

---

# Analysis I

---

## Organisation, Tipps & Tricks und Literaturhinweise

Mathe...

- ist intellektuell extrem herausfordernd
- kommt mit einem hohen Arbeitsaufwand
- oft falschen Erwartungen und
- ist wie Ausdauersport

aber dafür ist Mathe eines der schönsten Studien c:

Generelles Zeitmanagement:

- Vor- und Nachbereitung wahrscheinlich mehr als die gesetzten  $14 \times 3 \text{ h} = 42 \text{ h}$
- Klausurvorbereitung auch mehr als 39 h
- Pro Woche  $2 \times 1.5 \text{ h}$ ,  $2 \times 2 \text{ h}$ , 1.5 h, 10 h
- Es gibt immer eine Aufgabe die man nicht lösen kann
- In die Vorlesungen kommen

Vorlesung:

- normal nicht alles zu verstehen
- Notizen was man nicht versteht
- Punkte konzise angehen
- **Mathe muss sich gedanklich setzen** - genügend Zeit zu verarbeiten

Übungen:

- zeitintensiv
- Ergebnisse vernünftig aufschreiben

- Weg zu einer korrekter Lösung ist sehr langwierig
- **nicht 10 Blätter Papier ab, von denen 9.5 inkonklusiv sind**
- also schön Aufschreiben

Wenn wir einen Satz gezeigt bekommen, dann bekommen wir nicht die gescheiterten Jahrelangen Versuche zur Schau, sondern nur die Ausgearbeitete Lösung → also bei uns auch langer weg, aber Aufschreiben nur klein

Übungszettel:

- 50% muss richtig sein
- bis Freitag 10:00 Uhr
- in F4
- diese Woche nicht so umfangreich, weil weniger Zeit
- auf ILIAS Terminfindung Abstimmung
- Donnerstag Einteilung in Tutorien
- Blätter tackern :c
- alle zwei Wochen Beweismechanik Aufgaben, nur digital nicht in Papier (ist dann die letzte Aufgabe)

Literaturempfehlung:

- Otto Forster: Analysis 1
  - kurz und knapp - aber konzise, udn das hilft
  - ähnliche Struktur wie Vorlesung
  - weig motivation und wenige Querverbindungen
- Königsberger: Analysis 1
  - kurz - aber konzise
  - alle themen der Vorlesung, andere Struktur
  - mehr motivation und Querverbindungen
- Klaus Fritsche: Grundkurs Analysis 1
  - ausführlich

- Daniel Grieser: Analysis I
  - Ausführlich, aber mit Fokus auf das Wesentliche
  - alle Themen der Vorlesung enthalten, ähnliche Struktur
  - bunt??
- Harro Huser: Lehrbuch der Analysis Teil 1
  - extrem ausführlich, dick, an einigen Stellen sehr extensiv
  - alle und mehr Themen als Vorlesung
  - Querverbindungen
- Walter Rudin: Analysis
  - sehr knapp und elegant
  - klassiker
  - alle Themen der Vorlesung, leicht andere Struktur
  - empfehlenswertes Buch fortgeschrittene Leser\*innen
  - nicht für Anfänger\*innen
- Herber amann, Joachim Escher: Analysis I
  - strikt logischer Aufbau, damit teils länglich. Großes Bild
  - alle Themen, andere Struktur
  - auch nicht für Anfänger\*innen
- Terence Tao: Analysis (englisch, aber gut)
- Rober Denk, Reinhard Racke: Kompendium der Analysis
  - kurz und knapp, teils wie Nachschlagewerk
  - alle Themen
- Florian Modler, Martin Kreh: Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1
  - kurz und knapp, teils wie Nachschlagewerk
  - von Studierenden für Studierende
  - aber enthält ein paar Fehler

# 1 Natürliche Zahlen und elemntare Begriffe

## 1.1 Zahlbereiche

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\mathbb{R} := \{ \text{reelle Zahlen} \}$$

Wir besprechen gar nicht was eine Menge ist, das ist zu philosophisch  
Es ist schwierig Mengen zu Definieren, man kommt schnell auf logische Widersprüche

- Notation: für  $x$  schreiben wir für eine Eigenschaft  $A$  “ $A(x)$ ”, falls  $x$   $A$  erfüllt.

→ Menge aller Objekte  $x$  mit  $A(x)$

$$\{x : A(x)\}$$

→ gibt es kein  $x$  mit  $A(x)$ , so nennen wir die Menge leer, “ $\emptyset$ ”

- $\exists \hat{=}$  Existenzquantor, “es existiert”
- $A, B$ , Eig.,  $M := \{x : x \text{ erf. } A\}$   
 $N := \{x : \text{erf. } B\}$   
 $M \subset N$ , falls  $\forall x \in M : x \in N$
- $M = N$ , falls  $M \subset N \vee N \subset M$
- “Echte Teilmenge”:  $M \subsetneq N$ , falls  $M \subset N, N \neq M$ .

