Analysis 1

03.11.2023
F. Gmeineder
P. Stephan
A. von Pippich
Wintersemester 2023
Abgabe: Bis zum 10.11.2023 um 10:00 Uhr

Universität Konstanz

Übungsblatt 3

Aufgabe 1: Körperaxiome **2,5+2,5+2,5+2,5 = 10 Punkte**

Beweisen Sie Lemma 2.2.5. (iii)–(vi) aus der Vorlesung, d.h. zeigen Sie, dass in Körpern gilt:

(a) Zu jedem $a \in K \backslash \{0\}$ und jedem $b \in K$ gibt es genau ein $x \in K$ mit $a \cdot x = b$.

(b) Für alle $x, y, z \in K$ gilt $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

(c) Für alle $x \in K$ gilt $x \cdot 0_K = 0_K \cdot x = 0_K$.

(d) Sind $x, y \in K$ mit $x \cdot y = 0_K$, so gilt $x = 0_K$ oder $y = 0_K$.

Aufgabe 2: Binomische Formel **5+5 = 10 Punkte**

Zeigen Sie

(a) direkt mit Hilfe des binomischen Satzes, dass für jede reelle Zahl $x \geq 0$ und jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 1} := \{1, 2, 3, ...\}$ die Bernoullische Ungleichung gilt, d.h.,

$$1 + nx \leq (1 + x)^n.$$

(b) mit Hilfe eines ähnlichen Arguments wie in Teilaufgabe (a), dass für jede reelle Zahl $x \geq 0$ und jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 2} := \{2, 3, ...\}$ gilt

$$(1 + x)^n > \frac{n^2}{4} x^2.$$

Aufgabe 3: Injektiv und surjektiv **2,5+2,5+2,5+2,5 = 10 Punkte**

Es seien X, Y, Z nichtleere Mengen sowie $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Zeigen Sie:

(i) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.

(ii) Ist $g \circ f$ injektiv und f surjektiv, so ist g injektiv.

(iii) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.

(iv) Ist $g \circ f$ surjektiv und g injektiv, so ist f surjektiv.

Aufgabe 4: Supremum und Infimum konkret **3+3+4 = 10 Punkte**

Für die Bearbeitung dieser Aufgabe werden Inhalte aus der Vorlesung am Dienstag bzw. aus den Tutorien benötigt: Bestimmen Sie Infimum und Supremum, sowie ggf. Minimum und Maximum:

(a) $M_1 := \left\{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : x = 1 - \frac{(-1)^n}{n}\right\}$,

(b) $M_2 := \left\{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : x = \frac{1}{n+1} + \frac{1+(-1)^n}{2n}\right\}$.

(c) $M_3 = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x + 2 > 5, x < 0\right\}$

Aufgabe 5: Rechenregeln für Supremum und Infimum 5+5 = 10 Punkte

Für die Bearbeitung dieser Aufgabe werden Inhalte aus der Vorlesung am Dienstag bzw. aus den Tutorien benötigt: Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln. Dabei seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nichtleer.

(i) Sei

$$A + B := \{c \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A \ \exists b \in B : c = a + b\},$$

so gilt: Existieren $\sup A$ und $\sup B$ in $\mathbb{R}$, so existiert auch $\sup(A + B)$ in $\mathbb{R}$ und es gilt

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

.

(ii) Sei

$$-A := \{c \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A : c = -a\}$$

und $\sup A$ existiere in $\mathbb{R}$. Dann existiert $\inf(-A)$ in $\mathbb{R}$ und es gilt $\inf(-A) = -\sup A$.

Aufgabe 1 und 5 werden als Musterlösung hochgeladen, Aufgabe 2 und 4 werden in den Tutorien besprochen, Aufgabe 3 in der Plenumsübung. Sie können auf dem Blatt bis zu 50 Punkte erreichen, wovon aber 10 als Zusatzpunkte gewertet werden.