

---

# Analysis I

---

## Contents

<b>1</b>	<b>Natürliche Zahlen und elementare Begriffe</b>	<b>5</b>
1.1	Zahlbereiche . . . . .	5
1.2	Vollständige Induktion . . . . .	6
1.2.1	Characterisierung der natürlichen Zahlen . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Körper</b>	<b>10</b>
2.1	Was sind Strukturen? . . . . .	10
2.2	Körper . . . . .	10
2.3	Angeordnete Körper . . . . .	11
2.4	Der Betrag . . . . .	13
2.5	Das Archimedische Axiom . . . . .	14
2.6	Supremum, Infimum und die Supremumseigenschaft . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Folgen und Konvergenz</b>	<b>15</b>
3.1	Reelle Folgen und Konvergenz . . . . .	15
3.2	Rechenregeln für Grenzwerte . . . . .	16
3.3	Stabilität der ' $\leq$ '-Relation unter Limesbildung . . . . .	18
3.4	Monotone Konvergenz, $e$ und Wurzeln . . . . .	19
3.5	Einige Grenzwerte - alt und neu . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Vollständigkeit</b>	<b>22</b>
4.1	??? . . . . .	22
4.2	Teilfolgen und der Satz von Bolzano-Weierstraß . . . . .	23
4.3	Characterisierung der Vollständigkeit . . . . .	25

## Organisation, Tipps & Tricks und Literaturhinweise

Mathe...

- ist intellektuell extrem herausfordernd
- kommt mit einem hohen Arbeitsaufwand
- oft falschen Erwartungen und
- ist wie Ausdauersport

aber dafür ist Mathe eines der schönsten Studien c:

Generelles Zeitmanagement:

- Vor- und Nachbereitung wahrscheinlich mehr als die gesetzten  $14 \times 3 \text{ h} = 4.2 \cdot 10^1 \text{ h}$
- Klausurvorbereitung auch mehr als  $3.9 \cdot 10^1 \text{ h}$
- Pro Woche  $2 \times 1.5 \text{ h}$ ,  $2 \times 2 \text{ h}$ ,  $1.5 \text{ h}$ ,  $1.0 \cdot 10^1 \text{ h}$
- Es gibt immer eine Aufgabe die man nicht lösen kann
- In die Vorlesungen kommen

Vorlesung:

- normal nicht alles zu verstehen
- Notizen was man nicht versteht
- Punkte konzise angehen
- **Mathe muss sich gedanklich setzen** - genügend Zeit zu verarbeiten

Übungen:

- zeitintensiv
- Ergebnisse vernünftig aufschreiben
- Weg zu einer korrekter Lösung ist sehr langwierig
- **nicht 10 Blätter Papier ab, von denen 9.5 inkonklusiv sind**
- also schön Aufschreiben

Wenn wir einen Satz gezeigt bekommen, dann bekommen wir nicht die gescheiterten Jahrelangen Versuche zur Schau, sondern nur die Ausgearbeitete Lösung → also bei uns auch langer weg, aber Aufschreiben nur klein

## Übungszettel:

- 50% muss richtig sein
- bis Freitag 10:00 Uhr
- in F4
- diese Woche nicht so umfangreich, weil weniger Zeit
- auf ILIAS Terminfindung Abstimmung
- Donnerstag Einteilung in Tutorien
- Blätter tackern :c
- alle zwei Wochen Beweismechanik Aufgaben, nur digital nicht in Papier (ist dann die letzte Aufgabe)

## Literaturempfehlung:

- Otto Forster: Analysis 1
  - kurz und knapp - aber konzise, und das hilft
  - ähnliche Struktur wie Vorlesung
  - weig motivation und wenige Querverbindungen
- Königsberger: Analysis 1
  - kurz - aber konzise
  - alle themen der Vorlesung, andere Struktur
  - mehr motivation und Querverbindungen
- Klaus Fritsche: Grundkurs Analysis 1
  - ausführlich
- Daniel Grieser: Analysis I
  - Ausführlich, aber mit Fokus auf das Wesentliche
  - alle Themen der Volesung enthalten, ähnliche Struktur
  - bunt??
- Harro Huser: Lehrbuch der Analysis Teil 1

- 
- extrem ausführlich, dick, an einigen Stellen sehr extensiv
  - alle und mehr Themen als Vorlesung
  - Querverbindungen
  - Walter Rudin: Analysis
    - sehr knapp und elegant
    - klassiker
    - alle Themen der Vorlesung, leicht andere Struktur
    - empfehlenswertes Buch fortgeschrittene Leser\*innen
    - nicht für Anfänger\*innen
  - Herber amann, Joachim Escher: Analysis I
    - strikt logischer Aufbau, damit teils länglich. Großes Bild
    - alle Themen, andere Struktur
    - auch nicht für Anfänger\*innen
  - Terence Tao: Analysis (englisch, aber gut)
  - Rober Denk, Reinhard Racke: Kompendium der Analysis
    - kurz und knapp, teils wie Nachschlagewerk
    - alle Themen
  - Florian Modler, Martin Kreh: Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1
    - kurz und knapp, teils wie Nachschlagewerk
    - von Studierenden für Studierende
    - aber enthält ein paar Fehler

# 1 Natürliche Zahlen und elemntare Begriffe

## 1.1 Zahlbereiche

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\mathbb{R} := \{ \text{reelle Zahlen} \}$$

Wir besprechen gar nicht was eine Menge ist, das ist zu philosophisch  
Es ist schwierig Mengen zu Definieren, man kommt schnell auf logische Widersprüche

- Notation: für  $x$  schreiben wir für eine Eigenschaft  $A$  “ $A(x)$ ”, falls  $x$   $A$  erfüllt.

→ Menge aller Objekte  $x$  mit  $A(x)$

$$\{x : A(x)\}$$

→ gibt es kein  $x$  mit  $A(x)$ , so nennen wir die Menge leer, “ $\emptyset$ ”

- $\exists \hat{=}$  Existenzquantor, “es existiert”
- $A, B$ , Eig.,  $M := \{x : x \text{ erf. } A\}$   
 $N := \{x : \text{erf. } B\}$   
 $M \subset N$ , falls  $\forall x \in M : x \in N$
- $M = N$ , falls  $M \subset N \vee N \subset M$
- “Echte Teilmenge”:  $M \subsetneq N$ , falls  $M \subset N, N \neq M$ .

