beweisen Sie das Additionstheorem

$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

unter Verwendung der Euler-Formel. **(1 Punkt)**

Aufgabe 2: Taylorreihen (3 Punkte)

Berechnen Sie folgende Taylorreihen um den Punkt $x = 1$. **(3 Punkte)**

a) $f(x) = \sqrt{x}$, b) $f(x) = \ln(x)$, c) $f(x) = \frac{1}{x}$.

Hinweis: Taylorreihen um einen beliebigen Punkt x_0 sind definiert über

$$T_f(x; x_0) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left.\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}\right|_{x=x_0} (x - x_0)^n.$$

Aufgabe 3: Mathematisches Pendel (unbepunktet)

Die Bewegungsgleichung des mathematischen Pendels mit Auslenkwinkel φ, Masse m, Länge l und Erdbeschleunigung g lautet

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\sin(\varphi) \qquad (*)$$

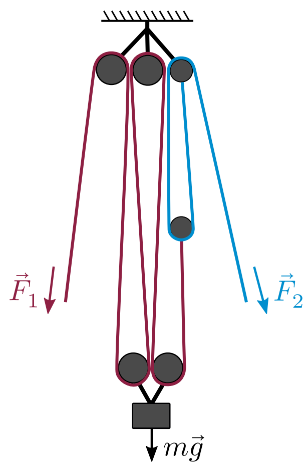
a) Führen Sie auf der rechten Seite von Gleichung $(*)$ eine Kleinwinkelnäherung durch, das heißt taylorentwickeln Sie den Sinus um $\varphi = 0$ bis zur ersten Ordnung.

b) Bis zu welcher Ordnung müsste man die Taylorentwicklung durchführen, damit die relative Abweichung bei $\varphi = 30°$ kleiner als 1 % ist?

c) Vergewissern Sie sich, dass Gleichung $(*)$ auch mit der Kleinwinkelnäherung den Energiesatz erfüllt, indem Sie die kinetische und die potenzielle Energie des Pendels berechnen und die beiden addieren.

Aufgabe 4: Flaschenzug (unbepunktet)

Betrachten Sie die abgebildete Flaschenzug-Konstruktion.



a) Mit welcher Kraft F_1 muss am roten Seil gezogen werden, um die Masse m festzuhalten, wenn das blaue Ende festgeknotet wird?

b) Mit welcher Kraft F_2 muss man umgekehrt am blauen Seil ziehen, wenn das rote Ende festgeknotet wird?