

# pre-course lecture

Elias Gestrich

21. Oktober 2023

## Important: TODO:

Which of the following is the best:

$$a \times b$$

( `a \times b` )

$$a \cdot b$$

( `a \cdot b` )

$$a * b$$

( `a * b` )

( `\times` can be redefined to any symbol )

## 1. Day 1

Argumente/Begründungen/Beweise (Herz der Mathematik)

Beweise sind “immer wahr”

Beweise helfen beim verstehen

Beweise “zähmen die Unendlichkeit”

### Problem 1.1

Wie lange benötigt man zum Zersägen eines 7 m-langen Baumstamms in 1 m-Stücke, wenn jeder Schnitt eine halbe Minute dauert?

Lsg.: 3 min

Zwischenziel: 6 Schritte  $\rightarrow$  Mustererkennung  $n - 1$  Schnitte für  $n$  Teiler/Meter

### Proof 1.1

Jeder Schnitt erhöht die Anzahl der Stücke um eins.

Anfangs: 1 Stück, am Ende 7  $\Rightarrow$  man muss

$$7 - 1 = 6 \text{ Schnitte machen. usw.}$$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  natürliche Zahlen

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$  natürliche Zahlen mit der Null

### Problem 1.2

#### Conjecture 1.1

Wenn zwei natürliche Zahlen gerade sind, dann ist auch ihre Summe gerade

Seien  $t_1, t_2 \in \mathbb{N}$

$$a = 2t_1$$

$$b = 2t_2$$

also gilt:

$$a + b = 2t_1 + 2t_2 = 2(t_1 + t_2) \implies \text{gerade Zahl}$$

### Problem 1.3

Mit wievielen Nullen endet  $100!$ ?

Primfaktorzerlegung:

20 durch 5 teilbare Zahlen

4 durch  $5^2$  teilbare Zahlen

$k$  Nullen am Ende einer natürlichen Zahl in Dezimalschreibweise: Zahl ist durch  $10^k = (2 \times 5)^k = 2^k \times 5^k$  teilbar.

$$5, 10, 15, \dots$$

also bei

$$1 \times 5, 2 \times 5, 3 \times 5, \dots, 20 \times 5 \Rightarrow 20 \text{ Stück}$$

welche liefern 2 Fünfen

$$1 \times 5^2, 2 \times 5^2, 3 \times 5^2, 4 \times 5^2, \cancel{5 \times 5^2}$$

Anzahl der Nullen, mit denen  $100!$  enden, ist die größte natürliche Zahl  $k \in \mathbb{N}$ , für die

$100!$  durch  $10^k$  teilbar ist.

Weil  $10 = (2 \times 5)$ , ist das gleich der größten ganzen Zahl  $k$ , für die  $100!$  durch  $2^k \times 5^k$  teilbar ist,

also durch  $5^k$  und  $2^k$

Die 5 tritt als Faktor genau in den 20 Zahlen

$$5, 10, 15, \dots, 100,$$

und in den 4 Zahlen

$$25, 50, 75, 100$$

doppelt vor.

Somit folgt: die 5 tritt  $20 + 4 = 24$  mal als Faktor in  $100!$  auf.

Die 2 tritt als Faktor in 50 Zahlen auf:

$$2, 4, 6, 8, \dots, 100$$

(und einigen mehrfach)

$\Rightarrow$  Insgesamt endet  $100!$  mit 24 Nullen.

**Problem 1.4**

Es sei  $n \in \mathbb{N}$ . Berechne die Summe der ersten  $n$  natürlichen Zahlen, also

$$\begin{array}{rcllcl}
 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & n & & := S \\
 + & n & + & n-1 & + & n-2 & + & \dots & + & 1 & = S \\
 \hline
 & = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) & = S \\
 & = & & & & & & & & & n \times (n+1) = S
 \end{array}$$

**2. Tag 2**

$\mathbb{P}$  = Menge aller Primzahlen

$\mathbb{P} = 2, 3, 5, 7, \dots$

Offene Fragen: Gibt es eine Formel für Primzahlen?

Fermat (1637):

**Conjecture 2.1**

$F(n) = 2^{2^n} + 1$  ist eine Primzahl für jedes  $n \in \mathbb{N}$

$$F(1) = 2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5$$

$$F(2) = 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17$$

$$F(3) = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$$

$$F(4) = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65537$$

100 Jahre später Euler:

651 teilt  $F(5)$ ,

also ist

$$F(5) = 4294967297$$

keine Primzahl.

**3. Vorkurs**

- mathematische Probleme formulieren
- Lösungen finden (Argumentieren) Beweisen

**4. Mengen (Warm-up)**

Skatspiel

Situation: Aus gemischtem Skatspiel werden zwei Karten gezogen. Sind es zwei Karten gleicher Farbe oder zwei Karten mit gleichem Wert, dann gewinnen wir.

Symbole: Kreuz, Pik, Herz, Karo

Werte: 7, 8, 9, 10, B, D, K, Ass

Definitionssymbol: “ $:=$ ”

#### Example 4.1

11  $:=$  Bube

$a :=$  Kreuz

12  $:=$  Dame

$b :=$  Pik

13  $:=$  König

$c :=$  Herz

14  $:=$  Ass

$d :=$  Karo

Kartenmenge =  $\{a7, a8, \dots, a14, b7, b8, \dots, b14, c7, \dots, d14\}$

$\{\text{Kreuz}, 7\}$  = Karte Kreuz 7

Kartenmenge  $:= \{\{1, 7\}, \{2, 7\}, \{3, 7\}, \{4, 7\}$   
 $\{1, 8\}, \{2, 8\}, \{3, 8\}, \{4, 8\}, \dots,$   
 $\{1, 14\}, \{2, 14\}, \{3, 14\}, \{4, 14\}\}$

## 5. Mengen, Teilmengen, Mengenoperationen

#### Definition 5.1

(naive Definition) Eine Ansammlung von (mathematischen) Objekten heißt **Menge**. Ein Mitglied dieser Ansammlung heißt **Element** der Menge.

Ist  $a$  ein Element der Menge  $A$ , so schreibt man  $a \in A$

Gehört  $a$  nicht zur Menge  $A$ , so schreibt man  $a \notin A$

Mit  $|A|$  bezeichnet man die Anzahl der Elemente in  $A$

#### Example 5.1

$$|\mathbb{N}| = \infty$$

Zwei Arten, Mengen zu beschreiben:

- aufzählende Mengenschreibweise  $A = \{2, 4, 6, \dots\}$ ,  $B = \{2, 8, 9\}$
- beschreibende Mengenschreibweise  $A = \{x \in \mathbb{N} | 3 \leq x \leq 8\}$ ,  $[a, b] := \{z \in \mathbb{R} | a \leq z \leq b\}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$

#### Task 5.1

$M$  = Menge aller ganzzahligen Vielfachen von 42  
 $= \{x \in \mathbb{Z} : 42|x\} = \{42 \times x : x \in \mathbb{Z}\}$

**Definition 5.2**

Es sei  $A$  eine Menge  
 Eine Menge  $B$  heißt Teilmenge von  $A$ , in Zeichen:  $B \subseteq A$ ,  
 wenn jedes Element von  $B$  auch ein Element von  $A$  ist

