November 7, 2023
Wintersemester 2023/2024

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Analysis I

Organisation, Tipps & Tricks und Literaturhinweise

Mathe...

- ist intellektuell extrem herausfordernd
- kommt mit einem hohen Arbeitsaufwand
- oft falschen Erwartungen und
- ist wie Ausdauersport

aber dafür ist Mathe eines der schönsten Studien c:

Generelles Zeitmanagement:

- Vor- und Nachbereitung wahrscheinlich mehr als die gesetzten $14 \times 3\,\mathrm{h} = 42\,\mathrm{h}$
- Klausurvorbereitung auch mehr als $39\,\mathrm{h}$
- Pro Woche $2 \times 1.5\,\mathrm{h}$, $2 \times 2\,\mathrm{h}$, $1.5\,\mathrm{h}$, $10\,\mathrm{h}$
- Es gibt immer eine Aufgabe die man nicht lösen kann
- In die Vorlesungen kommen

Vorlesung:

- normal nicht alles zu verstehen
- Notizen was man nicht versteht
- Punkte konzise angehen
- **Mathe muss sich gedanklich setzen** - genügend Zeit zu verarbeiten

Übungen:

- zeitintensiv
- Ergebnisse vernünftig aufschreiben

- Weg zu einer korrekter Lösung ist sehr langwierig
- **nicht 10 Blätter Papier ab, von denen 9.5 inkonklusiv sind**
- also schön Aufschreiben

Wenn wir einen Satz gezeigt bekommen, dann bekommen wir nicht die gescheiterten Jahrelangen Versuche zur Schau, sondern nur die Ausgearbeitete Lösung $\rightarrow$ also bei uns auch langer weg, aber Aufschreiben nur klein

Übungszettel:

- 50% muss richtig sein
- bis Freitag 10:00 Uhr
- in F4
- diese Woche nicht so umfangreich, weil weniger Zeit
- auf ILIAS Terminfindung Abstimmung
- Donnerstag Einteilung in Tutorien
- Blätter tackern :c
- alle zwei Wochen Beweismechanik Aufgaben, nur digital nicht in Papier (ist dann die letzte Aufgabe)

Literaturempfehlung:

- Otto Forster: Analysis 1
  - kurz und knapp - aber konzise, udn das hilft
  - ähnliche Struktur wie Vorlesung
  - weig motivation und wenige Querverbindungen
- Königsberger: Analysis 1
  - kurz - aber konzise
  - alle themen der Vorlesung, andere Struktur
  - mehr motivation und Querverbindungen
- Klaus Fritsche: Grundkurs Analysis 1
  - ausführlich

- Daniel Grieser: Analysis I
  - Ausführlich, aber mit Fokus auf das Wesentliche
  - alle Themen der Volesung enthalten, ähnliche Struktur
  - bunt??
- Harro Huser: Lehrbuch der Analysis Teil 1
  - extrem ausführlich,dick, an einigen stellen sehr extensiv
  - alle und mehr Themen als Vorlesung
  - Querverbindungen
- Walter Rudin: Analysis
  - sehr knapp und elegant
  - klassiker
  - alle themen der Volesung, leicht andere Struktur
  - empfehlenswertes Buch fortgeschrittene Leser*innen
  - nicht für Anfänger*innen
- Herber amann, Joachim Escher: Analysis I
  - strkt logischer Aufbau, damit teils länglich. Großes Bild
  - alle Themen, andere Struktur
  - auch nicht für anfänger*innen
- Terence Tao: Analysis (englisch, aber gut)
- Rober Denk, Reinhard Racke: Kompendium der ANalysis
  - kurz und knapp, teils wie Nachschlagewerk
  - alle themen
- Florian Modler, Martin Kreh: Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1
  - kurz und knapp, teils wie nachschalgewerk
  - von studierende für studierende
  - aber enthält ein paar Fehler

1 Natürliche Zahlen und elemntare Begriffe

1.1 Zahlbereiche

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$$
$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$
$$\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$
$$\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$$
$$\mathbb{R} := \{ \text{ reelle Zahlen } \}$$

Wir besprechen gar nicht was eine Menge ist, das ist zu philosophisch
Es ist schwierig Mengen zu Definieren, man kommt schnell auf logische Wiedersprüche

- Notation: für x schreiben wir für eine Eigenschaft A "$A(x)$", falls x A erfüllt.

