2023-12-19
Winter Semester 2023/2024

University of Konstanz
Faculty of Science
(Mathematics and Statistics)

BMA

(i) **Vor.:** V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $u, v, w \in V$ linear unabhängig
Beh.: $\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} : x_1(u+v) + x_2(v+w) + x_3(w+u) \implies x_1 = x_2 = x_3 = 0$

Proof

Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &= x_1(u+v) + x_2(v+w) + x_3(w+u) \\ &= x_1u + x_1v + x_2v + x_2w + x_3w + x_3u \\ &= (x_1+x_3)u + (x_1+x_2)v + (x_2+x_3)w \end{aligned}$$

Da u, v, w linear unabhängig und $x_1 + x_3, x_1 + x_2, x_2 + x_3 \in \mathbb{R}$ gilt: $x_1 + x_3 = x_1 + x_2 = x_2 + x_3 = 0$. Dazu können wir dieses Gleichungssystem in eine Matrix überführen, sodass

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Also existiert nur die trivieale Lösung, sodass $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, also sind $u+v, v+w, w+u$ linear unabhängig ■

(ii) **Vor.:** $a, b, c \in \mathbb{R}$ und

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ b^2 \end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c^2 \end{pmatrix}$$

Beh.: v_1, v_2, v_3 sind genau dann linear unabhängig, wenn die reellen Zahlen a, b, c paarweise verschieden sind

Proof

“$\implies$” Wir führen einen Beweis durch Kontraposition, also zu zeigen, falls $a = b \vee b = c \vee c = a \implies \exists x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} : x_1 \neq 0 \vee x_2 \neq 0 \vee x_3 \neq \implies x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = 0$
Fall 1: $a = b$, wähle $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 0$, dann gilt $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ und $x_1 \neq 0 \vee x_2 \neq 0 \vee x_3 \neq 0$, außerdem gilt:
$v_1 = v_2$, also

$$\begin{aligned} x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 &= 1v_1 - 1v_1 + 0v_3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

wie gewünscht. Analog für $b = c, c = a$, da $a, b, c \in \mathbb{R}$ beliebig.

" $\Longleftarrow$ " Wir nehmen an, dass $a \neq b, b \neq c, c \neq a$, zu zeigen v_1, v_2, v_3 linear unabhängig, dafür reicht zu zeigen v_1, v_2 linear unabhängig und $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 v_1 + x_2 v_2 \neq v_3$.
Um zu zeigen, dass v_1, v_2 linear Unabhängig sind, reicht zu zeigen $\forall c \in \mathbb{R} : v_1 \neq c v_2$, wir führen einen Beweis durch Widerspruch und nehmen dazu an $\exists c \in \mathbb{R} : v_1 = c v_2$, wähle ein solches c, dann gilt insbesondere: $1 = c \cdot 1$, also $c = 1$, dann gilt aber insbesondere $a = c \cdot b = b$ ↯steht im Widerspruch zur Annahme $a \neq b$. Noch zu zeigen: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 v_1 + x_2 v_2 \neq v_3$.
Wir führen einen Beweis durch Widerspruch und nehmen dazu an, dass $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 v_1 + x_2 v_2 = v_3$.
Dann gilt insbesondere $1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 1$, also $x_2 = 1 - x_1$. Also gilt:

$$
\begin{aligned}
c &= x_1 \cdot a + x_2 \cdot b \\
&= x_1 a + (1 - x_1) b \\
&= x_1 a - x_1 b + b \\
&= x_1 (a - b) + b
\end{aligned}
$$

Außerdem:

$$
\begin{aligned}
c^2 &= x_1 \cdot a^2 + x_2 b^2 \\
(x_1(a-b) + b)^2 &= x_1 \cdot a^2 + (1 - x_1) b^2 \\
x_1^2 (a-b)^2 + 2 x_1 (a-b) b + b^2 &= x_1 \cdot a^2 - x_1 \cdot b^2 + b^2 \\
0 &= x_1^2 (a-b)^2 + x_1 (2(a-b)b - a^2 + b^2) + b^2 - b^2 \\
0 &= x_1^2 (a-b)^2 + x_1 (-b^2 + 2ab - a^2) \\
0 &= x_1 (x_1 (a-b)^2 - (a-b)^2
\end{aligned}
$$

Da $\mathbb{R}$ integer gilt $x_1 = 0 \vee x_1(a-b)^2 - (a-b)^2 = 0$. Fall 1: $x_1 = 0$, dann gilt $0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 = v_3$, also insbesondere $0 \cdot a + b = b = c$ ↯, was im Widerspruch zu $b \neq c$ steht.
Fall 2: $x_1(a-b)^2 - (a-b)^2 = 0$, dann gilt:

$$
\begin{aligned}
x_1 (a-b)^2 - (a-b)^2 &= 0 \\
x_1 (a-b)^2 &= (a-b)^2 \quad | \text{ da } a \neq b \iff a - b \neq 0 \\
x_1 &= \frac{(a-b)^2}{(a-b)^2} \\
x_1 &= 1
\end{aligned}
$$

dann gilt $1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 = v_3$, also insbesondere $a + 0 \cdot b = a = c$ ↯, was im Widerspruch zu $a \neq c$ steht.
Also ist v_3 nicht linear darstellbar durch v_1 und v_2, also sind v_1, v_2, v_3 linear unabhänig ■