

Analysis 1

10.11.2023

F. Gmeineder

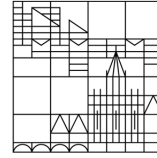
P. Stephan

A. von Pippich

Wintersemester 2023

Abgabe: Bis zum 17.11.2023 um 10:00 Uhr

Universität
Konstanz



Übungsblatt 4

Aufgabe 1:

4 + (2+2+2) = 10 Punkte

Es seien (a_n) und (b_n) Folgen mit Werten in \mathbb{R} . Zeigen Sie:

- (a) Ist (a_n) eine Nullfolge und (b_n) beschränkt, so konvergiert die Produktfolge $(a_n b_n)$ gegen Null.
- (b) Sei (a_n) eine Nullfolge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie für jede der nachfolgenden Aussagen je eine bestimmt divergente Folge (b_n) an, so dass der entsprechende Fall eintritt. Beweisen Sie Ihre Aussagen.

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$.

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1$.

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = +\infty$.

Aufgabe 2: Konvergenz in der Praxis

2,5+2,5+2,5+2,5 = 10 Punkte

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz für $n \rightarrow \infty$ und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

(i) $a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, n \in \mathbb{N}$

(iii) $c_n := \frac{n^2}{n^2+2n+2}, n \in \mathbb{N}$

(ii) $b_n := \frac{2^n + (-3)^n}{(-2)^n + 3^n}, n \in \mathbb{N}$

(iv) $d_n := \frac{1}{n}(-1)^n + 1, n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 3: Kettenbruch

7+3 Punkte = 10 Punkte

Sei $a_0 := 1$ und $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$.

- (a) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über monotone Konvergenz, dass (a_n) konvergiert und bestimmen Sie den Limes.
- (b) Warum kann das Ergebnis als Wert eines unendlichen Kettenbruchs interpretiert werden?
- (c) **Bonus - 2 Zusatzpunkte:** Was fällt Ihnen über die gekürzten Zähler und Nenner der Folgenglieder auf?

Hinweis: Der Satz über monotone Konvergenz wird erst in der Vorlesung am Dienstag behandelt. Dieser besagt, dass eine beschränkte, monotone Folge konvergiert.

Aufgabe 4: Beweismechanik**10 Punkte**

- (a) Betrachte die folgenden Teilmengen der reellen Zahlen

$$A := \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| \geq 2\},$$
$$B := \{x \in \mathbb{R} : (x \leq 2) \wedge (x^2 - 1 < 0)\}.$$

Zeigen Sie, dass $A \subset \mathbb{R} \setminus B$ gilt.

- (b) Es seien X eine Menge und $A, B \subset X$ zwei Teilmengen von X . Beweisen Sie die Mengengleichheit

$$X \setminus (A \setminus B) = (X \setminus A) \cup B.$$

Hinweis: Die Beweismechanik-Abgabe muss als Zweier-Team abgegeben werden. Speichern Sie Ihre gemeinsame Beweismechanik-Abgabe in einer PDF-Datei unter einem Namen der Form a1blatt4-bma-ihrnachname-nachnameihrespartners.pdf ab, wobei Sie ihrnachname durch Ihren Nachnamen ersetzen usw. Laden Sie die Beweismechanik-Abgabe dann getrennt von den anderen Aufgaben auf der ILIAS-Seite der Vorlesung unter „Abgabe Beweismechanik-Aufgabe“ hoch. Die Abgabe im Zweier-Team ist verpflichtend. Pro Zweier-Team bitte nur eine Abgabe!

Aufgabe 1 und 2 werden in den Tutorien besprochen, Aufgabe 3 als Musterlösung hochgeladen und Aufgabe 4 in der Plenumsübung.