**Definition 5.3**

Es seien  $A, B$  Teilmengen einer Menge  $M$   
 Schnittmenge von  $A$  und  $B$  ist  $A \cap B := \{x \in M : x \in A \wedge x \in B\}$   
 Vereinigungsmenge von  $A$  und  $B$  ist  $A \cup B := \{x \in M : x \in A \vee x \in B\}$   
 Differenz von  $A$  und  $B$  ist  $A \setminus B := \{x \in M : x \in A \wedge x \notin B\}$   
 Komplement von  $A$  in  $M$  ist die Menge  $A^c := \{x \in M : x \notin A\} = M \setminus A$   
 genau dann wenn  $A \subseteq B$  und  $B \subseteq A$ , dann  $A = B$

Jede beliebige Menge  $A$  hat die folgenden Teilmengen  $\emptyset, A$  d.h. es gilt  $\emptyset \subseteq A, A \subseteq A$   
 $\{\_\} \notin \{\_, \_\}$   
 $\_ \in \{\square, \circ, \triangle\}$  (bzw.  $\_ \in \{\_, \_, \_\}$ )  
 $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\} = \{2, 1, 3\} = \dots$

**Task 5.2**

Gilt  $\{1, 2, 1, 1\} = \{1, 2\}$ ?  
 ja

**Task 5.3**

Falls  $\{a\} = \{b\}$ , dann folgt  $a = b$   
 Falls  $\{a\} = \{a, b\}$ , dann folgt  $a = b$

$\{1, 2\}$  hat Teilmengen  $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$   
 Eine Menge mit  $n$  Elementen hat  $2^n$  Teilmengen.

**Definition 5.4**

Potenzmenge einer Menge  
 Sei  $A$  eine Menge, dann heißt die Menge

$$\mathcal{P}(A)$$

aller Teilmengen von  $A$  die Potenzmenge von  $A$

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} \quad \mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, 1\}$$

**Definition 5.5**

(kartesisches Produkt von zwei Mengen  $A$  und  $B$ )  
 Das kartesische Produkt von zwei Mengen  $A$  und  $B$  ist definiert durch

$$A \times B := \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}$$

In  $A \times B$  sind zwei Elemente  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  genau dann gleich, wenn  $x_1 = x_2$  und  $y_1 = y_2$

$$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$\begin{aligned} (1, 2) &\in \mathbb{R}^2 & (1, 2) &\neq (2, 1) \\ (2, 1) &\in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

## 6. Prof. Junk

Auf einem Baum saß ein Rabe mit einem Käse im Schnabel, als ein Fuchs vorbeikommt.  
Sei  $B \in \text{Bäume}$  und  $R \in \text{Raben}$  sitze auf  $B$  mit  $K \in \text{Käsestückchen}$  im Schnabel, als  $F \in \text{Füchse}$  vorbeikommt.

Er überlegte wie er an den Käse kommt. Da sagte er zu dem Raben, ...  
 $F$  überlegte wie  $F$  an  $K$  kommt. Da sagte  $F$  zu  $R$ , ...

allgemeine mathematische Situationen bestehen aus

- Eine Liste von Namen für mathematische Objekte
- Eine Liste von geltenden Aussagen über diese Objekte

Was kann man damit tun?

- Namen kann man austauschen ohne Bedeutungsänderung
- Situationen können eintreten; konkrete Situationen können auf allgemeine Situationen passen

### Example 6.1

$$A := \{x \in \mathbb{N} : 3 \leq x \leq 8\}$$

Schreibweise beschreib eine Menge, indem sie zwei Zugehörigkeitsregeln kodiert

- besteht aus zwei allgemeinen Situationen:
  - Voraussetzung
  - Folgerung

Regel 1: Sei  $x$  ein Objekt

Es gelte  $x \in \mathbb{N}; 3 \leq x \leq 8 \rightarrow$  Dann gilt  $x \in A$

Regel 2: Sei  $x$  ein Objekt

Es gelte  $x \in A \rightarrow$  Dann gilt  $x \in \mathbb{N}; 3 \leq x \leq 8$

Gilt:  $9 \in A: \quad x \leftarrow 9 \quad 9 \in \mathbb{N}, 9 \geq 3, 9 \leq 8$

Vorraussetzung tritt nicht ein! Gilt:  $9 \notin A \quad 9 \in \mathbb{N}, 9 \geq 3, 9 \leq 8 \rightarrow$  Widerspruch  
 $9 \not\leq 8 \rightarrow$  Gegenteil von Annahme stimmt

## 7. Aussagen (Logik)

Unsere mathematische Ergebnisse formulieren wir als (mathematische) Aussagen.

Als Aussage bezeichnen wir einen Ausdruck, der entweder wahr oder falsch sein kann.

$\rightsquigarrow$  Wahrheitswert der Aussage: wahr, w, 1; falsch, f, 0

### Example 7.1

$$A := "1 + 2 = 3"$$

$$B := "5 \text{ ist eine negative Zahl}"$$

$$C := "Jede \text{ gerade Zahl } n > 2 \text{ kann als Summe zweier Primzahlen geschrieben werden.}"$$

## 8. Aussageform

### Example 8.1

Sei

$A(n) := n$  ist gerade

Dann ist

$A(1)$  eine (falsche) Aussage

$A(2)$  eine (wahre) Aussage

Eine Aussageform ist eine Äußerung, die eine (oder mehrere) Variablen enthält und zu einer Aussage wird, wenn man zulässige Objekte für diese Variablen einsetzt.  
Es seien  $A$  und  $B$  Aussagen.

Die Konjunktion (Und-Aussage) von  $A$  und  $B$  ist die Aussage

$A \wedge B$  “ $A$  und  $B$ ”

die genau dann wahr ist, wenn  $A$  und  $B$  gleichzeitig wahr sind.

$A :=$  “24 ist gerade”

$B :=$  “24 ist durch 3 teilbar”

$C :=$  “24 ist durch 5 teilbar”

$A \wedge B = 1 \quad A \wedge C = 0$

Die Disjunktion (Oder-Aussage) von  $A$  und  $B$  ist Aussage

$A \vee B$  “ $A$  oder  $B$ ”

die genau dann wahr ist, wenn mind. eine der beiden Aussagen  $A$  und  $B$  wahr ist.

Die Negation von  $A$  ist die Aussage

$\neg A$  “nicht  $A$ ”

die genau dann wahr ist, wenn  $A$  falsch ist.

Implikation (Folgerung) “Wenn  $A$ , dann  $B$ ” ist die Aussage

$A \implies B$  “aus  $A$  folgt  $B$ ”,  $A$  impliziert  $B$ )

die genau dann falsch ist, wenn  $A$  wahr ist und  $B$  falsch ist und sonst ist sie immer wahr.

Äquivalenz “ $A$  genau dann, wenn  $B$ ” ist die Aussage

$A \iff B$

die genau dann wahr ist, wenn  $A$  und  $B$  beide wahr sind oder  $A$  und  $B$  beide falsch sind.

Eine zusammengesetzte Aussage heißt Tautologie, falls sie immer wahr ist, unabhängig davon, welche Wahrheitswerte die verknüpften Einzelaussagen haben.

