Analysis 1

08.12.2023
F. Gmeineder
P. Stephan
A. von Pippich
Wintersemester 2023
Abgabe: Bis zum 15.12.2023 um 10:00 Uhr

Universität Konstanz

Übungsblatt 8

Aufgabe 1: Topologisches I **2 + 2 + 2 + 4 = 10 Punkte**

Es sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen von $\mathbb{R}$ und $A := \bigcap_{i\in I} A_i$. Zeigen Sie:

(a) Sind alle A_i's abgeschlossen, so auch A.

(b) Sind alle A_i's kompakt, so auch A.

(c) Sind alle A_i's offen, so nicht notwendigerweise A. Geben Sie hierzu ein Gegenbeispiel an.

(d) Basierend auf (a) definieren wir für eine Menge $B \subset \mathbb{R}$

$$\overline{B} = \bigcap_{C \text{ abgeschlossen mit } B\subset C} C.$$

Zeigen Sie, dass $\overline{B}$ die bezüglich Mengeninklusion kleinste abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, die B enthält. Das bedeutet: Ist $M \subset \mathbb{R}$ eine weitere abgeschlossene Teilmenge mit $B \subset M$, so ist $\overline{B} \subset M$.

Aufgabe 2: Topologisches II **4 + 3 + 3 = 10 Punkte**

Sei $A \subset \mathbb{R}$ nichtleer. Zeigen Sie, dass der in Aufgabe 1 eingeführte Abschluss von A gegeben ist durch

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R} \colon\ x \text{ ist Häufungspunkt von } A\}.$$

Schlussfolgern Sie weiter, dass

(a) $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

(b) $\overline{A}$ kompakt ist, falls A beschränkt ist.

Aufgabe 3: Stetigkeit **3 + 2 + 2 + 3 = 10 Punkte**

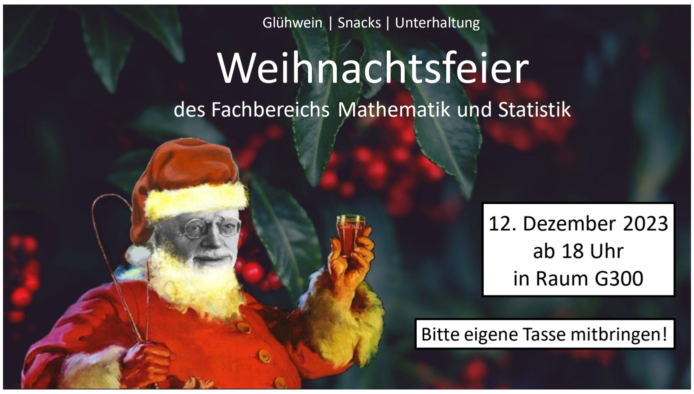
Wir definieren $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \left| \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor - x \right|.$$

(a) Fertigen Sie eine Skizze des Graphen der Funktion f an.

(b) Zeigen Sie: Für $|x| \leq \frac{1}{2}$ gilt $f(x) = |x|$.

(c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt $f(x + n) = f(x)$.



(d) f ist stetig.

Hinweis: Dies ist ein Beispiel einer zackigen, stetigen Funktion. Mit $\lfloor x \rfloor$ notieren wir die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.

Aufgabe 4: Beweismechanik **10 Punkte**

Es seien $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ mit $0 < a_1 < b_1$. Betrachte die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen, rekursiv definiert durch

$$a_{n+1} := \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \quad \text{und} \quad b_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

(a) Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ folgende Aussagen gelten:

(i) $0 < a_n < b_n$,

(ii) $a_n \leq a_{n+1}$ und $b_n \geq b_{n+1}$,

(iii) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$.

(b) Zeige, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren mit $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(b_n)$ und dass $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

(c) Folgere, dass ein eindeutiges $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$ existiert, nämlich

$$x = \sqrt{a_1 b_1}.$$

Hinweis: Zeige: $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a_1 b_1$.

(d) Setze $a_1 = 1$ und $b_1 = 2$ und gib jeweils die ersten vier Folgenglieder der obigen Intervallschachtelung zur Berechnung von $\sqrt{2}$ an. Gib weiter die ersten vier Folgenglieder der in Korollar 3.4.5 (Existenz von Quadratwurzeln) definierten Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, wobei $x_0 := 1$, zur Bestimmung von $\sqrt{2}$ an.

Sofern die Wetterlage es zulässt, werden Aufgabe 1 als Musterlösung hochgeladen, Aufgabe 2 und 3 in den Tutorien besprochen, Aufgabe 4 in der Plenumsübung.