October 27, 2023
Wintersemester 2023/2024

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Analysis I

Organisation, Tipps & Tricks und Literaturhinweise

Mathe...

- ist intellektuell extrem herausfordernd
- kommt mit einem hohen Arbeitsaufwand
- oft falschen Erwartungen und
- ist wie Ausdauersport

aber dafür ist Mathe eines der schönsten Studien c:

Generelles Zeitmanagement:

- Vor- und Nachbereitung wahrscheinlich mehr als die gesetzten $14 \times 3\,\mathrm{h} = 42\,\mathrm{h}$
- Klausurvorbereitung auch mehr als $39\,\mathrm{h}$
- Pro Woche $2 \times 1.5\,\mathrm{h}$, $2 \times 2\,\mathrm{h}$, $1.5\,\mathrm{h}$, $10\,\mathrm{h}$
- Es gibt immer eine Aufgabe die man nicht lösen kann
- In die Vorlesungen kommen

Vorlesung:

- normal nicht alles zu verstehen
- Notizen was man nicht versteht
- Punkte konzise angehen
- **Mathe muss sich gedanklich setzen** - genügend Zeit zu verarbeiten

Übungen:

- zeitintensiv
- Ergebnisse vernünftig aufschreiben

- Weg zu einer korrekter Lösung ist sehr langwierig
- **nicht 10 Blätter Papier ab, von denen 9.5 inkonklusiv sind**
- also schön Aufschreiben

Wenn wir einen Satz gezeigt bekommen, dann bekommen wir nicht die gescheiterten Jahrelangen Versuche zur Schau, sondern nur die Ausgearbeitete Lösung → also bei uns auch langer weg, aber Aufschreiben nur klein

Übungszettel:

- 50% muss richtig sein
- bis Freitag 10:00 Uhr
- in F4
- diese Woche nicht so umfangreich, weil weniger Zeit
- auf ILIAS Terminfindung Abstimmung
- Donnerstag Einteilung in Tutorien
- Blätter tackern :c
- alle zwei Wochen Beweismechanik Aufgaben, nur digital nicht in Papier (ist dann die letzte Aufgabe)

Literaturempfehlung:

- Otto Forster: Analysis 1
  - kurz und knapp - aber konzise, udn das hilft
  - ähnliche Struktur wie Vorlesung
  - weig motivation und wenige Querverbindungen
- Königsberger: Analysis 1
  - kurz - aber konzise
  - alle themen der Vorlesung, andere Struktur
  - mehr motivation und Querverbindungen
- Klaus Fritsche: Grundkurs Analysis 1
  - ausführlich

- Daniel Grieser: Analysis I
  - Ausführlich, aber mit Fokus auf das Wesentliche
  - alle Themen der Volesung enthalten, ähnliche Struktur
  - bunt??
- Harro Huser: Lehrbuch der Analysis Teil 1
  - extrem ausführlich,dick, an einigen stellen sehr extensiv
  - alle und mehr Themen als Vorlesung
  - Querverbindungen
- Walter Rudin: Analysis
  - sehr knapp und elegant
  - klassiker
  - alle themen der Volesung, leicht andere Struktur
  - empfehlenswertes Buch fortgeschrittene Leser*innen
  - nicht für Anfänger*innen
- Herber amann, Joachim Escher: Analysis I
  - strkt logischer Aufbau, damit teils länglich. Großes Bild
  - alle Themen, andere Struktur
  - auch nicht für anfänger*innen
- Terence Tao: Analysis (englisch, aber gut)
- Rober Denk, Reinhard Racke: Kompendium der ANalysis
  - kurz und knapp, teils wie Nachschlagewerk
  - alle themen
- Florian Modler, Martin Kreh: Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1
  - kurz und knapp, teils wie nachschalgewerk
  - von studierende für studierende
  - aber enthält ein paar Fehler

1. Natürliche Zahlen und elemntare Begriffe

1.1. Zahlbereiche

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$$
$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$
$$\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$
$$\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$$
$$\mathbb{R} := \{ \text{ reelle Zahlen } \}$$

Wir besprechen gar nicht was eine Menge ist, das ist zu philosophisch
Es ist schwierig Mengen zu Definieren, man kommt schnell auf logische Wiedersprüche

- Notation: für x schreiben wir für eine Eigenschaft A "$A(x)$", falls x A erfüllt.

