
Übungsblatt Nr. 2

Aufgabe 1: Orthonormalbasis

a)

$$\begin{aligned}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_3 &\stackrel{\text{Distr.}}{=} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 + \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 \\&= \delta_{13} + \delta_{23} \\&= 0 + 0 \\&= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2) \cdot (7\vec{e}_1 - 16\vec{e}_3) &\stackrel{\text{Distr.}}{=} (4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2) \cdot 7\vec{e}_1 - (4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2) \cdot 16\vec{e}_3 \\&\stackrel{\text{Distr.}}{=} 28\vec{e}_1\vec{e}_1 + 21\vec{e}_1\vec{e}_2 - 64\vec{e}_1\vec{e}_3 - 48\vec{e}_2\vec{e}_3 \\&= 28\delta_{11} + 21\delta_{12} - 64\delta_{13} - 48\delta_{23} \\&= 28\end{aligned}$$

b) Genau dann wenn zwei Vektoren orthogonal sind, oder wenn einer der Vektoren der Nullvektor ist, dann ist das Skalarprodukt zweier Vektoren 0. Also wollen wir ein X finden, wofür gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + X\vec{e}_3) \cdot (-\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3) = 0$$

$$(2\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + X\vec{e}_3) \cdot (-\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3) = 0$$

$$\sum_{i=1}^3 a_i b_i = 0$$

$$2 \cdot (-1) + (-5) \cdot 2 + X \cdot (-3) = 0$$

$$-2 - 10 - 3X = 0$$

$$3X = -12$$

$$X = -4$$

Also für $X := -4$ sind die Vektoren \vec{a} und \vec{b} orthogonal, oder einer der beiden ist der Nullvektor. Da aber $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ sind die Vektoren orthogonal

c) Genau dann, wenn die Vektoren \vec{v} und \vec{w} linear unabhängig sind, gilt:

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \neg(\lambda_1 = \lambda_2 = 0) : \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w} \neq \vec{0}$$

Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \wedge \neg(\lambda_1 = \lambda_2 = 0)$ gegeben, zu zeigen:

$\lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w} \neq \vec{0}$, wir führen einen Beweis durch Widerspruch und nehmen dazu an $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} :$

$\neg(\lambda_1 = \lambda_2 = 0) \wedge \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w} = 0$, dann gilt:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 w_1 = 0,$$

$$\lambda_1 v_2 + \lambda_2 w_2 = 0 \text{ und}$$

$$\lambda_1 v_3 + \lambda_2 w_3 = 0.$$

Also gilt für die erste Gleichung:

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 w_1 = 0$$

$$\lambda_1 \cdot 1 = -\lambda_2 \cdot (-3)$$

$$\lambda_1 = 3\lambda_2.$$

Dies in die zweite Gleichung eingesetzt ergibt:

$$\lambda_1 v_2 + \lambda_2 w_2 = 0$$

$$3\lambda_2 v_2 + \lambda_2 w_2 = 0$$

$$\lambda_2 (3v_2 + w_2) = 0$$

$$\lambda_2 (3 \cdot (-1) + 2) = 0$$

$$\lambda_2 (-1) = 0$$

$$\lambda_2 = 0$$

Also $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ Da aber $\neg(\lambda_1 = \lambda_2 = 0)$ führt dies zu einem Widerspruch und die Annahme $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \neg(\lambda_1 = \lambda_2 = 0) \wedge \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w} = 0$, war falsch, also gilt $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \neg(\lambda_1 = \lambda_2 = 0) \wedge \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w} \neq 0$. \square

Aufgabe 2: Raketengleichung

a) Es gelte:

$$dp_{\text{treibstoff}} = m dv$$

$$dp_{\text{rakete}} = -dm v_0.$$

Da gilt, dass

$$F = \frac{dp}{dt},$$

und da die Kraft auf die Rakete, die Gravitationskraft plus die Kraft, die durch den Treibstoff aufkommt, ist, gilt:

$$F_{\text{rakete}} = F_{\text{gravitation}} + F_{\text{treibstoff}}$$

Also:

$$\frac{dp_{\text{rakete}}}{dt} = -mg - \frac{dp_{\text{treibstoff}}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} m v_{\text{rakete}} = -mg - \frac{d}{dt} m v_0$$

