November 10, 2023
Wintersemester 2023/2024

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Übungsblatt Nr. 2

aufgabe 1: Orthonomalbasis

a)

$$
\begin{aligned}
(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_3 &\overset{\text{Distr.}}{=} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 + \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 \\
&= \delta_{13} + \delta_{23} \\
&= 0 + 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2) \cdot (7\vec{e}_1 - 16\vec{e}_3) &\overset{\text{Distr.}}{=} (4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2) \cdot 7\vec{e}_1 - (4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2) \cdot 16\vec{e}_3 \\
&\overset{\text{Distr.}}{=} 28\vec{e}_1\vec{e}_1 + 21\vec{e}_1\vec{e}_2 - 64\vec{e}_1\vec{e}_3 - 48\vec{e}_2\vec{e}_3 \\
&= 28\delta_{11} + 21\delta_{12} - 64\delta_{13} - 48\delta_{23} \\
&= 28
\end{aligned}
$$

b) Genau dann wenn zwei Vektoren orthogonal sind, oder wenn einer der Vektoren der Nullvektor is, dann ist das Skalarprodukt zweier Vektoren 0. Also wollen wir ein X finden, wofür gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + X\vec{e}_3) \cdot (-\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3) = 0$$

$$
\begin{aligned}
(2\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + X\vec{e}_3) \cdot (-\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3) &= 0 \\
\sum_{i=0}^{3} a_i b_i &= 0 \\
2 \cdot (-1) + (-5) \cdot 2 + X \cdot (-3) &= 0 \\
-2 - 10 - 3X &= 0 \\
3X &= 12 \\
X &= 4
\end{aligned}
$$

Also für $X := 4$ sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel, oder einer der beiden ist der Nullvektor. Da aber $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ sind die Vektoren parallel

c) Genau dann, wenn die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear unabhängig sind, gilt:

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w} \neq 0$$

Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gegeben, zu zeigen:
$\lambda_1 \vec{v} + \lambda_2 \vec{w} \neq \vec{0}$, wir führen einen Beweis durch Widerspruch und nehmen dazu an $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in$

$\mathbb{R} \setminus \{0\} : \lambda_1\vec{v} + \lambda_2\vec{w} = 0$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 v_1 + \lambda_2 w_1 = 0,\\
&\lambda_1 v_2 + \lambda_2 w_2 = 0 \text{ und}\\
&\lambda_1 v_3 + \lambda_2 w_3 = 0.
\end{aligned}$$

Also gilt für die erste Gleichung:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 w_1 &= 0\\
\lambda_1 \cdot 1 &= -\lambda_2 \cdot (-3)\\
\lambda_1 &= 3\lambda_2.
\end{aligned}$$

Dies in die zweite Gleichung eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 v_2 + \lambda_2 w_2 &= 0\\
3\lambda_2 v_2 + \lambda_2 w_2 &= 0\\
\lambda_2 (3v_2 + w_2) &= 0\\
\lambda_2 (3 \cdot (-1) + 2) &= 0\\
\lambda_2 (-1) &= 0\\
\lambda_2 &= 0
\end{aligned}$$

Da aber $\lambda_2 \neq 0$ führt dies zu einem Widerspruch und die die Annahme $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \lambda_1\vec{v} + \lambda_2\vec{w} = 0$, war falsch, also gilt $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \lambda_1\vec{v} + \lambda_2\vec{w} \neq 0$. □

aufgabe 2: Raketengleichung

a) Aus der Vorlesung wissen wir, dass gilt im Allgemeinen:

$$v(T) = -v_{rel} \cdot \ln \frac{m_T}{m_0} - gT$$

da die Rakete pro Zeiteinheit die Gasmenge α mit der Geschwindigkeit v_0 ausstößt und die Anfangsmasse m_0 hat, gilt für m_T:

$$m_T = m_0 - \alpha t,$$

somit gilt:

$$v(T) = v_0 \cdot \ln(\frac{m_0 - \alpha T}{m_0}) - gT$$

für T, die Brenndauer.