$\rightarrow$ Menge aller Objekte x mit $A(x)$

$$\{x : A(x)\}$$

$\rightarrow$ gibt es kein x mit $A(x)$, so nennen wir die Menge leer, "$\emptyset$"

- $\exists \hat{=}$ Existenzquantor, "es existiert"
- A, B, Eig., $M := \{x : x \text{ erf. } A\}$
  $N := \{x : \text{ erf. } B\}$
  $M \subset N$, falls $\forall x \in M : x \in N$
- $M = N$, falls $M \subset N \vee N \subset M$
- "Echte Tielmenge": $M \subsetneqq N$, falls $M \subset N, N \neq N$.

Example 1.1.1 (gerade Zahlen)

$n \in \mathbb{N}_0$ gerade $:\Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N}_0 : n = 2k)$

$$M := \{n \in \mathbb{N}_0 : \exists k \in \mathbb{N}_0 : n = 2k\} \tag{1}$$
$$= \{2k : k \in \mathbb{N}_0 \tag{2}$$

Example 1.1 $\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{N}_0 \subsetneqq \mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R}$

Zu $\mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R}$: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Widerspruchsbeweis: Ang., $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, so $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, mit $p \in \mathbb{N}_0, q \in \mathbb{N}$. Œ$p, q$ teilerfremd (d.h. Bruch ist vollständig gekürzt).. Also $p^2 = 2q^2$
$\Longrightarrow$ p ist gerade. Also $p = 2l$ mit $l \in N_0$.
$\Longrightarrow$ $4l^2 = p^2 = 2q^2 \Longrightarrow 2l^2 = q^2 \Longrightarrow q$ gerade.
$\Longrightarrow$ p, q gerade. $\Longrightarrow$ p, q nicht teilerfremd. □

1.2. Vollständige Induktion

- Ziel: Beweis von Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}_0$

Dominoprinzip: Wenn alle Steine umfallen sollen,

- müssen wir den 1. Stein umwerfen,
- muss stehts der n-te Stein den $(n+1)$-ten umwerfen.

Prinzip (vollst. Ind.) Wollen wir eine Aussage $A(n) \forall n \in \mathbb{N}$ zeigen; so zeigen wir

(i) $A(1)$ gilt (Induktionsanfang)

(ii) Aus $A(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ stets $A(n+1)$ folgt. (Induktionsschritt)

Definition 1.2 Summen

Für $x_-1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\sum_{k=1}^{n} x_k := x_1 + \ldots + x_n$$

Example 1.3 Geometrische Summe

$$\forall n \in \mathbb{N}:$$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} x^k}\, x^0 + x^1 + ... + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \tag{3}$$

I.A. $n = 1$

$$\sum_{k=0}^{1} x^k = x^0 + x^1 = 1 + x = \frac{(1-x)(1+x)}{1-x} = \frac{1-x^2}{1-x}$$

I.S.

$$n \to n+1$$

Angenommen, (equation) gilt für ein $n \in \mathbb{N}$. z.z. (equation) gilt für $n+1$

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1}$$

...

Example 1.4 Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $n^2 < 2^n$?

- $n = 1 \to 1 < 2$
  $n = 2 \to n^2 = 4 \not< 4 = 2^2$
  $n = 3 \to n^2 = 9 \not<< 2^3$

$n = 4 \to n^2 = 16 \not< 16 = 2^4$
$n = 5 \to n^2 25 < 32 = 2^5$

Wir versuchen die Aussage $\forall n \leq 5$ zu zeigen.

I.A.: $n = 5 : n^2 = 25 < 32 = 2^5$

I.S.: Ang., Aussage gilt für $n \geq 5$. Wir müssen zeigen:

$$(n+1)^2 < 2^{n+1}$$

$(n+1)^2 = \underbrace{n^2}_{<2^n} + 2n + 1 < 2^n + 2n + 1 \mid \overset{?}{<} 2^{n+1}$ Angenommen, es gilt

$$\forall n \geq 5 : 2n + 1 < 2^n \tag{4}$$

Dann: $(n+1)^2 < ... < 2^n + 2n + 1 = 2 * 2^n = 2^{n+1}$

- Wir zeigen (4) wiederum mit voll. Ind.