### Example 1.1.1 (gerade Zahlen)

$$n \in \mathbb{N}_0 \text{ gerade} : \iff (\exists k \in \mathbb{N}_0 : n = 2k)$$

$$M := \{n \in \mathbb{N}_0 : \exists k \in \mathbb{N}_0 : n = 2k\} \tag{1}$$

$$= \{2k : k \in \mathbb{N}_0\} \tag{2}$$

### Example 1.1 $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$

Zu  $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} : \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ . Widerspruchsbeweis: Ang.,  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ , so  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ , mit  $p \in \mathbb{N}_0, q \in \mathbb{N}$ .  
 $(\exists p, q \text{ teilerfremd (d.h. Bruch ist vollständig gekürzt)})$ . Also  $p^2 = 2q^2$   
 $\implies p$  ist gerade. Also  $p = 2l$  mit  $l \in \mathbb{N}_0$ .  
 $\implies 4l^2 = p^2 = 2q^2 \implies 2l^2 = q^2 \implies q$  gerade.  
 $\implies p, q$  gerade.  $\implies p, q$  nicht teilerfremd. ■

## 1.2 Vollständige Induktion

- Ziel: Beweis von Aussagen für alle  $n \in \mathbb{N}_0$

**Dominoprinzip:** Wenn alle Steine umfallen sollen,

- müssen wir den 1. Stein umwerfen,
- muss stets der  $n$ -te Stein den  $(n+1)$ -ten umwerfen.

**Prinzip (vollst. Ind.)** Wollen wir eine Aussage  $A(n) \forall n \in \mathbb{N}$  zeigen; so zeigen wir

- (i)  $A(1)$  gilt (Induktionsanfang)
- (ii) Aus  $A(n)$  für  $n \in \mathbb{N}$  stets  $A(n+1)$  folgt. (Induktionsschritt)

### Definition 1.2 Summen

Für  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  definieren wir

$$\sum_{k=1}^n x_k := x_1 + \dots + x_n$$

### Example 1.3 Geometrische Summe

$\forall n \in \mathbb{N} :$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^n x^k}_{x^0 + x^1 + \dots + x^n} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad (3)$$

**I.A.**  $n = 1$

$$\sum_{k=0}^1 x^k = x^0 + x^1 = 1 + x = \frac{(1-x)(1+x)}{1-x} = \frac{1-x^2}{1-x}$$

**I.S.**

$$n \rightarrow n+1$$

Angenommen, (equation) gilt für ein  $n \in \mathbb{N}$ . z.z. (equation) gilt für  $n+1$

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \left( \sum_{k=0}^n x^k \right) + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1}$$

...

**Example 1.4** Für welche  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $n^2 < 2^n$ ?

- $n = 1 \rightarrow 1 < 2$
- $n = 2 \rightarrow n^2 = 4 \not< 4 = 2^2$
- $n = 3 \rightarrow n^2 = 9 \not< 2^3$
- $n = 4 \rightarrow n^2 = 16 \not< 16 = 2^4$
- $n = 5 \rightarrow n^2 = 25 < 32 = 2^5$

Wir versuchen die Aussage  $\forall n \geq 5$  zu zeigen.

**I.A.:**  $n = 5 : n^2 = 25 < 32 = 2^5$

**I.S.:** Ang., Aussage gilt für  $n \geq 5$ . Wir müssen zeigen:

$$(n+1)^2 < 2^{n+1}$$

$$(n+1)^2 = \underbrace{n^2}_{< 2^n} + 2n + 1 < 2^n + 2n + 1 \stackrel{?}{<} 2^{n+1} \text{ Angenommen, es gilt}$$

$$\forall n \geq 5 : 2n + 1 < 2^n \quad (4)$$

Dann:  $(n+1)^2 < \dots < 2^n + 2n + 1 = 2 * 2^n = 2^{n+1}$

- Wir zeigen (4) wiederum mit voll. Ind.

**I.A.:**  $n = 5 : 2n + 1 = 11 < 32 = 2^5$

**I.S.:** Ang., (4) gilt für  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:  $2(n+1) + 1 = 2n + 3 = (2n + 1) + 2 < 2^n + 2 < 2^n + 2^n = 2 * 2^n = 2^{n+1}$ .

Damit folgt (4) und damit die eigentliche Aussage ■

**Definition 1.5**

für  $n \in \mathbb{N}_0$  definieren wir die *Fakultät* via  $n! := n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$ , falls  $n \geq 1$ , und  $0! := 1$ . Für  $k \in \{0, \dots, n\}$  definieren wir den *Binomialkoeffizienten*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

**Lemma 1.6**

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $k \in \{1, \dots, n\}$ :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

**Proof**

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k)!(n-k+1)} + \frac{n!(k)}{(k-1)!(n-(k-1)k)!(k)} \\ &= \frac{n!n + n!}{k!(n-k+1)!} = \frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!} \end{aligned} \quad \blacksquare$$

**Example 1.7 (Binomische Formel)**

Für  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}_0$ :

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Sei also  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**I.A.:**  $n = 0$ .  $(x + y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 y^0$

**I.S.:** Gelte die Aussage für  $n \in \mathbb{N}_0$

$$(x + y)^{n+1} = (x + y)(x + y)^n = (x + y) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad (5)$$

$$= x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + y \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad (6)$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \quad (7)$$

Indexverschiebung:  $l = k + 1$ .  $l \in \{1, \dots, n + 1\}$

$$\begin{aligned} (7) &= \underbrace{\sum_{l=1}^n \binom{n}{l-1} x^l y^{n+1-l}}_{\text{Hier Indexverschiebung}} + \underbrace{\sum_{l=0}^n \binom{n}{l} x^l y^{n+1-l}}_{\text{Hier nennen wir einfach } k = l} \\ &= \binom{n}{n} x^{n+1} y^0 + \left( \sum_{k=0}^n \left( \binom{n}{l-1} + \binom{n}{l} \right) x^l y^{n+1-l} \right) + \binom{n}{0} x^0 y^{n+1} \\ &= \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} y^0 + \left( \sum_{l=1}^n \binom{n+1}{l} x^l y^{(n+1)-l} \right) + \binom{n+1}{0} x^0 y^{n+1} \\ &= \sum_{l=0}^{n+1} \binom{n+1}{l} x^l y^{(n+1)-l} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**1.2.1 Charakterisierung der natürlichen Zahlen****Definition 1.2.1**

Eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}$  heißt induktiv, falls

(i)  $1 \in M$

(ii)  $\forall x \in M : x + 1 \in M$



**Example 1.2.2**

- (a)  $\mathbb{N}$  sind ind. Menge.
- (b)  $A := \{2n : n \in \mathbb{N}_0\}$  nicht ind. Menge, da (i)  $1 \notin A$ , (ii)  $2n + 1$  ist immer ungerade
- (c)  $B := \{2n + 1 : n \in \mathbb{N}_0\}$  nicht ind.: (i), aber  $2n + 1 + 1 = 2(n + 1)$
- (d)  $\mathbb{Q}^+ := \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$  ist ind. Teilmenge

- Sei  $(A_i)_{i \in I}$  mit  $I$  Indexmenge eine Familie von Mengen. setze

$$\bigcap_{i \in I} := \{x : (\forall i \in I : x \in A_i)\} \quad \text{Schnitt}$$

$$\bigcup_{i \in I} := \{x : (\exists i \in I : x \in A_i)\} \quad \text{Vereinigung}$$

**Proposition 1.2.3**

Für eine Menge  $M \subset \mathbb{R}$  sind äquivalent

- (i)  $M = \mathbb{N}$
- (ii) Ist  $N \subset \mathbb{R}$  induktiv, so  $M \subset N$
- (iii)

$$M = \bigcap_{N \subset \mathbb{R}} N \text{ induktiv}$$

$$(i) \iff (ii) \iff (iii)$$

**Proof**

‘(i)  $\implies$  (ii)’: Sei  $N \subset \mathbb{R}$  beliebige ind. Teilmengen von  $\mathbb{R}$ . Zu zeigen:  $M \stackrel{(i)}{=} \mathbb{N} \subset N$   
 Aber  $1 \in \mathbb{N}$ , und  $1 \in N$  (da  $N$  ind. ), Da  $N$  ind. ist, ist mit jeder nat.  $x \in \mathbb{N}$  also auch  $x \in N$ . Damit  $x+1 \in \mathbb{N}$   $\mathbb{N} \subset N$ .

‘(ii)  $\implies$  (iii)’ Wir zeigen:

$$\bigcap_{N \text{ ind. Menge}} N$$

ist ind. Menge

$$\stackrel{(ii)}{\implies} M \stackrel{(ii)}{\subset} N \subset M. \text{ Also}$$

$$M = \bigcap_{N \text{ ind.}} N.$$

$$\bigcap_{N \text{ ind.}} N \text{ induktiv:}$$

(i)

$$(\forall N \text{ ind.: } 1 \in N) \implies 1 \in \bigcap_{N \text{ ind.}} N$$

(ii)

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \in \bigcap_{N \text{ ind.}} N \left( \implies x \in \bigcap_{N \text{ ind.}} N \right) \stackrel{\text{DEF.}}{\implies} \forall N \text{ ind. : } x+1 \in N \implies x+1 \in \bigcap_{N \text{ ind.}}$$

‘(iii)  $\implies$  (i)’ Noch zu zeigen (blöd glaube ich oder ÜA, wir hatten auf jeden Fall keine Zeit in der Vorlesung) ■

## 2 Körper

### 2.1 Was sind Strukturen?

### 2.2 Körper

#### Definition 2.2.1 Körper

in script of Prof. and on paper

#### Example 2.2.2

in script of Prof. and on paper

**Example 2.2.3**

in script of Prof. and on paper

**Lemma 2.2.4**

in script of Prof. and on paper

**Lemma 2.2.5**

in script of Prof. and on paper

**Definition 2.1**

In der Situation von definition 2.2.1 sei  $n \in \mathbb{N}$ , sowie  $x_1, \dots, x_n \in K$ . Wir definieren rekursiv  $x_1 + \dots + x_n := (x_1 + \dots + x_{n-1}) + x_n, x \cdot \dots \cdot x_n := (x_1 \cdot \dots \cdot x_{n-1}) \cdot x_n$

**Definition 2.2**

In der Situation von Definition 2.2.1 sei  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $x \in K$ . Wir definieren

$$x^0 := 1_K \text{ und } x^n := (x^{n-1} \cdot x, n \in \mathbb{N}$$

Ist  $x \in K \setminus \{0\}$ , so sei für  $n \in \mathbb{N} : x^{-n} := (x^{-1})^n$ .

**Lemma 2.3**

Für alle  $x, y \in K, m, n \in \mathbb{N}_0$ :

- i)  $x^n \cdot x^m = x^{n+m},$
- ii)  $(x^n)^m = x^{n \cdot m},$
- iii)  $x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$

Ist zudem  $x, y \neq 0_K$ , so gelten diese Identitäten auch für  $n, m \in \mathbb{Z}$

**Proof i**

Fixiere  $n \in \mathbb{N}_0$ , nun Induktion nach  $m$ .

$$\text{I.A. } m = 0. \quad x^n \cdot x^0 \stackrel{\text{Def.}}{=} x^n \cdot 1_K \stackrel{(\text{M2})}{=} 1_K \cdot x^n \stackrel{(\text{M3})}{=} x^n = x^{n+0}$$

**I.S.** Gelte die Aussage für ein  $m \in \mathbb{N}_0$ . Zeige für  $m \curvearrowright m+1$

$$x^n \cdot x^{m+1} \stackrel{\text{Def.}}{=} x^n (x^m) \cdot x \stackrel{(\text{M1})}{=} (x^n \cdot x^m) \cdot x \stackrel{\text{IV}}{=} x^{n+m} \cdot x \stackrel{\text{Def.}}{=} x^{n+m+1} \quad \blacksquare$$

**2.3 Angeordnete Körper**

- Ziel Vergleich von Elementen hinsichtlich “Größe”

**Definition 2.3.1**

Eine **Relation** auf einer Menge  $M$  ist eine Teilmenge  $R \subset M \times M$ . Ist  $(x, y) \in R$ , so schreiben wir auch  $xRy$  oder  $R(x, y)$  und sagen, dass  $x$  und  $y$  über  $R$  in Relation stehen.