b) $s(t) = \int_{t_0}^{t} v(T)dT$: setze $u := \frac{m_0 - \alpha T}{m_0}$, dann gilt $du = -\frac{\alpha dT}{m_0}$

$$\begin{aligned}
v(T) &= -v_0 \ln(\frac{m_0 - \alpha T}{m_0}) - gT \\
v(T)dT &= -v_0 \ln(\frac{m_0 - \alpha T}{m_0})dT - gTdT \\
v(T)dT &= -v_0 \ln(u)\frac{du}{du}dT - gTdT \\
v(T)dT &= -v_0 \ln(u)\frac{du}{-\frac{\alpha dT}{m_0}}dT - gTdT \\
v(T)dT &= v_0 \ln(u)\frac{m_0 du}{\alpha} - gTdT \\
v(T)dT &= \frac{v_0 m_0}{\alpha} \ln(u)du - gTdT \\
\int_0^t v(T)dT &= \frac{v_0 m_0}{\alpha} \int_{u_0}^{u_t} \ln(u)du - \int_0^t gTdT \\
s(t) &= \frac{v_0 m_0}{\alpha} \left[u_t(\ln(u_t) - 1) - u_0(\ln(u_0) - 1)\right] - \frac{1}{2}gt^2 + s_0
\end{aligned}$$

setzte für $u_t := \frac{m_0 - \alpha t}{m_0}$ und für $u_0 := \frac{m_0 - \alpha 0}{m_0} = 1$

$$\begin{aligned}
s(t) &= \frac{v_0 m_0}{\alpha}\left[\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\left(\ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right) - 1\right) - (\ln(1) - 1)\right] - \frac{1}{2}gt^2 + s_0 \\
s(t) &= \frac{v_0 m_0}{\alpha}\left[\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\left(\ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right) - 1\right) + 1)\right] - \frac{1}{2}gt^2 + s_0 \\
s(t) &= \frac{v_0(m_0 - \alpha t)}{\alpha}\left(\ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right) - 1\right) + \frac{v_0 m_0}{\alpha} - \frac{1}{2}gt^2 + s_0 \\
s(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{v_0(m_0 - \alpha t)}{\alpha}\left(\ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right) - 1\right) + \frac{v_0 m_0}{\alpha} + s_0 \\
s(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{v_0(m_0 - \alpha t)}{\alpha}\ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right) - \frac{v_0(m_0 - \alpha t)}{\alpha} + \frac{v_0 m_0}{\alpha} + s_0 \\
s(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{v_0(m_0 - \alpha t)}{\alpha}\ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right) + \frac{v_0}{\alpha}(m_0 - (m_0 - \alpha t)) + s_0 \\
s(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{v_0(m_0 - \alpha t)}{\alpha}\ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right) + \frac{v_0 \alpha t}{\alpha} + s_0 \\
s(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{v_0(m_0 - \alpha t)}{\alpha}\ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right) + v_0 t + s_0 \\
s(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{v_0 m_0}{\alpha}\ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right) - \frac{v_0 \alpha t}{\alpha}\ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right) + v_0 t + s_0 \\
s(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{v_0 m_0}{\alpha}\ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right) - v_0 t\ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right) + v_0 t + s_0 \\
s(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{v_0 m_0}{\alpha}\ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right) + v_0 t\left(1 - \ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right)\right) + s_0 \\
s(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{v_0 m_0}{\alpha}\ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right) + v_0 t\left(1 - \ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right)\right) + s_0
\end{aligned}$$

c) Bei mehrstufigen Rakten wird Balast abgeworfen, wodurch das Gewicht verringert wird. Bei geringerem Gewicht muss nach $F = m \cdot a \implies \frac{1}{m} \propto m$ bei gleicher Kraft, also bei gleicher Schubkraft.

aufgabe 3: Freier Fall

a)

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{v} dt + h_0$$
$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \left(\int_{t_0}^{t} \vec{a} dt + \vec{v} \right) dt + h_0$$
$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t} \vec{a} dt^2 + \int_{t_0}^{t} \vec{v} dt + h_0$$

