24. Oktober 2023
Wintersemester 2023/2024

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Zettel 1

Aufgabe 2

$n :=$ Anzahl der Studierenden , $n \in \mathbb{N}$
Beh.: Alle Studierende der Analysis 1-Vorlesung haben denselben Namen.

I.A. ($n = 1$) ein*e Student*in hat einen Namen

I.S. **I.V.** n Studenten haben denselben Namen

Der Fehler liegt darin, dass für $n = 1$ die Mengen $M_1 := \{a_1, \ldots, a_n\}$ und $M_2 := \{a_2, \ldots, a_n + 1\}$, folgendes gilt: $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, also gibt es keine Personen die sowohl in M_1 und M_2 sind. Dementsprechend gilt nicht, dass a_1 und a_2 denselben Namen haben müssen.

Aufgabe 3

Wir wollen mithilfe vollständiger Induktion beweisen, dass

$$\forall \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

I.A. ($n = 1$)

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{2}{2} \frac{1(1+1)}{2}$$

I.S.

Induktionsannahme (= Induktionsvorraussetzung (I.V.))

$$\sum_{i=1} ni = \frac{n(n+1}{2}$$

z.z.

$$\sum_{i=1}^{n+1} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \tag{1}$$

Für die linke Seite gilt:

$$\sum_{i=1}^{n+1} = \sum_{i=1}^{n} +n + 1$$

nach I.V. und den Rechengesetzen für Addition und Multiplikation ganzer Zahlen gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} &= \sum_{i=1}^{n} +n + 1 \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \times 1 \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \times \frac{2}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1) \times 2}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+2)(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \qquad \square
\end{aligned}$$

Bonus Es gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n - 2 + n - 1 + n.$$

Daraus folgt, dass

$$2\sum_{i=1}^{n} i =$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & 1 & + & 2 & + & 3 & +\cdots+ & \text{n - 2} & + & \text{n - 1} & + & \text{n} \\
+ & \text{n} & + & \text{n - 1} & + & \text{n - 2} & +\cdots+ & 3 & + & 2 & + & 1 \\
= & (\text{ n + 1 }) & + & (\text{ n + 1 }) & + & (\text{ n + 1 }) & +\cdots+ & (\text{ n + 1 }) & + & (\text{ n + 1 }) & + & (\text{ n + 1 }) \; .
\end{array}$$

Da diese Summe aus n Summanden besteht, die alle $n+1$ sind, folgt

$$\begin{aligned}
2\sum_{i=1}^{n} i &= n(n+1) \\
\sum_{i=1}^{n} i &= \frac{n(n+1)}{2} \qquad \square
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Wir zeigen mithilfe vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

gilt.

I.A. $(n = 1)$

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = \frac{2^2}{4} = 1^3 \frac{1^2(1+1)^2}{4}$$

I.S.

I.V.

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Z.z.:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4}$$

Für die linke Seite folgt aus I.V. und Rechengesetzen für Potenzen, Multiplikation und Addition:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \times \frac{4}{4} \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4} \\
&= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\
&= \frac{n^2{\color{red}(n+1)^2} + 4(n+1){\color{red}(n+1)^2}}{4} \\
&= \frac{[n^2 + 4(n+1)]{\color{red}(n+1)^2}}{4} \\
&= \frac{[n^2 + 4n + 4](n+1)^2}{4}
\end{aligned}$$

Mithilfe der ersten binomischen Formel lässt sich $n^2 + 4n + 4$ auch als $(n+2)^2$ schreiben:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+2)^2(n+1)^2}{4}$$

Aus den Gesetzen für Multiplikation und Addition folgt schließlich:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4}\end{aligned}$$ □