November 4, 2023
Wintersemester 2023/2024

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

# Analysis I

## Organisation, Tipps & Tricks und Literaturhinweise

Mathe...

- ist intellektuell extrem herausfordernd
- kommt mit einem hohen Arbeitsaufwand
- oft falschen Erwartungen und
- ist wie Ausdauersport

aber dafür ist Mathe eines der schönsten Studien c:

Generelles Zeitmanagement:

- Vor- und Nachbereitung wahrscheinlich mehr als die gesetzten $14 \times 3\,\mathrm{h} = 42\,\mathrm{h}$
- Klausurvorbereitung auch mehr als $39\,\mathrm{h}$
- Pro Woche $2 \times 1.5\,\mathrm{h}$, $2 \times 2\,\mathrm{h}$, $1.5\,\mathrm{h}$, $10\,\mathrm{h}$
- Es gibt immer eine Aufgabe die man nicht lösen kann
- In die Vorlesungen kommen

Vorlesung:

- normal nicht alles zu verstehen
- Notizen was man nicht versteht
- Punkte konzise angehen
- **Mathe muss sich gedanklich setzen** - genügend Zeit zu verarbeiten

Übungen:

- zeitintensiv
- Ergebnisse vernünftig aufschreiben

- Weg zu einer korrekter Lösung ist sehr langwierig
- **nicht 10 Blätter Papier ab, von denen 9.5 inkonklusiv sind**
- also schön Aufschreiben

Wenn wir einen Satz gezeigt bekommen, dann bekommen wir nicht die gescheiterten Jahrelangen Versuche zur Schau, sondern nur die Ausgearbeitete Lösung → also bei uns auch langer weg, aber Aufschreiben nur klein

Übungszettel:

- 50% muss richtig sein
- bis Freitag 10:00 Uhr
- in F4
- diese Woche nicht so umfangreich, weil weniger Zeit
- auf ILIAS Terminfindung Abstimmung
- Donnerstag Einteilung in Tutorien
- Blätter tackern :c
- alle zwei Wochen Beweismechanik Aufgaben, nur digital nicht in Papier (ist dann die letzte Aufgabe)

Literaturempfehlung:

- Otto Forster: Analysis 1
  - kurz und knapp - aber konzise, udn das hilft
  - ähnliche Struktur wie Vorlesung
  - weig motivation und wenige Querverbindungen
- Königsberger: Analysis 1
  - kurz - aber konzise
  - alle themen der Vorlesung, andere Struktur
  - mehr motivation und Querverbindungen
- Klaus Fritsche: Grundkurs Analysis 1
  - ausführlich

- Daniel Grieser: Analysis I
  - Ausführlich, aber mit Fokus auf das Wesentliche
  - alle Themen der Volesung enthalten, ähnliche Struktur
  - bunt??
- Harro Huser: Lehrbuch der Analysis Teil 1
  - extrem ausführlich,dick, an einigen stellen sehr extensiv
  - alle und mehr Themen als Vorlesung
  - Querverbindungen
- Walter Rudin: Analysis
  - sehr knapp und elegant
  - klassiker
  - alle themen der Volesung, leicht andere Struktur
  - empfehlenswertes Buch fortgeschrittene Leser*innen
  - nicht für Anfänger*innen
- Herber amann, Joachim Escher: Analysis I
  - strkt logischer Aufbau, damit teils länglich. Großes Bild
  - alle Themen, andere Struktur
  - auch nicht für anfänger*innen
- Terence Tao: Analysis (englisch, aber gut)
- Rober Denk, Reinhard Racke: Kompendium der ANalysis
  - kurz und knapp, teils wie Nachschlagewerk
  - alle themen
- Florian Modler, Martin Kreh: Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1
  - kurz und knapp, teils wie nachschalgewerk
  - von studierende für studierende
  - aber enthält ein paar Fehler

# 1.Natürliche Zahlen und elemntare Begriffe

## default1.Zahlbereiche

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$$
$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$
$$\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$
$$\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$$
$$\mathbb{R} := \{ \text{ reelle Zahlen } \}$$

Wir besprechen gar nicht was eine Menge ist, das ist zu philosophisch
Es ist schwierig Mengen zu Definieren, man kommt schnell auf logische Wiedersprüche

- Notation: für $x$ schreiben wir für eine Eigenschaft $A$ "$A(x)$", falls $x$ $A$ erfüllt.

