Integrierter Kurs I (WiSe 2023/24)

Prof. M. Müller, Prof. U. Nowak, T. Dannegger

Universität Konstanz

Übungsblatt Nr. 1

Abgabe in Ilias bis zum 06.11.2023, 08:00 Uhr.
Besprechung am 08.11.2023 in der Übung.

Aufgabe 1: Vektoren und Skalare (6 Punkte)

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix},$$

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t)\exp(-\lambda t) \\ \sin(\omega t)\exp(-\lambda t) \\ z - \frac{1}{2}\exp(-\lambda t) \end{pmatrix}, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

i) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$, iii) $\vec{b} \times (\vec{a} \cdot \vec{c})$, v) $(\vec{a} \times \vec{a}) \cdot \vec{c}$,

ii) $\vec{a}\,\left|\vec{b} + \vec{c}\right|$, iv) $(\vec{b} \cdot \vec{c}) \times \vec{c}$, vi) $\vec{c} \times (\vec{b} \times \vec{a})$.

Welche davon ergeben keinen Sinn und warum? **(3 Punkte)**

b) Wie groß sind die Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und zwischen $\vec{b}$ und $\vec{c}$? **(2 Punkte)**

c) Berechnen Sie den Ausdruck $\vec{k} \cdot \vec{r}$. **(1 Punkt)**

Aufgabe 2: Vektorgeometrie (4 Punkte)

Gegeben seien die drei Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

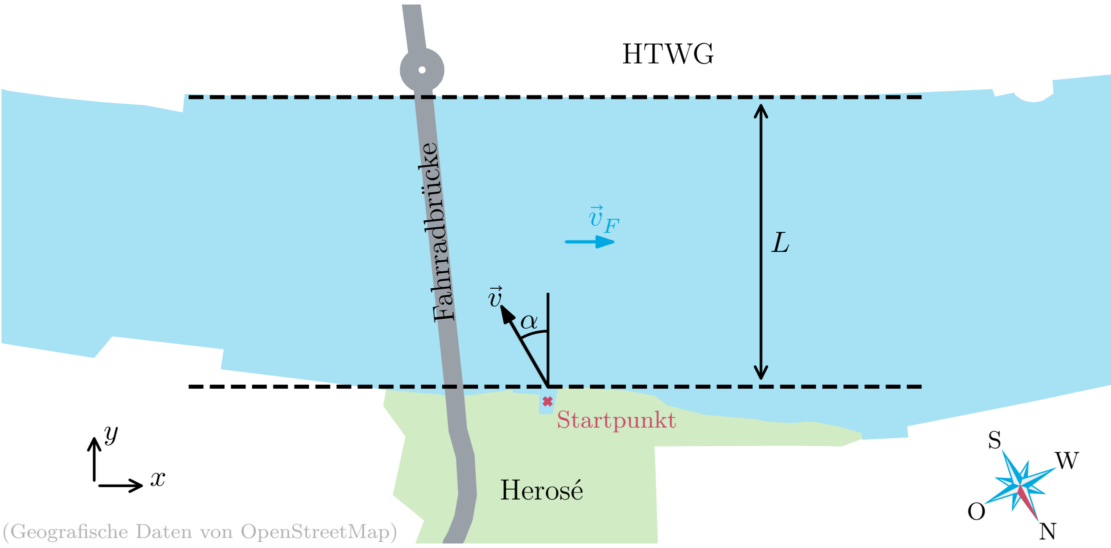
a) Berechnen Sie die Vektorprojektion des Vektors $\vec{a}$ auf die Richtung des Vektors $\vec{b}$ und skizzieren Sie diese. **(1 Punkt)**

b) Berechnen Sie die Fläche des Parallelogramms, das von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird. **(1 Punkt)**

c) Berechnen Sie das Volumen des Parallelepipeds, welcher durch die drei Vektoren aufgespannt wird. Erklären Sie mithilfe einer Skizze, wie dieses Volumen mit Skalar- und Kreuzprodukten ausgedrückt werden kann. **(2 Punkte)**

Aufgabe 3: Vektoraddition (unbepunktet)

Ein Schwimmer betritt den Seerhein über die Rampe im Herosépark und möchte zum gegenüberliegenden Ufer schwimmen, das $L = 156\,\mathrm{m}$ entfernt ist. Er schwimmt dabei mit einer (relativ zum Wasser) konstanten Geschwindigkeit von $\|\vec{v}\| = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Der Rhein strömt mit einer Fließgeschwindigkeit von $\|\vec{v}_\mathrm{F}\| = 0{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, die wir der Einfachkeit halber als im gesamten Flussbett konstant annehmen.



a) Welchen Kurs muss der Schwimmer nehmen, damit er den Rhein auf der kürzestmöglichen Strecke kreuzt, das heißt in welchem Winkel α zur gewünschten Richtung muss er sich ausrichten? Wie lange braucht er dann, um zur anderen Seite zu kommen?

b) Mit welcher effektiven Geschwindigkeit bewegt sich der Schwimmer, wenn er statt der kürzesten die schnellste Strecke wählt?