### Example 1.1.1 (gerade Zahlen)

$$n \in \mathbb{N}_0 \text{ gerade} : \iff (\exists k \in \mathbb{N}_0 : n = 2k)$$

$$M := \{n \in \mathbb{N}_0 : \exists k \in \mathbb{N}_0 : n = 2k\} \tag{1}$$

$$= \{2k : k \in \mathbb{N}_0\} \tag{2}$$

### Example 1.1 $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$

Zu  $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} : \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ . Widerspruchsbeweis: Ang.,  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ , so  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ , mit  $p \in \mathbb{N}_0, q \in \mathbb{N}$ .  
 $(\exists p, q \text{ teilerfremd (d.h. Bruch ist vollständig gekürzt)})$ . Also  $p^2 = 2q^2$   
 $\implies p$  ist gerade. Also  $p = 2l$  mit  $l \in \mathbb{N}_0$ .  
 $\implies 4l^2 = p^2 = 2q^2 \implies 2l^2 = q^2 \implies q$  gerade.  
 $\implies p, q$  gerade.  $\implies p, q$  nicht teilerfremd. □

## 1.2 Vollständige Induktion

- Ziel: Beweis von Aussagen für alle  $n \in \mathbb{N}_0$

**Dominoprinzip:** Wenn alle Steine umfallen sollen,

- müssen wir den 1. Stein umwerfen,
- muss stets der  $n$ -te Stein den  $(n + 1)$ -ten umwerfen.

**Prinzip (vollst. Ind.)** Wollen wir eine Aussage  $A(n) \forall n \in \mathbb{N}$  zeigen; so zeigen wir

(i)  $A(1)$  gilt (Induktionsanfang)

(ii) Aus  $A(n)$  für  $n \in \mathbb{N}$  stets  $A(n + 1)$  folgt. (Induktionsschritt)

### Definition 1.2 Summen

Für  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  definieren wir

$$\sum_{k=1}^n x_k := x_1 + \dots + x_n$$

### Example 1.3 Geometrische Summe

$\forall n \in \mathbb{N} :$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^n x^k}_{x^0 + x^1 + \dots + x^n} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad (3)$$

**I.A.**  $n = 1$

$$\sum_{k=0}^1 x^k = x^0 + x^1 = 1 + x = \frac{(1-x)(1+x)}{1-x} = \frac{1-x^2}{1-x}$$

**I.S.**

$$n \rightarrow n + 1$$

Angenommen, (equation) gilt für ein  $n \in \mathbb{N}$ . z.z. (equation) gilt für  $n + 1$

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \left( \sum_{k=0}^n x^k \right) + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1}$$

...

### Example 1.4 Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $n^2 < 2^n$ ?

- $n = 1 \rightarrow 1 < 2$
- $n = 2 \rightarrow n^2 = 4 \not< 4 = 2^2$
- $n = 3 \rightarrow n^2 = 9 \not< 2^3$
- $n = 4 \rightarrow n^2 = 16 \not< 16 = 2^4$

$$n = 5 \rightarrow n^2 25 < 32 = 2^5$$

Wir versuchen die Aussage  $\forall n \geq 5$  zu zeigen.

**I.A.:**  $n = 5 : n^2 = 25 < 32 = 2^5$

**I.S.:** Ang., Aussage gilt für  $n \geq 5$ . Wir müssen zeigen:

$$(n+1)^2 < 2^{n+1}$$

$$(n+1)^2 = \underbrace{n^2}_{< 2^n} + 2n + 1 < 2^n + 2n + 1 \stackrel{?}{<} 2^{n+1} \text{ Angenommen, es gilt}$$

$$\forall n \geq 5 : 2n + 1 < 2^n \tag{4}$$

$$\text{Dann: } (n+1)^2 < \dots < 2^n + 2n + 1 = 2 * 2^n = 2^{n+1}$$

- Wir zeigen (4) wiederum mit voll. Ind.

**I.A.:**  $n = 5 : 2n + 1 = 11 < 32 = 2^5$

**I.S.:** Ang., (4) gilt für  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:  $2(n+1) + 1 = 2n + 3 = (2n + 1) + 2 < 2^n + 2 < 2^n + 2^n = 2 * 2^n = 2^{n+1}$ .