  I.A.: $n = 52n + 1 = 11 < 32 = 2^5$

  I.S.: Ang., (4) gilt für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $2(n+1) + 1 = 2n + 3 = (2n+1) + 2 < 2^n + 2 < 2^n + 2^n = 2 * 2^n = 2^{n+1}$.
  Damit folgt (4 und damit die eigentliche Aussage □

Definition 1.5

für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die *Fakultät* via $n! := n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$, falls $n \geq 1$, und $0! := 1$. Für $k \in \{0, \ldots, n\}$ definieren wir den *Binomialkoeffizienten*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Lemma 1.6

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

Proof 1.7

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k)!(n-k+1)} + \frac{n!(k)}{(k-1)!(n-(k-1)k)!(k)}$$
$$= \frac{n!n + n!}{k!(n-k+1!} = \frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!}$$ □

Example 1.8 (Binomische Formel)

Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$:

$$(x+y)^n ? \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Sei also $x, y \in \mathbb{R}$.

I.A.: $n = 0$. $(x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 y^0$

I.S.: Gelte die Aussage für $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}(x+y)^{n-1} = (x+y)(x+y)^n &= (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} && (5)\\ &= x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} + y\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} && (6)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k} && (7)\end{aligned}$$

Indexverschiebung: $l = k+1$. $l \in \{1, \ldots, n+1\}$

$$\begin{aligned}(7) &= \underbrace{\sum_{l=1}^{n}\binom{n}{l-i}x^l y^{n+1-l}}_{\text{Hier Indexverschiebung}} + \underbrace{\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}x^l y^{n+1-l}}_{\text{Hier nennen wir einfach } k=l}\\ &= \binom{n}{n}x^{n+1}y^0 + \left(\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{l-1}+\binom{n}{l}\right)x^l y^{n+1-l}\right) + \binom{n}{0}x^0 y^{n+1}\\ &= \binom{n+1}{n+1}x^{n+1}0 + \left(\sum_{l=1}^{n}\binom{n+1}{l}x^l y^{(n+1)-l}\right) + \binom{n+1}{0}x^0 y^{n+1}\\ &= \sum_{l=0}^{n+1}\binom{n+1}{l}x^l y^{(n+1)-l}\end{aligned}$$

□

1.2.1 Characterisierung der natürlichen Zahlen

Definition 1.2.1

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heißt induktiv, falls

(i) $1 \in M$

(ii) $\forall x \in M : x + 1 \in M$

Example 1.2.2

(a) $\mathbb{N}$ sind ind. Menge.

(b) $A := \{2n : n \in \mathbb{N}_0\}$ nicht ind. Menge, da (i) $1 \neq A$, (ii) $2n+1$ ist immer ungerade

(c) $B := \{2n+1 : n \in \mathbb{N}_0\}$ nicht ind.: (i), aber $2n+1+1 = 2(n+1)$

(d) $\mathbb{Q}^+ := \{x \in \mathbb{Q} : q > 0\}$ ist ind. Teilmenge

- Sei $(A_i)_{i \in I}$ mit I Indexmenge eine Familie von Mengen. setze

$$\text{Schnitt}_{i \in I} := \{x : (\forall i \in I : x \in A_i)\}$$

$$\text{Vereinigung}_{i \in I} := \{x : (\exists i \in I : x \in A_i)\}$$

prop
Für eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ sind äquivalent

(i) $M = \mathbb{N}$

(ii) Ist $N \subset \mathbb{R}$ induktiv, so $M \subset N$

(iii) $M = \text{Schnitt}_{N \subset \mathbb{R}} N \text{induktiv}$

$(i) \iff (ii) \iff (iii)$

Proof 1.2.3

'$(i) \implies (ii)$': Sei$N \subset \mathbb{R}$ beliebige ind. Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zu zeigen: $M \overset{=}{(i)} \mathbb{N} \subset N$
Aber $I \in \mathbb{N}$, und $I \in N$ (da N ind.), Da N ind. ist, ist mit jeder nat. $x \in \mathbb{N}$ also auch $x \in N$. Damit $\boxed{\mathbb{N} \subset N.}$

'$(ii) \implies (iii)$' Wir zeigen: $\text{Schnitt}_{N \text{ ind. Menge}} N$ ist ind. Menge
$\overset{(ii)}{\implies} M \overset{(ii)}{\subset} N \subset M$. Also $M = \text{Schnitt}_{N \text{ ind.}} N$.
$\text{Schnitt}_{N \text{ ind}} N$ induktiv: (i) $(\forall N \text{ ind: } I \in N) \implies I \in \text{Schnitt}_{N \text{ ind.}} N$