$\rightarrow$ Menge aller Objekte x mit $A(x)$

$$\{x : A(x)\}$$

$\rightarrow$ gibt es kein x mit $A(x)$, so nennen wir die Menge leer, "$\emptyset$"

- $\exists \hat{=}$ Existenzquantor, "es existiert"
- A, B, Eig., $M := \{x : x \text{ erf. } A\}$
  $N := \{x : \text{ erf. } B\}$
  $M \subset N$, falls $\forall x \in M : x \in N$
- $M = N$, falls $M \subset N \vee N \subset M$
- "Echte Tielmenge": $M \subsetneqq N$, falls $M \subset N, N \neq N$.

Example 1.1.1 (gerade Zahlen)

$n \in \mathbb{N}_0$ gerade $:\iff (\exists k \in \mathbb{N}_0 : n = 2k)$

$$\begin{aligned} M :=&\{n \in \mathbb{N}_0 : \exists k \in \mathbb{N}_0 : n = 2k\} && (1)\\ =&\{2k : k \in \mathbb{N}_0 && (2)\end{aligned}$$

Example 1.1 $\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{N}_0 \subsetneqq \mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R}$

Zu $\mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R}$: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Widerspruchsbeweis: Ang., $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, so $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, mit $p \in \mathbb{N}_0, q \in \mathbb{N}$. Œ$p, q$ teilerfremd (d.h. Bruch ist vollständig gekürzt).. Also $p^2 = 2q^2$
$\implies$ p ist gerade. Also $p = 2l$ mit $l \in N_0$.
$\implies 4l^2 = p^2 = 2q^2 \implies 2l^2 = q^2 \implies q$ gerade.
$\implies p, q$ gerade. $\implies p, q$ nicht teilerfremd. $\square$

1.2 Vollständige Induktion

- Ziel: Beweis von Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}_0$

Dominoprinzip: Wenn alle Steine umfallen sollen,

- müssen wir den 1. Stein umwerfen,
- muss stehts der n-te Stein den $(n+1)$-ten umwerfen.

Prinzip (vollst. Ind.) Wollen wir eine Aussage $A(n) \forall n \in \mathbb{N}$ zeigen; so zeigen wir

(i) $A(1)$ gilt (Induktionsanfang)

(ii) Aus $A(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ stets $A(n+1)$ folgt. (Induktionsschritt)

Definition 1.2 Summen

Für $x_-1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \coloneqq x_1 + \ldots + x_n$$

Example 1.3 Geometrische Summe

$$\forall n \in \mathbb{N}:$$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} x^k}\, x^0 + x^1 + \ldots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \tag{3}$$

I.A. $n = 1$

$$\sum_{k=0}^{1} x^k = x^0 + x^1 = 1 + x = \frac{(1-x)(1+x)}{1-x} = \frac{1-x^2}{1-x}$$

I.S.

$$n \to n+1$$

Angenommen, (equation) gilt für ein $n \in \mathbb{N}$. z.z. (equation) gilt für $n+1$

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1}$$

...

Example 1.4 Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $n^2 < 2^n$?

- $n = 1 \to 1 < 2$
  $n = 2 \to n^2 = 4 \not< 4 = 2^2$
  $n = 3 \to n^2 = 9 \not<< 2^3$
  $n = 4 \to n^2 = 16 \not< 16 = 2^4$

$n = 5 \to n^2 25 < 32 = 2^5$

Wir versuchen die Aussage $\forall n \geq 5$ zu zeigen.

I.A.: $n = 5 : n^2 = 25 < 32 = 2^5$

I.S.: Ang., Aussage gilt für $n \geq 5$. Wir müssen zeigen:

$$(n+1)^2 < 2^{n+1}$$

$(n+1)^2 = \underbrace{n^2}_{<2^n} + 2n + 1 < 2^n + 2n + 1 \,|\overset{?}{<} 2^{n+1}$ Angenommen, es gilt

$$\forall n \geq 5 : 2n + 1 < 2^n \tag{4}$$

Dann: $(n+1)^2 < ... < 2^n + 2n + 1 = 2 * 2^n = 2^{n+1}$

- Wir zeigen (4) wiederum mit voll. Ind.