Damit folgt (4) und damit die eigentliche Aussage □

### Definition 1.5

für  $n \in \mathbb{N}_0$  definieren wir die *Fakultät* via  $n! := n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$ , falls  $n \geq 1$ , und  $0! := 1$ . Für  $k \in \{0, \dots, n\}$  definieren wir den *Binomialkoeffizienten*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

### Lemma 1.6

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $k \in \{1, \dots, n\}$  :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

#### Proof

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k)!(n-k+1)} + \frac{n!(k)}{(k-1)!(n-(k-1)k)!(k)} \\ &= \frac{n!n + n!}{k!(n-k+1)!} = \frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!} \end{aligned} \quad \square$$

### Example 1.7 (Binomische Formel)

Für  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}_0$ :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Sei also  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**I.A.:**  $n = 0$ .  $(x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 y^0$

**I.S.:** Gelte die Aussage für  $n \in \mathbb{N}_0$

$$(x+y)^{n-1} = (x+y)(x+y)^n = (x+y) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad (5)$$

$$= x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + y \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad (6)$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \quad (7)$$

Indexverschiebung:  $l = k + 1$ .  $l \in \{1, \dots, n+1\}$

$$\begin{aligned} (7) &= \underbrace{\sum_{l=1}^n \binom{n}{l-1} x^l y^{n+1-l}}_{\text{Hier Indexverschiebung}} + \underbrace{\sum_{l=0}^n \binom{n}{l} x^l y^{n+1-l}}_{\text{Hier nennen wir einfach } k=l} \\ &= \binom{n}{n} x^{n+1} y^0 + \left( \sum_{k=0}^n \left( \binom{n}{l-1} + \binom{n}{l} \right) x^l y^{n+1-l} \right) + \binom{n}{0} x^0 y^{n+1} \\ &= \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} y^0 + \left( \sum_{l=1}^n \binom{n+1}{l} x^l y^{(n+1)-l} \right) + \binom{n+1}{0} x^0 y^{n+1} \\ &= \sum_{l=0}^{n+1} \binom{n+1}{l} x^l y^{(n+1)-l} \quad \square \end{aligned}$$

### 1.2.1 Characterisierung der natürlichen Zahlen

#### Definition 1.2.1

Eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}$  heißt induktiv, falls

- (i)  $1 \in M$
- (ii)  $\forall x \in M : x + 1 \in M$

#### Example 1.2.2

- (a)  $\mathbb{N}$  sind ind. Menge.
- (b)  $A := \{2n : n \in \mathbb{N}_0\}$  nicht ind. Menge, da (i)  $1 \notin A$ , (ii)  $2n + 1$  ist immer ungerade
- (c)  $B := \{2n + 1 : n \in \mathbb{N}_0\}$  nicht ind.: (i), aber  $2n + 1 + 1 = 2(n + 1)$
- (d)  $\mathbb{Q}^+ := \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$  ist ind. Teilmenge

- Sei  $(A_i)_{i \in I}$  mit  $I$  Indexmenge eine Familie von Mengen. setze

$$\bigcap_{i \in I} := \{x : (\forall i \in I : x \in A_i)\} \quad \text{Schnitt}$$

$$\bigcup_{i \in I} := \{x : (\exists i \in I : x \in A_i)\} \quad \text{Vereinigung}$$

### Proposition 1.2.3

Für eine Menge  $M \subset \mathbb{R}$  sind äquivalent

- (i)  $M = \mathbb{N}$
- (ii) Ist  $N \subset \mathbb{R}$  induktiv, so  $M \subset N$
- (iii)

$$M = \bigcap_{N \subset \mathbb{R}} N \text{ induktiv}$$

$$(i) \iff (ii) \iff (iii)$$

### Proof

‘(i)  $\implies$  (ii)’: Sei  $N \subset \mathbb{R}$  beliebige ind. Teilmengen von  $\mathbb{R}$ . Zu zeigen:  $M \stackrel{(i)}{=} \mathbb{N} \subset N$   
 Aber  $1 \in \mathbb{N}$ , und  $1 \in N$  (da  $N$  ind. ), Da  $N$  ind. ist, ist mit jeder nat.  $x \in \mathbb{N}$  also auch  $x \in N$ . Damit  $x + 1 \in \mathbb{N} \implies \boxed{\mathbb{N} \subset N}$ .