Da wir annehmen, dass wir nicht nach oben oder unten springen gilt nach dem Superpositionsprinzip:

$$h(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + h_0$$

Dabei ist $h_0 = 8\,\mathrm{m}$. Um die Auftreffzeit zu berechnen, müssen wir $h(t) = 0$ setzten:

$$h(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + h_0$$
$$0\,\mathrm{m} = -\frac{1}{2} g t^2 + 8\,\mathrm{m}$$

dann gilt nach der Binomischen Formel:

$$t_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 + 2g \cdot 8\,\mathrm{m}}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2} g\right)}$$
$$t_{1,2} = \frac{\mp\sqrt{g \cdot 16\,\mathrm{m}}}{g}$$
$$t_{1,2} = \frac{\mp 4\sqrt{10\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2}}{10\,\mathrm{m/s}^2}$$
$$t_1 = \frac{-4\sqrt{10}\,\mathrm{m/s}}{10\,\mathrm{m/s}^2}$$
$$t_2 = \frac{4\sqrt{10}\,\mathrm{m/s}}{10\,\mathrm{m/s}^2}$$

Da t_1 eine negative Zeit ist, wir aber erst zur Zeit $0\,\mathrm{s}$ losspringen, kann dies nicht sein und die Auftreffzeit ist $t_2 = \frac{4\sqrt{10}\,\mathrm{m/s}}{10\,\mathrm{m/s}^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}\mathrm{s}$

b) Es gilt weiterhin

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t} \vec{a} dt^2 + \int_{t_0}^{t} \vec{v} dt + h_0$$

und $h_0 = 8\,\mathrm{m}$, da für die Höhe nach dem Superpositionsprinip nur die Geschwindigkeit in die y-Richtung von Bedeutung ist, gilt für $t_0 = 0.5\,\mathrm{s}$

$$h(t) = \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t} \vec{a} dt^2 + \int_{t_0}^{t} v_{y_0} dt + h_0$$
$$h(t) = -g(t - t_0)^2 + v_{y_0} \cdot (t - t_0) + 8\,\mathrm{m}$$

Dabei soll $h(t_2) = 0\,\mathrm{m}$, also:

$$\begin{aligned}
0\,\mathrm{m} &= -g\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\mathrm{s} - 0.5\,\mathrm{s}\right)^2 + v_{y0}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\mathrm{s} - 0.5\,\mathrm{s}\right) + 8\,\mathrm{m} \\
v_{y0}\frac{2\sqrt{5}}{5}\mathrm{s} &= 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\left(\frac{4\cdot 5}{25}\mathrm{s}^2 - 2\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot 0.5\,\mathrm{s}^2 + 0.25\,\mathrm{s}^2\right) - 8\,\mathrm{m} \\
v_{y0}\frac{2\sqrt{5}}{5}\mathrm{s} &= 10\,\mathrm{m}\cdot\left(\frac{4}{5} - \frac{2\sqrt{5}}{5} + 0.25\right) - 8\,\mathrm{m} \\
v_{y0}\frac{2\sqrt{5}}{5}\mathrm{s} &= 8\,\mathrm{m} - 4\sqrt{5}\,\mathrm{m} + 2.5\,\mathrm{m} - 8\,\mathrm{m} \\
v_{y0}\frac{2\sqrt{5}}{5}\mathrm{s} &= -4\sqrt{5}\,\mathrm{m} + 2.5\,\mathrm{m} \mid \cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\frac{1}{\mathrm{s}} \\
v_{y0} &= -2\cdot 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 1.25\sqrt{5}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\
v_{y0} &= -10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 1.25\sqrt{5}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\
v_{y0} &= \frac{-40 + 5\sqrt{5}}{4}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}$$

c) Es gilt weiterhin

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}\vec{a}dt^2 + \int_{t_0}^{t}\vec{v}dt + \vec{r}_0$$

D.h.

