University of Konstanz
Faculty of Science (Physics)

Übungsblatt Nr. 5

Jörg und Elias

Aufgabe 1: Freier Fall auf einem rotierenden Planeten

a) Für ein Bezugsystem S', welches sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse dreht, gilt im Verhältnis zum Inerzialsystem S: $\vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$. Hier haben wir speziell die Erde in deren Bezugsystem sich ruhende Objekte gegebenüber einem Inerzialsyste, mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{2\pi}{8.6400 \cdot 10^4\,\mathrm{s}} \approx 7.272 \cdot 10^{-5}\,1/\mathrm{s}$ bei kleinen Geschwindigkeiten ist also $2\vec{\omega} \times \vec{v}'$ sehr klein und für Objekte am Äquator gilt $r \approx 6.3 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$, dann gilt am Äquator, da $\vec{\omega}$ und $\vec{r}$ orthogonal: $|2\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')| = 2\omega^2 r \approx 6.7 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m/s^2}$ also auch klein.

b) Wenn ein Körper aus Ruhe von der Höhe h fallen gelassen wird, braucht er auf der Erde die Zeit $t = \sqrt{\frac{2h}{a}}$, um auf der Erdoberfläche zu landen. Es gilt

$$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_C + \vec{F}_{ZF}$$

Da die Corioliskraft in Richtung der Schwerkraft vernachlässigt werden kann und die Zentrifugalkraft parallel zur Schwerkraft ist, gilt für die Kraft in Richtung der Schwerkraft:

$$\begin{aligned} \vec{F}_z' &= \vec{F} + \vec{F}_{ZF} \\ ma_z' &= -mg + m\omega^2 r' \\ a_z' &\approx -g \end{aligned}$$

D.h. wenn sich das Objekt zu begin in Stillstand auf der Höhe h befand, gilt

$$\begin{aligned} v_z' &\approx -gt \\ z' + h &\approx -\frac{1}{2}gt^2 + h \end{aligned}$$

D.h. wenn das Objekt die Höhe 0 m hat, dann ist die Zeit $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ verstrichen.
Es gilt für die Kraft orthogonal der Schwerkraft:

$$\begin{aligned} \vec{F}_y' &= \vec{F}_C \\ ma_y' &= -m\vec{\omega} \times \vec{v}' \\ a_y' &= -\vec{\omega} \times (\vec{v}_z' + \vec{v}_y') \\ a_y' &= -\vec{\omega} \times \vec{v}_z' - \vec{\omega} \times v_y' \end{aligned}$$

Und da das Kreuzprodukt von $\vec{\omega}$ und $\vec{v}_y$ parallel zur Schwerkraft ist, also vernachlässigbar und $\vec{v}_z$ orthogonal zu $\vec{\omega}$:

$$\begin{aligned}
a'_y &= -\vec{\omega} \times \vec{v}'_z - \vec{\omega} \times v'_y \\
\vec{a}'_y &= -\omega v'_z \\
\frac{dv'_y}{dt} &= -\omega v'_z \\
\int_{v_{y0}=0}^{v_y} dv'_y &= -\int_{t_0=0}^{t} \omega v'_z dt' \\
v'_y &= -\omega z' \\
v'_y &\approx \omega \frac{1}{2} g t^2 \\
z'_y &\approx -\frac{1}{6} \omega g t^3 \\
&\approx -\frac{2\pi g \sqrt{2h\omega}^3}{86400 * 6 * \sqrt{g}^3} \frac{1}{\text{s}}
\end{aligned}$$

c) Da dann $\vec{r}'$ und $\vec{\omega}$ nicht mehr orthogonal zueinaner stehen würden, wäre die Zentrifugalkraft kleiner, also die scheinbare Schwerkraft wäre größer. Und da das Objekt in Richtung der Schwerkraft beschleunigt wird, und diese parallel zu $\vec{r}'$ ist, ist auch die Corioliskraft kleiner.

Aufgabe 2: Einwegachterbahn

Es gilt:

$$\begin{aligned}
E_1 &= E_0 \\
mgh_1 + \frac{1}{2} m v_1^2 &= mgh_0 + \frac{1}{2} m v_1^2 \\
mgh_1 + \frac{1}{2} m v_1^2 &= mgh_0 \\
v_1^2 &= 2g(h_0 - h_1) \\
v_1 &= \sqrt{2g(h_0 - h_1)}
\end{aligned}$$

a) $v_1 = \sqrt{2g(h_0 - 2R)}$ Wenn $2R > h_0$ dann steht etwas negatives unter der Wurzel, das ist nicht so schön...
$R_{max} = \frac{1}{2} h_0$

b) $v_3 = \sqrt{2g(h_0 - h_3)} = \sqrt{2g(h_0 - (h_0 - h_0 \cos\alpha)} = \sqrt{2gh_0 \cos\alpha}$, also:

$$\vec{v} = \sqrt{2gh_0 \cos\alpha} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

c)

$$
\begin{aligned}
v_y &= \sqrt{2gh_0\cos\alpha}\sin(\alpha) - gt \\
h &= \sqrt{2gh_0\cos\alpha}\sin(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 + h_0(1-\cos\alpha)
\end{aligned}
$$

wenn also das Teilchen auf Höhe 0 ist:

$$
\begin{aligned}
0 &= \sqrt{2gh_0\cos\alpha}\sin(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 + h_0(1-\cos\alpha) \\
t &= \frac{\sqrt{2gh_0\cos\alpha}\sin(\alpha) + \sqrt{2gh_0\cos\alpha\sin^2\alpha + 2gh_0(1-\cos\alpha)}}{g} \\
t &= \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \cdot \left(\sqrt{\cos\alpha}\sin(\alpha) + \sqrt{\cos\alpha\sin^2\alpha + (1-\cos\alpha)}\right) \\
t &= \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \cdot \left(\sqrt{\cos\alpha}\sin(\alpha) + \sqrt{\cos\alpha(1-\cos^2\alpha) + 1 - \cos\alpha}\right) \\
t &= \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \cdot \left(\sqrt{\cos\alpha}\sin(\alpha) + \sqrt{\cos\alpha - \cos^3\alpha + 1 - \cos\alpha}\right) \\
t &= \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \cdot \left(\sqrt{\cos\alpha}\sin(\alpha) + \sqrt{1-\cos^3\alpha}\right)
\end{aligned}
$$

und dann hat es die Strecke $\delta x = v_3\cos(\alpha)t$ zurückgelegt:

$$
\begin{aligned}
\delta x &= \sqrt{2gh_0\cos\alpha}\cos\alpha \cdot \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \cdot \left(\sqrt{\cos\alpha}\sin(\alpha) + \sqrt{1-\cos^3\alpha}\right) \\
\delta x &= 2gh_0 \cdot \sqrt{\cos^3\alpha} \cdot \left(\sqrt{\cos\alpha}\sin\alpha + \sqrt{1-\cos^3\alpha}\right) \\
\delta x &= 2gh_0 \cdot \left(\sqrt{\cos^4\alpha}\sin\alpha + \sqrt{\cos^3\alpha - \cos^6\alpha}\right) \\
\delta x &= 2gh_0 \cdot \left(\sin\alpha\cos^2\alpha + \sqrt{\cos^3\alpha - \cos^6\alpha}\right)
\end{aligned}
$$

was quasi zu zeigen war