‘(ii)  $\implies$  (iii)’ Wir zeigen:

$$\bigcap_{N \text{ ind. Menge}} N$$

ist ind. Menge

$$\stackrel{(ii)}{\implies} M \stackrel{(ii)}{\subset} N \subset M. \text{ Also}$$

$$M = \bigcap_{N \text{ ind.}} N.$$

$$\bigcap_{N \text{ ind.}} N \text{ induktiv:}$$

(i)

$$(\forall N \text{ ind.: } 1 \in N) \implies 1 \in \bigcap_{N \text{ ind.}} N$$

(ii)

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \in \bigcap_{N \text{ ind.}} N \left( \implies x \in \bigcap_{N \text{ ind.}} N \right) \stackrel{\text{DEF.}}{\implies} \forall N \text{ ind. : } x+1 \in N \implies x+1 \in \bigcap_{N \text{ ind.}} N.$$

‘(iii)  $\implies$  (i)’ Noch zu zeigen (blöd glaube ich oder ÜA, wir hatten auf jeden Fall keine Zeit in der Vorlesung) □



## 2 Körper

### 2.1 Was sind Strukturen?

### 2.2 Körper

#### Definition 2.2.1 Körper

in script of Prof. and on paper

#### Example 2.2.2

in script of Prof. and on paper

#### Example 2.2.3

in script of Prof. and on paper

#### Lemma 2.2.4

in script of Prof. and on paper

#### Lemma 2.2.5

in script of Prof. and on paper

$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	
$\uparrow$	$\uparrow$	Kontinuumshypothese
abzählbar	nicht abzählbar	

#### Definition 2.1

In der Situation von definition 2.2.1 sei  $n \in \mathbb{N}$ , sowie  $x_1, \dots, x_n \in K$ . Wir definieren rekursiv  $x_1 + \dots + x_n := (x_1 + \dots + x_{n-1}) + x_n, x_1 \cdot \dots \cdot x_n := (x_1 \cdot \dots \cdot x_{n-1}) \cdot x_n$

#### Definition 2.2

In der Situation von Definition 2.2.1 sei  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $x \in K$ . Wir definieren

$$x^0 := 1_K \text{ und } x^n := (x^{n-1} \cdot x, n \in \mathbb{N}$$

Ist  $x \in K \setminus \{0\}$ , so sei für  $n \in \mathbb{N} : x^{-n} := (x^{-1})^n$ .

#### Lemma 2.3

Für alle  $x, y \in K, m, n \in \mathbb{N}_0$ :

- i)  $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ ,
- ii)  $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$ ,
- iii)  $x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$

Ist zudem  $x, y \neq 0_K$ , so gelten diese Identitäten auch für  $n, m \in \mathbb{Z}$

**Proof i**

Fixiere  $n \in \mathbb{N}_0$ , nun Induktion nach  $m$ .

$$\text{I.A. } m = 0. \quad x^n \cdot x^0 \stackrel{\text{Def.}}{=} x^n \cdot 1_K \stackrel{\text{(M2)}}{=} 1_K \cdot x^n \stackrel{\text{(M3)}}{=} x^n = x^{n+0}$$

**I.S.** Gelte die Aussage für ein  $m \in \mathbb{N}_0$ . Zeige für  $m \rightsquigarrow m+1$

$$x^n \cdot x^{m+1} \stackrel{\text{Def.}}{=} x^n (x^m) \cdot x \stackrel{\text{(M1)}}{=} (x^n \cdot x^m) \cdot x \stackrel{\text{IV}}{=} x^{n+m} \cdot x \stackrel{\text{Def.}}{=} x^{n+m+1} \quad \square$$

## 2.3 Angeordnete Körper

- Ziel Vergleich von Elementen hinsichtlich “Größe”

### Definition 2.3.1

Eine **Relation** auf einer Menge  $M$  ist eine Teilmenge  $R \subset M \times M$ . Ist  $(x, y) \in R$ , so schreiben wir auch  $xRy$  oder  $R(x, y)$  und sagen, dass  $x$  und  $y$  über  $R$  in Relation stehen.

### Example 2.3.2

$M =$  Studierende im Hörsaal,  
 $(x, y) \in M \times M : xRy : \iff x$  kennt den Namen von  $y$

- **$R$  reflexiv?** (d.h.  $\forall x \in M : xRy$ )      Ja
- **$R$  symmetrisch?** ( d.h.  $\forall x, y \in M : xRy \iff yRx$  )      Nein
- **$R$  transitiv?** ( d.h.  $\forall x, y, z \in M : xRy \wedge yRx \implies xRz$  )      **Nein**

### Definition 2.3.3

Sei  $R$  eine Relation auf einem Körper  $K$ .  $R$  heißt **Ordnung** auf  $K$ , falls gilt

- Trichotomie:**  $\forall x \in K : \text{Entweder } 0_K Rx, xR0_K \text{ oder } x = 0_K$
- Abgeschlossenheit bezüglich Addition**  $\forall x, y \in K : 0_K Rx, 0_K Ry \implies 0_K R(x + y)$
- Abgeschlossenheit bezüglich Multiplikation**  $\forall x, y \in K : 0_K Rx, 0_K Ry \implies 0_K R(x \cdot y)$

Das Tupel  $(K, R)$  heißt **angeordneter Körper**. (Schreibe auch ‘ $<$ ’ für  $R$ ).

