pre-course lecture

Elias Gestrich

8. Oktober 2023

1. Day 1

Argumente/Begründungen/Beweise (Herz der Mathematik)
Beweise sind "immer wahr"
Beweise helfen beim verstehen
Beweise "zähmen die Unendlichkeit"

Problem 1.1

Wie lange benötigt man zum Zersägen eines 7 m-langen Baumstamms in 1 m-Stücke, wenn jeder Schnitt eine halbe Minute dauert?
Lsg.: 3 min
Zwischenziel: 6 Schritte $\rightarrow$ Mustererkennung $n-1$ Schnitte für n Teiler/Meter

Proof 1.1

Jeder Schnitt erhöht die Anzahl der Stücke um eins.
Anfangs: 1 Stück, am Ende 7 $\Rightarrow$ man muss

$$7-1=6 \text{ Schnitte machen. usw.}$$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ natürliche Zahlen
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$ natürliche Zahlen mit der Null

Problem 1.2

Conjecture 1.1

Wenn zwei natürliche Zahlen gerade sind, dann ist auch ihre Summe gerade

Seien $t_1, t_2 \in \mathbb{N}$

$$a = 2t_1$$

$$b = 2t_2$$

also gilt:

$$a + b = 2t_1 + 2_t2 = 2(t_1 + t_2) \implies \text{gerade Zahl}$$

Problem 1.3

Mit wievielen Nullen endet 100!?
Primfaktorzerlegung:

20 durch 5 teilbare Zahlen
4 durch 5^2 teilbare Zahlen

k Nullen am Ende einer natürlichen Zahl in Dezimalschreibweise: Zahl ist durch $10^k = (2 \times 5)^k = 2^k \times 5^k$ teilbar.

$$5, 10, 15, \ldots$$

also bei

$$1 \times 5, 2 \times 5, 3 \times 5, \ldots, 20 \times 5 \Rightarrow 20\,\text{Stück}$$

welche liefern 2 Fünfen

$$1 \times 5^2, 2 \times 5^2, 3 \times 5^2, 4 \times 5^2, \cancel{5 \times 5^2}$$

Anzahl der Nullen, mit denen 100! enden, ist die größte natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$, für die

$$100! \text{ durch } 10^k \text{ teilbar ist.}$$

Weil $10 = (2 \times 5)$, ist das gleich der größten ganzen Zahl k, für die 100! durch $2^k \times 5^k$ teilbar ist,

$$\text{also durch } 5^k \text{ und } 2^k$$

Die 5 tritt als Faktor genau in den 20 Zahlen

$$5, 10, 15, \ldots, 100,$$

und in den 4 Zahlen

$$25, 50, 75, 100$$

doppelt vor.
Somit folgt: die 5 tritt $20 + 4 = 24$ mal als Faktor in 100! auf.
Die 2 tritt als Faktor in 50 Zahlen auf:

$$2, 4, 6, 8, \ldots, 100$$

(und einigen mehrfach)
$\Rightarrow$ Insgesamt endet 100! mit 24 Nullen.

Problem 1.4

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Berechne die Summe der ersten n natürlichen Zahlen, also

$$\begin{array}{rlllll} & 1 & +2 & +3 & +\ldots+n & := S \\ & +n & +n-1 & +n-2 & +\ldots+1 & = S \\ \hline & =(n+1) & +(n+1) & +(n+1) & +\ldots+(n+1) & = S \\ & = & & & n \times (n+1) & = S \end{array}$$

2. Tag 2

$\mathbb{P}$ = Menge aller Primzahlen
$\mathbb{P} = 2, 3, 5, 7, \ldots$

Offene Fragen: Gibt es eine Formel für Primzahlen?
Fermat (1637):

Conjecture 2.1

$F(n) = 2^{2^n} +$ ist eine Primzahl für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
F(1) &= 2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 &&= 5\\
F(2) &= 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 &&= 17\\
F(3) &= 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 &&= 257\\
F(4) &= 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 &&= 65537
\end{aligned}$$

100 Jahre später Euler:
651 teilt $F(5)$,
also ist

$$F(5) = 4294967297$$

<u>keine</u> Primzahl.

3. Vorkurs

- mathematische Probleme formulieren
- Lösungen finden (Argumentieren) Beweisen

4. Mengen (Warm-up)

Skatspiel

Situation: Aus gemischtem Skatspiel werden zwei Karten gezogen. Sind es zwei Karten gleicher Farbe oder zwei Karten mit gleichem Wert, dann gewinnen wir.

