Übungsblatt Nr. 2

Aufgabe 1: Orthonomalbasis

a)

$$\begin{aligned}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_3 &\overset{\text{Distr.}}{=} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 + \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 \\ &= \delta_{13} + \delta_{23} \\ &= 0 + 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2) \cdot (7\vec{e}_1 - 16\vec{e}_3) &\overset{\text{Distr.}}{=} (4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2) \cdot 7\vec{e}_1 - (4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2) \cdot 16\vec{e}_3 \\ &\overset{\text{Distr.}}{=} 28\vec{e}_1\vec{e}_1 + 21\vec{e}_1\vec{e}_2 - 64\vec{e}_1\vec{e}_3 - 48\vec{e}_2\vec{e}_3 \\ &= 28\delta_{11} + 21\delta_{12} - 64\delta_{13} - 48\delta_{23} \\ &= 28\end{aligned}$$

b) Genau dann wenn zwei Vektoren orthogonal sind, oder wenn einer der Vektoren der Nullvektor is, dann ist das Skalarprodukt zweier Vektoren 0. Also wollen wir ein X finden, wofür gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + X\vec{e}_3) \cdot (-\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3) = 0$$

$$\begin{aligned}(2\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + X\vec{e}_3) \cdot (-\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3) &= 0 \\ \sum_{i=0}^{3} a_i b_i &= 0 \\ 2 \cdot (-1) + (-5) \cdot 2 + X \cdot (-3) &= 0 \\ -2 - 10 - 3X &= 0 \\ 3X &= 12 \\ X &= 4\end{aligned}$$

Also für $X := 4$ sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel, oder einer der beiden ist der Nullvektor. Da aber $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ sind die Vektoren parallel

c) Genau dann, wenn die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear unabhängig sind, gilt:

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w} \neq 0$$

Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gegeben, zu zeigen:
$\lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w} \neq \vec{0}$, wir führen einen Beweis durch Widerspruch und nehmen dazu an $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} :$

$\neg(\lambda_1 = \lambda_2 = 0) \wedge \lambda_1\vec{v} + \lambda_2\vec{w} = 0$, dann gilt:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 w_1 = 0,$$
$$\lambda_1 v_2 + \lambda_2 w_2 = 0 \text{ und}$$
$$\lambda_1 v_3 + \lambda_2 w_3 = 0.$$

Also gilt für die erste Gleichung:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 w_1 &= 0 \\ \lambda_1 \cdot 1 &= -\lambda_2 \cdot (-3) \\ \lambda_1 &= 3\lambda_2. \end{aligned}$$

Dies in die zweite Gleichung eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned} \lambda_1 v_2 + \lambda_2 w_2 &= 0 \\ 3\lambda_2 v_2 + \lambda_2 w_2 &= 0 \\ \lambda_2 (3v_2 + w_2) &= 0 \\ \lambda_2 (3 \cdot (-1) + 2) &= 0 \\ \lambda_2 (-1) &= 0 \\ \lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

Da aber $\lambda_2 \neq 0$ führt dies zu einem Widerspruch und die die Annahme $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \lambda_1\vec{v} + \lambda_2\vec{w} = 0$, war falsch, also gilt $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \lambda_1\vec{v} + \lambda_2\vec{w} \neq 0$. $\square$

Aufgabe 2: Raketengleichung

a) Es gelte:

$$dp_{\text{treibstoff}} = mdv$$
$$dp_{\text{rakete}} = -dmv_0.$$

Da gilt, dass

$$F = \frac{dp}{dt},$$

und da die Kraft auf die Rakte, die Gravitationskraft plus die Kraft, die durch den Treibstoff aufkommt, ist, gilt:

$$F_{\text{rakete}} = F_{\text{gravitation}} + F_{\text{treibstoff}}$$

Also:

$$\begin{aligned} \frac{dp_{\text{rakete}}}{dt} &= -mg - \frac{dp_{\text{treibstoff}}}{dt} \\ \frac{d}{dt} mv_{\text{rakete}} &= -mg - \frac{d}{dt} mv_0 \\ mdv &= -mgdt - dmv_0 \\ dv &= -gdt - \frac{v_0}{m} dm \\ \int_0^T dv &= \int_0^T -gdt - \int_{m_0}^{m_T} \frac{v_0}{m} dm \\ v(T) - v(0) &= -gT - v_0 \ln \frac{m_T}{m_0} \end{aligned}$$

da die Rakete pro Zeiteinheit die Gasmenge α mit der Geschwindigkeit v_0 ausstößt und die Anfangsmasse m_0 hat, gilt für m_T:

$$m_T = m_0 - \alpha t,$$

somit gilt:

$$v(T) = -v_0 \cdot \ln(\frac{m_0 - \alpha T}{m_0}) - gT$$

für T, die Brenndauer.

