Übungsblatt Nr. 2

Aufgabe 1: Orthonomalbasis

a)

$$\begin{aligned}(\vec{e}_1+\vec{e}_2)\cdot\vec{e}_3 &\overset{\text{Distr.}}{=} \vec{e}_1\cdot\vec{e}_3+\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3\\ &= \delta_{13}+\delta_{23}\\ &= 0+0\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4\vec{e}_1+3\vec{e}_2)\cdot(7\vec{e}_1-16\vec{e}_3) &\overset{\text{Distr.}}{=} (4\vec{e}_1+3\vec{e}_2)\cdot 7\vec{e}_1-(4\vec{e}_1+3\vec{e}_2)\cdot 16\vec{e}_3\\ &\overset{\text{Distr.}}{=} 28\vec{e}_1\vec{e}_1+21\vec{e}_1\vec{e}_2-64\vec{e}_1\vec{e}_3-48\vec{e}_2\vec{e}_3\\ &= 28\delta_{11}+21\delta_{12}-64\delta_{13}-48\delta_{23}\\ &= 28\end{aligned}$$

b) Genau dann wenn zwei Vektoren orthogonal sind, oder wenn einer der Vektoren der Nullvektor is, dann ist das Skalarprodukt zweier Vektoren 0. Also wollen wir ein X finden, wofür gilt:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(2\vec{e}_1-5\vec{e}_2+X\vec{e}_3)\cdot(-\vec{e}_1+2\vec{e}_2-3\vec{e}_3)=0$$

$$\begin{aligned}(2\vec{e}_1-5\vec{e}_2+X\vec{e}_3)\cdot(-\vec{e}_1+2\vec{e}_2-3\vec{e}_3)&=0\\ \sum_{i=0}^{3}a_ib_i&=0\\ 2\cdot(-1)+(-5)\cdot 2+X\cdot(-3)&=0\\ -2-10-3X&=0\\ 3X&=12\\ X&=4\end{aligned}$$

Also für $X := 4$ sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel, oder einer der beiden ist der Nullvektor. Da aber $\vec{a}\neq\vec{0}$ und $\vec{b}\neq\vec{0}$ sind die Vektoren parallel

c) Genau dann, wenn die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear unabhängig sind, gilt:

$$\forall\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\}:\lambda_1\vec{v}+\lambda_2\vec{w}\neq 0$$

Seien $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ gegeben, zu zeigen:
$\lambda_1\vec{v}+\lambda_2\vec{w}\neq\vec{0}$, wir führen einen Beweis durch Widerspruch und nehmen dazu an $\exists\lambda_1,\lambda_2\in$

$\mathbb{R} \setminus \{0\} : \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w} = 0$, dann gilt:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 v_1 + \lambda_2 w_1 = 0, \\ &\lambda_1 v_2 + \lambda_2 w_2 = 0 \text{ und} \\ &\lambda_1 v_3 + \lambda_2 w_3 = 0. \end{aligned}$$

Also gilt für die erste Gleichung:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 w_1 &= 0 \\ \lambda_1 \cdot 1 &= -\lambda_2 \cdot (-3) \\ \lambda_1 &= 3\lambda_2. \end{aligned}$$

Dies in die zweite Gleichung eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned} \lambda_1 v_2 + \lambda_2 w_2 &= 0 \\ 3\lambda_2 v_2 + \lambda_2 w_2 &= 0 \\ \lambda_2 (3v_2 + w_2) &= 0 \\ \lambda_2 (3 \cdot (-1) + 2) &= 0 \\ \lambda_2 (-1) &= 0 \\ \lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

Da aber $\lambda_2 \neq 0$ führt dies zu einem Widerspruch und die die Annahme $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w} = 0$, war falsch, also gilt $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w} \neq 0$. □

Aufgabe 2: Raketengleichung

a) Aus der Vorlesung wissen wir, dass gilt im Allgemeinen:

$$v(T) = -v_{rel} \cdot \ln \frac{m_T}{m_0} - gT$$

da die Rakete pro Zeiteinheit die Gasmenge α mit der Geschwindigkeit v_0 ausstößt und die Anfangsmasse m_0 hat, gilt für m_T:

$$m_T = m_0 - \alpha t,$$

somit gilt:

$$v(T) = v_0 \cdot \ln(\frac{m_0 - \alpha T}{m_0}) - gT$$

für T, die Brenndauer.

b) $s(t) = \int_{t_0}^{t} v(T)dT$: setze $u := \frac{m_0 - \alpha T}{m_0}$, dann gilt $du = -\frac{\alpha dT}{m_0}$

$$
\begin{aligned}
v(T) &= -v_0 \ln(\frac{m_0 - \alpha T}{m_0}) - gT \\
v(T)dT &= -v_0 \ln(\frac{m_0 - \alpha T}{m_0})dT - gTdT \\
v(T)dT &= -v_0 \ln(u)\frac{du}{du}dT - gTdT \\
v(T)dT &= -v_0 \ln(u)\frac{du}{-\frac{\alpha dT}{m_0}}dT - gTdT \\
v(T)dT &= v_0 \ln(u)\frac{m_0 du}{\alpha} - gTdT \\
v(T)dT &= \frac{v_0 m_0}{\alpha}\ln(u)du - gTdT \\
\int_0^t v(T)dT &= \frac{v_0 m_0}{\alpha}\int_{u_0}^{u_t}\ln(u)du - \int_0^t gTdT \\
s(t) &= \frac{v_0 m_0}{\alpha}\left[u_t(\ln(u_t) - 1) - u_0(\ln(u_0) - 1)\right] - \frac{1}{2}gt^2 + C
\end{aligned}
$$