Symbole: Kreuz, Pik, Herz, Karo

Werte: 7, 8, 9, 10, B, D, K, Ass

Definitionssymbol: " $:=$ "

Example 4.1

$$\begin{aligned}
11 &:= \text{Bube} & a &:= \text{Kreuz}\\
12 &:= \text{Dame} & b &:= \text{Pik}\\
13 &:= \text{König} & c &:= \text{Herz}\\
14 &:= \text{Ass} & d &:= \text{Karo}
\end{aligned}$$

Kartenmenge $= \{a7, a8, ..., a14, b7, b8, ..., b14, c7, ..., d14\}$

$\{\text{Kreuz}, 7\} = \text{Karte Kreuz } 7$

$$\begin{aligned}\text{Kartenmenge} &:= \{\{1,7\},\ \{2,7\},\ \{3,7\},\ \{4,7\}\\ &\quad \{1,8\},\ \{2,8\},\ \{3,8\},\ \{4,8\},...,\\ &\quad \{1,14\},\{2,14\},\{3,14\},\{4,14\}\}\end{aligned}$$

5. Mengen, Teilmengen, Mengenoperationen

Definition 5.1

(naive Definition) Eine Ansammlung von (mathematischen) Objekten heißt **Menge**. Ein Mitglied dieser Ansammlung heißt **Element** der Menge.

Ist a ein Element der Menge A, so schreibt man $a \in A$

Gehört a nicht zur Menge A, so schreibt man $a \notin A$
Mit $|A|$ bezeichnet man die Anzahl der Elemente in A

Example 5.1

$$|\mathbb{N}| = \infty$$

Zwei Arten, Mengen zu beschreiben:

- aufzählende Mengenschreibweise $A = \{2, 4, 6, ...\}$, $B = \{2, 8, 9\}$
- beschreibende Mengenschreibweise $A = \{x \in \mathbb{N} | 3 \leq x \leq 8\}$, $[a, b] := \{z \in \mathbb{R} | a \leq z \leq b\} a, b \in \mathbb{R}$

Exercise 5.1

$$\begin{aligned}M &= \text{Menge aller ganzzahlingen Vielfachen von } 42\\ &= \{x \in \mathbb{Z} : 42 | x\} = \{42 \times x : x \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

Definition 5.2

Es sei A eine Menge
Eine Menge B heißt Teilmenge von A, in Zeichen: $B \subseteq A$,
wenn jedes Element von B auch ein Element von A ist

Definition 5.3

Es seien A, B Teilmengen einer Menge M
Schnittmenge von A und B ist $A \cap B := \{x \in M : x \in A \wedge x \in B\}$
Vereinigungsmenge von A und B ist $A \cup B := \{x \in M : x \in A \vee x \in B\}$
Differenz von A und B ist $A \backslash B := \{x \in M : x \in A \wedge x \notin B\}$
Komponent von A in M ist die Menge $A^c := \{x \in M : x \notin A\} = M \backslash A\}$
genau dann wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$, dann $A = B$

Jede beliebeige Menge A hat die folgenden Teilmengen $\emptyset, A$ d.h. es git $\emptyset \subseteq A, A \subseteq A$
$\{\_\} \notin \{\_, \_\}$

$\_ \in \{\square, \circ, \triangle\}$ (bzw. $\_ \in \{\_, \_, \_\}$)
$\{1,2,3\} = \{3,2,1\} = \{2,1,3\} = ...$

Exercise 5.2

Gilt $\{1,2,1,1\} = \{1,2\}$?
ja

Exercise 5.3

Falls $\{a\} = \{b\}$, dann folgt $a = b$
Falls $\{a\} = \{a, b\}$, dann folgt $a = b$

$\{1,2\}$ hat Teilmengen $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}$
Eine Menge mit n Elementen hat 2^n Teilmengen.

