
Übungsblatt Nr. 2

aufgabe 1: Orthonormalbasis

a)

$$\begin{aligned}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_3 &\stackrel{\text{Distr.}}{=} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 + \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 \\&= \delta_{13} + \delta_{23} \\&= 0 + 0 \\&= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2) \cdot (7\vec{e}_1 - 16\vec{e}_3) &\stackrel{\text{Distr.}}{=} (4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2) \cdot 7\vec{e}_1 - (4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2) \cdot 16\vec{e}_3 \\&\stackrel{\text{Distr.}}{=} 28\vec{e}_1\vec{e}_1 + 21\vec{e}_1\vec{e}_2 - 64\vec{e}_1\vec{e}_3 - 48\vec{e}_2\vec{e}_3 \\&= 28\delta_{11} + 21\delta_{12} - 64\delta_{13} - 48\delta_{23} \\&= 28\end{aligned}$$

b) Genau dann wenn zwei Vektoren orthogonal sind, oder wenn einer der Vektoren der Nullvektor ist, dann ist das Skalarprodukt zweier Vektoren 0. Also wollen wir ein X finden, wofür gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + X\vec{e}_3) \cdot (-\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3) = 0$$

$$(2\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + X\vec{e}_3) \cdot (-\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3) = 0$$

$$\sum_{i=1}^3 a_i b_i = 0$$

$$2 \cdot (-1) + (-5) \cdot 2 + X \cdot (-3) = 0$$

$$-2 - 10 - 3X = 0$$

$$3X = -12$$

$$X = -4$$

Also für $X := -4$ sind die Vektoren \vec{a} und \vec{b} orthogonal, oder einer der beiden ist der Nullvektor. Da aber $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ sind die Vektoren orthogonal

c) Genau dann, wenn die Vektoren \vec{v} und \vec{w} linear unabhängig sind, gilt:

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w} \neq \vec{0}$$

Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gegeben, zu zeigen:

$\lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w} \neq \vec{0}$, wir führen einen Beweis durch Widerspruch und nehmen dazu an $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in$

$\mathbb{R} \setminus \{0\} : \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w} = 0$, dann gilt:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 w_1 = 0,$$

$$\lambda_1 v_2 + \lambda_2 w_2 = 0 \text{ und}$$

$$\lambda_1 v_3 + \lambda_2 w_3 = 0.$$

Also gilt für die erste Gleichung:

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 w_1 = 0$$

$$\lambda_1 \cdot 1 = -\lambda_2 \cdot (-3)$$

$$\lambda_1 = 3\lambda_2.$$

Dies in die zweite Gleichung eingesetzt ergibt:

$$\lambda_1 v_2 + \lambda_2 w_2 = 0$$

$$3\lambda_2 v_2 + \lambda_2 w_2 = 0$$

$$\lambda_2 (3v_2 + w_2) = 0$$

$$\lambda_2 (3 \cdot (-1) + 2) = 0$$

$$\lambda_2 (-1) = 0$$

$$\lambda_2 = 0$$

Da aber $\lambda_2 \neq 0$ führt dies zu einem Widerspruch und die Annahme $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w} = 0$, war falsch, also gilt $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w} \neq 0$. \square

aufgabe 2: Raketengleichung

a) Aus der Vorlesung wissen wir, dass gilt im Allgemeinen:

$$v(T) = -v_{rel} \cdot \ln \frac{m_T}{m_0} - gT$$

da die Rakete pro Zeiteinheit die Gasmenge α mit der Geschwindigkeit v_0 ausstößt und die Anfangsmasse m_0 hat, gilt für m_T :

$$m_T = m_0 - \alpha t,$$

somit gilt:

$$v(T) = v_0 \cdot \ln\left(\frac{m_0 - \alpha T}{m_0}\right) - gT$$

für T , die Brenndauer.

b) $s(t) = \int_{t_0}^t v(T) dT$: setze $u := \frac{m_0 - \alpha T}{m_0}$, dann gilt $du = -\frac{\alpha dT}{m_0}$

$$v(T) = -v_0 \ln\left(\frac{m_0 - \alpha T}{m_0}\right) - gT$$

$$v(T)dT = -v_0 \ln\left(\frac{m_0 - \alpha T}{m_0}\right)dT - gTdT$$

$$v(T)dT = -v_0 \ln(u) \frac{du}{du} dT - gTdT$$

$$v(T)dT = -v_0 \ln(u) \frac{du}{-\frac{\alpha dT}{m_0}} dT - gTdT$$

$$v(T)dT = v_0 \ln(u) \frac{m_0 du}{\alpha} - gTdT$$

$$v(T)dT = \frac{v_0 m_0}{\alpha} \ln(u) du - gTdT$$

$$\int_0^t v(T)dT = \frac{v_0 m_0}{\alpha} \int_{u_0}^{u_t} \ln(u) du - \int_0^t gTdT$$

