BMA

Vor.: X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. $\forall A : A \subset X : f[A] = \{f(a) : a \in A\}$, $\forall B : B \subset Y : f^{-1}[B] = \{x \in X : f(x) \in B\}$.

(a) **Vor.:** $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$
Beh.:

(i) f nicht surjektiv, also $\exists (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \forall (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (x + y, x - y) \neq (a, b)$

(ii) f injektiv, also $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \implies (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$

(iii)

$$f^{-1}[\{(a, b)\}] = \begin{cases} \{(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2})\} & \text{wenn } \frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2} \in \mathbb{Z} \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases} =: M$$

(iv) $f[\{(x, x)\}] = \{(2x, 0)\}$

Proof (i) - (iv)

(i) setze $(a, b) := (1, 0)$, dann gilt $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, zu zeigen $\forall (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (x + y, x - y) \neq (a, b)$,
sei $x, y \in \mathbb{Z}$ gegeben, zu zeigen $(x + y, x - y) \neq (1, 0)$,
wir führen einen Beweis durch Widerspruch und nehmen an $(x + y, x - y) = (a, b)$, dann gilt insesondere $x - y = 0$, also $x = y$, außerdem gilt $x + y = 1$, also $x + x = 1$, also $2 \cdot x = 1$ $\lightning$gibt keine Lösung in $\mathbb{Z}$, da im Allgemeinen keine Inverse in $\mathbb{Z}$ in der Multiplikation gibt. Also war unsere Annahme falsch, dass $\exists x, y \in \mathbb{Z} : (x + y, x - y) = (a, b)$, also gilt $\forall x, y \in \mathbb{Z} : (x + y, x - y) \neq (a + b)$ ■

(ii) Seien $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$, zu zeigen $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. Es gilt

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1) &= f(x_2, y_2) \\ (x_1 + y_1, x_1 - y_1) &= (x_2 + y_2, x_2 - y_2) \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} x_1 - y_1 &= x_2 - y_2 \\ x_1 - x_2 &= y_1 - y_2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
x_1 + y_1 &= x_2 + y_2\\
\underbrace{x_1 - x_2}_{y_1 - y_2} &= y_2 - y_1\\
y_1 - y_2 &= y_2 - y_1\\
2y_1 &= 2y_2\\
y_1 &= y_2
\end{aligned}$$

Außerdem

$$\begin{aligned}
x_1 + \underbrace{y_1}_{y_2} &= x_2 + y_2\\
x_1 + y_2 &= x_2 + y_2\\
x_1 &= x_2
\end{aligned}$$

Also gilt $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$ und somit $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ ■

(iii) Mengengleichheit:

"$\subset$" $M \subset f^{-1}[\{(a,b)\}]$

Fall 1: $\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2} \in \mathbb{Z}$

zu zeigen $\{(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2})\} \subset f^{-1}[\{(a,b)\}]$

also zu zeigen $(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}) \in f^{-1}[\{(a,b)\}]$, also zu zeigen $(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und $f(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}) \subset \{(a,b)\}$, da $\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2} \in \mathbb{Z}$, gilt $(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und $(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}, \frac{a+b}{2}) - \frac{a-b}{2}) = (a,b)$, was zu zeigen war.

Fall 2:

zu zeigen $\emptyset \subset f^{-1}[\{(a,b)\}]$, gegeben.

"$\supset$" $M \supset f^{-1}[\{(a,b)\}]$

Fall 1: $\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2} \in \mathbb{Z}$

Da f injektiv, gibt es zu jedem Bild genau ein Urbild, also ist, das oben genannte Urbild $(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2})$, das einzige.

Fall 2:

sei $g : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, (x,y) \mapsto (x+y, x-y)$, dann gilt analog zu (i), dass g injektiv.

$\{(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2})\} \subset g^{-1}[\{(a,b)\}]$

also $(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}) \in g^{-1}[\{(a,b)\}]$, also $(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ und $g(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}) \subset \{(a,b)\}$,

da $a, b, 2 \in \mathbb{Z}$, gilt $\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2} \in \mathbb{Q}$, gilt $(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ und $(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}, \frac{a+b}{2}) - \frac{a-b}{2}) = (a,b)$, und da g injektiv, existiert nur diese eine Lösung. Da aber $\frac{a+b}{2} \notin \mathbb{Z}$, oder $\frac{a-b}{2} \notin \mathbb{Z}$, ist $(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}) \notin \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ also ist das Urbild leer ■

(iv) zu zeigen $\{(2x, 0)\} = \{f(a,b) : (a,b) \in \{(x,x)\}\}$

$\{f(a,b) : (a,b) \in \{(x,x)\}\} = \{f(a,b) : (a,b) = (x,x)\} = \{f(x,x)\} = \{(x+x, x-x)\} = \{2x, 0\}$ ■

(b) (i) **Beh.:** Für alle Teilmengen $B_1, B_2 \subset Y$ gilt $f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$

Proof

zu zeigen

$$f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$$

$$\begin{aligned} f^{-1}[B_1 \cap B_2] &= \{x \in X : f(x) \in B_1 \cap B_2\} \\ &= \{x \in X : f(x) \in B_1 \wedge f(x) \in B_2\} \\ &= \{x \in X : f(x) \in B_1\} \cap \{x \in X : f(x) \in B_2\} \\ &= f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2] \end{aligned}$$

■

(ii) **Beh.:**

$A_1, A_2 \subset X$ gilt $f[A_1] \setminus f[A_2] \subset f[A_1 \setminus A_2]$, also

$\forall y \in Y : y \in f[A_1] \setminus f[A_2] \implies y \in f[A_1 \setminus A_2]$

Proof

Sei $y \in f[A_1] \setminus f[A_2]$ gegeben, dann gilt:

$$\begin{aligned} & y \in f[A_1] \setminus f[A_2] \\ \iff & y \in f[A_1] \wedge y \notin f[A_2] \\ \iff & y \in \{f(x) : x \in A_1\} \wedge y \notin \{f(x) : x \in A_2\} \end{aligned}$$

Also existiert ein $x_1 \in A_1 : f(x_1) = y$ und für alle $x_2 \in A_2 : f(x_2) \neq y$, also gilt insbesondere $x_1 \notin A_2$, da sonst $f(x_1) \neq y$.
Zu zeigen $y \in f[A_1 \setminus A_2]$, also $y \in \{f(x) : x \in A_1 \setminus A_2\}$, also zu zeigen $\exists x \in A_1 \setminus A_2$ mit $f(x) = y$.
Setze $x := x_1$, zu zeigen $x \in A_1 \setminus A_2$ und $f(x) = y$ dann gilt $x = x_1 \in A_1$ und $x = x_1 \notin A_2$, also $x \in A_1 \setminus A_2$, was zu zeigen war.
$f(x) = f(x_1) = y$

■