Definition 5.4

Potenzmenge einer Menge
Sei A eine Menge, dann heißt die Menge

$$\mathcal{P}(A)$$

aller Teilmengen von A die Potenzmenge von A

$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ $\mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, 1\}$

Definition 5.5

(kartesisches Produkt von zwei Mengen A und B)
Das kartesische Produkt von zwei Mengen A und B ist definiert durch

$$A \times B := \{(x, y) : x \in A \land y \in B\}$$

In $A \times B$ sind zwei Elemente $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ genau dann gleich, wenn $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$

$$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}$$

$(1,2) \in \mathbb{R}^2$ $\quad$ $(1,2) \neq (2,1)$
$(2,1) \in \mathbb{R}^2$

6. Prof. Junk

Auf einem Baum saß ein Rabe mit einem Käse im Schnabel, als ein Fuchs vorbeikommt.
Sei $B \in$ Bäume und $R \in$ Raben sitze auf B mit $K \in$ Käsestückchen im Schnabel, als $F \in$ Füchse vorbeikommt.

Er überlegte wie er an den Käse kommt. Da sagte er zu dem Raben, ...
F überlegte wie F an K kommt. Da sagte F zu R, ...

allgemeine mathematische Situationen bestehen aus

- Eine Liste von Namen für mathematische Objekte
- Eine Liste von geltenden Aussagen über diese Objekte

Was kann man damit tun?

- Namen kann man austauschen ohne Bedeutungsänderung
- Situationen können eintreten; konkrete Situationen können auf allgemeine Situationen passen

Example 6.1

$A := \{x \in \mathbb{N} : 3 \leq x \leq 8\}$
Schreibweise beschreib eine Menge, indem sie zwei Zugehörigkeitsregeln kodiert

- besteht aus zwei allgemeinen Situationen:
  - Vorraussetzung
  - Folgerung

Regel 1: Sei x ein Objekt
Es gelte $x \in \mathbb{N}; 3 \leq; 8 \geq x \rightarrow$ Dann gilt $x \in A$
Regel 2: Sei x ein Objekt
Es gelte $x \in A \rightarrow$ Dann gilt $x \in \mathbb{N}; 3 \leq; 8 \geq x$
Gilt: $9 \in A$: $x \leftarrow 9$ $9 \in \mathbb{N}, 9 \geq 3, 9 \leq 8$
Vorraussetzung tritt nicht ein! Gilt: $9 \notin A$ $9 \in \mathbb{N}, 9 \geq 3, 9 \leq 8 \rightarrow$ Wiederspruch
$9 \nleq 8 \rightarrow$ Gegenteil von Annahme stimmt

7. Aussagen (Logik)

Unsere mathematische Ergebnisse formulieren wir als (mathematische) Aussagen.
Als Aussage bezeichnen wir einen Ausdruck, der entweder wahr oder falsch sein kann.
$\rightsquigarrow$ Wahrheitswert der Aussage: wahr, w, 1; falsch, f, 0

Example 7.1

$$\begin{aligned} A &:= \text{“}1+2=3\text{”} \\ B &:= \text{“5 ist eine negative Zahl”} \\ C &:= \text{“Jede gerade Zahl } n > 2 \text{ kann als Sume zweier Primzahlen geschrieben werden.”} \end{aligned}$$

8. Aussageform

Example 8.1

Sei

$$A(n) := n \text{ ist gerade}$$

Dann ist

$$A(1) \text{ eine (falsche) Aussage}$$

$$A(2) \text{ eine (wahre) Aussage}$$

Eine Aussageform ist eine Äußerung, die eine (oder mehrere) Variablen enthält und zu einer Aussage wird, wenn man zulässige Objekte für diese Variablen einsetzt.
Es seien A und B Aussagen.

Die Konjunktion (Und-Aussage) von A und B ist die Aussage

$A \wedge B$ "A und B"

die genau dann wahr ist, wenn A und B gleichzeitig wahr sind.

$A :=$ "24 ist gerade"

$B :=$ "24 ist durch 3 teilbar"

$C :=$ "24 ist durch 5 teilbar"

$A \wedge B = 1 \quad A \wedge C = 0$

Die Disjunktion (Oder-Aussage) von A und B ist Aussage

$A \vee B$ "A oder B"

die genau dann wahr ist, wenn mind. eine der beiden Aussagen A und B wahr ist.

Die Negation von A ist die Aussage

$\neg A$ "nicht A"

die genau dann wahr ist, wenn A falsch ist.

Implikation (Folgerung) "Wenn A, dann B" ist die Aussage

$A \implies B$ "aus A folgt B", A impliziert B")

die genau dann falsch ist, wenn A wahr ist und B falsch ist und sonst ist sie immer wahr.

