2023-12-22
Winter Semester 2023/2024

University of Konstanz
Faculty of Science
(Physics)

Übungsblatt No 8

Exercise 1: Glühwein im U-Rohr

a) Linke Seite $F_l = m_l a = -V_l \rho g = -\left(\frac{L}{2} + x\right) \cdot A \cdot \rho g$
Rechte Seite $F_r = m_r a = -V_r \rho g = -\left(\frac{L}{2} - x\right) \cdot A \cdot \rho g$
Also ist die Resultierende Kraft ist dann $F_l - F_r = -\left(\frac{L}{2} + x\right) \cdot A \cdot \rho g + \left(\frac{L}{2} + x\right) \cdot A \cdot \rho g = -\left(\frac{L}{2} + x - \frac{L}{2} + x\right) \cdot A\rho g = -2x \cdot A \cdot \rho \cdot g$

b) Aus a) gilt: $-2x \cdot A\rho \cdot g = m \cdot \ddot{x}$ also

$$0 = L \cdot A \cdot \rho \cdot \ddot{x} + 2x \cdot A \cdot \rho \cdot g$$
$$0 = \ddot{x} + x \cdot \frac{2g}{L}$$

und da die Gleichung eine Linearkombination von Ableitungen von x gleich 0 ist, ist es eine Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators. Also ist $w_0^2 = \frac{2g}{L} \iff w_0 = \sqrt{\frac{2g}{L}}$

c) also einfach mal $z(t) = A\exp(\lambda t)$ eingesetzt ergibt sich das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} 0 &= A\lambda^2 \exp(\lambda t) + \omega_0^2 A \exp(\lambda t) \\ 0 &= \lambda^2 + \omega_0^2 \\ \lambda^2 &= -\omega_0^2 \\ \lambda &= \pm\omega_0 i \end{aligned}$$

zwei Lösungen, also $\lambda_1 = i\omega_0$, $\lambda_2 = -i\omega_0$ also

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{Re}(z(t)) \\ &= \mathrm{Re}(A_1 \exp(\lambda_1 t) + A_2 \exp(\lambda_2 t)) \\ &= \mathrm{Re}(A_1(\cos(\omega_0 t) + i\sin(\omega_0 t)) + A_2(\cos(-\omega_0 t) + i\sin(-\omega_0 t)) \\ &= \mathrm{Re}(A_1)\cos(\omega_0 t) + \mathrm{Im}(A_1)\sin(\omega_0 t)) + \mathrm{Re}(A_2)\cos(\omega_0 t) - \mathrm{Im}(A_2)\sin(\omega_0 t) \\ &= \mathrm{Re}(A_1 + A_2)\cos(\omega_0 t) + \mathrm{Im}(A_1 - A_2)\sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t = 0) &= x_0 \\ x_0 &= \mathrm{Re}(A_1 + A_2)\cos(\omega_0 0) + \mathrm{Im}(A_1 - A_2)\sin(\omega_0 0) \\ x_0 &= \mathrm{Re}(A_1 + A_2) \end{aligned}$$

und für v_0

$$
\begin{aligned}
v(t=0) &= v_0 \\
v_0 &= -\operatorname{Re}(A_1+A_2)\omega_0 \sin(\omega_0 0) + \operatorname{Im}(A_1-A_2)\omega_0\cos(\omega_0 0) \\
v_0 &= \operatorname{Im}(A_1-A_2)\omega_0 \\
\frac{v_0}{\omega_0} &= \operatorname{Im}(A_1-A_2)
\end{aligned}
$$