Ist  $A(n)$  eine Aussageform mit Wertebereich  $M$ , so können wir folgende Aussagen betrachten:

- für alle  $n \in M$  gilt:  $A(n)$   
in Zeichen:  $\forall n \in M : A(n)$  z.B.  $\forall n \in \mathbb{N} : 2 \mid n$   
 $\rightarrow$  Allaussage ( $\forall \leftarrow$  Allquantor)
- Es gibt ein  $n \in M$ , für das  $A(n)$  gilt  
in Zeichen  $\exists n \in M : A(n)$   
 $\exists! n \in M : A(n)$  “es gibt genau ein  $n \in M, \dots$ ”

- Eine Aussage der Form

$$\forall n \in M : A(n)$$

ist immer wahr, wenn  $M = \{\}$

- Reihenfolge der Quantoren spielt eine Rolle

$$A : \forall n \in \mathbb{N} : (\exists m \in \mathbb{N} : m > n) \text{ (wahr)}$$

$$B : \exists m \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : m > n \text{ (falsch)}$$

## 9. Negation von Aussagen

$\neg(\exists n \in M : A(n)) \iff \forall n \in M : \neg A(n)$  ist eine Tautologie d.h. die Negation der Aussage

$$\exists n \in M : A(n)$$

ist logisch Äquivalent zu der Aussage

$$\forall n \in M : \neg A(n)$$

$\neg(\forall n \in M : A(n)) \iff \exists n \in M : \neg A(n)$  ist eine Tautologie d.h. die Negation der Aussage

$$\forall n \in M : A(n)$$

ist logisch Äquivalent zu der Aussage

$$\exists n \in M : \neg A(n)$$

## 10. —

### Theorem 10.1

- 1) Äquivalenzprinzip  
Ist  $A$  wahr und ist  $A \iff B$ , dann ist auch  $B$  wahr
- 2) Ableitungsregel  
 $(A \wedge (A \implies B)) \implies B$  ist eine Tautologie
- 3) Syllogismusregel  
 $((A \implies B) \wedge (B \implies C)) \implies A \implies C$  ist eine Tautologie
- 4) Kontraposition



$(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A)$  ist eine Tautologie

5) Ringschluss

$$((A \iff B) \wedge (B \iff C) \wedge (A \iff C))$$

$$\iff$$

$$((A \iff B) \wedge (B \iff C) \wedge (A \iff C))$$

## 11. Beweise und Beweisformen

Ein Beweis ist eine logisch vollständige Begründung einer Aussage. Oft möchten wir Aussagen vom Typ “Wenn A, dann B” zeigen.

Aussagen lassen sich meist in folgende Form bringen

- Voraussetzung z.B. Sei  $a \in \mathbb{N}$ .
- Behauptung                      dann ist 2 = gerade

### 11.1. Direkter Beweis

Statt  $A \implies B$  zu zeigen, zeigen wir  $A \implies A_1 \implies A_2 \implies \dots \implies B$

Situation:  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ ,  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ , Rechenregeln:  $+$ ,  $-$  bekannt

#### Definition 11.1.1

Eine natürliche Zahl  $b \in \mathbb{N}$  teilt eine natürliche Zahl  $a \in \mathbb{N}$  (in Zeichen  $b \mid a$ ), wenn es eine natürliche Zahl  $c \in \mathbb{N}$  gibt, mit  $a = b \times c$

#### Definition 11.1.2

Eine Zahl  $a \in \mathbb{N}$  heißt gerade, falls  $2 \mid a$  gilt, d.h. falls es ein  $c \in \mathbb{N}$  mmit  $a = 2 \times c$  gibt.  
Eine Zahl  $q \in \mathbb{N}$  heißt ungerade, falls  $q$  nicht gerade ist.

#### Conjecture 11.1.1

18 ist gerade.

#### Proof 11.1.1

$18 \in \mathbb{N}$ , also können wir obrige Definition 11.1.2 anwenden.

Setze  $c := 9$

Dann gilt  $c \in \mathbb{N}$  und  $18 = 2 \times 9$

Also gilt  $2 \mid 18$ . Also ist 18 gerade,  $\square$

## 12. Appendix B von Junk/Traude

### Definition 12.1 B.10 Definitionen

Nachweistext: Definition ★ wird Blubb genannt, falls  $(\dots)$  gilt.

Schreibe: Zu zeigen  $(\dots)$

Benutzungsbedingung: um zu benutzen, dass ein Objekt nach Definition ★ Blubb genannt wird, falls  $(\dots)$  gilt.

Schreibe: Nach Definition von “Blubb”, folgt  $(\dots)$

### B.7 Existenzaussagen

Nachweistext: zu beweisen:

$$\exists x \in X : (\dots)$$

Schreibe:

Setze  $x := \_\_\_$ .

zu zeigen:  $x \in X$  mit  $(\dots)$

Benutzungstext: Es gilt

### Example 12.1

Vor. Sei  $a \in \mathbb{N}$

Bew. Dann ist  $2 \times a$  gerade

Es sei  $a \in \mathbb{N}$ . Es gilt  $2 \times a \in \mathbb{N}$ . Nach Definition 11.1.2 zu geraden Zahlen ist zu zeigen:

$$2 \mid a$$

d.h. zu zeigen:  $\exists c \in \mathbb{N} : s \times a = 2 \times c$

Setzte  $c := a$

Dann gilt  $c \in \mathbb{N}$  und

$$2 \times a = 2 \times c, \square$$

### Definition 12.2 B.6 Allaussagen

Nachweistext: zu zeigen

$$\forall x \in X : (\dots)$$

Schreibe:

Sei ein  $x \in X$  gegeben.

Zeige:  $(\dots)$

Benutzungstext:

$$\forall x \in X : (\dots) \text{ anzuwenden} \tag{1}$$

Dann muss ein  $a \in X$  vorliegen

Wegen  $a \in X$  folgt (aus der  $\forall$ -Aussage)

$$(\dots)$$

**Task 12.1**

Zeige, dass die Summe zweier geraden natürlichen Zahlen auch gerade ist

Vor.: Gegeben seien  $a \in \mathbb{N}$  und  $b \in \mathbb{N}$  gerade.

Setze

$$c := a + b \in \mathbb{N}$$

Beh.:  $c$  ist gerade

**Proof 12.1**

Da  $c \in \mathbb{N}$ , kann man Definition 11.1.2 zu geraden Zahlen anwenden. Zu zeigen ist

$$2 \mid c$$

d.h. zu zeigen:  $\exists k \in \mathbb{N} : c = 2 \times k$

Da  $a, b$  gerade, gilt nach Definition 11.1.2 zu geraden Zahlen

$$a = 2 \times m \text{ und} \tag{2}$$

$$b = 2 \times n, \tag{3}$$

mit  $m, n \in \mathbb{N}$ , sodass

$$c = a + b = 2 \times m + 2 \times n = 2 \times (m + n), \tag{4}$$

wobei wir für die erste Gleichheit 2 und 3, für die zweite Gleichheit die Rechenregeln für natürliche Zahlen benutzt haben.

Setze

$$k := m + n$$

Dann gilt

$$k \in \mathbb{N}$$

und wegen 4

$$c = 2 \times (m + n)$$

also

$$c = 2 \times k, \quad \square$$

**Definition 12.3** “ $\mid$ ”

$$a, b \in \mathbb{N}$$

$b \mid a$ , falls es  $c \in \mathbb{N}$  mit  $a = b \times c$  gibt.

$\Downarrow$

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$b \times c \mid a \times c$ , falls es  $n \in \mathbb{N}$  mit  $a \times c = (b \times c) \times n$  gibt.

