

2. Übungsblatt

1. Boolesche Algebra/Schaltalgebra

- a) Boolesche Algebra ist Menge mit einem Nullelement und einem Einselement, über der die **Konjunktion**, **Disjunktion** und **Negation** definiert ist und die **Kommutativität**, **Distributivität**, **Neutralität** und **Komplementarität** gilt.

Schaltalgebra ist eine spezifische Boolesche Algebra, die aus der Trägermenge $\{0, 1\}$ besteht.

- b) \wedge : “und”
 \vee : “oder”
 \neg : “nicht”

c)

$$\begin{aligned} \neg(a \vee b) \vee b &| \text{ DeMorgan} \\ (\neg a \wedge \neg b) \vee b &| \text{ Distributivität} \\ (\neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee b) &| \text{ Komplementarität} \\ (\neg a \vee b) \wedge 1 &| \text{ Neutralität} \\ \neg a \vee b & \end{aligned}$$

d)

a	b	a	\vee	$(\neg a \wedge b)$	$a \vee b$
0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1

e)

$$\begin{aligned} (\neg \wedge d) \vee (d \wedge (a \vee \neg)) \vee &\iff c \vee (\neg c \wedge d) \vee (d \wedge (a \vee \neg b)) \\ &\iff c \vee d \vee (d \wedge (a \vee \neg b)) \\ &\iff d \vee ((c \vee d) \wedge (c \vee (a \vee \neg b))) \\ &\iff d \vee ((c \vee d) \wedge (c \vee a \vee \neg b)) \\ &\iff (d \vee c \vee d) \wedge (d \vee c \vee a \vee \neg b) \\ &\iff ((d \vee c \vee 0) \wedge ((d \vee c) \vee a \vee \neg b)) \\ &\iff (d \vee c) \vee (0 \wedge (a \vee \neg b)) \\ &\iff (d \vee c) \vee (0) \\ &\iff (d \vee c) \end{aligned}$$

□

2. Boolesche Algebra/Schaltalgebra

a)

$$\begin{aligned}
 \neg(a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 \wedge \dots \wedge a_{n-1} \wedge a_n) &\iff \neg a_1 \vee \neg(a_2 \wedge a_3 \wedge \dots \wedge a_{n-1} \wedge a_n) \\
 &\iff \neg a_1 \vee \neg a_2 \vee \neg(a_3 \wedge \dots \wedge a_{n-1} \wedge a_n) \\
 &\vdots \\
 &\iff \neg a_1 \vee \neg a_2 \vee \neg a_3 \vee \dots \vee \neg(a_{n-1} \wedge a_n) \\
 &\iff \neg a_1 \vee \neg a_2 \vee \neg a_3 \vee \dots \vee \neg a_{n-1} \vee \neg a_n \\
 \\
 \neg(a_1 \vee a_2 \vee a_3 \vee \dots \vee a_{n-1} \vee a_n) &\iff \neg a_1 \wedge \neg(a_2 \vee a_3 \vee \dots \vee a_{n-1} \vee a_n) \\
 &\iff \neg a_1 \wedge \neg a_2 \wedge \neg(a_3 \vee \dots \vee a_{n-1} \vee a_n) \\
 &\vdots \\
 &\iff \neg a_1 \wedge \neg a_2 \wedge \neg a_3 \wedge \dots \wedge \neg(a_{n-1} \vee a_n) \\
 &\iff \neg a_1 \wedge \neg a_2 \wedge \neg a_3 \wedge \dots \wedge \neg a_{n-1} \wedge \neg a_n
 \end{aligned}$$

b) Alle, bei denen binäre Operatoren mit Klammern vorkommen, also Distributivität, Assoziativität und Absorption

3. Boolesche Algebra/Schaltalgebra

zu zeigen: Term 1 \iff Term 2, also $(a \wedge \neg c) \vee b \iff \neg(\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \wedge (a \vee b \vee \neg c) \wedge \neg(c \wedge \neg b)$

Term 2:

$$\begin{aligned}
 \neg(\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \wedge (a \vee b \vee \neg c) \wedge \neg(c \wedge \neg b) &\iff (\neg \neg a \vee \neg \neg b \vee \neg \neg c) \wedge (a \vee b \vee \neg c) \wedge (\neg c \vee \neg \neg b) \\
 &\iff (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b \vee \neg c) \wedge (\neg c \vee b) \\
 &\iff ((a \vee b) \vee c) \wedge ((a \vee b) \vee \neg c) \wedge (\neg c \vee b) \\
 &\iff ((a \vee b) \vee (c \wedge \neg c)) \wedge (\neg c \vee b) \\
 &\iff ((a \vee b) \vee 0) \wedge (\neg c \vee b) \\
 &\iff (a \vee b) \wedge (\neg c \vee b) \\
 &\iff (a \wedge \neg c) \vee b
 \end{aligned}$$

Somit ist Term 2 logisch äquivalent zu Term 1.

Neben einem direkten Beweis durch Termumformung, könnte man auch zwei Wertetabelle erstellen, zu je einem Term eine, und dann diese auf Gleichheit überprüfen.

4. Disjunktive und konjunktive Normalform