→ Menge aller Objekte $x$ mit $A(x)$

$$\{x : A(x)\}$$

→ gibt es kein $x$ mit $A(x)$, so nennen wir die Menge leer, "$\emptyset$"

- $\exists \hat{=}$ Existenzquantor, "es existiert"
- $A, B$, Eig., $M := \{x : x \text{ erf. } A\}$
  $N := \{x : \text{ erf. } B\}$
  $M \subset N$, falls $\forall x \in M : x \in N$
- $M = N$, falls $M \subset N \vee N \subset M$
- "Echte Tielmenge": $M \subsetneqq N$, falls $M \subset N, N \neq N$.

**Example 1.1.1 (gerade Zahlen)**

$n \in \mathbb{N}_0$ gerade $:\iff (\exists k \in \mathbb{N}_0 : n = 2k)$

$$\begin{aligned} M :=& \{n \in \mathbb{N}_0 : \exists k \in \mathbb{N}_0 : n = 2k\} && (1)\\ =& \{2k : k \in \mathbb{N}_0 && (2) \end{aligned}$$

**Example 1.1** $\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{N}_0 \subsetneqq \mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R}$

Zu $\mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R} : \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Widerspruchsbeweis: Ang., $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, so $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, mit $p \in \mathbb{N}_0, q \in \mathbb{N}$. Œ$p, q$ teilerfremd (d.h. Bruch ist vollständig gekürzt).. Also $p^2 = 2q^2$
$\implies p$ ist gerade. Also $p = 2l$ mit $l \in N_0$.
$\implies 4l^2 = p^2 = 2q^2 \implies 2l^2 = q^2 \implies q$ gerade.
$\implies p, q$ gerade. $\implies p, q$ nicht teilerfremd. □

### default1.Vollständige Induktion

- Ziel: Beweis von Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}_0$

**Dominoprinzip**: Wenn alle Steine umfallen sollen,

- müssen wir den 1. Stein umwerfen,
- muss stehts der $n$-te Stein den $(n+1)$-ten umwerfen.

**Prinzip (vollst. Ind.)** Wollen wir eine Aussage $A(n) \forall n \in \mathbb{N}$ zeigen; so zeigen wir

(i) $A(1)$ gilt (Induktionsanfang)

(ii) Aus $A(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ stets $A(n+1)$ folgt. (Induktionsschritt)

**Definition 1.2 Summen**

Für $x_-1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\sum_{k=1}^{n} x_k := x_1 + \ldots + x_n$$

**Example 1.3 Geometrische Summe**

$$\forall n \in \mathbb{N}:$$
$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} x^k}\, x^0 + x^1 + \ldots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \tag{3}$$

**I.A.** $n = 1$

$$\sum_{k=0}^{1} x^k = x^0 + x^1 = 1 + x = \frac{(1-x)(1+x)}{1-x} = \frac{1-x^2}{1-x}$$

**I.S.**

$$n \to n+1$$

Angenommen, (equation) gilt für ein $n \in \mathbb{N}$. z.z. (equation) gilt für $n+1$

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1}$$

...

**Example 1.4 Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $n^2 < 2^n$?**

- $n = 1 \to 1 < 2$
  $n = 2 \to n^2 = 4 \not< 4 = 2^2$
  $n = 3 \to n^2 = 9 \not<< 2^3$

$n = 4 \to n^2 = 16 \not< 16 = 2^4$
$n = 5 \to n^2 25 < 32 = 2^5$

Wir versuchen die Aussage $\forall n \geq 5$ zu zeigen.

**I.A.:** $n = 5 : n^2 = 25 < 32 = 2^5$

**I.S.:** Ang., Aussage gilt für $n \geq 5$. Wir müssen zeigen:

$$(n+1)^2 < 2^{n+1}$$

$(n+1)^2 = \underbrace{n^2}_{<2^n} + 2n + 1 < 2^n + 2n + 1 \,|\overset{?}{<} 2^{n+1}$ Angenommen, es gilt

$$\forall n \geq 5 : 2n + 1 < 2^n \tag{4}$$

Dann: $(n+1)^2 < ... < 2^n + 2n + 1 = 2 * 2^n = 2^{n+1}$

- Wir zeigen (4) wiederum mit voll. Ind.

  **I.A.:** $n = 5 2n + 1 = 11 < 32 = 2^5$

  **I.S.:** Ang., (4) gilt für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $2(n+1) + 1 = 2n + 3 = (2n+1) + 2 < 2^n + 2 < 2^n + 2^n = 2 * 2^n = 2^{n+1}$.
  Damit folgt (4 und damit die eigentliche Aussage □

**Definition 1.5**

für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die *Fakultät* via $n! := n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$, falls $n \geq 1$, und $0! := 1$. Für $k \in \{0, \ldots, n\}$ definieren wir den *Binomialkoeffizienten*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

**Lemma 1.6**

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

**Proof 1.7**

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k)!(n-k+1)} + \frac{n!(k)}{(k-1)!(n-(k-1)k)!(k)}$$
$$= \frac{n!n + n!}{k!(n-k+1!} = \frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!}$$ □

**Example 1.8 (Binomische Formel)**

Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$:

$$(x+y)^n ? \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Sei also $x, y \in \mathbb{R}$.

