Integrierter Kurs I (WiSe 2023/24)

Prof. M. Müller, Prof. U. Nowak, T. Dannegger

Universität Konstanz

Übungsblatt Nr. 7

Abgabe in Ilias bis zum 18.12.2023, 08:00 Uhr.
Besprechung am 20.12.2023 in der Übung.

Achtung: Am 13. Dezember fallen die Übungsgruppen leider aus. Stattdessen werden Musterlösungen für die schriftlichen Aufgaben auf Ilias hochgeladen. Offene Fragen sowie die Lösung der unbepunkteten Aufgaben werden dann in der darauffolgenden Woche, am 20. Dezember, zusammen mit diesem Blatt besprochen.

Aufgabe 1: Resonanzkurve und Phasenverschiebung (5 Punkte)

Die Amplitude $|A|$ einer gedämpften harmonischen Schwingung mit periodisch anregender äußerer Kraft berechnet sich zu (siehe Vorlesung)

$$|A| = \frac{F}{m} \frac{1}{\sqrt{(\bar{\omega}^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\bar{\omega}^2}},$$

wobei F die Amplitude und $\bar{\omega}$ die Frequenz der anregenden Oszillation, m die Masse sowie β die Dämpfung des angeregten Oszillators mit der Eigenfrequenz ω_0 ist. Die Phasenverschiebung φ zwischen der treibenden Kraft und dem Oszillator ist gegeben durch die Beziehung (siehe Vorlesung)

$$\tan(\varphi) = 2\beta \frac{\bar{\omega}}{\bar{\omega}^2 - \omega_0^2}.$$

a) Skizzieren Sie die Amplitude $|A|$ als Funktion der anregenden Frequenz $\bar{\omega}$. Berechnen Sie die maximale Amplitude. Wie hängt die maximale Amplitude von der Dämpfung β ab? Diskutieren Sie die Amplitude $|A|$ für die Fälle verschwindender Dämpfung ($\beta \to 0$) sowie $\bar{\omega} \to 0$ und $\bar{\omega} \to \infty$. **(2 Punkte)**

b) Skizzieren Sie die Frequenz bei maximaler Amplitude in Abhängigkeit der Dämpfung β. Diskutieren Sie die Grenzfälle sehr kleiner und großer Reibung. **(2 Punkte)**

c) Skizzieren Sie die Phasenverschiebung φ als Funktion der anregenden Frequenz $\bar{\omega}$. Diskutieren Sie ebenfalls die Grenzfälle $\bar{\omega} \to 0$ und $\bar{\omega} \to \infty$. Bei welcher Kreisfrequenz $\bar{\omega}$ ist die Phasenverschiebung $\varphi = \frac{\pi}{2}$? **(1 Punkt)**

Aufgabe 2: Gedämpfter harmonischer Oszillator (5 Punkte)

Eine Christbaumkugel (Dichte $\varrho = 5{,}00\,\mathrm{g/cm^3}$, Radius $R = 1{,}00\,\mathrm{cm}$) hängt an einer Feder (Federkonstante $D = 5{,}00\,\mathrm{N/m}$) vom Christbaum in ein Glas mit Glühwein herab. Für die Reibungskraft kann die Beziehung $F = 6\pi\eta R v$ verwendet werden, wobei $\eta = 1{,}00 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{Ns/m^2}$ die Viskosität des Glühweins und v die Geschwindigkeit der Kugel ist. Eine Katze spielt mit dem Christbaum, so dass die Christbaumkugel in eine gedämpfte Schwingung versetzt wird. Nehmen Sie an, dass sonst keine weiteren Kräfte wirken.

a) Berechnen Sie den Abklingkoeffizienten β, der in der Differenzialgleichung $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ für dieses Problem auftritt, sowie die Schwingungsdauern T_0 der ungedämpften (das heißt das Glas ist leer) und T der gedämpften freien Schwingung (das Glas ist voll). **(1½ Punkte)**

b) Verwenden Sie die Lösung obiger Differenzialgleichung (ohne Herleitung), um das logarithmische Dekrement $\Lambda = -\ln\left(\hat{x}_{n+1}/\hat{x}_n\right)$ zu bestimmen. Hierbei bezeichnet $\hat{x}_{n+1}/\hat{x}_n < 1$ das Amplitudenverhältnis zweier aufeinander folgender Schwingungsmaxima. **(1½ Punkte)**

c) Wie viel Prozent der ursprünglichen Amplitude sind nach zwei Schwingungen noch vorhanden? **(½ Punkt)**

d) Wie viel mechanische Energie ist nach zwei Schwingungen in Wärmeenergie überführt worden, wenn die Feder zu Beginn der Schwingung um $x_0 = 10{,}0\,\mathrm{cm}$ aus der Ruhelage ausgelenkt und dann losgelassen wird? **(½ Punkt)**

e) Bei welcher Viskosität η würde der aperiodische Grenzfall eintreten? **(1 Punkt)**