Äquivalenz "A genau dann, wenn B" ist die Aussage

$A \iff B$

die genau dann wahr ist, wenn A und B beide wahr sind oder A und B beide falsch sind.

Eine zusammengesetzte Aussage heißt <u>Tautologie,</u> falls sie immer wahr ist, unabhängig davon, welche Wahrheitswerte die verknüpften Einzelaussagen haben.

Ist $A(n)$ eine Aussageform mit Wertebereich M, so können wir folgende Aussagen betrachten:

- für alle $n \in M$ gilt: $A(n)$
  in Zeichen: $\forall n \in M : A(n)$ z.B. $\forall n \in \mathbb{N} : 2 \mid n$
  $\rightarrow$ Allaussage ($\forall \leftarrow$ Allquantor)

- Es gibt ein $n \in M$, für das $A(n)$ gilt
  in Zeichen $\exists n \in M : A(n)$
  $\exists! n \in M : A(n)$ "es gibt genau ein $n \in M, ...$"

- Eine Aussage der Form

  $$\forall n \in M : A(n)$$

  ist immer wahr, wenn $M = \{\}$

- Reihenfolge der Quantoren spielt eine Rolle

  $A : \forall n \in \mathbb{N} : (\exists m \in \mathbb{N} : m > n)$ (wahr)

  $B : \exists m \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : m > n$ (falsch)

9. Negation von Aussagen

$\neg(\exists n \in M : A(n)) \iff \forall n \in M : \neg A(n)$ ist eine Tautologie d.h. die Negation der Aussage

$$\exists n \in M : A(n)$$

ist logisch Äquivalent zu der Aussage

$$\forall n \in M : \neg A(n)$$

$$\neg(\forall n \in M : A(n)) \iff \exists n \in M : \neg A(n) \quad \text{ist eine Tautologie d.h. die Negation der Aussage}$$

$$\forall n \in M : A(n)$$

ist logisch Äquivalent zu der Aussage

$$\exists n \in M : \neg A(n)$$

10. —

Theorem 10.1

1) Äquivalenzprinzip
   Ist A wahr und ist $A \iff B$, dann ist auch B wahr
2) Ableitungsregel
   $(A \wedge (A \implies B)) \implies B$ ist eine Tautologie
3) Syllogismusregel
   $((A \implies B) \wedge (B \implies C)) \implies A \implies C$ ist eine Tautologie
4) Kontraposition
   $(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A)$ ist eine Tautologie
5) Ringschluss

$$((A \iff B) \wedge (B \iff C) \wedge (A \iff C))$$

$$\iff$$

$$((A \iff B) \wedge (B \iff C) \wedge (A \iff C))$$

11. Beweise und Beweisformen

Ein Beweis ist eine logisch vollständige Begründung einer Aussage. Oft möchten wir Aussagen vom Typ “Wenn A, dann B” zeigen.
Aussagen lassen sich meist in folgende Form bringen

- Vorraussetzung z.B. Sei $a \in \mathbb{N}$.
- Behauptung dann ist $2 =$ gerade

11.1. Direkter Beweis

Statt $A \implies B$ zu zeigen, zeigen wir $A \implies A_1 \implies A_2 \implies ... \implies B$

Situation: $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}, \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$, Rechenregeln: $+, -$ bekannt

Definition 11.1.1

Eine natürliche Zahl $b \in \mathbb{N}$ teilt eine natürliche Zahl $a \in \mathbb{N}$ (in Zeichen $b \mid a$), wenn es eine natürliche Zahl $c \in \mathbb{N}$ gibt, mit $a = b \times c$

Definition 11.1.2

Eine Zahl $a \in \mathbb{N}$ heißt gerade, falls $2 \mid a$ gilt, d.h. falls es ein $c \in \mathbb{N}$ mmit $a = 2 \times c$ gibt. Eine Zahl $q \in \mathbb{N}$ heißt ungerade, falls q nicht gerade ist.

Conjecture 11.1.1

18 ist gerade.

Proof 11.1.1

$18 \in \mathbb{N}$, also können wir obrige Definition 11.1.2 anwenden.
Setze $c := 9$
Dann gilt $c \in \mathbb{N}$ und $18 = 2 \times 9$
Also gilt $2 \mid 18$. Also ist 18 gerade, $\square$

12. Apendix B von Junk/Traude

Definition 12.1

$\boxed{\text{B.10}}$ Definitionen

Nachweistext: Definition ★ wird $\boxed{\text{Blubb}}$ genannt, falls (...) gilt.
Schreibe: Zu zeigen (...)