Setze für  $a, b \in K$ :

$$\begin{aligned} a < b &: \iff 0_K < (b - a) \\ a > b &: \iff b < a \\ a \leq b &: \iff a < b \vee a = b \\ b \geq a &: \iff a \leq b \end{aligned}$$

**Lemma 2.3.4**

Sei  $(K, <)$  angeordneter Körper,  $a, b, c \in K$

- (i) Entweder  $a > b, a = b \vee a < b$ .
- (ii)  $a < b \wedge b < c \implies a < c$
- (iii)  $(a > 0 \implies (-a) < 0) \wedge (a < 0 \implies (-a) > 0)$
- (iv) Gilt  $a < b$ , so ist

$$\begin{aligned} ac &< bc, & c > 0 \\ ac &> bc, & c < 0 \\ a^2 &> 0, & a \neq 0 \end{aligned}$$

$$a > 0 \implies a^{-1} > 0$$

$$a < 0 \implies a^{-1} < 0$$

$$b^{-1} < a^{-1}, \text{ falls } a > 0$$

$$a + c < b + c.$$

- (v)  $a < b \implies (-a) > (-b)$

**Proof (i)-(iii)**

(i) Da  $a < b \iff 0_K < b - a$ , folgt das aus Trichotomie und Def. von ' $>$ '.

(ii) zu zeigen:  $a < c$ , d.h.  $0_K < c - a$ .

$$c - a = (c + 0_K) - a = \underbrace{(c - b)}_{>0} + \underbrace{(b - a)}_{>0} > 0, \text{ d.h. } a < c$$

(iii)  $a > 0$ . Angenommen,  $(-a) > 0$ .  $\xRightarrow{\text{Abg. Add.}} 0_K = a + (-a) > 0_K \xRightarrow{\text{Trich.}} E$  Ist  $-a = 0$ , so  $a = 0$ , nach Trich. Wid. zu  $a > 0$ . Falls  $a < 0$ , analog.  $\square$

**Corollary 2.3.5**

Es gibt keine Ordnung ' $<$ ' auf  $\mathbb{F}_2$ , die  $\mathbb{F}_2$  zu einem angeordneten Körper macht

**Proof**

Angenommen, ' $<$ ' sei Ordnung. Da  $0_K \neq 1_K$ , gilt entweder  $0_K < 1_K$  oder  $1_K < 0_K$  (nach Trich.). Falls  $0_K < 1_K$ . Dann  $0_K = 1_K + 1_K$  damit  $0_K = 1_K + 1_K > 0_K + 1 = 1_K$ . Widerspruch für  $1_K < 0_K$  argumentiere analog.

- PRINZIP:  $\mathbb{R} \wedge \mathbb{Q}$  sind angeordnete Körper

**2.4 Der Betrag**

('Abstand zur Null')

### Definition 2.4.1

Für  $x \in \mathbb{R}$  definieren wir den Betrag  $|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

### Lemma 2.4.2

Der in Def 2.4.1 eingeführte Betrag erfüllt

- (i) *forall*  $x \in \mathbb{R} : |x| \geq 0$
- (ii)  $|x| = 0 \iff x = 0$
- (iii) Multiplikativität:  $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- (iv) **Dreiecksungleichung:**  $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y|$
- (v)  $\forall x \in \mathbb{R} : |-x| = |x|$
- (vi)  $\forall x, y \in \mathbb{R} : y \neq 0 \implies \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$

## 2.5 Das Archimedische Axiom

PRINZIP-Arch. Axiom:  $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0 \exists n \in \mathbb{N} : x < n$



- Das muss gefordert werden

## 2.6 Supremum, Infimum und die Supremumseigenschaft

- **Ziel:** Entscheidende Eigenschaft von  $\mathbb{R}$

### Definition 2.6.1

Eine nichtleere Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}$  heißt

- **nach oben beschränkt**, falls  $\exists c \in \mathbb{R} \forall x \in A : x \leq c$ . Ein solches  $c$  “obere Schranke”
- **nach unten beschränkt**, falls  $\exists c \in \mathbb{R} \forall x \in A : c \leq x$  “untere Schranke”

### Example 2.6.2

- $A = N_0$  durch 0 nach unten, nach oben unbegrenzt
- $A = \{1, 2, \dots, 10\}$  durch 1 nach unten, und durch 10, 11, ... nach oben beschränkt

### Definition 2.6.3

Sei  $a \subset \mathbb{R}$  nichtleer

- (i) Ist  $A$  nach oben beschränkt, so heißt  $s(=:\sup A)$  **Supremum** von  $A$ , falls  $s$  obere Schranke ist *und* **kleinste obere Schranke** ist d.h.  $\forall c \in \mathbb{R} : c \text{ obere Schranke von } A \implies s \leq c$ . Ist  $s \in A$  Supremum von  $A$ , so heißt  $s$  **Maximum** von  $A$ .