**Example 2.3.2**

$M =$  Studierende im Hörsaal,  
 $(x, y) \in M \times M : xRy : \iff x$  kennt den Namen von  $y$

- $R$  **reflexiv**? (d.h.  $\forall x \in M : xRy$ )      Ja
- $R$  **symmetrisch**? ( d.h.  $\forall x, y \in M : xRy \iff yRx$  )      Nein
- $R$  **transitiv**? ( d.h.  $\forall x, y, z \in M : xRy \wedge yRx \implies xRz$  )      **Nein**

**Definition 2.3.3**

Sei  $R$  eine Relation auf einem Körper  $K$ .  $R$  heißt **Ordnung** auf  $K$ , falls gilt

- (i) **Trichotomie**:  $\forall x \in K : \text{Entweder } 0_K Rx, xR0_K \text{ oder } x = 0_K$
- (ii) **Abgeschlossenheit bezüglich Addition**  $\forall x, y \in K : 0_K Rx, 0_K Ry \implies 0_K R(x + y)$
- (iii) **Abgeschlossenheit bezüglich Multiplikation**  $\forall x, y \in K : 0_K Rx, 0_K Ry \implies 0_K R(x \cdot y)$

Das Tupel  $(K, R)$  heißt **angeordneter Körper**. (Schreibe auch ' $<$ ' für  $R$ ).

Setze für  $a, b \in K$ :

$$\begin{aligned} a < b &: \iff 0_K < (b - a) \\ a > b &: \iff b < a \\ a \leq b &: \iff a < b \vee a = b \\ b \geq a &: \iff a \leq b \end{aligned}$$

**Lemma 2.3.4**

Sei  $(K, <)$  angeordneter Körper,  $a, b, c \in K$

- (i) Entweder  $a > b, a = b \vee a < b$ .
- (ii)  $a < b \wedge b < c \implies a < c$
- (iii)  $(a > 0 \implies (-a) < 0) \wedge (a < 0 \implies (-a) > 0)$
- (iv) Gilt  $a < b$ , so ist

$$\begin{aligned} ac &< bc, & c &> 0 \\ ac &> bc, & c &< 0 \\ a^2 &> 0, & a &\neq 0 \end{aligned}$$

$$a > 0 \implies a^{-1} > 0$$

$$a < 0 \implies a^{-1} < 0$$

$$b^{-1} < a^{-1}, \text{ falls } a > 0$$

$$a + c < b + c.$$

$$(v) \ a < b \implies (-a) > (-b)$$

### Proof (i)-(iii)

(i) Da  $a < b \iff 0_K < b - a$ , folgt das aus Trichotomie und Def. von ' $>$ '.

(ii) zu zeigen:  $ayc$ , d.h.  $0_K < c - a$ .

$$c - a = (c + 0_K) - a = \underbrace{(c - b)}_{>0} + \underbrace{(b - a)}_{>0} > 0, \text{ d.h. } a < c$$

(iii)  $a > 0$ . Angenommen,  $(-a) > 0$ .  $\xRightarrow{\text{Abg. Add.}} 0_K = a + (-a) > 0_K \xRightarrow{\text{Trich.}} E$  Ist  $-a = 0$ , so  $a = 0$ , nach Trich. Wid. zu  $a > 0$ . Falls  $a < 0$ , analog. ■

### Corollary 2.3.5

Es gibt keine Ordnung ' $<$ ' auf  $\mathbb{F}_2$ , die  $\mathbb{F}_2$  zu einem angeordneten Körper macht

### Proof

Angenommen, ' $<$ ' sei Ordnung. Da  $0_K \neq 1_K$ , gilt entweder  $0_K < 1_K$  oder  $1_K < 0_K$  (nach Trich.). Falls  $0_K < 1_K$ . Dann  $0_K = 1_K + 1_K$  damit  $0_K = 1_K + 1_K > 0_K + 1 = 1_K$ . Widerspruch für  $1_K < 0_K$  argumentiere analog.

- PRINZIP:  $\mathbb{R} \wedge \mathbb{Q}$  sind angeordnete Körper

## 2.4 Der Betrag

('Abstand zur Null')

### Definition 2.4.1

Für  $x \in \mathbb{R}$  definieren wir den Betrag  $|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

### Lemma 2.4.2

Der in Def 2.4.1 eingeführte Betrag erfüllt

- (i) *forall*  $x \in \mathbb{R} \mid x| \geq 0$
- (ii)  $|x| = 0 \iff x = 0$
- (iii) Multiplikativität:  $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- (iv) **Dreiecksungleichung:**  $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y|$
- (v)  $\forall x \in \mathbb{R} : |-x| = |x|$
- (vi)  $\forall x, y \in \mathbb{R} : y \neq 0 \implies \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$

Jede nach oben beschränkte Menge  $A \subset \mathbb{R}$  hat ein Supremum in  $\mathbb{R}$  **Informell:**  $(1, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$  hat

$\sup = \sqrt{2}$  (später). Aber  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ , also gilt die Supremumseigenschaft für  $\mathbb{Q}$  nicht.

$\mathbb{R}$  ist

- Körper
- angeordnete Körper
- bewerteter Körper
- Archimedisch angeordnete Körper
- Supremumseigenschaft

### 3 Folgen und Konvergenz

#### 3.1 Reelle Folgen und Konvergenz

Folge  $a : \mathbb{N} \ni n \mapsto a(n) \in \mathbb{R}$ . Schreibweisen:

$$\left( \underbrace{a_n}_{(=a(n))} \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad (n \text{ Laufindex}), (a_n)$$

##### Example 3.1.1

$a_n := 2n \rightarrow$  Folge der geraden Zahlen

$a_n := 2n + 1 \rightarrow$  Folge der ungeraden Zahlen

##### Definition 3.1.2 Konvergenz

Sei  $(a_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  ( $(a_n) \subset \mathbb{R}$ ) und  $a \in \mathbb{R}$ . Wir sagen, dass  $(a_n)$  gegen  $a$  **konvergiert**, falls  $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon}$

Wir nennen  $a$  dann den **Grenzwert** oder **Limes** von  $(a_n)$  und schreiben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n := a$$

Gibt es  $a \in \mathbb{R}$  so, dass  $(a_n)$  gegen  $a$  konvergiert, so nennen wir  $(a_n)$  **konvergent**, andernfalls **divergent**.

##### Lemma 3.1.3

Sei  $(a_n) \subset \mathbb{R}$  eine Folge, die gegen  $a, b \in \mathbb{R}$  konvergiert. Dann  $a = b$ .