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \begin{pmatrix} r_x(t) \\ r_y(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} a_x dt^2 + \int_{t_0}^{t} v_x dt + s_0 \\ \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} a_{y0} dt^2 + \int_{t_0}^{t} v_y dt + h_0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Da die Beschleunigung in x-Richtung als $0\,\mathrm{m/s^2}$ angenommen werden kann und $v_x = const$, $a_y = const$ und $v_{y0} = const$:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_x t + s_0 \\ a_y t^2 + v_{y0} t + h_0 \end{pmatrix}$$

Sagen wir $|\vec{v}|$ sei gegeben und wir wollen die größte Strecke in x herausfinden, die man Springen kann, dann gilt: $v_x = \sqrt{\vec{v}^2 - v_y^2}$, und für die Zeit, zu der man im Fluss ankommt: $r_y = 0$:

$$\begin{aligned}
r_x(t) &= a_y t^2 + v_{y0} t + h_0 \\
0\,\mathrm{m} &= a_y t^2 + v_{y0} t + h_0
\end{aligned}$$

Daraus folgt nach der Mitternachtsformel:

$$t_{1,2} = \frac{-v_{y0} \pm \sqrt{v_{y0}^2 - 4\cdot a_y\cdot h_0}}{2\cdot a}$$

Da $a < 0$, da wir annehmen, auf den Boden beschleunigt zu werden, gilt

$$\begin{aligned}
v_0^2 &< v_0^2 - 4 \cdot a_y \cdot h_0 \\
v_0 &< \sqrt{v_0^2 - 4 \cdot a_y \cdot h_0} \\
0 &< -v_0 + \sqrt{v_0^2 - 4 \cdot a_y \cdot h_0} \qquad | \text{ da } a < 0: \\
0 &> \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 - 4 \cdot a_y \cdot h_0}}{2 \cdot a}
\end{aligned}$$

Da wir nur Zeiten größer 0 s betrachten, da wir zum Zeitpunkt $t = 0$ losspringen, also bleibt die Lösung:

$$t_2 = -\frac{v_{y0} + \sqrt{v_{y0}^2 - 4 \cdot a_y \cdot h_0}}{2 \cdot a}$$

Setzen wir dies in $r_x(t)$ ein ergibt sich:

$$\begin{aligned}
r_x(t_2) &= v_x t + s_0 \\
&= \cos(\alpha) v \left(-\frac{v_{y0} + \sqrt{v_{y0}^2 - 4 \cdot a_y \cdot h_0}}{2 \cdot a} \right) + s_0 \\
&= \cos(\alpha) v \left(-\frac{\sin(\alpha) v + \sqrt{\sin^2(\alpha) v^2 - 4 \cdot a_y \cdot h_0}}{2 \cdot a} \right) + s_0 \\
&= -\frac{\cos(\alpha) v \sin(\alpha) v}{2 \cdot a} - \frac{\cos(\alpha) v \sqrt{\sin^2(\alpha) v^2 - 4 \cdot a_y \cdot h_0}}{2 \cdot a} + s_0 \\
&= -\frac{\cos(\alpha) \sin(\alpha) v^2}{2 \cdot a} - \frac{v \sqrt{\cos^2(\alpha) \sin^2(\alpha) v^2 - \cos^2(\alpha) 4 \cdot a_y \cdot h_0}}{2 \cdot a} + s_0
\end{aligned}$$