**Task 12.2** Es seien  $a, b \in \mathbb{N}$ . Weiter gelte  $b \mid a$ . Dann gilt auch  $b \times c \mid a \times c$

**Proof 12.2** Vor.: Es seien  $a, b \in \mathbb{N}$  mit  $b \mid a$

z.z.:  $(b \times c) \mid (a \times c)$

d.h.: z.z.: es existiert  $n \in \mathbb{N}$  mit

$$a \times c = n(b \times c)$$

nach Definition 12.3 von “ $\mid$ ”

Da  $b \mid a$ , folgt (nach Definition von “ $\mid$ ”), dass es

$m \in \mathbb{N}$  gibt, mit

$$a = b \times m \tag{5}$$

Multiplikation von 5 mit  $c \in \mathbb{N}$  liefert

$$a \times c = (b \times m) \times c$$

Somit folgt (Rechengesetze für “ $\times$ ”)

$$a \times c = m \times b \times c,$$

also folgt

$$b \times c \mid a \times c$$

Setze  $n := m$  Dann folgt

$$a \times c = n(b \times c)$$

und  $b \times c \mid a \times c$

## 13. Input

**Definition 13.1** Primzahl

Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl  $p \in \mathbb{N}$ , die genau zwei Teiler hat.

**Lemma 13.1** Lemma von Euklid

Es seien  $a, b \in \mathbb{N}$  und  $p \in \mathbb{P}$  eine Primzahl.

Falls

$$p \mid (a \times b)$$

gilt, so folgt

$$p \mid a \vee p \mid b.$$

$$(\forall p \in \mathbb{P} : p \mid (a \times b) \implies p \mid a \vee p \mid b).$$

**Task 13.1**

Vor.: Es sei  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n^2$  gerade.

Beh.: Dann ist  $n$  gerade, d.h.  $2 \mid n$

**Proof 13.1**

Es sei  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n^2$  gerade gegeben.

Da  $n^2$  gerade ist, gilt  $2 \mid n$

z.z.:  $2 \mid n$

Wir wenden das “Lemma von Euklid” (Lemma 13.1) an mit  $p = 2$  (beachte  $2 \in \mathbb{P}$ ) und

$a := n, b := n$ . Dann gilt

$$(2 \mid n \times n \implies 2 \mid n \vee 2 \mid n) \iff (2 \mid n^2 \implies 2 \mid n). \quad \square$$

(Bsp. für B.9 Sätze von Prof. Junk).

(Benutzungstext)

**14. Widerspruchsbeweise****Definition 14.1 Irrationale Zahlen**

Eine reelle Zahl  $\alpha \in \mathbb{R}$  mit  $\alpha \notin \mathbb{Q}$  heißt irrational.

**14.1. Struktur von Widerspruchsbeweisen**

1. Wir machen Annahme B.  
nehmen an, dass B gilt
2. Wir leiten Widerspruch her.  
z.B.  $1 \neq 0$   
 $\pi \notin \mathbb{Q} \wedge \pi \in \mathbb{Q}$
3. Wir haben gezeigt, dass  $\neg B$  gilt

**Theorem 14.1.1**

$\pi$  ist irrational

**Proof 14.1.1**

Situation:

Vor.:  $A$

Beh.:  $B$

zeige  $(A \wedge \neg B) \implies f$

Beh.:  $2\pi + 3$  ist irrational

d.h.:  $2\pi + 3$  ist nicht rational

Bew.:

Wir führen einen Beweis durch Widerspruch und nehmen dazu an, dass  $2\pi + 3 \in \mathbb{Q}$  gilt. Dann

ist auch

$$\frac{(2\pi + 3) - 3}{2} \in \mathbb{Q}$$

Also folgt

$$\pi \in \mathbb{Q}$$

Widerspruch dazu, dass  $\pi \notin \mathbb{Q}$  gilt.

Somit war die Annahme

$$2\pi + 3 \in \mathbb{Q}$$

falsch. Also muss

$$2\pi + 3 \notin \mathbb{Q}$$

wahr sein, □

### Theorem 14.1.2

$\sqrt{2}$  ist irrational

#### Proof 14.1.2

Wir führen einen Widerspruchsbeweis und wir nehmen dazu an, dass

$$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$$

gilt.

Dann gibt es  $a, b \in \mathbb{N}$ , die keinen gemeinsamen Teiler größer als 1 haben mit

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}.$$

Quadriere:

$$2 = \frac{a^2}{b^2},$$

also

$$2b^2 = a^2. \tag{6}$$

Da  $2 \mid (2b^2)$  gilt, folgt  $2 \mid a^2$

Anwenden des “Lemma von Euklid” (Lemma 13.1) liefert

$$2 \mid a$$

Da  $2 \mid a$  gilt, existiert  $a' \in \mathbb{N}$  mit

$$a = 2a' \tag{7}$$

Einsetzen von 7 in 6 liefert

$$2b^2 = (2a')^2 \tag{8}$$

Aus 8 folgt

$$b^2 = 2(a')^2.$$

Also da  $2 \mid 2(a')^2$  folgt

$$2 \mid b^2.$$

Wieder nach “Lemma von Euklid” (Lemma 13.1 folgt

$$2 \mid b$$

Insgesamt haben wir

$$2 \mid a \wedge 2 \mid b,$$

Widerspruch dazu, dass  $a$  und  $b$  keine gemeinsamen Teiler  $> 1$  haben.

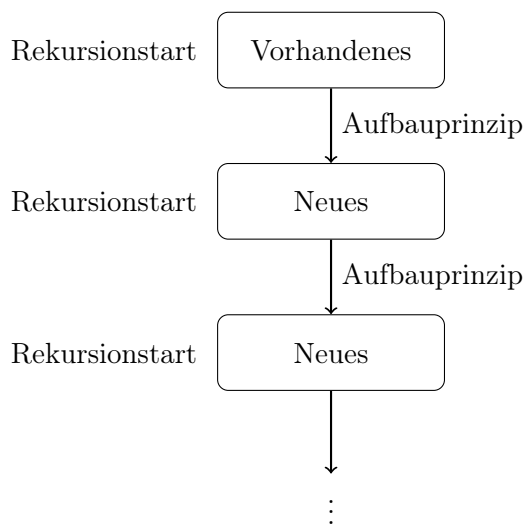
Somit haben wir gezeigt  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$  nicht gilt, Also gilt  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ , □

## 15. Prof. Junk

“Mathematik”  $\hat{=}$  “Ganz genau erklären”

Erklären ist rekursiv

- worüber gesprochen wird (Objekte)
- wie gesprochen wird (Aussagen)
- was wahr ist (Beweise)



Objekte:

- Grundobjekte
  - $0, 1, 2, \dots, 100, \dots$
  - $\mathbb{N}_0$
- Aufbauprinzipien

- Aufzählungsmenge zu angegebenen Elementen ist wieder ein Element  
Bsp.:  $\{1\}j$
- Regel: mathematisches Objekt, für das eine Elementaussage gilt  
 $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, A \times B$

Aussagen:

- Grundaussagen:
  - $x = y$
  - $x, y$  mathematische Objekte
  - $x \in y$
- Aufbauprinzip
  - $\iff, \implies, \wedge, \vee, \neg, Q (\forall, \exists, \exists!), \text{“:”}$

### Definition 15.1 Teilermenge

Es sei  $a \in \mathbb{N}$ . Dann sei  $\mathcal{T}(n)$  die Menge aller positiven Teiler von  $a$ , die größer als eins sind.

#### Example 15.1

$$\mathcal{T}(5) = \{5\}, \mathcal{T}(6) = \{2, 3, 6\}$$

Bem.:  $\forall a \in \mathbb{N} : \mathcal{T}(a) \in \mathbb{N}$

Wahrheiten:

- Grundaxiome:
  - $0 \in \mathbb{N}$
  - $1 \in \mathbb{N}$
  - $x = x$  für definierte Objektausdrücke
- Aufbauprinzip:
  - Nachweisregeln,
  - Benutzungsregeln



## 16. Inklusion von Mengen

### Example 16.1

Es sei  $X$  eine Menge  $A, B \subseteq X$  Teilmengen.