Exercise 2: Rutschendes Geschenkband

Die Masse m_{wwhw}, des Bandes über dem Tisch lässt sich berechnen mit $\frac{l}{l-x} = \frac{m_{ges}}{m_{wwhw}} \iff m_{wwhw} = \frac{m_{ges}}{l}\cdot(l-x)$, für die Reibungskraft gilt $F_r = \mu \cdot F_{Norm} = \mu m_{ges}\cdot\frac{l-x}{l}\cdot g$ also gilt

$$
\begin{aligned}
F_{ges} &= F_g - F_r \\
m_{ges}\ddot{x} &= m_{ges}\cdot\frac{x}{l}\cdot g - \mu g\cdot m_{ges}\frac{l-x}{l} \\
0 &= \ddot{x} - \frac{xg}{l} + \mu g\cdot\frac{l-x}{l} \\
0 &= \ddot{x} - \frac{xg}{l} - \mu g\cdot\frac{x}{l} + \mu g \\
-\mu g &= \ddot{x} - \frac{xg}{l} - \mu g\cdot\frac{x}{l} \\
-\mu g &= \ddot{x} - x\cdot(1+\mu)\cdot\frac{g}{l} \\
\frac{d}{dt} - \mu g &= \frac{d}{dt}\left(\ddot{x} - x\cdot(1+\mu)\cdot\frac{g}{l}\right) \\
0 &= \dddot{x} - \dot{x}\cdot(1+\mu)\cdot\frac{g}{l}
\end{aligned}
$$

mit $z(t) = A\exp(\lambda t)$ eingesetzt für $\dot{x}$ und $\omega_0^2 = \frac{(1+\mu)g}{l}$

$$
\begin{aligned}
\lambda^2 A\exp(\lambda t) - \omega_0^2 A\exp(\lambda t) = 0 \\
\lambda^2 &= \omega_0^2 \\
\lambda &= \pm\omega_0
\end{aligned}
$$

Mit $\lambda_1 = \omega_0, \lambda_2 = -\omega$, also

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \operatorname{Re}(A_1\exp(\lambda_1 t) + A_2\exp(\lambda_2 t)) \\
v(t) &= \operatorname{Re}(A_1)\exp(\omega_0 t) + \operatorname{Re}(A_2)\exp(-\omega_0 t)
\end{aligned}
$$

Also gilt, da das Band zu Beginn in Ruhe ist:

$$
\begin{aligned}
v(0) &= \operatorname{Re}(A_1)\exp(\omega_0 0) + \operatorname{Re}(A_2)\exp(-\omega_0 0) \\
0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} &= \operatorname{Re}(A_1) + \operatorname{Re}(A_2) \\
\operatorname{Re}(A_2) &= -\operatorname{Re}(A_1)
\end{aligned}
$$

Also gilt für $x(t)$:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \int_0^t v(t')dt' + x_0 \\
x(t) &= \int_0^t \operatorname{Re}(A_1)\exp(\omega_0 t') + \operatorname{Re}(A_2)\exp(-\omega_0 t')dt' + x_0 \\
x(t) &= \left[\frac{\operatorname{Re}(A_1)}{\omega_0}\exp(\omega_0 t') + \frac{\operatorname{Re}(A_1)}{\omega_0}\exp(-\omega_0 t')\right]_0^t + x_0 \\
x(t) &= \frac{\operatorname{Re}(A_1)}{\omega_0}\exp(\omega_0 t) + \frac{\operatorname{Re}(A_1)}{\omega_0}\exp(-\omega_0 t) - \left[\frac{\operatorname{Re}(A_1)}{\omega_0}\exp(\omega_0 0) + \frac{(A_1)}{\omega_0}\exp(-\omega_0 0)\right] + x_0 \\
x(t) &= \frac{\operatorname{Re}(A_1)}{\omega_0}\left(\exp(\omega_0 t) + \exp(-\omega_0 t)\right) - \frac{2\operatorname{Re}(A_1)}{\omega_0} + x_0
\end{aligned}
$$

es gilt

$$\ddot{x}(t) = \frac{d}{dt}v(t)$$

und da

$$\ddot{x}(t) = x(t)\cdot\frac{(1+\mu)g}{l} - \mu g$$

gilt:

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}(0) &= \frac{d}{dt}\operatorname{Re}(A_1)\left(\exp(\omega_0 0) - \exp(-\omega_0 0)\right) \\
x(0)\cdot(1+\mu)\cdot\frac{g}{l} - \mu g &= \operatorname{Re}(A_1)\omega_0\left(\exp(\omega_0 t) + \exp(-\omega_0 t)\right) \\
x_0\cdot(1+\mu)\cdot\frac{g}{l} - \mu g &= 2\operatorname{Re}(A_1)\omega_0 \\
x_0\cdot(1+\mu)\cdot\frac{g}{2l\omega_0} - \frac{\mu g}{2\omega_0} &= \operatorname{Re}(A_1)
\end{aligned}
$$

Also:

$$
\begin{aligned}
\frac{\operatorname{Re}(A_1)}{\omega_0} &= \frac{x_0\cdot(1+\mu)\cdot\frac{g}{2l\omega_0} - \frac{\mu g}{2\omega_0}}{\omega_0} \\
&= x_0\cdot(1+\mu)\cdot\frac{g}{2l\omega_0^2} - \frac{\mu g}{2\omega_0^2} \\
&= x_0\cdot\frac{1+\mu}{2} - \frac{\mu l}{2}
\end{aligned}
$$

Sei $x(t_1)$ der Zeitpunkt zu dem das Geschenkband den Tisch herunterrutscht, also $x(t_1) = l$, dann gilt für t_1 folgendes:

$$\begin{aligned}
x(t_1) &= \left(x_0 \cdot \frac{1+\mu}{2} - \frac{\mu l}{2}\right)(\exp(\omega_0 t_1) + \exp(-\omega_0 t_1)) - 2\left(x_0 \cdot \frac{1+\mu}{2} - \frac{\mu l}{2}\right) + x_0 \\
x(t_1) &= \frac{1}{2}\left(x_0 \cdot (1+\mu) - \mu l\right)(\exp(\omega_0 t_1) + \exp(-\omega_0 t_1)) - (x_0 \cdot (1+\mu) - \mu l) + x_0 \\
l &= \frac{1}{2}\left(x_0 - \mu(l - x_0)\right)(\exp(\omega_0 t_1) + \exp(-\omega_0 t_1)) - (x_0 - \mu(l - x_0)) + x_0 \\
l &= \frac{1}{2}\left(x_0 - \mu(l - x_0)\right)(\exp(\omega_0 t_1) + \exp(-\omega_0 t_1)) + \mu(l - x_0) \\
l - \mu(l - x_0) &= (x_0 - \mu(l - x_0))\cosh(\omega_0 t_1) \\
\cosh(\omega_0 t_1) &= \frac{l - \mu(l - x_0)}{x_0 - \mu(l - x_0)} \\
\omega_0 t_1 &= \operatorname{arccosh}\left(\frac{l - \mu(l - x_0)}{x_0 - \mu(l - x_0)}\right) \\
t_1 &= \frac{1}{\omega_0} \cdot \operatorname{arccosh}\left(\frac{l - \mu(l - x_0)}{x_0 - \mu(l - x_0)}\right)
\end{aligned}$$

x_0 darf nicht so groß sein, dass die Reibungskraft gleich der Gewichtskraft des Herunterhängendem Teils ist, also gilt für den Grenzfall $F_g > F_r$:

$$\begin{aligned}
F_g &> F_r \\
\frac{m_{ges} g x_0}{l} &> \frac{\mu \cdot m_{ges} g (l - x_0)}{l} \\
x_0 &> \mu(l - x_0) \\
x_0 &> \mu l - \mu x_0) \\
x_0(1+\mu) &= \mu l \\
x_0 &> \frac{\mu l}{1+\mu}
\end{aligned}$$

Somit muss x_0 größer sein als $\frac{\mu l}{1+\mu}$.