$$s(t) = \frac{v_0 m_0}{\alpha} [u_t(\ln(u_t) - 1) - u_0(\ln(u_0) - 1)] - \frac{1}{2}gt^2 + s_0$$

setzte für $u_t := \frac{m_0 - \alpha t}{m_0}$ und für $u_0 := \frac{m_0 - \alpha 0}{m_0} = 1$

$$s(t) = \frac{v_0 m_0}{\alpha} \left[\frac{m_0 - \alpha t}{m_0} \left(\ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right) - 1 \right) - (\ln(1) - 1) \right] - \frac{1}{2}gt^2 + s_0$$

$$s(t) = \frac{v_0 m_0}{\alpha} \left[\frac{m_0 - \alpha t}{m_0} \left(\ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right) - 1 \right) + 1 \right] - \frac{1}{2}gt^2 + s_0$$

$$s(t) = \frac{v_0(m_0 - \alpha t)}{\alpha} \left(\ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right) - 1 \right) + \frac{v_0 m_0}{\alpha} - \frac{1}{2}gt^2 + s_0$$

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{v_0(m_0 - \alpha t)}{\alpha} \left(\ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right) - 1 \right) + \frac{v_0 m_0}{\alpha} + s_0$$

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{v_0(m_0 - \alpha t)}{\alpha} \ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right) - \frac{v_0(m_0 - \alpha t)}{\alpha} + \frac{v_0 m_0}{\alpha} + s_0$$

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{v_0(m_0 - \alpha t)}{\alpha} \ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right) + \frac{v_0}{\alpha}(m_0 - (m_0 - \alpha t)) + s_0$$

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{v_0(m_0 - \alpha t)}{\alpha} \ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right) + \frac{v_0 \alpha t}{\alpha} + s_0$$

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{v_0(m_0 - \alpha t)}{\alpha} \ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right) + v_0 t + s_0$$

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{v_0 m_0}{\alpha} \ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right) - \frac{v_0 \alpha t}{\alpha} \ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right) + v_0 t + s_0$$

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{v_0 m_0}{\alpha} \ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right) - v_0 t \ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right) + v_0 t + s_0$$

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{v_0 m_0}{\alpha} \ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right) + v_0 t \left(1 - \ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right)\right) + s_0$$

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{v_0 m_0}{\alpha} \ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right) + v_0 t \left(1 - \ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right)\right) + s_0$$

c) Bei mehrstufigen Raketen wird Ballast abgeworfen, wodurch das Gewicht verringert wird. Bei geringerem Gewicht muss nach $F = m \cdot a \implies \frac{1}{m} \propto m$ bei gleicher Kraft, also bei gleicher Schubkraft.

aufgabe 3: Freier Fall

a)

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^t \vec{v} dt + h_0$$

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^t \left(\int_{t_0}^t \vec{a} dt + \vec{v} \right) dt + h_0$$

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \vec{a} dt^2 + \int_{t_0}^t \vec{v} dt + h_0$$

Da wir annehmen, dass wir nicht nach oben oder unten springen gilt nach dem Superpositionssprinzip:

$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h_0$$

Dabei ist $h_0 = 8 \text{ m}$. Um die Auftreffzeit zu berechnen, müssen wir $h(t) = 0$ setzen:

$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h_0$$

$$0 \text{ m} = -\frac{1}{2}gt^2 + 8 \text{ m}$$

dann gilt nach der Binomischen Formel:

$$t_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 + 2g \cdot 8 \text{ m}}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}g\right)}$$

$$t_{1,2} = \frac{\mp \sqrt{g \cdot 16 \text{ m}}}{g}$$

$$t_{1,2} = \frac{\mp 4\sqrt{10 \text{ m}^2/\text{s}^2}}{10 \text{ m}/\text{s}^2}$$

$$t_1 = \frac{-4\sqrt{10 \text{ m}^2/\text{s}^2}}{10 \text{ m}/\text{s}^2}$$

$$t_2 = \frac{4\sqrt{10 \text{ m}^2/\text{s}^2}}{10 \text{ m}/\text{s}^2}$$

Da t_1 eine negative Zeit ist, wir aber erst zur Zeit 0 s losspringen, kann dies nicht sein und die Auftreffzeit ist $t_2 = \frac{4\sqrt{10 \text{ m}^2/\text{s}^2}}{10 \text{ m}/\text{s}^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ s}$

b) Es gilt weiterhin

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \vec{a} dt^2 + \int_{t_0}^t \vec{v} dt + h_0$$

und $h_0 = 8 \text{ m}$, da für die Höhe nach dem Superpositionsprinzip nur die Geschwindigkeit in die y-Richtung von Bedeutung ist, gilt für $t_0 = 0.5 \text{ s}$