Zeige  $A \cap B \subseteq A$ .

Zu zeigen  $\forall x \in (A \cap B) : x \in A$ . Sei dazu  $x \in A \cap B$  gegeben. Zu zeigen:  $x \in A$ . Da  $x \in A \cap B$  folgt (nach Definition zu " $\cap$ ")

$$x \in A \wedge x \in B$$

Es gilt also insbesondere

$$x \in A,$$

□

### Important:

Man benutzt statt

$$\subseteq$$

auch oft

$$\subset$$

oder seltener

$$\subsetneq$$

$$A \subsetneq B \iff A \subseteq B \wedge A \neq B$$

([B.2]):

Sind  $U, V$  Aussagen

Will man

$$U \iff V \text{ zeigen, so ist es äquivalent dazu}$$

$$(U \implies V) \wedge (V \implies U)$$

zu zeigen.

([B.12]):

Um für Mengen  $C, D$  die Gleichheit  $C = D$  zu zeigen, zeigt man  $C \subseteq D \wedge D \subseteq C$

$$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

### Task 16.1

Es seien  $X$  Menge und  $A, B \subseteq X$  zwei Teilmengen.

Beweisen Sie folgende Äquivalenz

$$A \cup B = X \text{ und } A \cap B \neq \emptyset \iff A = X \setminus B$$

## Proof 16.1 to Task 16.1

Wir beweisen die Äquivalenz durch Beweis der beide Implikationen " $\implies$ " und " $\impliedby$ ".

" $\implies$ ": Wir nehmen an, dass

$$A \cup B = X \wedge A \cap B = \emptyset$$

gilt z.z.:  $A = X \setminus B$ .

Dazu genügt es, die Inklusion

$$\underbrace{A \subseteq X \setminus B}_1 \wedge \underbrace{X \setminus B \subseteq A}_2$$

z.z.

1. Wir zeigen  $A \subseteq X \setminus B$

Es sei  $x \in A$ . z.z.  $x \in X \setminus B$

Da  $A \subseteq X$  gilt,  $x \in X$ .

Es bleibt z.z., dass

$$x \notin B$$

Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen dazu an, dass  $x \in B$  gilt. Dann folgt aber  $a \in A \wedge x \in B$ , also  $x \in A \cap B$ . Widerspruch, da  $A \cap B = \emptyset$

Also muss  $x \notin B$  gelten. Insgesamt folgt

$$x \in X \setminus B$$

Da  $x \in A$  beliebig war, ist somit  $A \subseteq X \setminus B$  bewiesen.

2. Wir zeigen  $X \setminus B \subseteq A$ . Sei  $x \in X \setminus B$ . Dann gilt

$$x \in X \wedge x \notin B$$

Da  $X = A \cup B$ , folgt  $x \in A \vee x \in B$ . Da aber

$$x \notin B, \text{ folgt } x \in A$$

Da  $x \in X \setminus B$  beliebig war, ist  $X \setminus B \subseteq A$  bewiesen.

Damit (mit 1. und 2.) ist die Gleichheit  $A = X \setminus B$  bewiesen.

" $\impliedby$ ": Wir nehmen an, dass  $A = X \setminus B$  gilt.

z.z.: Es gilt  $\underbrace{A \cup B = X}_I$  und  $\underbrace{A \cap B = \emptyset}_{II}$

Zum Beweis von  $I$  zeigen wir

1.  $A \cup B \subseteq X$

2.  $X \subseteq A \cup B$

1. Zeige  $A \cup B \subseteq X$ . Sei  $x \in A \cup B$ . Dann gilt  $(x \in A) \vee (x \in B)$ . Gilt  $x \in A$ , so folgt wegen  $A \subseteq X$  sofort  $x \in X$ . Gilt  $x \in B$ , so folgt wegen  $B \subseteq X$  sofort  $x \in X$ . In beiden Fällen folgt also  $x \in X$ , wie gewünscht.

2. Zeige  $X \subseteq A \cup B$ : Sei  $x \in X$ .

z.z.:  $x \in A \vee x \in B$

1. Fall:  $x \in A \implies x \in A \vee x \in B$

2. Fall:  $x \notin A$  z.z.  $x \in B$

(Annahme von  $x \notin B$ . Dann gilt

$$x \in X \setminus B$$

Da aber  $X \setminus B = A$  folgt  $x \in A$ , was zu einem Widerspruch führt.  
Also muss  $x \in B$  gelten.) Da  $A = X \setminus B$  folgt

$$x \notin X \setminus B$$

Also gilt

$$\neg(x \in X \wedge x \notin B)$$

$$x \notin X \vee x \in B$$

Fall 1:  $x \notin X$  Widerspruch zur Vor.  $x \in X$ , also muss Fall 2:

$$x \in B$$

gelten.

Insgesamt  $x \in A \cup B$ , wie gewünscht

### Lemma 16.1

Es sei  $a \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

(i)  $a \in \mathcal{T}(a)$

(ii)  $\mathcal{T}(a) \neq \emptyset$

### Proof 16.2

Es sei  $a \in \mathbb{N}$ . Es gilt  $a \mid a$ , denn  $a = 1 \times a$ , also  $\exists c \in \mathbb{N} : (a = c \times a)$ , nämlich  $c := 1$ .  
Da  $a \mid a$  gilt und  $a > 1$  ist, folgt sofort (nach Definition 15.1)  $a \in \mathcal{T}(a)$ . Dies beweist (i).  
Da nach (i) gilt, dass  $a \in \mathcal{T}(a)$  folgt sofort  $\mathcal{T}(a) \neq \emptyset$ . Was (ii) beweist.

### Corollary 16.1

Es sei  $a \in \mathbb{N}$ ,  $a > 1$ .

Da  $\mathcal{T}(a)$  eine nicht leere Teilmenge von  $\mathbb{N}$  ist, hat  $\mathcal{T}(a)$  ein kleinstes Element

### Theorem 16.1

Es sei  $a \in \mathbb{N}$ ,  $a > 1$

Dann gibt es eine Primzahl  $p \in \mathbb{P}$  mit  $p \mid a$

$$\forall a \in \mathbb{N}_{>1} : \exists p \in \mathbb{P} : p \mid a$$

**Proof 16.3**

Es sei  $a \in \mathbb{N}_{>1}$  beliebig.

zu zeigen:  $\exists p \in \mathbb{P} : p \mid a$

Betrachten  $\mathcal{T}(a)$ . Diese hat ein kleinstes Element. Nennen wir dieses  $\beta$ .

Beh.:  $\beta \in \mathbb{P}$ .

Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass  $\beta \notin \mathbb{P}$ . Dann hat  $\beta$  einen Teiler  $q \in \mathbb{N}$  mit

$$1 < q < \beta.$$

Da  $q \mid \beta$  und  $\beta \mid a$ , folgt nach Teilbarkeitsregeln  $q \mid a$ . Also (beachte  $q > 1$ )  $q \in \mathcal{T}$ .