b) $s(t) = \int_{t_0}^{t} v(T)dT$: setze $u := \frac{m_0 - \alpha T}{m_0}$, dann gilt $du = -\frac{\alpha dT}{m_0}$

$$\begin{aligned}
v(T) &= -v_0 \ln(\frac{m_0 - \alpha T}{m_0}) - gT \\
v(T)dT &= -v_0 \ln(\frac{m_0 - \alpha T}{m_0})dT - gTdT \\
\int_0^t v(T)dT &= -\int_0^t v_0 \ln(\frac{m_0 - \alpha T}{m_0})dT - \int_0^t gTdT \\
s(t) &= -\int_0^t v_0 \ln(1 - \frac{\alpha T}{m_0})dT - \frac{1}{2}gt^2 \\
s(t) &= -v_0 \int_0^t \ln(\frac{-\alpha}{m_0}T + 1)dT - \frac{1}{2}gt^2 \\
s(t) &= -v_0 \left[\frac{\frac{-\alpha}{m_0}T + 1}{\frac{-\alpha}{m_0}} \left(\ln(\frac{-\alpha}{m_0}T + 1) - 1 \right) \right]_0^t - \frac{1}{2}gt^2 \\
s(t) &= -v_0 \left[\left(T - \frac{m_0}{\alpha} \right) \left(\ln(\frac{-\alpha}{m_0}T + 1) - 1 \right) \right]_0^t - \frac{1}{2}gt^2 \\
s(t) &= -v_0 \left[\left(t - \frac{m_0}{\alpha} \right) \left(\ln(\frac{-\alpha}{m_0}t + 1) - 1 \right) - \left(\left(0 - \frac{m_0}{\alpha} \right) \left(\underbrace{\ln(\frac{-\alpha}{m_0}0 + 1)}_{=0} - 1 \right) \right) \right] - \frac{1}{2}gt^2 \\
s(t) &= -v_0 \left[\left(t - \frac{m_0}{\alpha} \right) \left(\ln(\frac{-\alpha}{m_0}t + 1) - 1 \right) - \left(\frac{m_0}{\alpha} \right) \right] - \frac{1}{2}gt^2 \\
s(t) &= -v_0 \left[\left(t - \frac{m_0}{\alpha} \right) \ln(\frac{-\alpha}{m_0}t + 1) - \left(t - \frac{m_0}{\alpha} \right) - \left(\frac{m_0}{\alpha} \right) \right] - \frac{1}{2}gt^2 \\
s(t) &= -v_0 \left[\left(t - \frac{m_0}{\alpha} \right) \ln(\frac{-\alpha}{m_0}t + 1) - t \right] - \frac{1}{2}gt^2 \\
s(t) &= \left(\ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0} \right) - 1 \right) v_0 t - \frac{m_0}{\alpha} \ln(\frac{-\alpha}{m_0}t + 1) - \frac{1}{2}gt^2
\end{aligned}$$

c) Bei mehrstufigen Rakten wird Balast abgeworfen, wodurch das Gewicht verringert wird. Bei geringerem Gewicht muss nach $F = m \cdot a \implies \frac{1}{m} \propto m$ bei gleicher Kraft, also bei gleicher Schubkraft.