setzte für $u_t := \frac{m_0 - \alpha t}{m_0}$ und für $u_0 := \frac{m_0 - \alpha 0}{m_0} = 1$

$$
\begin{aligned}
s(t) &= \frac{v_0 m_0}{\alpha}\left[\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\left(\ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right) - 1\right) - (\ln(1) - 1)\right] - \frac{1}{2}gt^2 + C \\
s(t) &= \frac{v_0 m_0}{\alpha}\left[\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\left(\ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right) - 1\right) + 1\right] - \frac{1}{2}gt^2 + C \\
s(t) &= \frac{v_0 m_0}{\alpha}\left[\left(1 - \frac{\alpha t}{m_0}\right)\left(\ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right) - 1\right) + 1\right] - \frac{1}{2}gt^2 + C \\
s(t) &= \frac{v_0 m_0}{\alpha}\left[\ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right) - 1 - \frac{\alpha t}{m_0}\left(\ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right) - 1\right) + 1\right] - \frac{1}{2}gt^2 + C \\
s(t) &= \frac{v_0 m_0}{\alpha}\left[\ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right) - \frac{\alpha t}{m_0}\left(\ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right) - 1\right)\right] - \frac{1}{2}gt^2 + C \\
s(t) &= \frac{v_0 m_0}{\alpha}\left[\left(1 - \frac{\alpha t}{m_0}\right)\ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right) + \frac{\alpha t}{m_0}\right] - \frac{1}{2}gt^2 + C \\
s(t) &= \frac{v_0}{\alpha}\left[(m_0 - \alpha t)\ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right)\right] + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + C \\
s(t) &= \frac{v_0 m_0}{\alpha}\left(\ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right)\right) + v_0\left(1 - \ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right)\right)t - \frac{1}{2}gt^2 + C \\
s(t) &= v_0\left(1 - \ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right)\right)t - \frac{1}{2}gt^2 + s_0
\end{aligned}
$$

c) Bei mehrstufigen Rakten wird Balast abgeworfen, wodurch das Gewicht verringert wird. Bei geringerem Gewicht muss nach $F = m \cdot a \implies \frac{1}{m} \propto m$ bei gleicher Kraft, also bei gleicher Schubkraft.

Aufgabe 3: Freier Fall

a)

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{v} dt + h_0$$
$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \left(\int_{t_0}^{t} \vec{a} dt + \vec{v} \right) dt + h_0$$
$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t} \vec{a} dt^2 + \int_{t_0}^{t} \vec{v} dt + h_0$$

Da wir annehmen, dass wir nicht nach oben oder unten springen gilt nach dem Superpositionsprinzip:

$$h(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + h_0$$

Dabei ist $h_0 = 8\,\mathrm{m}$. Um die Auftreffzeit zu berechnen, müssen wir $h(t) = 0$ setzten:

$$h(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + h_0$$
$$0\,\mathrm{m} = -\frac{1}{2} g t^2 + 8\,\mathrm{m}$$

dann gilt nach der Binomischen Formel:

$$t_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 + 2g \cdot 8\,\mathrm{m}}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2} g\right)}$$
$$t_{1,2} = \frac{\mp\sqrt{g \cdot 16\,\mathrm{m}}}{g}$$
$$t_{1,2} = \frac{\mp 4\sqrt{10\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2}}{10\,\mathrm{m/s}^2}$$
$$t_1 = \frac{-4\sqrt{10}\,\mathrm{m/s}}{10\,\mathrm{m/s}^2}$$
$$t_2 = \frac{4\sqrt{10}\,\mathrm{m/s}}{10\,\mathrm{m/s}^2}$$

Da t_1 eine negative Zeit ist, wir aber erst zur Zeit $0\,\mathrm{s}$ losspringen, kann dies nicht sein und die Auftreffzeit ist $t_2 = \frac{4\sqrt{10}\,\mathrm{m/s}}{10\,\mathrm{m/s}^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}\mathrm{s}$

b) Es gilt weiterhin

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t} \vec{a} dt^2 + \int_{t_0}^{t} \vec{v} dt + h_0$$

und $h_0 = 8\,\mathrm{m}$, da für die Höhe nach dem Superpositionsprinip nur die Geschwindigkeit in die y-Richtung von Bedeutung ist, gilt für $t_0 = 0.5\,\mathrm{s}$

$$h(t) = \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t} \vec{a} dt^2 + \int_{t_0}^{t} v_y dt + h_0$$
$$h(t) = -g(t - t_0)^2 + v_y \cdot (t - t_0) + 8\,\mathrm{m}$$

Dabei soll $h(t_2) = 0\,\mathrm{m}$, also:

$$
\begin{aligned}
0\,\mathrm{m} &= -g\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\mathrm{s} - 0.5\,\mathrm{s}\right)^2 + v_0\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\mathrm{s} - 0.5\,\mathrm{s}\right) + 8\,\mathrm{m} \\
10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\left(\frac{4\cdot 5}{25}\mathrm{s}^2 - 2\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot 0.5\,\mathrm{s}^2 + 0.25\,\mathrm{s}^2\right) - 8\,\mathrm{m} &= v_0\frac{2\sqrt{5}}{5}\mathrm{s} \\
10\,\mathrm{m}\cdot\left(\frac{4}{5} - \frac{2\sqrt{5}}{5} + 0.25\right) - 8\,\mathrm{m} &= v_0\frac{2\sqrt{5}}{5}\mathrm{s} \\
8\,\mathrm{m} - \frac{4\sqrt{5}}{}\mathrm{m} + 2.5\,\mathrm{m} - 8\,\mathrm{m} &= v_0\frac{2\sqrt{5}}{5}\mathrm{s}
\end{aligned}
$$