- (ii) Ist  $A$  nach oben unbeschränkt, so sei  $+\infty$  das Supremum von  $A$ .
- (iii) Ist  $A$  nach unten beschränkt, so nennen wir  $s' \in \mathbb{R}$  **Infimum** von  $A$ , falls  $s'$  untere Schranke und für jede andere untere Schranke  $d \in \mathbb{R}$  von  $A$ :  $d \leq s'$ . Ist  $s' \in A$  Infimum, so heißt  $s'$  **Minimum** von  $A$ .
- (iv) Ist  $A$  nach unten unbeschränkt, so sei  $-\infty$  das Infimum von  $A$ .

**Schreibweise:**  $\sup(A), \max(A), \inf(A), \min(A)$ .

#### Example 2.6.4

Für  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  sei  $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$   
 Dann:  $\sup((a, b)) = b \wedge \inf((a, b)) = a$ .

- Obere Schranke:  $\forall x \in (a, b) : x < b \implies b$  obere Schranke.
- Ist  $d$  andere obere Schranke, so  $b \leq d$ . Klar:  $d > a$ , also angenommen  $a < d < b$ .  
 Dann  $x := \frac{d+b}{2} \in (a, b)$ ,  $x > d$ .  $\implies d$  keine obere Schranke  $\nexists$   
 Weiter  $b \notin (a, b)$ , also  $b$  Supremum, kein Maximum

PRINZIP (Supremumseigenschaft)

Jede nach oben beschränkte Menge  $A \subset \mathbb{R}$  hat ein Supremum in  $\mathbb{R}$  **Informell:**  $(1, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$  hat  $\sup = \sqrt{2}$  (später). Aber  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ , also gilt die Supremumseigenschaft für  $\mathbb{Q}$  nicht.

$\mathbb{R}$  ist

- Körper
- angeordnete Körper
- bewerteter Körper
- Archimedisch angeordnete Körper
- Supremumseigenschaft

## 3 Folgen und Konvergenz

### 3.1 Reelle Folgen und Konvergenz

Folge  $a : \mathbb{N} \ni n \mapsto a(n) \in \mathbb{R}$ . Schreibweisen:

$$\left( \underbrace{a_n}_{(=a(n))} \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad (n \text{ Laufindex}), (a_n)$$

#### Example 3.1.1

$a_n := 2n \rightarrow$  Folge der geraden Zahlen

$a_n := 2n + 1 \rightarrow$  Folge der ungeraden Zahlen

### Definition 3.1.2 Konvergenz

Sei  $(a_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  ( $(a_n) \subset \mathbb{R}$ ) und  $a \in \mathbb{R}$ . Wir sagen, dass  $(a_n)$  gegen  $a$  **konvergiert**, falls  $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon}$

Wir nennen  $a$  dann den **Grenzwert** oder **Limes** von  $(a_n)$  und schreiben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a := a$$

Gibt es  $a \in \mathbb{R}$  so, dass  $(a_n)$  gegen  $a$  konvergiert, so nennen wir  $(a_n)$  **konvergent**, andernfalls **divergent**.

### Lemma 3.1.3

Sei  $(a_n) \subset \mathbb{R}$  eine Folge, die gegen  $a, b \in \mathbb{R}$  konvergiert. Dann  $a = b$ .

#### Proof

Sei  $\varepsilon > 0$  bel.. Dann

$$\begin{aligned} \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \implies \forall n \geq N : |a - b| = |(a - a_n) + (a_n - b)| \leq |a_n - a| + |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ \xrightarrow{\forall \varepsilon} a = b. \quad \square \end{aligned}$$

Für jedes  $\varepsilon > 0$ : Ab irgendeinem  $N$  bleibt die Folge für immer im  $\varepsilon$ -Streifen um  $a$ .