**I.A.:** $n = 0$. $(x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 y^0$

**I.S.:** Gelte die Aussage für $n \in \mathbb{N}_0$

$$(x+y)^{n-1} = (x+y)(x+y)^n = (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} \tag{5}$$

$$= x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} + y\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} \tag{6}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k} \tag{7}$$

Indexverschiebung: $l = k+1$. $l \in \{1, \ldots, n+1\}$

$$(7) = \underbrace{\sum_{l=1}^{n}\binom{n}{l-i}x^l y^{n+1-l}}_{\text{Hier Indexverschiebung}} + \underbrace{\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}x^l y^{n+1-l}}_{\text{Hier nennen wir einfach } k=l}$$

$$= \binom{n}{n}x^{n+1}y^0 + \left(\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{l-1} + \binom{n}{l}\right)x^l y^{n+1-l}\right) + \binom{n}{0}x^0 y^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{n+1}x^{n+1}y^0 + \left(\sum_{l=1}^{n}\binom{n+1}{l}x^l y^{(n+1)-l}\right) + \binom{n+1}{0}x^0 y^{n+1}$$

$$= \sum_{l=0}^{n+1}\binom{n+1}{l}x^l y^{(n+1)-l}$$

□

### 1.2.1 Characterisierung der natürlichen Zahlen

**Definition 1.2.1**

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heißt induktiv, falls

(i) $1 \in M$

(ii) $\forall x \in M : x + 1 \in M$

**Example 1.2.2**

(a) $\mathbb{N}$ sind ind. Menge.

(b) $A := \{2n : n \in \mathbb{N}_0\}$ nicht ind. Menge, da (i) $1 \neq A$, (ii) $2n+1$ ist immer ungerade

(c) $B := \{2n+1 : n \in \mathbb{N}_0\}$ nicht ind.: (i), aber $2n+1+1 = 2(n+1)$

(d) $\mathbb{Q}^+ := \{x \in \mathbb{Q} : q > 0\}$ ist ind. Teilmenge

- Sei $(A_i)_{i\in I}$ mit I Indexmenge eine Familie von Mengen. setze

$$\bigcap_{i\in I} := \{x : (\forall i \in I : x \in A_i)\} \quad \text{Schnitt}$$

$$\bigcup_{i\in I} := \{x : (\exists i \in I : x \in A_i)\} \quad \text{Vereinigung}$$

**Proposition 1.2.3**

Für eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ sind äquivalent

(i) $M = \mathbb{N}$

(ii) Ist $N \subset \mathbb{R}$ induktiv, so $M \subset N$

(iii)

$$M = \bigcap_{N\subset\mathbb{R}} N \text{ induktiv}$$

$(i) \iff (ii) \iff (iii)$

**Proof 1.2.4**

**'$(i) \implies (ii)$':** Sei $N \subset \mathbb{R}$ beliebige ind. Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zu zeigen: $M \overset{(i)}{=} \mathbb{N} \subset N$ Aber $1 \in \mathbb{N}$, und $1 \in N$ (da $N$ ind. ), Da $N$ ind. ist, ist mit jeder nat. $x \in \mathbb{N}$ also auch $x \in N$. Damit $x + 1 \in \mathbb{N}$ $\boxed{\mathbb{N} \subset N.}$

'$(ii) \implies (iii)$' Wir zeigen:

$$\bigcap_{N \text{ ind. Menge}} N$$

ist ind. Menge

$\overset{(ii)}{\implies} M \overset{(ii)}{\subset} N \subset M$. Also

$$M = \bigcap_{N \text{ ind.}} N.$$

$$\bigcap_{N \text{ ind}} N \text{ induktiv:}$$

(i)

$$(\forall N \text{ ind: } 1 \in N) \implies 1 \in \bigcap_{N \text{ ind.}} N$$

(ii)

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \in \bigcap_{N \text{ ind.}} N \left( \implies x \in \bigcap_{N \text{ ind.}} N \right) \overset{\text{DEF.}}{\implies} \forall N \text{ ind.} : x{+}1 \in N \implies x{+}1 \in \bigcap_{N \text{ ind.}}$$

'$(iii) \implies (i)$' Noch zu zeigen (blöd glaube ich oder ÜA, wir hatten auf jeden Fall keine Zeit in der Vorlesung) $\square$