

Analysis 1

27.10.2023

F. Gmeineder

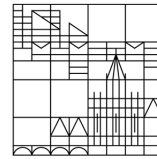
P. Stephan

A. von Pippich

Wintersemester 2023

Abgabe: Bis zum 03.11.2023 um 10:00 Uhr

Universität
Konstanz



Übungsblatt 2

Aufgabe 1: Irrationalität von Wurzeln

3+7=10 Punkte

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass $\sqrt{2}$ irrational ist, das bedeutet $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. In dieser Aufgabe werden wir zeigen, dass dies kein Sonderfall ist.

- (a) Zeigen Sie, dass $\sqrt{3}$ irrational ist.
- (b) Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass \sqrt{p} irrational ist.

Aufgabe 2: Vollständige Induktion

5+5=10 Punkte

Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit vollständiger Induktion.

- (a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+3)(k+4)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{n}{n+4}.$$

- (b) Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$\sum_{k=1}^n k 2^{k-1} > (n+1)n^2.$$

Aufgabe 3: Körperaxiome

2,5+2,5+2,5+2,5=10 Punkte

Beweisen Sie Lemma 2.2.4. (iii)–(vi) aus der Vorlesung, d.h. zeigen Sie, dass in Körpern gilt:

- (a) Es gilt $0_K = -0_K$.
- (b) Zu jedem $a \in K$ und jedem $b \in K$ gibt es genau ein $x \in K$ mit $a + x = b$, nämlich $x = b - a$.
- (c) Für alle $x \in K$ gilt $-(-x) = x$.
- (d) Für alle $x, y \in K$ gilt $-(x + y) = -x - y$.

Aufgabe 4: Beweismechanik

10 Punkte

Betrachten Sie die folgenden Mengen

$$A := \{n \in \mathbb{N} : n^2 + 2n > 3\},$$

$$B := \{n \in \mathbb{N} : 2 - \frac{3}{n} > -n\},$$

$$C := \left\{m \in \mathbb{Z} : \frac{2m}{5} < \frac{4}{m^2 + 1}\right\}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass $1000 \in A$ und $4 \in B$ gilt.
- (b) Geben Sie ein Element der Menge C an.
- (c) Zeigen Sie die Mengeninklusion $A \subset B$.
- (d) Zeigen Sie die Mengengleichheit $A = B$.
- (e) Gilt $A = C$?

Begründen Sie die Element-, Teilmengen- und Mengengleichheitsaussagen genau. Bei Rechnungen wie in der Schule genügt eine nachvollziehbare Darstellung.

Hinweis: Die Beweismechanik-Abgabe muss als Zweier-Team abgegeben werden. Speichern Sie Ihre gemeinsame Beweismechanik-Abgabe in einer PDF-Datei unter einem Namen der Form a1blatt2-bma-ihrnachname-nachnameihrespartners.pdf ab, wobei Sie ihrnachname durch Ihren Nachnamen ersetzen usw. Laden Sie die Beweismechanik-Abgabe dann getrennt von den anderen Aufgaben auf der ILIAS-Seite der Vorlesung unter „Abgabe Beweismechanik-Aufgabe“ hoch. Die Abgabe im Zweier-Team ist verpflichtend. Pro Zweier-Team bitte nur eine Abgabe!

Aufgabe 1 und 3 wird als Musterlösung hochgeladen, Aufgabe 2 in den Tutorien behandelt und Aufgabe 4 wird in der Plenumsübung vorgestellt.