### Example 3.1.4

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ . Vermute: Limes  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Mit Archimedes  $\exists N \in \mathbb{N} : \frac{1}{\varepsilon} < N$ . Dann  $\forall n \geq N : \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$ .  $\square$

### Example 3.1.5

$\forall a \in \mathbb{R} : (a_n) = (a)$  (konstante Folge) konvergent gegeben  $a$

### Example 3.1.6

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Nach 1.2.3  $\forall n \geq 5 : n^2 < 2^n$ . Nach Arch.  $\exists N \in \mathbb{N} : N \geq 5 \wedge \frac{1}{\varepsilon} < N$ .  $\implies \forall n \geq N : \left|\frac{n}{2^n} - 0\right| = \frac{n}{2^n} \stackrel{\text{Ugl}}{<} \frac{1}{n} \stackrel{n \geq N}{\leq} \frac{1}{N} < \varepsilon$   $\square$

### Example 3.1.7

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} := ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$   
**Beh.:**  $\neg \exists a \in \mathbb{R} : (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konv. gg  $a$ . Angenommen, es gäbe so ein  $a \in \mathbb{R}$ . Wähle  $0 < \varepsilon < 1$ . Dann  $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |(-1)^n - a| < \varepsilon$ .  
 Dann:  $2 = |1 - (-1)| \leq \underbrace{|(1 - a)|}_{|a - (-1)^n|} + \underbrace{|(-a)^n - a|}_{|a - (-1)^n|} < 2\varepsilon < 2$

### Example 3.1.8

$(a_n)$  reelle Folge.

- $\bullet \exists \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$ .

Für  $\varepsilon = 1$  erfüllt die Folge aus example 3.1.7 dies!

Nicht äquivalent zu Konvergenz!

- $\forall \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$   
Folge aus example 3.1.7 erfüllt dies - nicht äquivalent!

### 3.2 Rechenregeln für Grenzwerte

#### Theorem 3.2.1

Seien  $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$  konv. gegen  $a \in \mathbb{R}$  bzw.  $b \in \mathbb{R}$ . Dann

- (i)  $(a_n + b_n)$  konvergiert gegen  $a + b$   $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
- (ii)  $(a_n \cdot b_n)$  konvergiert gegen  $a \cdot b$
- (iii) Ist  $b \neq 0$  so existiert ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq N \implies b_n \neq 0$ , und es gilt:

$$\left( \frac{a_n}{b_n} \right)_{n \geq N} \text{ konv gg } \frac{a}{b}.$$

#### Proof

Sei  $\varepsilon > 0$

Wg. Konv.  $a_n \rightarrow a \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

Wg. Konv.  $b_n \rightarrow b \exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2 : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$(a_n), (b_n), a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b \implies a_n + b_n \rightarrow a + b$$

#### Definition 3.2.2

Wir sagen, dass  $(a_n) \subset \mathbb{R}$  **beschränkt** ist, falls  $\exists M > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq M$ .

#### Lemma 3.2.3

Konvergente Folgen sind beschränkt.

#### Proof

Angenommen,  $(a_n)$  konvergiert gegen  $a \in \mathbb{R}$ . Mit  $\varepsilon = 1$  ex.  $N \in \mathbb{N}$ :

$$(\forall n \geq N : |a_n - a| < 1) \implies \forall n \geq N : ||a_n| - |a|| < 1 \implies |a_n| \leq 1 + |a|$$

Setze  $M := \max\{|a_1|, \dots, |a_N|, 1 + |a|\}$ , so  $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq M$ . □

Zurück zum Beweis von Satz 3.2.1 (b) und (c):

#### Proof

(b) zu zeigen  $a_n \rightarrow a \wedge b_n \rightarrow b \implies a_n b_n \rightarrow ab$

$$|a_n b_n - ab| = |(a_n b_n - ab_n) + (ab_n - ab)| \leq |b_n| \cdot |a_n - a| + |a| |b_n - b| \quad (8)$$

Sei  $\varepsilon > 0$ . Da  $(b_n)$  beschr., ex. nach Lemma 3.2.3 ein  $M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : |b_n| \leq M$ . Da  $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \exists N_1 \in \mathbb{N} \forall n \geq N_1 : |a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \\
(2) \quad & \exists N_2 \in \mathbb{N} \forall n \geq N_2 : |a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{1+|a|} \\
(8) \quad & \implies \forall n \geq N := \max\{N_1, N_2\} : |a_n b_n - ab| \\
& \stackrel{(8)}{\leq} M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \underbrace{|a| \cdot \frac{\varepsilon}{2(1+|a|)}}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit (b).

$$(c) \quad a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b \neq 0 \implies \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$$

$$(1) \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |b_n| \neq 0.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{N} \forall n \geq \tilde{N} : |b_n - b| < \varepsilon,$$

$$\text{d.h. } |b| - \varepsilon \leq |b_n|$$

Wende Dies auf  $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$  an.