Dies Abgeleitet ergibt und Null gesetzt um Extrema von $r_x(t_2)$ in abhängigkeit von α zu finden:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\alpha} r_x(t_2) &= -\frac{d}{d\alpha} \frac{\cos(\alpha) \sin(\alpha) v^2}{2 \cdot a} - \frac{d}{d\alpha} \frac{v \sqrt{\cos^2(\alpha) \sin^2(\alpha) v^2 - \cos^2(\alpha) 4 \cdot a_y \cdot h_0}}{2 \cdot a} \\
0 &= -\frac{d}{d\alpha} \frac{\cos(\alpha) \sin(\alpha) v^2}{2 \cdot a} - \frac{d}{d\alpha} \frac{v \sqrt{\cos^2(\alpha) \sin^2(\alpha) v^2 - \cos^2(\alpha) 4 \cdot a_y \cdot h_0}}{2 \cdot a} \\
0 &= \frac{d}{d\alpha} \cos(\alpha) \sin(\alpha) v + \frac{d}{d\alpha} \sqrt{\cos^2(\alpha) \sin^2(\alpha) v^2 - \cos^2(\alpha) 4 \cdot a_y \cdot h_0} \\
0 &= \cos^2(\alpha) v - \sin^2(\alpha) v + \frac{1}{2 \sqrt{\cos^2(\alpha) \sin^2(\alpha) v^2 - \cos^2(\alpha) 4 \cdot a_y \cdot h_0}} \\
0 &= \cos^2(\alpha) v - \sin^2(\alpha) v + \frac{2cos^3(\alpha) - 2\cos^3(\alpha) + 2\sin(\alpha) \cdot 4 \cdot a_y \cdot h_0}{2 \sqrt{\cos^2(\alpha) \sin^2(\alpha) v^2 - \cos^2(\alpha) 4 \cdot a_y \cdot h_0}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_x(t_2) &= v_x t + s_0 \\
&= \sqrt{\vec{v}^2 - v_{y0}^2}\left(-\frac{v_{y0} + \sqrt{v_{y0}^2 - 4\cdot a_y \cdot h_0}}{2\cdot a}\right) + s_0 \\
&= \sqrt{\vec{v}_{y0}^2 - \vec{v}^2}\cdot\frac{v_{y0} + \sqrt{v_{y0}^2 - 4\cdot a_y\cdot h_0}}{2\cdot a} + s_0 \\
&= \frac{\sqrt{\vec{v}_{y0}^2 - \vec{v}^2}\cdot v_{y0} + \sqrt{\vec{v}_{y0}^2 - \vec{v}^2}\sqrt{v_{y0}^2 - 4\cdot a_y\cdot h_0}}{2\cdot a} + s_0 \\
&= \frac{\sqrt{\vec{v}_{y0}^2 - \vec{v}^2}\cdot v_{y0} + \sqrt{\vec{v}_{y0}^4 - \vec{v}_{y0}^2\left(\vec{v}^2 + 4\cdot a_y\cdot h_0\right) + 4\cdot a_y\cdot h_0\cdot\vec{v}^2}}{2\cdot a} + s_0
\end{aligned}$$

Um die weiteste Strecke zu finden, kann man die Änderung der Strecke in y-Richtung in Abhängigkeit von v_{y0} auf Nullstellen überprüfen, d.h.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d_{y0}} r_x(t_2) &= \frac{v_{y0}\left(v_{y0} + \sqrt{v_{y0}^2 - 4\cdot a_y\cdot h_0}\right)}{\sqrt{\vec{v}^2 - v_{y0}^2}\cdot 2\cdot a} - \frac{\sqrt{\vec{v}^2 - v_{y0}^2} + \frac{v_{y0}\sqrt{\vec{v}^2 - v_{y0}^2}}{\sqrt{v_{y0}^2 - 4\cdot a_y\cdot h_0}}}{2\cdot a} \\
0 &= v_{y0}\left(v_{y0} + \sqrt{v_{y0}^2 - 4\cdot a_y\cdot h_0}\right) - \vec{v}^2 + v_{y0}^2 - \frac{v_{y0}\cdot\left(\vec{v}^2 - v_{\bar{0}}^2\right)}{\sqrt{v_{y0}^2 - 4\cdot a_y\cdot h_0}} \\
v_x^2 + \frac{v_y v_x^2}{\sqrt{v_{y0}^2 - 4\cdot a_y\cdot h_0}} &= v_{y0}\left(v_{y0} + \sqrt{v_{y0}^2 - 4\cdot a_y\cdot h_0}\right) \\
v_x^2\left(\sqrt{v_{y0}^2 - 4\cdot a_y\cdot h_0} + v_{y0}\right) &= v_{y0}^2\sqrt{v_{y0}^2 - 4\cdot a_y\cdot h_0} + v_{y0}^3 - v_{y0}\cdot 4\cdot a_y\cdot h_0 \\
v_x &= \sqrt{\frac{v_{y0}^2\sqrt{v_{y0}^2 - 4\cdot a_y\cdot h_0} + v_{y0}^3 - v_{y0}\cdot 4\cdot a_y\cdot h_0}{\left(\sqrt{v_{y0}^2 - 4\cdot a_y\cdot h_0} + v_{y0}\right)}} \\
v_x &= \sqrt{v_{y0}^2 - \frac{v_{y0}\cdot 4\cdot a_y\cdot h_0}{\left(\sqrt{v_{y0}^2 - 4\cdot a_y\cdot h_0} + v_{y0}\right)}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dv_{y0}} &= \frac{d}{dv_{y0}}\frac{\sqrt{v_{y0}^2 - \vec{v}^2}\cdot v_{y0} + \sqrt{v_{y0}^4 - v_{y0}^2\left(\vec{v}^2 + 4\cdot a_y\cdot h_0\right) + 4\cdot a_y\cdot h_0\cdot\vec{v}^2}}{2\cdot a} + \frac{d}{dv_{y0}}s_0 \\
0 &= \frac{d}{dv_{y0}}\frac{\sqrt{v_{y0}^2 - \vec{v}^2}\cdot v_{y0}}{2\cdot a} + \frac{d}{dv_{y0}}\frac{\sqrt{v_{y0}^4 - v_{y0}^2\left(\vec{v}^2 + 4\cdot a_y\cdot h_0\right) + 4\cdot a_y\cdot h_0\cdot\vec{v}^2}}{2\cdot a}
\end{aligned}$$

