

# Analysis 1

03.11.2023

F. Gmeineder

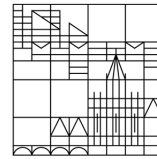
P. Stephan

A. von Pippich

Wintersemester 2023

Abgabe: Bis zum 10.11.2023 um 10:00 Uhr

Universität  
Konstanz



---

## Übungsblatt 3

---

### Aufgabe 1: Körperaxiome

2,5+2,5+2,5+2,5 = 10 Punkte

Beweisen Sie Lemma 2.2.5. (iii)–(vi) aus der Vorlesung, d.h. zeigen Sie, dass in Körpern gilt:

- (a) Zu jedem  $a \in K \setminus \{0\}$  und jedem  $b \in K$  gibt es genau ein  $x \in K$  mit  $a \cdot x = b$ .
- (b) Für alle  $x, y, z \in K$  gilt  $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ .
- (c) Für alle  $x \in K$  gilt  $x \cdot 0_K = 0_K \cdot x = 0_K$ .
- (d) Sind  $x, y \in K$  mit  $x \cdot y = 0_K$ , so gilt  $x = 0_K$  oder  $y = 0_K$ .

### Aufgabe 2: Binomische Formel

5+5 = 10 Punkte

Zeigen Sie

- (a) direkt mit Hilfe des binomischen Satzes, dass für jede reelle Zahl  $x \geq 0$  und jede natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1} := \{1, 2, 3, \dots\}$  die Bernoullische Ungleichung gilt, d.h.,

$$1 + nx \leq (1 + x)^n.$$

- (b) mit Hilfe eines ähnlichen Arguments wie in Teilaufgabe (a), dass für jede reelle Zahl  $x \geq 0$  und jede natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2} := \{2, 3, \dots\}$  gilt

$$(1 + x)^n > \frac{n^2}{4} x^2.$$

### Aufgabe 3: Injektiv und surjektiv

2,5+2,5+2,5+2,5 = 10 Punkte

Es seien  $X, Y, Z$  nichtleere Mengen sowie  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  Abbildungen. Zeigen Sie:

- (i) Ist  $g \circ f$  injektiv, so ist  $f$  injektiv.
- (ii) Ist  $g \circ f$  injektiv und  $f$  surjektiv, so ist  $g$  injektiv.
- (iii) Ist  $g \circ f$  surjektiv, so ist  $g$  surjektiv.
- (iv) Ist  $g \circ f$  surjektiv und  $g$  injektiv, so ist  $f$  surjektiv.

### Aufgabe 4: Supremum und Infimum konkret

3+3+4 = 10 Punkte

Für die Bearbeitung dieser Aufgabe werden Inhalte aus der Vorlesung am Dienstag bzw. aus den Tutorien benötigt: Bestimmen Sie Infimum und Supremum, sowie ggf. Minimum und Maximum:

- (a)  $M_1 := \left\{ x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : x = 1 - \frac{(-1)^n}{n} \right\},$
- (b)  $M_2 := \left\{ x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : x = \frac{1}{n+1} + \frac{1+(-1)^n}{2n} \right\}.$
- (c)  $M_3 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x + 2 > 5, x < 0\}$

**Aufgabe 5: Rechenregeln für Supremum und Infimum 5+5 = 10 Punkte**

Für die Bearbeitung dieser Aufgabe werden Inhalte aus der Vorlesung am Dienstag bzw. aus den Tutorien benötigt: Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln. Dabei seien  $A, B \subset \mathbb{R}$  nichtleer.

(i) Sei

$$A + B := \{c \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A \exists b \in B : c = a + b\},$$

so gilt: Existieren  $\sup A$  und  $\sup B$  in  $\mathbb{R}$ , so existiert auch  $\sup(A + B)$  in  $\mathbb{R}$  und es gilt

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

.

(ii) Sei

$$-A := \{c \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A : c = -a\}$$

und  $\sup A$  existiere in  $\mathbb{R}$ . Dann existiert  $\inf(-A)$  in  $\mathbb{R}$  und es gilt  $\inf(-A) = -\sup A$ .

*Aufgabe 1 und 5 werden als Musterlösung hochgeladen, Aufgabe 2 und 4 werden in den Tutorien besprochen, Aufgabe 3 in der Plenumsübung. Sie können auf dem Blatt bis zu 50 Punkte erreichen, wovon aber 10 als Zusatzpunkte gewertet werden.*