Benutzungsbedingung: um zu benutzen, dass ein Objekt nach Definition ★ Blubb genannt wird, falls (...) gilt.
Schreibe: Nach Definition von "Blubb", folgt (...)

$\boxed{\text{B.7}}$ Existenzaussagen

Nachweistext: zu beweisen:

$$\exists x \in X : (...)$$

Schreibe:

Setze $x :=$ ___.

zu zeigen: $x \in X$ mit (...)

Benutzungstext: Es gilt

Example 12.1

Vor. Sei $a \in \mathbb{N}$
Bew. Dann ist $2 \times a$ gerade
Es sei $a \in \mathbb{N}$. Es gilt $2 \times a \in \mathbb{N}$. Nach Definition 11.1.2 zu geraden Zahlen ist zu zeigen:

$$2 \mid a$$

d.h. zu zeigen: $\exists c \in \mathbb{N} : s \times a = 2 \times c$
Setzte $c := a$
Dann gilt $c \in \mathbb{N}$ und

$$2 \times a = 2 \times c, \square$$

Definition 12.2 $\boxed{\text{B.6}}$ **Allaussagen**

Nachweistext: zu zeigen

$$\forall x \in X : \dots$$

Schreibe:
Sei ein $x \in X$ gegeben.
Zeige: $\dots$
Benutzungstext:

$$\forall x \in X : \dots anzuwenden \tag{1}$$

Dann muss ein $a \in X$ vorliegen
Wegen $a \in X$ folgt (aus der $\forall$-Aussage)
$\dots$

Exercise 12.1

Zeige, dass die Summe zweier geraden natürlichen Zahlen auch gerade ist
Vor.: Gegeben seien $a \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{N}$ gerade.
Setzte

$$c := a + b \in \mathbb{N}$$

Beh.: c ist gerade

Proof 12.1

Da $c \in \mathbb{N}$, kann man Definition 11.1.2 zu geraden Zahlen anwenden. Zu zeigen ist

$$2 \mid c$$

d.h. zu zeigen: $\exists k \in \mathbb{N} : c = 2 \times k$

Da a, b gerade, gilt nach Definition 11.1.2 zu geraden Zahlen

$$a = 2 \times m \text{ und} \tag{2}$$

$$b = 2 \times n, \tag{3}$$

mit $m, n \in \mathbb{N}$, sodass

$$c = a + b = 2 \times m + 2 \times n = 2 \times (m + n), \tag{4}$$

wobei wir für die erste Gleicheit 2 und 3, für die zweite Gleichheit die Rechenregeln für natürliche Zahlen benutzt haben.
Setze

$$k := m + n$$

Dann gilt

$$k \in \mathbb{N}$$

und wegen 4

$$c = 2 \times (m + n)$$

also

$$c = 2 \times k, \qquad \square$$

Definition 12.3 “ | ”

$a, b \in \mathbb{N}$
$b \mid a$, falls es $c \in \mathbb{N}$ mit $a = b \times c$ gibt.

$\Downarrow$
$a, b, c \in \mathbb{N}$
$b \times c \mid a \times c$, falls es $n \in \mathbb{N}$ mit $a \times c = (b \times c) \times n$ gibt.

Exercise 12.2 **Es seien $a, b \in \mathbb{N}$. Weiter gelte $b \mid a$. Dann gilt auch $b \times c \mid a \times c$**

Proof 12.2 **Vor.: Es seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $b \mid a$**

z.z.: $(b \times c) \mid (a \times c)$
d.h.: z.z.: es existiert $n \in \mathbb{N}$ mit

$$a \times c = n(b \times c)$$

nach Definition 12.3 von " $\mid$ "
Da $b \mid a$, folgt (nach Definition von " $\mid$ "), dass es

$$m \in \mathbb{N}\text{gibt, mit}$$

$$a = b \times m \tag{5}$$

Multiplikation von 5 mit $c \in \mathbb{N}$ liefert

$$a \times c = (b \times m) \times c$$

Somit folgt (Rechengesetze für " $\times$ ")

$$a \times c = m \times b \times c,$$

also folgt

$$b \times c \mid a \times c$$

Setze $n := m$ Dann folgt

$$a \times c = n(b \times c)$$

und $b \times c \mid a \times c$