$$m dv = -mg dt - dm v_0$$

$$dv = -g dt - \frac{v_0}{m} dm$$

$$\int_0^T dv = \int_0^T -g dt - \int_{m_0}^{m_T} \frac{v_0}{m} dm$$

$$v(T) - v(0) = -gT - v_0 \ln \frac{m_T}{m_0}$$

da die Rakete pro Zeiteinheit die Gasmenge α mit der Geschwindigkeit v_0 ausstößt und die Anfangsmasse m_0 hat, gilt für m_T :

$$m_T = m_0 - \alpha t,$$

somit gilt:

$$v(T) = -v_0 \cdot \ln\left(\frac{m_0 - \alpha T}{m_0}\right) - gT$$

für T , die Brenndauer.

b) $s(t) = \int_{t_0}^t v(T) dT$: setze $u := \frac{m_0 - \alpha T}{m_0}$, dann gilt $du = -\frac{\alpha dT}{m_0}$

$$\begin{aligned} v(T) &= -v_0 \ln\left(\frac{m_0 - \alpha T}{m_0}\right) - gT \\ v(T)dT &= -v_0 \ln\left(\frac{m_0 - \alpha T}{m_0}\right)dT - gTdT \\ \int_0^t v(T)dT &= -\int_0^t v_0 \ln\left(\frac{m_0 - \alpha T}{m_0}\right)dT - \int_0^t gTdT \\ s(t) &= -\int_0^t v_0 \ln\left(1 - \frac{\alpha T}{m_0}\right)dT - \frac{1}{2}gt^2 \\ s(t) &= -v_0 \int_0^t \ln\left(\frac{-\alpha}{m_0}T + 1\right)dT - \frac{1}{2}gt^2 \\ s(t) &= -v_0 \left[\frac{\frac{-\alpha}{m_0}T + 1}{\frac{-\alpha}{m_0}} \left(\ln\left(\frac{-\alpha}{m_0}T + 1\right) - 1 \right) \right]_0^t - \frac{1}{2}gt^2 \\ s(t) &= -v_0 \left[\left(T - \frac{m_0}{\alpha}\right) \left(\ln\left(\frac{-\alpha}{m_0}T + 1\right) - 1 \right) \right]_0^t - \frac{1}{2}gt^2 \\ s(t) &= -v_0 \left[\left(t - \frac{m_0}{\alpha}\right) \left(\ln\left(\frac{-\alpha}{m_0}t + 1\right) - 1 \right) - \left(\left(0 - \frac{m_0}{\alpha}\right) \left(\underbrace{\ln\left(\frac{-\alpha}{m_0}0 + 1\right)}_{=0} - 1 \right) \right) \right] - \frac{1}{2}gt^2 \\ s(t) &= -v_0 \left[\left(t - \frac{m_0}{\alpha}\right) \left(\ln\left(\frac{-\alpha}{m_0}t + 1\right) - 1 \right) - \left(\frac{m_0}{\alpha}\right) \right] - \frac{1}{2}gt^2 \\ s(t) &= -v_0 \left[\left(t - \frac{m_0}{\alpha}\right) \ln\left(\frac{-\alpha}{m_0}t + 1\right) - \left(t - \frac{m_0}{\alpha}\right) - \left(\frac{m_0}{\alpha}\right) \right] - \frac{1}{2}gt^2 \\ s(t) &= -v_0 \left[\left(t - \frac{m_0}{\alpha}\right) \ln\left(\frac{-\alpha}{m_0}t + 1\right) - t \right] - \frac{1}{2}gt^2 \\ s(t) &= \left(\ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right) - 1 \right) v_0 t - \frac{m_0}{\alpha} \ln\left(\frac{-\alpha}{m_0}t + 1\right) - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

c) Bei mehrstufigen Raketen wird Ballast abgeworfen, wodurch das Gewicht verringert wird. Bei geringerem Gewicht muss nach $F = m \cdot a \implies \frac{1}{m} \propto m$ bei gleicher Kraft, also bei gleicher Schubkraft.