  I.A.: $n = 52n + 1 = 11 < 32 = 2^5$

  I.S.: Ang., (4) gilt für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $2(n+1) + 1 = 2n + 3 = (2n+1) + 2 < 2^n + 2 < 2^n + 2^n = 2 * 2^n = 2^{n+1}$.
  Damit folgt (4 und damit die eigentliche Aussage □

Definition 1.5

für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die *Fakultät* via $n! := n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$, falls $n \geq 1$, und $0! := 1$. Für $k \in \{0, \ldots, n\}$ definieren wir den *Binomialkoeffizienten*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Lemma 1.6

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

Proof 1.7

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k)!(n-k+1)} + \frac{n!(k)}{(k-1)!(n-(k-1)k)!(k)}$$
$$= \frac{n!n + n!}{k!(n-k+1!} = \frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!}$$ □

Example 1.8 (Binomische Formel)

Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$:

$$(x+y)^n ? \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Sei also $x, y \in \mathbb{R}$.

I.A.: $n = 0$. $(x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0}x^0y^0$

I.S.: Gelte die Aussage für $n \in \mathbb{N}_0$

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{n-1} = (x+y)(x+y)^n &= (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k} && (5)\\
&= x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k} + y\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k} && (6)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n+1-k} && (7)
\end{aligned}
$$

Indexverschiebung: $l = k+1$. $l \in \{1, \dots, n+1\}$

$$
\begin{aligned}
(7) &= \underbrace{\sum_{l=1}^{n}\binom{n}{l-i}x^ly^{n+1-l}}_{\text{Hier Indexverschiebung}} + \underbrace{\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}x^ly^{n+1-l}}_{\text{Hier nennen wir einfach } k=l}\\
&= \binom{n}{n}x^{n+1}y^0 + \left(\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{l-1}+\binom{n}{l}\right)x^ly^{n+1-l}\right) + \binom{n}{0}x^0y^{n+1}\\
&= \binom{n+1}{n+1}x^{n+1}y^0 + \left(\sum_{l=1}^{n}\binom{n+1}{l}x^ly^{(n+1)-l}\right) + \binom{n+1}{0}x^0y^{n+1}\\
&= \sum_{l=0}^{n+1}\binom{n+1}{l}x^ly^{(n+1)-l} \qquad \square
\end{aligned}
$$

1.2.1 Characterisierung der natürlichen Zahlen

Definition 1.2.1

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heißt induktiv, falls

(i) $1 \in M$

(ii) $\forall x \in M : x + 1 \in M$

Example 1.2.2

(a) $\mathbb{N}$ sind ind. Menge.

(b) $A := \{2n : n \in \mathbb{N}_0\}$ nicht ind. Menge, da (i) $1 \neq A$, (ii) $2n+1$ ist immer ungerade

(c) $B := \{2n+1 : n \in \mathbb{N}_0\}$ nicht ind.: (i), aber $2n+1+1 = 2(n+1)$

(d) $\mathbb{Q}^+ := \{x \in \mathbb{Q} : q > 0\}$ ist ind. Teilmenge

- Sei $(A_i)_{i\in I}$ mit I Indexmenge eine Familie von Mengen. setze

$$\bigcap_{i\in I} := \{x : (\forall i \in I : x \in A_i)\} \quad \text{Schnitt}$$

$$\bigcup_{i\in I} := \{x : (\exists i \in I : x \in A_i)\} \quad \text{Vereinigung}$$

Proposition 1.2.3

Für eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ sind äquivalent

(i) $M = \mathbb{N}$

(ii) Ist $N \subset \mathbb{R}$ induktiv, so $M \subset N$

(iii)

$$M = \bigcap_{N\subset\mathbb{R}} N \text{ induktiv}$$

$(i) \iff (ii) \iff (iii)$

Proof 1.2.4

'$(i) \implies (ii)$': Sei $N \subset \mathbb{R}$ beliebige ind. Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zu zeigen: $M \overset{(i)}{=} \mathbb{N} \subset N$ Aber $1 \in \mathbb{N}$, und $1 \in N$ (da N ind.), Da N ind. ist, ist mit jeder nat. $x \in \mathbb{N}$ also auch $x \in N$. Damit $x + 1 \in \mathbb{N}$ $\boxed{\mathbb{N} \subset N.}$

'$(ii) \implies (iii)$' Wir zeigen:

$$\bigcap_{N \text{ ind. Menge}} N$$

ist ind. Menge

$\overset{(ii)}{\implies} M \overset{(ii)}{\subset} N \subset M$. Also

$$M = \bigcap_{N \text{ ind.}} N.$$

$$\bigcap_{N \text{ ind}} N \text{ induktiv:}$$

(i)

$$(\forall N \text{ ind: } 1 \in N) \implies 1 \in \bigcap_{N \text{ ind.}} N$$

(ii)