Aufgabe 3: Freier Fall

a)

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{v} dt + h_0$$
$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \left(\int_{t_0}^{t} \vec{a} dt + \vec{v} \right) dt + h_0$$
$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t} \vec{a} dt^2 + \int_{t_0}^{t} \vec{v} dt + h_0$$

Da wir annehmen, dass wir nicht nach oben oder unten springen gilt nach dem Superpositionsprinzip:

$$h(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + h_0$$

Dabei ist $h_0 = 8\,\mathrm{m}$. Um die Auftreffzeit zu berechnen, müssen wir $h(t) = 0$ setzten:

$$h(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + h_0$$
$$0\,\mathrm{m} = -\frac{1}{2} g t^2 + 8\,\mathrm{m}$$

dann gilt nach der Binomischen Formel:

$$t_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 + 2g \cdot 8\,\mathrm{m}}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2} g\right)}$$
$$t_{1,2} = \frac{\mp\sqrt{g \cdot 16\,\mathrm{m}}}{g}$$
$$t_{1,2} = \frac{\mp 4\sqrt{10\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2}}{10\,\mathrm{m}/\mathrm{s}^2}$$
$$t_1 = \frac{-4\sqrt{10}\,\mathrm{m}/\mathrm{s}}{10\,\mathrm{m}/\mathrm{s}^2}$$
$$t_2 = \frac{4\sqrt{10}\,\mathrm{m}/\mathrm{s}}{10\,\mathrm{m}/\mathrm{s}^2}$$

Da t_1 eine negative Zeit ist, wir aber erst zur Zeit $0\,\mathrm{s}$ losspringen, kann dies nicht sein und die Auftreffzeit ist $t_2 = \frac{4\sqrt{10}\,\mathrm{m}/\mathrm{s}}{10\,\mathrm{m}/\mathrm{s}^2} = \frac{2\sqrt{10}}{5}\mathrm{s}$

b) Es gilt weiterhin

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t} \vec{a} dt^2 + \int_{t_0}^{t} \vec{v} dt + h_0$$

und $h_0 = 8\,\mathrm{m}$, da für die Höhe nach dem Superpositionsprinip nur die Geschwindigkeit in die y-Richtung von Bedeutung ist, gilt für $t_0 = 0.5\,\mathrm{s}$

$$h(t) = \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t} \vec{a} dt^2 + \int_{t_0}^{t} v_{y_0} dt + h_0$$
$$h(t) = -\frac{1}{2} g (t - t_0)^2 + v_{y_0} \cdot (t - t_0) + 8\,\mathrm{m}$$

Dabei soll $h(t_2) = 0\,\mathrm{m}$, also:

$$\begin{aligned}
0\,\mathrm{m} &= -\frac{1}{2}g\left(t_2 - 0.5\,\mathrm{s}\right)^2 + v_{y0}\left(t_2 - 0.5\,\mathrm{s}\right) + h_0 \\
v_{y0}(t_2 - 0.5\,\mathrm{s}) &= \frac{1}{2}g\left(t_2 - 0.5\,\mathrm{s}\right)^2 - h_0 \\
v_{y0} &= \frac{1}{2}g\left(t_2 - 0.5\,\mathrm{s}\right) - \frac{h_0}{t_2 - 0.5\,\mathrm{s}} \\
v_{y0} &= \frac{1}{2}g\left(\frac{2\sqrt{10}}{5}\mathrm{s} - 0.5\,\mathrm{s}\right) - \frac{h_0}{\frac{2\sqrt{10}}{5}\mathrm{s} - 0.5\,\mathrm{s}} \\
v_{y0} &= \frac{1}{2}g\left(\frac{4\sqrt{10} - 5}{10}\mathrm{s}\right) - \frac{h_0}{\frac{4\sqrt{10}-5}{10}\mathrm{s}} \\
v_{y0} &= \frac{1}{2}10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\left(\frac{4\sqrt{10} - 5}{10}\mathrm{s}\right) - \frac{10h_0}{4\sqrt{10} - 5}\frac{1}{\mathrm{s}} \\
v_{y0} &= \frac{1}{2}\left(4\sqrt{10} - 5\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - \frac{10 \cdot 8\,\mathrm{m}}{4\sqrt{10} - 5}\frac{1}{\mathrm{s}} \\
v_{y0} &= \frac{1}{2}\left(4\sqrt{10} - 5\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - \frac{80 \cdot \left(4\sqrt{10} + 5\right)}{160 - 25}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\
v_{y0} &= \frac{135\left(4\sqrt{10} - 5\right) - 160 \cdot \left(4\sqrt{10} + 5\right)}{270}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\
v_{y0} &= \frac{-25(4\sqrt{10}) - 295 \cdot 5}{270}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\
v_{y0} &= \frac{-5(4\sqrt{10}) - 59 \cdot 5}{54}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\
v_{y0} &\approx -6.634
\end{aligned}$$