$$h(t) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \vec{a} dt^2 + \int_{t_0}^t v_{y0} dt + h_0$$

$$h(t) = -g(t - t_0)^2 + v_{y0} \cdot (t - t_0) + 8 \text{ m}$$

Dabei soll $h(t_2) = 0 \text{ m}$, also:

$$\begin{aligned}
 0 \text{ m} &= -g \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ s} - 0.5 \text{ s} \right)^2 + v_{y0} \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ s} - 0.5 \text{ s} \right) + 8 \text{ m} \\
 v_{y0} \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ s} &= 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \left(\frac{4 \cdot 5}{25} \text{ s}^2 - 2 \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot 0.5 \text{ s}^2 + 0.25 \text{ s}^2 \right) - 8 \text{ m} \\
 v_{y0} \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ s} &= 10 \text{ m} \cdot \left(\frac{4}{5} - \frac{2\sqrt{5}}{5} + 0.25 \right) - 8 \text{ m} \\
 v_{y0} \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ s} &= 8 \text{ m} - 4\sqrt{5} \text{ m} + 2.5 \text{ m} - 8 \text{ m} \\
 v_{y0} \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ s} &= -4\sqrt{5} \text{ m} + 2.5 \text{ m} \mid \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \frac{1}{\text{s}} \\
 v_{y0} &= -2 \cdot 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 1.25\sqrt{5} \frac{\text{m}}{\text{s}} \\
 v_{y0} &= -10 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 1.25\sqrt{5} \frac{\text{m}}{\text{s}} \\
 v_{y0} &= \frac{-40 + 5\sqrt{5} \text{ m}}{4} \frac{1}{\text{s}}
 \end{aligned}$$

c) Es gilt weiterhin

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \vec{a} dt^2 + \int_{t_0}^t \vec{v} dt + \vec{r}_0$$

D.h.

$$\begin{aligned}
 \vec{r}(t) &= \begin{pmatrix} r_x(t) \\ r_y(t) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t a_x dt^2 + \int_{t_0}^t v_x dt + s_0 \\ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t a_{y0} dt^2 + \int_{t_0}^t v_y dt + h_0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Da die Beschleunigung in x-Richtung als 0 m/s^2 angenommen werden kann und $v_x = \text{const}$, $a_y = \text{const}$ und $v_{y0} = \text{const}$:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_x t + s_0 \\ a_y t^2 + v_{y0} t + h_0 \end{pmatrix}$$

Sagen wir $|\vec{v}|$ sei gegeben und wir wollen die größte Strecke in x herausfinden, die man Springen kann, dann gilt: $v_x = \sqrt{\vec{v}^2 - v_y^2}$, und für die Zeit, zu der man im Fluss ankommt: $r_y = 0$:

$$\begin{aligned}
 r_x(t) &= a_y t^2 + v_{y0} t + h_0 \\
 0 \text{ m} &= a_y t^2 + v_{y0} t + h_0
 \end{aligned}$$

Daraus folgt nach der Mitternachtsformel:

$$t_{1,2} = \frac{-v_{y0} \pm \sqrt{v_{y0}^2 - 4 \cdot a_y \cdot h_0}}{2 \cdot a_y}$$

Da $a < 0$, da wir annehmen, auf den Boden beschleunigt zu werden, gilt

$$\begin{aligned}
 v_0^2 &< v_0^2 - 4 \cdot a_y \cdot h_0 \\
 v_0 &< \sqrt{v_0^2 - 4 \cdot a_y \cdot h_0} \\
 0 &< -v_0 + \sqrt{v_0^2 - 4 \cdot a_y \cdot h_0} \quad | \quad \text{da } a < 0: \\
 0 &> \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 - 4 \cdot a_y \cdot h_0}}{2 \cdot a}
 \end{aligned}$$

Da wir nur Zeiten größer 0s betrachten, da wir zum Zeitpunkt $t = 0$ losspringen, also bleibt die Lösung:

$$t_2 = -\frac{v_{y_0} + \sqrt{v_{y_0}^2 - 4 \cdot a_y \cdot h_0}}{2 \cdot a}$$

Setzen wir dies in $r_x(t)$ ein ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 r_x(t_2) &= v_x t + s_0 \\
 &= \sqrt{\vec{v}^2 - v_{y_0}^2} \left(-\frac{v_{y_0} + \sqrt{v_{y_0}^2 - 4 \cdot a_y \cdot h_0}}{2 \cdot a} \right) + s_0 \\
 &= \sqrt{\vec{v}_{y_0}^2 - \vec{v}^2} \cdot \frac{v_{y_0} + \sqrt{v_{y_0}^2 - 4 \cdot a_y \cdot h_0}}{2 \cdot a} + s_0 \\
 &= \frac{\sqrt{\vec{v}_{y_0}^2 - \vec{v}^2} \cdot v_{y_0} + \sqrt{\vec{v}_{y_0}^2 - \vec{v}^2} \sqrt{v_{y_0}^2 - 4 \cdot a_y \cdot h_0}}{2 \cdot a} + s_0 \\
 &= \frac{\sqrt{\vec{v}_{y_0}^2 - \vec{v}^2} \cdot v_{y_0} + \sqrt{\vec{v}_{y_0}^4 - \vec{v}_{y_0}^2 (\vec{v}^2 + 4 \cdot a_y \cdot h_0) + 4 \cdot a_y \cdot h_0 \cdot \vec{v}^2}}{2 \cdot a} + s_0
 \end{aligned}$$

Um die weiteste Strecke zu finden, kann man die Änderung der Strecke in y-Richtung in Abhängigkeit von v_{y_0} auf Nullstellen überprüfen, d.h.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dv_{y_0}} &= \frac{d}{dv_{y_0}} \frac{\sqrt{v_{y_0}^2 - \vec{v}^2} \cdot v_{y_0} + \sqrt{v_{y_0}^4 - v_{y_0}^2 (\vec{v}^2 + 4 \cdot a_y \cdot h_0) + 4 \cdot a_y \cdot h_0 \cdot \vec{v}^2}}{2 \cdot a} + \frac{d}{dv_{y_0}} s_0 \\
 0 &= \frac{d}{dv_{y_0}} \frac{\sqrt{v_{y_0}^2 - \vec{v}^2} \cdot v_{y_0}}{2 \cdot a} + \frac{d}{dv_{y_0}} \frac{\sqrt{v_{y_0}^4 - v_{y_0}^2 (\vec{v}^2 + 4 \cdot a_y \cdot h_0) + 4 \cdot a_y \cdot h_0 \cdot \vec{v}^2}}{2 \cdot a}
 \end{aligned}$$

Sei $f(v_{y_0}) = v_{y_0}^2 - \vec{v}^2$ und $g(x) = \sqrt{x}$ und $k(v_{y_0}) = v_{y_0}^4 - v_{y_0}^2 (\vec{v}^2 + 4 \cdot a_y \cdot h_0) + 4 \cdot a_y \cdot h_0 \cdot \vec{v}^2$,

dann gilt:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dv_{y_0}} \frac{g(f(v_{y_0})) \cdot v_{y_0}}{2 \cdot a} + \frac{d}{dv_{y_0}} \frac{g(k(v_{y_0}))}{2 \cdot a} \\
0 &= \frac{g'(f(v_{y_0})) \cdot f'(v_{y_0}) \cdot v_{y_0} + g(f(v_{y_0})) \cdot 1}{2 \cdot a} + \frac{g'(k(v_{y_0})) \cdot k'(v_{y_0})}{2 \cdot a} \\
0 &= \frac{g'(f(v_{y_0})) \cdot f'(v_{y_0}) \cdot v_{y_0}}{2 \cdot a} + \frac{g(f(v_{y_0}))}{2 \cdot a} + \frac{g'(k(v_{y_0})) \cdot k'(v_{y_0})}{2 \cdot a} \\
0 &= g'(f(v_{y_0})) \cdot f'(v_{y_0}) \cdot v_{y_0} + g(f(v_{y_0})) + g'(k(v_{y_0})) \cdot k'(v_{y_0}) \\
0 &= \frac{1}{2\sqrt{f(v_{y_0})}} \cdot 2v_{y_0} \cdot v_{y_0} + \sqrt{v_{y_0}^2 - \vec{v}^2} + \frac{1}{2\sqrt{k(v_{y_0})}} \cdot (4v_{y_0}^3 - 2v_{y_0} (\vec{v}^2 + 4 \cdot a_y \cdot 0)) \\
0 &= \frac{v_{y_0}^2}{\sqrt{f(v_{y_0})}} + \sqrt{v_{y_0}^2 - \vec{v}^2} + \frac{(2v_{y_0}^3 - v_{y_0} (\vec{v}^2 + 4 \cdot a_y \cdot 0))}{\sqrt{k(v_{y_0})}} \\
0 &= (v_{y_0}^2 + v_{y_0}^2 - \vec{v}^2) \sqrt{k(v_{y_0})} + (2v_{y_0}^3 - v_{y_0} (\vec{v}^2 + 4 \cdot a_y \cdot 0)) \sqrt{f(v_{y_0})} \\
0 &= (2v_{y_0}^2 - \vec{v}^2) \sqrt{k(v_{y_0})} + (2v_{y_0}^3 - v_{y_0} (\vec{v}^2 + 4 \cdot a_y \cdot 0)) \sqrt{f(v_{y_0})}
\end{aligned}$$