Aufgabe 3: Freier Fall

a)

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^t \vec{v} dt + h_0$$

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^t \left(\int_{t_0}^t \vec{a} dt + \vec{v} \right) dt + h_0$$

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \vec{a} dt^2 + \int_{t_0}^t \vec{v} dt + h_0$$

Da wir annehmen, dass wir nicht nach oben oder unten springen gilt nach dem Superpositionsprinzip:

$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h_0$$

Dabei ist $h_0 = 8 \text{ m}$. Um die Auftreffzeit zu berechnen, müssen wir $h(t) = 0$ setzen:

$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h_0$$

$$0 \text{ m} = -\frac{1}{2}gt^2 + 8 \text{ m}$$

dann gilt nach der Binomischen Formel:

$$t_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 + 2g \cdot 8 \text{ m}}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}g\right)}$$

$$t_{1,2} = \frac{\mp \sqrt{g \cdot 16 \text{ m}}}{g}$$

$$t_{1,2} = \frac{\mp 4\sqrt{10 \text{ m}^2/\text{s}^2}}{10 \text{ m}/\text{s}^2}$$

$$t_1 = \frac{-4\sqrt{10 \text{ m}/\text{s}}}{10 \text{ m}/\text{s}^2}$$

$$t_2 = \frac{4\sqrt{10 \text{ m}/\text{s}}}{10 \text{ m}/\text{s}^2}$$

Da t_1 eine negative Zeit ist, wir aber erst zur Zeit 0 s losspringen, kann dies nicht sein und die Auftreffzeit ist $t_2 = \frac{4\sqrt{10 \text{ m}/\text{s}}}{10 \text{ m}/\text{s}^2} = \frac{2\sqrt{10}}{5} \text{ s}$

b) Es gilt weiterhin

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \vec{a} dt^2 + \int_{t_0}^t \vec{v} dt + h_0$$

und $h_0 = 8 \text{ m}$, da für die Höhe nach dem Superpositionsprinzip nur die Geschwindigkeit in die y-Richtung von Bedeutung ist, gilt für $t_0 = 0.5 \text{ s}$

$$h(t) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \vec{a} dt^2 + \int_{t_0}^t v_{y0} dt + h_0$$

$$h(t) = -\frac{1}{2}g(t - t_0)^2 + v_{y0} \cdot (t - t_0) + 8 \text{ m}$$

Dabei soll $h(t_2) = 0$ m, also:

$$0 \text{ m} = -\frac{1}{2}g(t_2 - 0.5 \text{ s})^2 + v_{y_0}(t_2 - 0.5 \text{ s}) + h_0$$

$$v_{y_0}(t_2 - 0.5 \text{ s}) = \frac{1}{2}g(t_2 - 0.5 \text{ s})^2 - h_0$$

$$v_{y_0} = \frac{1}{2}g(t_2 - 0.5 \text{ s}) - \frac{h_0}{t_2 - 0.5 \text{ s}}$$

$$v_{y_0} = \frac{1}{2}g\left(\frac{2\sqrt{10}}{5}\text{s} - 0.5 \text{ s}\right) - \frac{h_0}{\frac{2\sqrt{10}}{5}\text{s} - 0.5 \text{ s}}$$

$$v_{y_0} = \frac{1}{2}g\left(\frac{4\sqrt{10} - 5}{10}\text{s}\right) - \frac{h_0}{\frac{4\sqrt{10} - 5}{10}\text{s}}$$

$$v_{y_0} = \frac{1}{2}10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \left(\frac{4\sqrt{10} - 5}{10}\text{s}\right) - \frac{10h_0}{4\sqrt{10} - 5} \frac{1}{\text{s}}$$

$$v_{y_0} = \frac{1}{2}(4\sqrt{10} - 5) \frac{\text{m}}{\text{s}} - \frac{10 \cdot 8 \text{ m}}{4\sqrt{10} - 5} \frac{1}{\text{s}}$$

$$v_{y_0} = \frac{1}{2}(4\sqrt{10} - 5) \frac{\text{m}}{\text{s}} - \frac{80 \cdot (4\sqrt{10} + 5)}{160 - 25} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{y_0} = \frac{135(4\sqrt{10} - 5) - 160 \cdot (4\sqrt{10} + 5)}{270} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{y_0} = \frac{-25(4\sqrt{10}) - 295 \cdot 5}{270} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{y_0} = \frac{-5(4\sqrt{10}) - 59 \cdot 5}{54} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{y_0} \approx -6.634$$