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \in \bigcap_{N \text{ ind.}} N \left(\implies x \in \bigcap_{N \text{ ind.}} N \right) \overset{\text{DEF.}}{\implies} \forall N \text{ ind.} : x+1 \in N \implies x+1 \in \bigcap_{N \text{ ind.}}$$

'$(iii) \implies (i)$' Noch zu zeigen (blöd glaube ich oder ÜA, wir hatten auf jeden Fall keine Zeit in der Vorlesung) $\square$

2 Körper

2.1 Was sind Strukturen?

2.2 Körper

Definition 2.2.1 Körper

in script of Prof. and on paper

Example 2.2.2

in script of Prof. and on paper

Example 2.2.3

in script of Prof. and on paper

Lemma 2.2.4

in script of Prof. and on paper

Lemma 2.2.5

in script of Prof. and on paper

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \mathbb{R} & \\ \uparrow & \uparrow & \text{Kontinuumshypothese} \\ \text{abzählbar} & \text{nicht abzählbar} & \end{array}$$

Definition 2.1

In der Situation von definition 2.2.1 sei $n \in \mathbb{N}$, sowie $x_1, \ldots, x_n \in K$. Wir definieren rekursiv $x_1 + \cdots + x_n := (x_1 + \cdots + x_{n-1}) + x_n, x : \cdots \cdot x_n := (x_1 \cdots x_{n-1}) \cdot x_n$

Definition 2.2

In der Situation von Definition 2.2.1 sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in K$. Wir definieren

$$x^0 := 1_K \text{ und } x^n := (x^{n-1} \cdot x, n \in \mathbb{N}$$

Ist $x \in K \setminus \{0\}$, so sei für $n \in \mathbb{N} : x^{-n} := (x^{-1})^n$.

Lemma 2.3

Für alle $x, y \in K, \quad m, n \in \mathbb{N}_0$:

i) $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$,

ii) $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$,

iii) $x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$

Ist zudem $x, y \neq 0_K$, so gelten diese Identitäten auch für $n, m \in \mathbb{Z}$

Proof 2.4 i

Fixiere $n \in \mathbb{N}_0$, nun Induktion nach m.

I.A. $m = 0$. $x^n \cdot x^0 \overset{\text{Def.}}{=} x^n \cdot 1_K \overset{(M2)}{=} 1_K \cdot x^n \overset{(M3)}{=} x^n = x^{n+0}$

I.S. Gelte die Aussage für ein $m \in \mathbb{N}_0$. Zeige für $m \curvearrowright m+1$

$$x^n \cdot x^{m+1} \overset{\text{Def.}}{=} x^n\,(x^m) \cdot x) \overset{(M1)}{=} (x^n \cdot x^m) \cdot x \overset{\text{IV}}{=} x^{n+m} \cdot x \overset{\text{Def.}}{=} x^{n+m+1}$$ □

2.3 Angeordnete Körper

- Ziel Vergleich von Elementen hinsichtlich "Größe"

Definition 2.3.1

Eine **Relation** auf einer Menge M ist eine Teilmenge $R \subset M \times M$. Ist $(x, y) \in R$, so schreiben wir auch xRy oder $R(x, y)$ und sagen, dass x und y über R in Relation stehen.

Example 2.3.2

$M =$ Stidierende im Hörsaal,
$(x, y) \in M \times M : xRy :\iff x$ kennt den Namen von y

- R **reflexiv**? (d.h. $\forall x \in M : xRy$) Ja
- R **symmetrisch**? (d.h. $\forall x, y \in M : xRy \iff yRx)$) Nein
- R **transitiv**? (d.h. $\forall x, y, z \in M : xRy \wedge yRx \implies xRz$) **Nein**

Definition 2.3.3

Sei R eine Relation auf einem Kürper K. R heiß **Ordnung** auf K, falls gilt

(i) **Trichotomie:** $\forall x \in K$: Entweder $0_K Rx, xR0_K$ oder $x = 0_K$

(ii) **Abgeschlossenheit bezüglich Addition** $\forall x, y \in K : 0_K Rx, 0_K Ry \implies 0_K R(x + y)$

(iii) **Abgeschlossenheit bezüglich Multiplikation** $\forall x, y \in K : 0_K Rx, 0_K Ry \implies 0_K R(x \cdot y)$

Das Tupel (K, R) heißt **angeordneter Körper.** (**Schreibe** auch '<' für R).

