

# Analysis 1

15.12.2023

F. Gmeineder

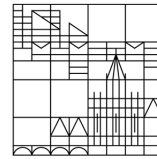
P. Stephan

A. von Pippich

Wintersemester 2023

Abgabe: Bis zum 22.12.2023 um 10:00 Uhr

Universität  
Konstanz



## Übungsblatt 9

### Aufgabe 1: (Gleichmäßige) Stetigkeit

5 + 5 = 10 Punkte

- (a) Zeigen Sie, dass  $x \mapsto \sqrt{x}$  gleichmäßig stetig ist auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ . Zeigen Sie hierzu die Ungleichung  $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$  für alle  $x, y \geq 0$ .
- (b) Zeigen Sie mit der  $\varepsilon$ - $\delta$ -Charakterisierung, dass

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^2}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1, \end{cases}$$

auf  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  stetig ist, nicht jedoch in  $x_0 = 1$ .

### Aufgabe 2: Sätze über stetige Funktionen I

5 + 5 = 10 Punkte

- (a) Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige und ungerade Funktion. Letzteres bedeutet, dass  $f(-x) = -f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt. Zeigen Sie, dass  $f$  eine Nullstelle besitzt:  $f(x_0) = 0$  für ein  $x_0 \in \mathbb{R}$ . *Tipp: Zwischenwertsatz.*
- (b) Sei  $K \subset \mathbb{R}$  nichtleer, kompakt und  $f : K \rightarrow K$  eine Funktion mit  $|f(x) - f(y)| < |x - y|$  für alle  $x, y \in K$ . Zeigen Sie, dass  $f$  genau einen Fixpunkt  $x_0 \in K$  besitzt. *Tipp: Satz über stetige Funktionen auf Kompakta.*

### Aufgabe 3: Sätze über stetige Funktionen II

8 + 2 = 10 Punkte

- (a) Zeigen Sie, dass keine stetige Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jeden ihrer Werte genau zweimal annimmt. *Hinweis: Zwischenwertsatz und Satz über stetige Funktionen auf Kompakta.*
- (b) Skizzieren Sie den Graphen einer unstetigen Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die jede reelle Zahl genau zweimal annimmt.

### Aufgabe 4: Funktionenfolgen

5 + 5 = 10 Punkte

Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $f_n, g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz, und geben Sie gegebenenfalls die Grenzfunktion an.

(a)  $f_n(x) := \sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2}, \quad (n \in \mathbb{N}),$

(b)  $g_n(x) := x^2 \sum_{k=0}^{n-1} (1 + x^2)^{-k}, \quad (n \in \mathbb{N}).$