Sei $f(v_{y0}) = v_{y0}^2 - \vec{v}^2$ und $g(x) = \sqrt{x}$ und $k(v_{y0}) = v_{y0}^4 - v_{y0}^2\left(\vec{v}^2 + 4\cdot a_y\cdot h_0\right) + 4\cdot a_y\cdot h_0\cdot\vec{v}^2$, dann gilt:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dv_{y_0}} \frac{g(f(v_{y_0})) \cdot v_{y_0}}{2 \cdot a} + \frac{d}{dv_{y_0}} \frac{g(k(v_{y_0}))}{2 \cdot a} \\
0 &= \frac{g'(f(v_{y_0})) \cdot f'(v_{y_0}) \cdot v_{y_0} + g(f(v_{y_0})) \cdot 1}{2 \cdot a} + \frac{g'(k(v_{y_0})) \cdot k'(v_{y_0})}{2 \cdot a} \\
0 &= \frac{g'(f(v_{y_0})) \cdot f'(v_{y_0}) \cdot v_{y_0}}{2 \cdot a} + \frac{g(f(v_{y_0}))}{2 \cdot a} + \frac{g'(k(v_{y_0})) \cdot k'(v_{y_0})}{2 \cdot a} \\
0 &= g'(f(v_{y_0})) \cdot f'(v_{y_0}) \cdot v_{y_0} + g(f(v_{y_0})) + g'(k(v_{y_0})) \cdot k'(v_{y_0}) \\
0 &= \frac{1}{2\sqrt{f(v_{y_0})}} \cdot 2v_{y_0} \cdot v_{y_0} + \sqrt{v_{y_0}^2 - \vec{v}^2} + \frac{1}{2\sqrt{k(v_{y_0})}} \cdot \left(4v_{y_0}^3 - 2v_{y_0}\left(\vec{v}^2 + 4 \cdot a_{y \cdot 0}\right)\right) \\
0 &= \frac{v_{y_0}^2}{\sqrt{f(v_{y_0})}} + \sqrt{v_{y_0}^2 - \vec{v}^2} + \frac{\left(2v_{y_0}^3 - v_{y_0}\left(\vec{v}^2 + 4 \cdot a_{y \cdot 0}\right)\right)}{\sqrt{k(v_{y_0})}} \\
0 &= \left(v_{y_0}^2 + v_{y_0}^2 - \vec{v}^2\right) \sqrt{k(v_{y_0})} + \left(2v_{y_0}^3 - v_{y_0}\left(\vec{v}^2 + 4 \cdot a_{y \cdot 0}\right)\right)\sqrt{f(v_{y_0})} \\
0 &= \left(2v_{y_0}^2 - \vec{v}^2\right) \sqrt{k(v_{y_0})} + \left(2v_{y_0}^3 - v_{y_0}\left(\vec{v}^2 + 4 \cdot a_{y \cdot 0}\right)\right)\sqrt{f(v_{y_0})}
\end{aligned}
$$