**Proof**

Sei  $\varepsilon > 0$  bel.. Dann

$$\begin{aligned} \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \implies \forall n \geq N : |a - b| = |(a - a_n) + (a_n - b)| \leq |a_n - a| + |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ \stackrel{\forall \varepsilon}{\implies} a = b. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Für jedes  $\varepsilon > 0$ : Ab irgendeinem  $N$  bleibt die Folge für immer im  $\varepsilon$ -Streifen um  $a$ .

**Example 3.1.4**

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ . Vermute: Limes  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Mit Archimedes  $\exists N \in \mathbb{N} : \frac{1}{\varepsilon} < N$ . Dann  $\forall n \geq N : \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$ .  $\blacksquare$

**Example 3.1.5**

$\forall a \in \mathbb{R} : (a_n) = (a)$  (konstante Folge) konvergent gegeben  $a$

**Example 3.1.6**

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Nach 1.2.3  $\forall n \geq 5 : n^2 < 2^n$ . Nach Arch.  $\exists N \in \mathbb{N} : N \geq 5 \wedge \frac{1}{\varepsilon} < N$ .  $\implies \forall n \geq N : \left|\frac{n}{2^n} - 0\right| = \frac{n}{2^n} \stackrel{\text{Ugl}}{<} \frac{1}{n} \stackrel{n \geq N}{\leq} \frac{1}{N} < \varepsilon$   $\blacksquare$

**Example 3.1.7**

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} := ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$   
**Beh.:**  $\neg \exists a \in \mathbb{R} : (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konv. gg  $a$ . Angenommen, es gäbe so ein  $a \in \mathbb{R}$ . Wähle  $0 < \varepsilon < 1$ .  
 Dann  $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |(-1)^n - a| < \varepsilon$ .  
 Dann:  $2 = |1 - (-1)| \leq \underbrace{|(1 - a)|}_{|1 - a|} + \underbrace{|(-a)^n - a|}_{|a - (-1)^n|} < 2\varepsilon < 2$

**Example 3.1.8**

$(a_n)$  reelle Folge.

- $\exists \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$ .  
 Für  $\varepsilon = 1$  erfüllt die Folge aus example 3.1.7 dies!  
 Nicht äquivalent zu Konvergenz!
- $\forall \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$   
 Folge aus example 3.1.7 erfüllt dies - nicht äquivalent!

**3.2 Rechenregeln für Grenzwerte****Theorem 3.2.1**

Seien  $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$  konv. gegen  $a \in \mathbb{R}$  bzw.  $b \in \mathbb{R}$ . Dann

- (i)  $(a_n + b_n)$  konvergiert gegen  $a + b$   $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
- (ii)  $(a_n \cdot b_n)$  konvergiert gegen  $a \cdot b$



(iii) Ist  $b \neq 0$  so existiert ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq N \implies b \neq 0$ , und es gilt:

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq N} \text{ konv gg } \frac{a}{b}.$$

### Proof

Sei  $\varepsilon > 0$

Wg. Konv.  $a_n \rightarrow a \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

Wg. Konv.  $b_n \rightarrow b \exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2 : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$(a_n), (b_n), a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b \implies a_n + b_n \rightarrow a + b$$

### Definition 3.2.2

Wir sagen, dass  $(a_n) \subset \mathbb{R}$  **beschränkt** ist, falls  $\exists M > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq M$ .

### Lemma 3.2.3

Konvergente Folgen sind beschränkt.

### Proof

Angenommen,  $(a_n)$  konvergiert gegen  $a \in \mathbb{R}$ . Mit  $\varepsilon = 1$  ex.  $N \in \mathbb{N}$ :

$$(\forall n \geq N : |a_n - a| < 1) \implies \forall n \geq N : ||a_n| - |a|| < 1 \implies |a_n| \leq 1 + |a|$$

Setze  $M := \max\{|a_1|, \dots, |a_N|, 1 + |a|\}$ , so  $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq M$ . ■

Zurück zum Beweis von Satz 3.2.1 (b) und (c):

### Proof

(b) zu zeigen  $a_n \rightarrow a \wedge b_n \rightarrow b \implies a_n b_n \rightarrow ab$

$$|a_n b_n - ab| = |(a_n b_n - ab_n) + (ab_n - ab)| \leq |b_n| \cdot |a_n - a| + |a| |b_n - b| \quad (8)$$

Sei  $\varepsilon > 0$ . Da  $(b_n)$  beschr., ex. nach Lemma 3.2.3 ein  $M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : |b_n| \leq M$ . Da  $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$

$$(1) \exists N_1 \in \mathbb{N} \forall n \geq N_1 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

$$(2) \exists N_2 \in \mathbb{N} \forall n \geq N_2 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{1+|a|}$$

$$(8) \implies \forall n \geq N := \max\{N_1, N_2\} : |a_n b_n - ab|$$

$$\stackrel{(8)}{\leq} M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |a| \cdot \underbrace{\frac{\varepsilon}{2(1+|a|)}}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Damit (b).

(c)  $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b \neq 0 \implies \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$

$$(1) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |b_n| \neq 0.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{N} \forall n \geq \tilde{N} : |b_n - b| < \varepsilon,$$

$$\text{d.h. } |b| - \varepsilon \leq |b_n|$$

Wende Dies auf  $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$  an.

Dann  $\forall n \geq \tilde{N} : 0 < \frac{|b|}{2} \leq |b_n|$ . setze nun  $n_0 := \tilde{N}$

(2)  $b_n \rightarrow b \neq 0$ , so  $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$ .