Widerspruch, da  $q < \beta$  und  $\beta$  das kleinste Element von  $\mathcal{T}(a)$  ist. somit muss

$$\beta \in \mathbb{P}$$

□

**Theorem 16.2 (Euklid)**

Es gibt unendlich viele Primzahlen

**Proof 16.4 Widerspruchsbeweis**

Wir nehmen dazu an, dass es nur endlich viele Primzahlen gibt. Sagen wir

$$p_1, p_2, \dots, p_n \quad (\text{d.h. } \mathbb{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\})$$

Wir betrachten

$$a := p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n + 1$$

Es gilt  $a \in \mathbb{N}$ ,  $a > 1$ . Somit (nach vorigem Satz 16.1) existiert  $p \in \mathbb{P}$  mit  $p \mid a$ . Also gilt  $p \in \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$

Also folgt  $p \mid (p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n)$

Somit folgt (beachte  $p \mid a$ )

$$p \mid \underbrace{(a - p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n)}_{=1}$$

Also  $p \mid 1 \implies$  Widerspruch: Also war unsere Annahme falsch und es muss unendlich viele Primzahlen geben □

**17. Vollständige Induktion****Theorem 17.1 Vollständige Induktion**

Sei  $A(n)$  eine Eigenschaft für natürliche Zahlen

Es gelte

(i)  $A(1)$ , d.h. 1 hat diese Eigenschaft

(ii)  $\forall a \in \mathbb{N} : A(n) \implies A(n+1)$

d.h. für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt: Wenn  $n$  die Eigenschaft hat, dann hat  $n+1$  die Eigenschaft. Dann gilt  $A(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$

**Induktionsanfang (I.A.)** $A(1)$  überprüfen auf Wahrheitswert (muss wahr sein)**Induktionsschritt (I.S.)**Es sei  $n \in \mathbb{N}$ 

$$\underbrace{A(n)}_{\text{Induktionsvoraussetzung (I.V.)}} \implies A(n+1)$$

**Task 17.1**Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion, dass für all  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$7 \mid (5^{2 \cdot n} - 2^{2 \cdot n}) \quad A(n)$$

**Proof 17.1****I.A.** ( $n = 1$ ) Z.z.:  $7 \mid (5^{2 \cdot 1} - 2^{2 \cdot 1})$ Da  $5^2 - 2^2 = 21 = 7 \cdot 3$ , also folgt  $7 \mid (5^{2 \cdot 1} - 2^{2 \cdot 1})$ **I.S.** Es sei  $n \in \mathbb{N}$ **I.V.** Es gelte  $A(n)$  d.h. wir nehmen an, dass

$$7 \mid (5^{2n} - 2^{2n})$$

z.z.: (I. Behauptung)  $A(n+1)$  gilt,d.h.:  $7 \mid [5^{2 \cdot (n+1)} - 2^{2 \cdot (n+1)}]$ 

Es gilt

$$\begin{aligned} 5^{2 \cdot (n+1)} - 2^{2 \cdot (n+1)} &= 5^{2n+2} - 2^{2n+2} \\ &= 25 \cdot 5^{2n} - 4 \cdot 2^{2n} \\ &= 25 \cdot 5^{2n} - 25 \cdot 2^{2n} + 25 \cdot 2^{2n} - 4 \cdot 2^{2n} \\ &= 25 \cdot (5^{2n} - 2^{2n}) + (25 - 4) \cdot 2^{2n} \end{aligned}$$

Da nach 17.1 die Teilbarkeit

$$7 \mid (5^{2n} - 2^{2n})$$

gilt und auch  $7 \mid (25 - 4)$  gilt, folgt (Teilbarkeitsregeln!)  $7 \mid (5^{2 \cdot (n+1)} - 2^{2 \cdot (n+1)})$ ,  $\square$ 

Mit Induktionsprinzip ergibt insgesamt

$$\forall n \in \mathbb{N} : 7 \mid (5^{2n} - 2^{2n})$$

**Definition 17.1**

Wir wollen die Behauptung beweisen:

$$\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$$

Teil 1: I.A.

Wir beweisen, dass  $A(1)$  gilt

Tail 2: I.S.

von  $n$  nach  $n + 1$

**I.V.:** Es gelte  $A(n)$  für  $n \in \mathbb{N}$

Z.z.: Es gilt auch  $A(n + 1)$

$$\implies \forall n \in \mathbb{N} : A(n)$$

### Task 17.2

**Proof 17.2**  $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$

**I.A.** ( $n = 1$ )

$$\text{z.z.: } \sum_{k=1}^1 (2k - 1) = 1^2$$

Es gilt

$$\sum_{k=1}^1 (2k - 1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

und

$$1^2 = 1$$

was 17.2 beweist

**I.S.** z.z. (I. Beh.)

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1) = (n + 1)^2$$

**I.V.** Es sei  $n \in \mathbb{N}$ , es gelte

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1) = \underbrace{\sum_{k=1}^n (2k - 1)}_{\text{ersten } n \text{ Summanden}} + \underbrace{(2(n+1) - 1)}_{n+1\text{-ter Summand}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1) &= n^2 + (2(n+1) - 1) \\ &= n^2 + 2n + 2 - 1 \\ &= n^2 + 2n + 2 \\ &= (n + 1)^2, \end{aligned}$$

□

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion können wir folgern, dass gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^n = n^2.$$

In reiner Zahlentheorie betrachtete man die Induktion als Axiom

### Axiom 17.1 Induktionsaxiom

Es sei  $M \subseteq \mathbb{N}$  eine Teilmenge mit

$$(i) \quad 1 \in M$$

$$(ii) \quad \forall n \in \mathbb{N} : n \in M \implies n + 1 \in M$$

Dann ist

$$M = \mathbb{N}$$

Dieses Axiom ermöglicht das Beweisverfahren durch vollständige Induktion, denn:  
Es sei  $M := \{n \in \mathbb{N} : A(n)\}$ , Gilt

$$(i) \quad 1 \in M, \text{ d.h. es gilt } A(1)$$

$$(ii) \quad \forall n \in \mathbb{N} : \text{Wenn } n \in M \text{ also } A(n) \text{ gilt, folgt } n + 1 \in M \text{ (also } A(n + 1) \text{ gilt)}$$

Dann folgt nach Axiom

$$M = \mathbb{N}$$

d.h.  $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$

## 18. Abbildung (Funktionen)

### Definition 18.1

Es seien  $X, Y$  bel. Mengen.

Eine Abbildung (oder Funktion)  $f$  von  $X$  nach  $Y$  ist eine Vorschrift, die jedem Element  $x \in X$  genau ein Element  $y_x \in Y$  zuordnet.

$$f : \begin{cases} X \rightarrow Y \\ x \mapsto y_x \end{cases} \quad f \text{ ist Abbildung von } X \text{ nach } Y, x \text{ wird auf } y_x \text{ abgebildet}$$

Das dem Element  $x \in X$  in eindeutiger Weise durch  $f$  zugeordnete Element  $y_x$  wird auch mit

$$f(x)$$

bezeichnet;  $f(x)$  heißt das Bild von  $x$  unter  $f(x)$ , oder der Wert von  $f$  an der Stelle  $x$ .

$X$  heißt auch Definitionsbereich von  $f$ , (Auch  $\text{Def}(f)$ )

$Y$  heißt auch Zielbereich von  $f$  und

$$W_f := \{y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y\}$$

der (exakte) Wertebereich von  $f$  oder kurz das Bild von  $f$ . Andere Bezeichnungen für  $W_f$  :  $\text{Bild}(f)$  oder  $f(X)$

**Definition 18.2**

Ein  $x \in X$  heißt Urbild von  $y \in Y$ , falls  $f(x) = y$  gilt.