Dann  $\forall n \geq \tilde{N} : 0 < \frac{|b|}{2} \leq |b_n|$ . setze nun  $n_0 := \tilde{N}$

$$(2) \quad b_n \rightarrow b \neq 0, \text{ so } \frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}.$$

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{b_n b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n| \cdot |b|} \quad (9)$$

Für  $n \geq \tilde{N} : \frac{|b|}{2} < |b_n|$ , also  $\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}$ , also  $\frac{1}{|b_n| |b|} < \frac{2}{|b|^2}$

Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann  $\exists \tilde{N} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \tilde{N} : |b_n - b| < \frac{\varepsilon |b|^2}{2} \cdot \frac{asd}{asdf}$

$$(3) \quad a_n$$

### Example 3.2.4

something

## 3.3 Stabilität der ‘ $\leq$ ’-Relation unter Limesbildung

### Theorem 3.3.1

Seien  $(a_n), (b_n)$  zwei konvergente Folgen in  $\mathbb{R}$ : Seien  $a, b \in \mathbb{R}$

(i) Gibt es  $N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n \leq a$ , so  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq a$ .

(ii) Gibt es  $N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : b \leq b_n$ , so  $b \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

### Proof

Sei  $\xi := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Für  $\varepsilon > 0$  finden wir  $\tilde{N} \in \mathbb{N} : n \geq \tilde{N} : |a_n - \xi| < \varepsilon$ . Damit

$$\xi = (\xi - a_n) + a_n \leq |\xi - a_n| + a_n \leq \varepsilon + a_n \leq a + \varepsilon \implies \xi \leq a. \quad \square$$

**Bemerkung:** Satz falsch für ‘ $<$ ’ Bsp.



**Theorem 3.3.2 Sandwich-Thm**

Seien  $(a_n), (c_n) \subset \mathbb{R}$  konv. Folgen:  $a_n, c_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$  Ist  $(b_n) \subset \mathbb{R}$ , so dass  $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : a_n \leq b_n \leq c_n$ , so  $b_n \rightarrow a$

**Proof**

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, |c_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ , Für solche  $n : a - \varepsilon < a_n - \frac{\varepsilon}{2} \leq b_n - \frac{\varepsilon}{2} \leq c_n - \frac{\varepsilon}{2} < a + \varepsilon \implies b_n \rightarrow a. \quad \square$

**3.4 Monotone Konvergenz,  $e$  und Wurzeln****Definition 3.4.1**

Eine Folge  $(a_n)$  heißt

- (i) mon. wachsend  $\iff \forall n \in \mathbb{N} a_n \leq a_{n+1}$
- (ii) streng mon. wachsend  $\iff \forall n \in \mathbb{N} a_n < a_{n+1}$
- (iii) mon. fallend  $\iff \forall n \in \mathbb{N} a_n \geq a_{n+1}$
- (iv) streng mon. fallend  $\iff \forall n \in \mathbb{N} a_n > a_{n+1}$

**Theorem 3.4.2**

Eine monotone beschränkte Folge konvergiert.

**Proof**

$(a_n)$  monoton wachsend und beschränkt, also existiert nach Supremumseigenschaft  $a := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} < \infty$

Zu zeigen  $a_n \rightarrow a$ . Sei  $\varepsilon > 0$  bel.. Dann nach Def. des Supremums  $\exists N \in \mathbb{N} : a - \varepsilon < a_N$ . Für  $n \geq N$  gilt  $a_N \leq a_n$  wegen Monotonie  $\implies |a_n - a| = a_n - a = a - a_N + \underbrace{a_N - a_n}_{\leq 0} \leq$

$a - a_n < \varepsilon$ . Also  $a_n \rightarrow a. \quad \square$

**Corollary 3.4.3**

Der Grenzwert  $e := \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$  existiert. Wir nennen  $e$  die **Eulerische Zahl**. Es gilt  $2 \leq e \leq 3$ .

**Lemma 3.4.4**

Sei  $n \in \mathbb{N}_0, x > -1$ . Dann  $1 + nx \leq (1 + x)^n$ .

**Proof Cor. 3.4.4**

zu zeigen:  $(a_n) = \left( (1 + \frac{1}{n})^n \right)$  mon. wachsend, beschr.

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^2} \stackrel{\text{Rechnen}}{=} \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \stackrel{\text{Bernoulli mit } x = -\frac{1}{n^2}}{\leq} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n-1} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n-1} = 1$$

$\implies (a_n)$  mon. wachsend

Nun:  $(a_n)$  beschränkt. Bin. Formel:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$$|a_n| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \dots \leq \frac{1}{k!}$$

$$2^{k-1} \leq k! \forall k \in \mathbb{N}$$

Damit

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \underset{\text{von davor}}{\leq} 2 + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq 2 + 2 \cdot \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^k} \leq 2 + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \leq 2 + 2 \cdot 1 = 4$$

$\implies$  Zahl  $e$  existiert! ( nach Thm. 3.4.2 )