

# Analysis 1

17.11.2023

F. Gmeineder

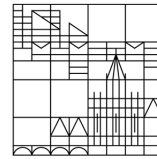
P. Stephan

A. von Pippich

Wintersemester 2023

Abgabe: Bis zum 24.11.2023 um 10:00 Uhr

Universität  
Konstanz



## Übungsblatt 5

### Aufgabe 1:

5 + 5 = 10 Punkte

- (a) Sei  $(a_n)$  eine konvergente Folge. Zeigen Sie, dass  $\frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n)$  gegen denselben Grenzwert konvergiert.
- (b) Gilt auch die Umkehrung? Das heißt: Ist  $(a_n)$  eine Folge, für die  $\frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n)$  konvergiert, konvergiert dann auch  $(a_n)$  und zwar gegen denselben Grenzwert?

### Aufgabe 2:

6 + 4 = 10 Punkte

Sei  $(a_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ .

- (a) Zeigen Sie: Gibt es ein  $0 < q < 1$  mit  $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq q|a_{n+1} - a_n|$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so konvergiert  $(a_n)$  gegen ein  $a \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie hierzu, dass  $(a_n)$  Cauchy ist.
- (b) Zeigen Sie durch Angabe eines Beispiels, dass es Cauchyfolgen  $(a_n)$  in  $\mathbb{R}$  gibt, die das in (a) gegebene Kriterium verletzen. Das bedeutet, dass es eine Cauchyfolge gibt, für die kein  $0 < q < 1$  mit  $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq q|a_{n+1} - a_n|$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

### Aufgabe 3:

5 + 5 = 10 Punkte

- (a) Seien  $a, b > 0$ . Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge  $(a_n)$ , wobei  $a_n := (-1)^n a + (-1)^{n+1} b + \sqrt[n]{a+b}$ .
- (b) Es seien  $(a_n), (b_n)$  zwei Folgen in  $\mathbb{R}$ . Zeigen Sie, dass in dieser Situation die Ungleichungskette

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \end{aligned}$$

gilt, und geben Sie ein Beispiel von Folgen, für die in der voranstehenden Ungleichungskette überall ' $<$ ' steht.

### Aufgabe 4:

6 + 4 = 10 Punkte

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Sei  $(a_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}_{>0} := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ , für die die Quotientenfolge  $(\frac{a_{n+1}}{a_n})$  gegen  $a \in \mathbb{R}$  konvergiert. Zeigen Sie, dass  $(\sqrt[n]{a_n})$  ebenfalls gegen  $a$  konvergiert.

(b) Zeigen Sie als Anwendung von (a), dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}} = \frac{27}{e^2}.$$

*Tipp: Benutzen Sie ein -Produkt und das theorem.*

*Aufgabe 1 wird als Musterlösung hochgeladen, Aufgabe 2 und 3 in den Tutorien besprochen, Aufgabe 4 in der Plenumsübung.*