**Example 18.1**

$X, Y \in \mathbb{R}$ . Betrachte

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$

$\text{Def}(f) = \mathbb{R}$ , Zielbereich von  $\mathbb{R}$ ;  $\text{Bild}(f) = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{\geq 0} = \mathbb{R}^+$

**Example 18.2 keine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} (x-1), & \text{falls } x \geq 1 \\ x+2, & \text{falls } x \leq 1 \end{cases}$** 

- Urbilder von 4 unter  $f$ : für welche  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $f(x) = 4$ ?  $2, -2$
- Urbilder von  $-2 \in \mathbb{R} = Y$  unter  $f$ ? Für welche  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $f(x) = -2$ ? d.h.  $x^2 = -2 \perp$  kein  $x \in \mathbb{R}$
- Urbilder von  $i$  unter  $f$ ?  $\perp$  kann man nicht fragen.  $i \notin \mathbb{R}$

**Definition 18.3 Graph**

Ist  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung, dann heißt

$$\text{Graph}(f) := \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$$

der Graph von  $f$ .

**Example 18.3**

$$g : X = \{1, 2, 3\} \rightarrow \{-2, -1, 0, 1, 2\} = Y, \begin{cases} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 0 \end{cases}$$

$$\text{Def}(g) = \{1, 2, 3\}, \text{Bild}(g) = g(X) = \{1, 2, 0\}$$

- Urbilder von 0: 3
- Urbilder von -2: keine

$$\begin{aligned} g^{-1}(\{0, 2\}) &:= \{x \in \{1, 2, 3\} : (g(x) = 0) \vee (g(x) = 2)\} \\ &= \{x \in \{1, 2, 3\} : g(x) \in \{0, 2\}\} \end{aligned}$$

$$g(\{1, 3\}) := \{g(x) : x \in \{1, 3\}\} = \{g(1), g(3)\} = \{1, 0\}$$

**Definition 18.4**

Es sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung

- ① Für eine Teilmenge  $A \subseteq X$  heißt

$$\begin{aligned} f(A) &:= \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq Y \\ &= \{y \in Y \mid \exists x \in A : f(x) = y\} \end{aligned}$$



Bild der Menge  $A$  unter  $f$ .

- ② Für eine Teilmenge  $B \subseteq Y$  heißt die Menge

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\} = \{x \in X : \exists y \in B : f(x) = y\}$$

das Urbild von  $B$  unter  $f$

Falls  $B = \{y\}$

Für  $y \in Y$  ist das Urbild von  $y$  unter  $f$  die Menge

$$f^{-1}(y) := \{x \in X : f(x) \in \{y\}\} = \{x \in X : f(x) = y\}$$

**Example 18.4**  $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow x^2 \end{cases}$

$$f([0, 1]) = \{x^2 : x \in [0, 1]\} \stackrel{!}{=} [0, 1]$$

$$f(\{0, 2\}) = \{f(0), f(2)\} = \{0, 4\}$$

$$\text{Bild}(f) = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$f^{-1}([-1, 1]) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [-1, 1]\} \stackrel{?!}{=} [-1, 1]$$

$$f^{-1}(\{0, 1\}) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \{0, 1\}\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0 \vee f(x) = 1\} = \{0, 1, -1\}$$

## 19. Grobe Einteilung von mathematischen Objekten

Zahlen

Mengen  $\longrightarrow$  Funktionen

- Ausgangsmaterial zur Objektbildung

- schaffen Begriffe

“gerade Zahlen”

$\vdots$

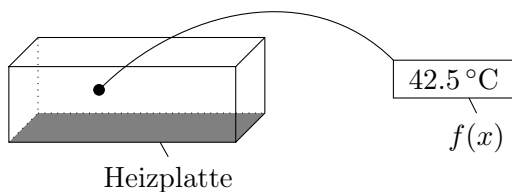
- dienen der Zusammenfassung/Einteilung von Objekten

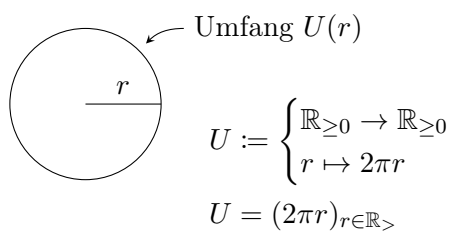
- schaffen

Zusammenhänge

Was macht man damit?  $\longleftarrow$

- abhängige (Mess-)Werte





Rezept/Bastelanleitung

Zutat  $x$  mit  $x \in X$

Ergebnis: z.B.  $2\pi x$

Funktionsausdruck  $\hat{=}$  allg. Situationsbeschreibung mit einer Ergebnisdefinition

Benennung/Indizierung

“Abzählen”. Jedes Objekt bekommt eine Nummer bzw. Jede Nummer bekommt ein Objekt

$f := (\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \dots)$  Tupel sind Funktionen

$\text{Def}(f) = \{1, 2, 3, \dots, n\}$   $f(1) = \mathbb{N}$  oft  $f_1$

$\text{Bild}(f) = \{y \in U : \exists x \in \text{Def}(f) : y = f(x)\} = \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \dots\}$

- Attribute von Objekten

| Land | Hauptstadt | Tabellen! c:<br>“Hauptstadt(Land)” |
|------|------------|------------------------------------|
| D    | Berlin     |                                    |
| CH   | ?          |                                    |
| F    | Paris      |                                    |
| A    | Wien       |                                    |

Was macht man damit ...?

- abhängige (Mess-)Werte  $(2\pi r)_{r \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$
- Benennung/Indizierung  $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}), (2i - 1)_{i \in \mathbb{N}} = \{2i - 1 : i \in \mathbb{N}\}$
- Attribute von Objekten

↖ hat Umfang

hat Inhalt  $b$  hat Breite

$a$   
hat Länge

$R := \mathbb{R}_{>0}^2 \quad (\mathbb{Z}, +)$   
 Länge  $:= (r_1)_{r \in R}$   
 Breite  $:= (r_2)_{r \in R}$   
 Umfang  $:= (2r_1 + 2r_2)_{r \in R}$   
 Inhalt  $:= (r_1, r_2)_{r \in R}$

### Example 19.1 “Gleichungen”

Finde  $x \in \mathbb{R}$ , sodass gilt

a)  $x^3 + x = 1$   $x$ -Abhängigkeit durch Funktion  $f : (x^3 + x)_{x \in \mathbb{R}}$

b)  $x^3 + x = -5$  beschreibe rechte Seite jeweils durch ein Element  $y := 1$

$(f, y)$  kodiert die Gleichung

**Definition 19.1**

Unter einer Gleichung verstehen wir ein Paar  $(f, y)$  mit einer Funktion  $f$  und einem Element  $y$ .

