Analysis 1

24.11.2023

F. Gmeineder

P. Stephan

A. von Pippich

Wintersemester 2023

Abgabe: Bis zum 01.12.2023 um 10:00 Uhr

Universität Konstanz

Übungsblatt 6

Aufgabe 1: Teilfolgen **8 + 2 = 10 Punkte**

Zeigen Sie, dass eine Folge reeller Zahlen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn sie beschränkt ist und genau einen Häufungspunkt besitzt. Vergleichen Sie diese Aussage mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß.

Aufgabe 2: Eine Darstellung reeller Zahlen **(5 + 5) = 10 Punkte**

Sei $b \geq 2$ eine natürliche Zahl. Wir definieren die Folge

$$c_n := \left(\sum_{j=-k}^{n} a_j b^{-j} \right),$$

wobei $k \in \mathbb{N}$ und $0 \leq a_j < b$ für $j \in \mathbb{N}$ vorgegeben sind. Zeigen Sie

(a) Die Folge c_n ist konvergent.

(b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ und eine Folge $(a_j) \subset \mathbb{N}$ mit $0 \leq a_j < b$, sodass

$$\lim_{n\to\infty} c_n = x.$$

Aufgabe 3: Reihen konkret **2,5 + 2,5 + 2,5 + 2,5 = 10 Punkte**

Für diese Aufgabe ist Wissen aus der Vorlesung am Dienstag notwendig: Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, absolute Konvergenz beziehungsweise Divergenz:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha + \frac{1}{n}\right)^n$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und $|\alpha| < 1$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{1+\alpha^{4n}}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Eine Reihe $\sum a_n$ heißt *absolut konvergent*, falls $\sum |a_n|$ konvergent ist.

Aufgabe 4: Beweismechanik **10 Punkte**

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Wir setzen $\mathbb{N}_{\geq N} = \{n \in \mathbb{N} : n \geq N\}$ für $N \in \mathbb{N}$. Betrachte nun die folgenden Aussagen:

(1) $\exists a \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}_{\geq N} : |a_n - a| < \epsilon.$

(2) $\exists a \in \mathbb{R} : \exists \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}_{\geq N} : |a_n - a| < \epsilon.$

(3) $\exists a \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}_{\geq N} : |a_n - a| < \epsilon.$

(4) $\exists a \in \mathbb{R} : \exists N \in \mathbb{N} : \forall \epsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N}_{\geq N} : |a_n - a| < \epsilon.$

Gib für jede der Aussagen jeweils ein Beispiel einer reellen Folge an, für die diese Aussage gilt und beweise deine Behauptung. Achte darauf, dass dein Beispiel möglichst wenige der anderen Aussagen erfüllt.

Hinweis: Die Beweismechanik-Abgabe muss als Zweier-Team abgegeben werden. Speichern Sie Ihre gemeinsame Beweismechanik-Abgabe in einer PDF-Datei unter einem Namen der Form a1blatt6-bma-ihrnachname-nachnameihrespartners.pdf *ab, wobei Sie* ihrnachname *durch Ihren Nachnamen ersetzen usw. Laden Sie die Beweismechanik-Abgabe dann getrennt von den anderen Aufgaben auf der ILIAS-Seite der Vorlesung unter „Abgabe Beweismechanik-Aufgabe“ hoch. Die Abgabe im Zweier-Team ist verpflichtend. Pro Zweier-Team bitte nur eine Abgabe!*

Aufgabe 1 wird als Musterlösung hochgeladen, Aufgabe 2 und 3 in den Tutorien besprochen, Aufgabe 4 in der Plenumsübung.