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{b_n b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n| \cdot |b|} \quad (9)$$

Für  $n \geq \tilde{N} : \frac{|b|}{2} < |b_n|$ , also  $\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}$ , also  $\frac{1}{|b_n|} \cdot \frac{2}{|b|^2}$

Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann  $\exists \tilde{N} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \tilde{N} : |b_n - b| < \frac{\varepsilon |b|^2}{2} \cdot \frac{2}{|b|^2} = \varepsilon$

(3)  $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b \neq 0 \xrightarrow{(2)} (a_n \rightarrow a, \frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}) \xrightarrow{(b)} \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$  ■

#### Example 3.2.4

$a, b, c, d \in \mathbb{R}, c \neq 0, d \neq 0$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + b}{cn^2 + d} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{n^2}}{c + \frac{d}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$$

- $\frac{A}{n} \rightarrow 0$ , Thm. 3.2.1 (b) :  $\frac{b}{n^2} \rightarrow 0 \cdot 0 = 0 \xrightarrow{\text{Thm. 3.2.1 (b)}} \frac{b}{2} \rightarrow 0$   
 (+) Thm. 3.2.1 (a):  $a + \frac{1}{n^2} \rightarrow a$
- Nenner  $c + \frac{d}{n^2} \rightarrow c \xrightarrow{\text{Thm. 3.2.1 (c)}} \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{c}$ . ■

### 3.3 Stabilität der ‘ $\leq$ ’-Relation unter Limesbildung

#### Theorem 3.3.1

Seien  $(a_n), (b_n)$  zwei konvergente Folgen in  $\mathbb{R}$ : Seien  $a, b \in \mathbb{R}$

- (i) Gibt es  $N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n \leq a$ , so  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq a$ .
- (ii) Gibt es  $N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : b \leq b_n$ , so  $b \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

#### Proof

Sei  $\xi := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Für  $\varepsilon > 0$  finden wir  $\tilde{N} \in \mathbb{N} : n \geq \tilde{N} : |a_n - \xi| < \varepsilon$ . Damit

$$\xi = (\xi - a_n) + a_n \leq |\xi - a_n| + a_n \leq \xi + a_n \leq a + \varepsilon \implies \xi \leq a. \quad \blacksquare$$

**Bemerkung:** Satz falsch für ‘ $<$ ’ Bsp.

#### Theorem 3.3.2 Sandwich-Thm

Seien  $(a_n), (c_n) \subset \mathbb{R}$  konv. Folgen:  $a_n, c_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$  Ist  $(b_n) \subset \mathbb{R}$ , so dass  $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : a_n \leq b_n \leq c_n$ , so  $b_n \rightarrow a$

#### Proof

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, |c_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ Für solche } n : a - \varepsilon < a_n - \frac{\varepsilon}{2} \leq b_n - \frac{\varepsilon}{2} \leq c_n - \frac{\varepsilon}{2} < a + \varepsilon \implies b_n \rightarrow a. \quad \blacksquare$$

### 3.4 Monotone Konvergenz, $e$ und Wurzeln

#### Definition 3.4.1

Eine Folge  $(a_n)$  heißt

- (i) mon. wachsend  $\iff \forall n \in \mathbb{N} a_n \leq a_{n+1}$
- (ii) streng mon. wachsend  $\iff \forall n \in \mathbb{N} a_n < a_{n+1}$
- (iii) mon. fallend  $\iff \forall n \in \mathbb{N} a_n \geq a_{n+1}$
- (iv) streng mon. fallend  $\iff \forall n \in \mathbb{N} a_n > a_{n+1}$

#### Theorem 3.4.2

Eine monotone beschränkte Folge konvergiert.

#### Proof

$(a_n)$  monoton wachsend und beschränkt, also existiert nach Supremumseigenschaft  $a := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} < \infty$

Zu zeigen  $a_n \rightarrow a$ . Sei  $\varepsilon > 0$  bel.. Dann nach Def. des Supremums  $\exists N \in \mathbb{N} : a - \varepsilon < a_N$ . Für  $n \geq N$  gilt  $a_N \leq a_n$  wegen Monotonie  $\implies |a_n - a| = a_n - a = a - a_N + \underbrace{a_N - a_n}_{\leq 0} \leq$

$a - a_N < \varepsilon$ . Also  $a_n \rightarrow a$ .  $\blacksquare$

#### Corollary 3.4.3

Der Grenzwert  $e := \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$  existiert. Wir nennen  $e$  die **Eulerische Zahl**. Es gilt  $2 \leq e \leq 3$ .

#### Lemma 3.4.4

Sei  $n \in \mathbb{N}_0, x > -1$ . Dann  $q + nx \leq (1+x)^n$ .

#### Proof Cor. 3.4.4

zu zeigen:  $(a_n) = \left((1 + \frac{1}{n})^n\right)$  mon. wach., beschr.

$$\begin{aligned}
 \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} \\
 &\stackrel{\text{Rechnen}}{=} \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\
 &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\
 &\stackrel{\text{Bernoulli mit } x = -\frac{1}{n}}{\leq} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n-1} \\
 &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$\implies (a_n)$  mon. wachsend

Nun:  $(a_n)$  beschränkt. Bin. Formel:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$$|a_n| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \dots \leq \frac{1}{k!}$$

$$2^{k-1} \leq k! \forall k \in \mathbb{N}$$

Damit

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \stackrel{\text{von davor}}{\leq} 2 + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq 2 + 2 \cdot \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^k} \leq 2 + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \leq 2 + 2 \cdot 1 = 4$$

$\Rightarrow$  Zahl  $e$  existiert! ( nach Thm. 3.4.2 )

### Wiederholung:

- Konvergent  $\Rightarrow$  Beschränkt
- Monoton + Beschränkt  $\Rightarrow$  Konvergent

### Corollary 3.4.5 Existenz von Quadratwurzeln

Sei  $a \geq 0$ , Dann existiert ein  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x^2 = a$ . Speziell gilt: Ist  $x_0 > 0$  so konvergiert die durch

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

definierte Folge gegen die **eindeutige** positive Lösung  $x \in \mathbb{R}_{>0}$  der Gleichung  $x^2 = a$

**Proof**

(i) Beschränkt nach unten: Wir zeigen induktiv  $x_1 > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$

**I.A.:**  $x_0 > 0$  nach Voraussetzung

**I.S.:** Gelte  $x_n > 0$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  (I.V.). Dann ist

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( \underbrace{x_n}_{>0} + \frac{\overbrace{a}^{>0}}{\underbrace{x_n}_{>0}} \right)$$

(ii) Monoton fallend:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right) - x_n \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{a}{x_n} - x_n \right) \\ &= \frac{1}{2 \underbrace{x_n}_{>0 \text{ nach (i)}}} (a - x_n^2) \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} a - x_{n+1}^2 &= a - \frac{1}{4} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)^2 \\ &= a - \frac{1}{4} x_n^2 - \frac{1}{2} a - \frac{1}{4} \cdot \frac{a^2}{x_n^2} \\ &= \frac{1}{2} a - \frac{1}{4} \left( x_n^2 + \frac{a^2}{x_n^2} \right) \\ &= -\frac{1}{4} \left( x_n - \frac{a}{x_n} \right)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Also ist  $(x_n)$  monoton fallend.