Setze für $a, b \in K$**:**

$$\begin{aligned} a < b &:\iff 0_K < (b - a) \\ a > b &:\iff b < a \\ a \leq b &:\iff a < b \vee a = b \\ b \geq a &:\iff a \leq b \end{aligned}$$

Lemma 2.3.4

Sei $(K, <)$ angeordneter Körper, $a, b, c \in K$

(i) Entweder $a > b, a = b \vee a < b$.

(ii) $a < b \wedge b < c \implies a < c$

(iii) $(a > 0 \implies (-a) < 0) \wedge (a < 0 \implies (-a) > 0)$

(iv) Gilt $a < b$, so ist

$$\begin{aligned} ac &< bc, & c &> 0 \\ ac &> bc, & c &< 0 \\ a^2 &> 0, & a &\neq 0 \end{aligned}$$

$$a > 0 \implies a^{-1} > 0$$

$$a < 0 \implies a^{-1} < 0$$

$b^{-1} < a^{-1}$, falls $a > 0$
$a + c < b + c$.

(v) $a < b \implies (-a) > (-b)$

Proof 2.3.5 (i)-(iii)

(i) Da $a < b \iff 0_K < b - a$, folgt das aus Trichotomie und Def. von '$>$'.

(ii) zu zeigen: ayc, d.h. $0_K < c - a$.

$$c - a = (c + 0_K) - a = \underbrace{(c - b)}_{>0} + \underbrace{(b - a)}_{>0} > 0, \text{ d.h. } a < c$$

(iii) $a > 0$. Angenommen, $(-a) > 0$. $\overset{\text{Abg. Add.)}}{\implies} 0_K = a + (-a) > 0_K \overset{\text{Trich.}}{\implies} E$ Ist $-a = 0$, so $a = 0$, nach Trich. Wid. zu $a > 0$. Falls $a < 0$, analog. □

Corollary 2.3.6

Es gibt keine Ordnung '$<$' auf $\mathbb{F}_2$, die $\mathbb{F}_2$ zu einem angeordneten Körper macht

Proof 2.5

Angenommen, '$<$' sei Ordnung. Da $0_K \neq 1_K$, gilt entweder $0_K < 1_K$ oder $1_K < 0_K$ (nach Trich.). Falls $0_K < 1_K$. Dann $0_K = 1_K + 1_K$ damit $0_K = 1_K + 1_K > 0_K + 1 = 1_K$. Widerspruch für $1_K < 0_K$ argumentiere analog.

- Prinzip: $\mathbb{R} \wedge \mathbb{Q}$ sind angeordnete Körper

2.4 Der Betrag

('Abstand zur Null')

Definition 2.4.1

Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir den Betrag $|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

Lemma 2.4.2

Der in Def 2.4.1 eingeführte Betrag erfüllt

(i) $forall x \in \mathbb{R}|x| \geq 0$

(ii) $|x| = 0 \iff x = 0$

(iii) Multiplikativität: $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

(iv) **Dreiecksungleichung:** $\forall x, <\in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y|$

(v) $\forall x \in \mathbb{R} : |-x| = |x|$

(vi) $\forall x, y \in \mathbb{R} : y \neq 0 \implies \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

2.5 Das Archimedische Axiom

Prinzip-Arch. Axiom: $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0 \exists n \in \mathbb{N} : x < n$

x n

- Das muss gefordert werden

2.6 Supremum, Infimum und die Supremumseigenschaft

- **Ziel**: Entscheidende Eigenschaft von $\mathbb{R}$

Definition 2.6.1

Eine nichtleere Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ heißt

- **nach oben beschränkt**, falls $\exists c \in \mathbb{R} \forall x \in A : x \leq c$. Ein solches c “obere Schranke”
- **nach unten beschränkt**, falls $\exists c \in \mathbb{R} \forall x \in A : c \leq x$ “ untere Schranke”

Example 2.6.2

- $A = N_0$ durch 0 nach unten, nach oben unbegrenzt
- $A = \{1, 2, \ldots, 10\}$ durch 1 nach unten, und durch $10, 11, \ldots$ nach oben beschränkt

Definition 2.6.3

Sei $a \subset \mathbb{R}$ nichtleer

(i) Ist A nach oben beschränkt, so heißt $s(=: \sup A)$ **Supremum** von A, falls s obere Schranke ist und **kleinste obere Schranke** ist d.d. $\forall c \in \mathbb{R} : c$ obere Schranke von $A \implies s \leq c$