(iii) Es gilt  $l := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  und  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}$ .

Es folgt wegen  $x_n x_{n+1} = \frac{1}{2} (x_n^2 + a)$ , dass  $l^2 = \frac{1}{2} (l^2 + a)$  und damit  $l^2 = a$ .

(iv) **Eindeutigkeit:** Seien  $x, y > 0$  seien zwei Lösungen zu

$$x^2 = y^2 = a$$

Dann gilt  $0 = x^2 - y^2 = \underbrace{(x+y)}_{>0} (x-y)$ . Also ist  $x - y = 0$ , ■

### 3.5 Einige Grenzwerte - alt und neu

- Für  $k \in \mathbb{N}$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$  (Heratives Anwenden von Satz 3.2.1(i))

**Definition 3.5.1 Bestimmte Divergenz**

Eine Folge  $(a_n) \subset \mathbb{R}$  heißt

- Bestimmt divergent gegen  $+\infty$  (in Symbolen  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ), falls zu jedem  $k > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert mit  $a_n \geq k$  für alle  $n \geq N$
- Bestimmt divergent gegen  $-\infty$  (in Symbolen  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ ), falls zu jedem  $k < 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert mit  $a_n \leq k$  für alle  $n \geq N$ .
- Ist  $(a_n)$  weder konvergent noch bestimmt divergent, so nennen wir  $(a_n)$  **unbestimmt divergent** und sagen “ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  existiert nicht”.

- Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{falls } x > 1 \\ 1 & \text{falls } x = 1 \\ 0 & \text{falls } |x| < 1 \\ -\infty & \text{falls } x \leq -1 \end{cases}$$

- Für  $x > 1$  setze  $y := x - 1$ , mit Bernoullischer Ungleichung:

$$x^n = (1 + y)^n \geq 1 + ny \rightarrow \infty$$

- Für  $x = 1$  gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$   $x^n = 1$ .

- Für  $|x|^{-1} > 1$  (falls  $x \neq 0$ ) Sei  $\varepsilon > 0$

Also gilt es existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n \geq N$  gilt  $|x^{-n}| \geq \frac{1}{\varepsilon}$ , damit  $|x^n| < \varepsilon$  für alle  $n \geq N$

- Rest folgt mit Beispiel 3.1.7

–

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n x^k = \begin{cases} +\infty & \text{falls } x \geq 1 \\ \frac{1}{1-x} & \text{falls } |x| < 1 \\ \text{existiert nicht} & \text{falls } x \leq -1 \end{cases}$$

## 4 Vollständigkeit

### 4.1 ???

Supremumseigenschaft zeichnet  $\mathbb{R}$  aus.

Cauchy-Folgen

In  $\mathbb{R}$  sind Cauchy-Folgen und konvergente Folgen gleich, in  $\mathbb{Q}$  z.B. nicht.

Cauchy-Folgen sind beschränkt

es ist nicht so, dass alle Beschränkte Folgen, Cauchy-Folgen sind

**Definition 4.1.1 Cauchyfolge**

Eine reelle Folge  $(a_n)$  heißt **Cauchy** oder **Cauchyfolge**, falls für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, sodass  $|a_n - a_m| < \varepsilon$  für alle  $n, m \geq N$ .  $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N : |a_n - a_m| < \varepsilon}$

**Theorem 4.1.2**

Sei  $(a_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ . Dann gilt:

- (i) Ist  $(a_n)$  konvergent, so ist  $(a_n)$ -Cauchy.
- (ii) Ist  $(a_n)$  Cauchy, dann ist  $(a_n)$  beschränkt.
- (iii) Ist  $(a_n)$  konvergent, so ist  $(a_n)$  beschränkt.

**Proof**

- (i) Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Da  $(a_n)$  konvergent, existiert ein  $a \in \mathbb{R}$  und ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ .  
Seien  $n, m \in \mathbb{N}$ , dann gilt

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

- (ii) Setze  $\varepsilon = 1$ . Dann finden wir ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - a_m| < 1$  für alle  $n, m \geq N$ .  
Die Menge  $\{|a_1|, \dots, |a_N|\}$  ist endlich, hat also ein Maximum, nenne dieses  $M$ .  
Für alle  $n \geq N$  gilt also  $|a_n| \leq M$  falls  $1 \leq n \leq N$ ,

$$|a_n| \leq |a_n - a_N| + |a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| \leq 1 + M \text{ falls } n \geq N$$

Deswegen ist  $(a_n)$  durch  $1 + M$  beschränkt.

- (iii) Direkt aus (i) und (ii)

**Example 4.1.3 Beschränktheit und nicht Cauchy**

Betrachte  $(a_n) := (-1)^n$ . Dann ist  $|a_n| = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und speziell  $(a_n)$  beschränkt.  
Wähle  $0 < \varepsilon < 2$ . Dann gilt für bel  $N \in \mathbb{N}$

$$|a_n - a_{n+1}| = 2 > \varepsilon$$

**4.2 Teilfolgen und der Satz von Bolzano-Weierstraß**

•

$$((-1)^n) : \begin{cases} \text{gerade Folgeglieder: immer } 1 \\ \text{ungerade Folgeglieder: immer } -1 \end{cases}$$

**Definition 4.2.1**

Sei  $(a_n) \subset \mathbb{R}$  Folge und  $n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine monoton wachsende Abbildung. Dann heißt  $(a_{n(k)})$  **Teilfolge**

**Example 4.2.2**

$$(a_n) = ((-1)^n)$$

- $n(k) = 2k \rightsquigarrow (a_{n_k}) =$  Teilfolge der geraden Folgenglieder
- $n(k) = 2k - 1 \rightsquigarrow (a_{n_k}) =$  Teilfolge der ungeraden Folgenglieder

**Definition 4.2.3**

Sei  $(a_n) \subset \mathbb{R}$  und  $(a_{n_k}) \subset (a_n)$  Teilfolge die gegen  $a \in \mathbb{R}$  konvergiert. Dann heißt  $a$  **Häufungspunkt** von  $(a_n)$ . Wir definieren dann den **Limes superior** via

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} := \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} a_k,$$

und den **Limes inferior** via

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} a_k.$$

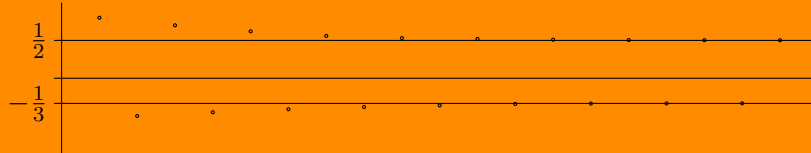
- $a$  HP von  $(a_n) \iff \forall \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon.$

**Example 4.2.4**

$(a_n) = (a)$  für  $a \in \mathbb{R}$  (konstante Folge), so  $a$  einzelner Häufungspunkt; allgemeiner: Falls  $a_n \rightarrow a$  konvergiert, so ist  $a$  einzelner Häufungspunkt.

**Example 4.2.5**

$(a_n) = (-1)^n$ , so sind  $+1$  und  $-1$  Häufungspunkte der Folge. Weiter  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = +1$  und  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$ .

**Theorem 4.2.6 Bolzano Weierstraß**

Jede beschränkte Folge in  $\mathbb{R}$  besitzt eine konvergente Teilfolge.

**Lemma 4.2.7**

Jede Folge in  $\mathbb{R}$  hat eine monotone Teilfolge.

**Proof**

Sei  $(a_n) \subset \mathbb{R}$  beschränkt. Nach Lem 4.2.7 gibt es eine monotone Teilfolge, die natürlich auch beschränkt ist. Nach dem Satz über monotone, beschränkte Folgen konvergiert diese Teilfolge. ■

Brauchen:

**Proof**

Sei  $(a_n) \subset \mathbb{R}$  bel. Wir nennen  $a_{n_0} (n_0 \in \mathbb{N})$  **Gipfelpunkt**, falls:

- (i) **unendlich viele Gipfelpunkte:** Sei dann  $(a_{n_k})$  Teilfolge der Gipfelpunkte. Dann

$$n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \dots \text{ und}$$



$$a_{n_1} \geq a_{n_2} \geq a_{n_3} \geq \dots$$

Also ist  $(a_{n_k})$  monoton fallend.

(ii) **endlich viele oder keine Gipfelpunkte:** Hier existiert

$$N \in \mathbb{N} : n \geq N \implies a_n$$

kein Gipfelpunkt. Also gilt nicht: D. h.  $\exists n_1 \geq N : a_N < a_{n_1} \implies a_{n_1}$  kein Gipfelpunkt  $\implies \exists N_2 \geq n_1 : a_{n_1} < a_{n_2}$ , usf. Dann ist  $(a_{n_k})$  monoton wachsend. ■

### 4.3 Charakterisierung der Vollständigkeit

Für  $a \leq b$  sei  $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ . Der Durchmesser von  $[a, b]$ :  $\text{diam}([a, b]) = b - a$

#### Lemma 4.3.1

Sei  $(a_n)$  Cauchyfolge, die eine gegen  $a \in \mathbb{R}$  konvergente Teilfolge besitzt. Dann konvergiert  $(a_n)$  gegen  $a$ .

#### Proof

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N : |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Wähle zu  $\varepsilon > 0$  ein solches  $N \in \mathbb{N}$ . Dann gibt es wegen konvergenter Teilfolge einen Index  $\tilde{N} \geq N : |a_{\tilde{N}} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Dann  $\forall n \geq N$ :

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= |(a_n - a_{\tilde{N}}) + (a_{\tilde{N}} - a)| \\ &< \underbrace{|a_n - a_{\tilde{N}}|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_{\tilde{N}} - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon \end{aligned}$$

#### Theorem 4.3.2

Die folgenden Prinzipien sind auf  $\mathbb{R}$  äquivalent:

- (i) **Supremumseigenschaft:** Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge hat ein Supremum.
- (ii) **Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft:** Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge
- (iii) **Vollständigkeit:** Jede Cauchyfolge konvergiert
- (iv) **Intervallschachtelungsprinzip:** Sind  $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$  mit  $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \wedge [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}([a_n, b_n]) = 0$ , so existiert genau ein

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n].$$

**Proof**

Plan:  $(i) \implies (ii) \implies (iii) \implies (iv) \implies (i)$

**Ad**  $(i) \implies (ii)$  Die Supremumseigenschaft ist die einzige Zutat, um Bolzano-Weierstraß zu zeigen. Damit folgt  $(ii)$  aus  $(i)$

**Ad**  $(ii) \implies (iii)$  Sei  $(a_n)$  Cauchyfolge. Nach letzter Vorlesung ist  $(a_n)$  beschränkt, und nach  $(ii)$  hat  $(a_n)$  also konvergiert Teilfolge. Nach Lem 4.3.1 konvergiert dann aber bereits  $(a_n) \implies (iii)$

**Ad**  $(iii) \implies (iv)$  Sei  $([a_n, b_n])$  eine **Intervallschachtelung** mit  $\text{diam}([a_n, b_n]) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \underbrace{\text{diam}([a_n, b_n])}_{b_n - a_n} < \varepsilon$$

. Dann  $\forall n, m \geq N : a_m \in [a_n, b_n]$  (da Intervallschachtelung), also:

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - b_n| < \varepsilon \implies (a_n) \text{ Cauchy.}$$

Ähnlich:  $(b_n)$  Cauchy  $\xrightarrow{(iii)} \exists a, b \in \mathbb{R} : a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$ .

$$|a - b| = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{|a_n - b_n|}_{\text{diam}([a_n, b_n])} = 0 \implies a = b.$$

Kurz zu

$$a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] : (a_n) \text{ monoton wachsend, } (b_n) \text{ monoton fallend}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Stabilität der KG-Relation} \\ \implies \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a \\ b \geq \dots \geq b_2 \geq b_1 \end{array} \Bigg\} \\ \implies a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a = b \leq \dots \leq b_2 \leq b$$

hier fehlt noch was ...

**Example** einfach Beispiel aus Vorlesung

Ich glaube das soll zeigen, dass irgendwas an  $\mathbb{R}$  besonders

$$[\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + \frac{1}{n}]$$

$$\sqrt{2} - \frac{2}{n} \leq a_n \leq \sqrt{2} - \frac{1}{n}$$

$$\sqrt{2} + \frac{1}{n} \leq b_n \leq \sqrt{2} + \frac{1}{n}$$

$$[a_n, b_n], a_n, b_n \in \mathbb{Q}$$