Die Lösungsmenge einer Gleichung  $(f, y)$  ist gegeben durch  $\text{Lös}(f, y) (= \text{Lös}(f, y)) = \{x \in \text{Def}(f) : f(x) = y\}$

Gleichungen  $= \mathcal{F} \times \mathcal{U}(\mathcal{F} := \text{alle Funktionen}, \mathcal{U} := \text{alle Elemente})$

Eigenschaften von Gleichungen                      ergeben sich                      Eigenschaften der zugehörigen Funktion

“Lösbarkeit” für alle rechte Seiten  
aus einer Menge  $W$

$$\forall y \in W : \exists x \in \text{Lös}(f, y)$$

$\iff$

“ $f$  ist surjektiv nach  $W$ ” ( $f$  nimmt  
alle Werte von  $W$  an)

$$\forall y \in W : \exists x \in \text{Def}(f) : f(x) = y$$

“Eindeutigkeit von Lösungen”

$$\forall y \in \text{Bild}(f) : \exists! x \in \text{Lös}(f, y)$$

$\iff$

“ $f$  ist injektiv” ( $f$  nimmt keinen  
Wert mehrfach an)

$$\neq \exists u, v \in \text{Def}(f) : u \neq v \wedge f(u) = f(v)$$

“Existenz und Eindeutigkeit” von  
Lösungen zu  $(f, y)$  für  $f : A \rightarrow B$   
und alle  $y \in B$

“ $f$  ist bijektiv von  $A$  nach  $B$ , d.h.  
 $f : A \rightarrow B$  injektiv und  $f : A \rightarrow B$  surjektiv  
nach  $B$ ”

**Example 19.2**  $f := (x^2)_{x \in \mathbb{Q}}$   $g := (x^2)_{x \in \mathbb{R}}$ 

$f, g$  surjektiv nach  $\mathbb{Q}$ ?: nein

$f, g$  surjektiv nach  $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ ?: für  $g$ : ja, für  $f$ : nein

$f, g$  injektiv: nein  $f(1) = g(1) = g(-1) = f(-1)$

$f = (x^3 + x)_{x \in \mathbb{R}}$   $f' = (x^2 + 1)_{x \in \mathbb{R}} \implies f' \geq 1 > 0 \implies f$  streng monoton wachsend

alle Gleichungen zu  $f$  mit  $y \in \mathbb{R}$  sind eindeutig lösbar

$f$  ist bijektiv von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$

$\exists a \in \mathbb{R} : \text{Lös}(f, y) = \{a\}$  Eintrag( $\{a\}$ ) =  $a$  Eintrag( $\text{Lös}(f, 1)$ ) = ist die Lösung von  $(f, 1)$   
“ $x^3 + x = 1$ ”



$$f = \text{Eintrag}(\text{Lös}(F, y))$$

**Theorem 19.1**

Es seien  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung und  $A_1, A_2$  Teilmengen von  $X$  (d.h.  $A_1 \subseteq X, A_2 \subseteq X$ )  
sowie  $B, B_1, B_2$  Teilmengen von  $Y$  (d.h.  $B \subseteq Y, B_1 \subseteq Y, B_2 \subseteq Y$ )

Dann gelten folgende Aussagen:

- (1)  $A_1 \subseteq A_2 \implies f(A_1) \subseteq f(A_2)$   
 $B_1 \subseteq B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$   
d.h. sowohl “Bild als auch Urbild” respektieren die Inklusion
- (2)  $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2) = \{f(a) : a \in A_1 \cup A_2\}$   
 $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$
- (3)  $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$   
 $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

Zum Beweis der ersten Aussage in (2) zeigen wir

$$If(A_1 \cup A_2) \subseteq f(A_1) \cup f(A_2)$$

$$II f(A_1) \cup f(A_2) \subseteq f(A_1 \cup A_2)$$

I. Sei  $y \in f(A_1 \cup A_2)$ . Z.z.:  $y \in f(A_1) \vee f(A_2)$

Da  $y \in f(A_1 \cup A_2)$ , existiert ein

$$a \in A_1 \cup A_2 \text{ (d.h. } a \in A_1 \vee A_2)$$

mit

$$f(a) = y.$$

**1. Fall:**  $(a \in A_1)$ . Dann existiert also  $a \in A_1$  mit  $f(a) = y$ , also

$$y \in f(A_1)$$

**2. Fall:**  $(a \in A_2)$ . Dann existiert also  $a \in A_2$  mit  $f(a) = y$ , also

$$y \in f(A_2)$$

Insgesamt folgt

$$y \in f(A_1) \vee y \in f(A_2),$$

□

II. Sei  $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$ . Z.z.:  $y \in f(A_1 \cup A_2)$

Da  $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$ , folgt

$$y \in f(A_1) \vee f(A_2)$$

**1. Fall:**  $y \in f(A_1)$ . Dann existiert  $a \in A_1$  mit

$$y = f(a) \tag{9}$$

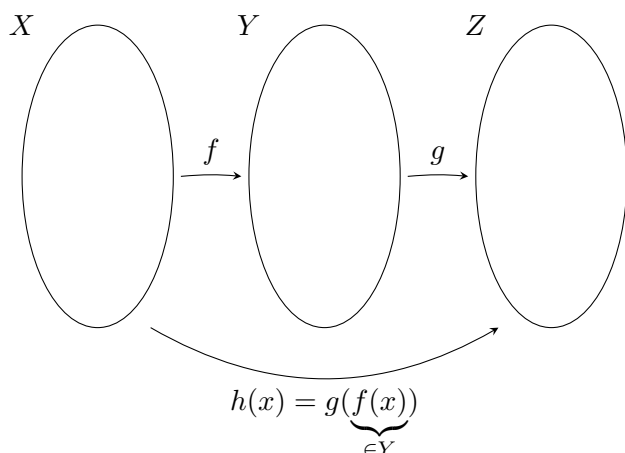
Da  $A_1 \subseteq (A_1 \cup A_2)$  folgt  $a \in (A_1 \cup A_2)$ , also (wegen 9)  $y \in f(A_1 \cup A_2)$

**2. Fall:**  $y \in f(A_2)$ . Dann existiert  $a \in A_2$  mit

$$y = f(a) \tag{10}$$

Da  $A_2 \subseteq (A_1 \cup A_2)$  folgt  $a \in (A_1 \cup A_2)$ , also (wegen 10)  $y \in f(A_1 \cup A_2)$

## 20. Verkettung von Funktionen



### Definition 20.1

Die Identität auf  $X$  (identische Abbildung auf  $X$ ) ist die Abbildung

$$\text{id}_X : X \rightarrow X, x \mapsto x$$

z.B.  $\text{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$

$\text{id}_{\{1,2\}} : \{1,2\} \rightarrow \{1,2\}, 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 2$

### Definition 20.2

Seien  $f : X \rightarrow Y_1, g : Y_2 \rightarrow Z$  zwei Abbildungen mit

$$f(X) \subseteq Y_2$$

Die Verkettung  $g \circ f$  (lies “ $g$  nach  $f$ ”) ist die Abbildung

$$g \circ f : X \rightarrow Z, x \mapsto g(f(x))$$

d.h.

$$g \circ f := g(f(x)) \quad \text{für alle } x \in X$$

! Zuerst wird  $f$  angewendet, dann  $g$ . !

### Example 20.1

$f : \begin{cases} \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}, g : \begin{cases} \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$  Es können beide Verkettungen  $g \circ g$  und  $f \circ g$  gebildet werden. Für  $x \in \mathbb{R}_0^+$ :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x| = x \text{ da } x \in \mathbb{R}_0^+$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{x}^2 = x$$

$$g \circ f = f \circ g = \text{id}_{\mathbb{R}_0^+}$$

**Definition 20.3**

$f : X \rightarrow Y$  heißt bijektiv, wenn sie surjektiv und injektiv ist.

**Theorem 20.1**

Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung.

(11) Existiert eine Abbildung  $g : Y \rightarrow X$  mit

$$g \circ f = \text{id}_X,$$

dann ist  $f$  injektiv.

(12) Existiert eine Abbildung  $h : Y \rightarrow X$  mit

$$f \circ h = \text{id}_Y,$$

dann ist  $f$  surjektiv.

(13)  $f$  ist genau dann bijektiv, wenn es eine Abbildung  $g : Y \rightarrow X$  mit

$$g \circ f = \text{id}_X \text{ und}$$

$$f \circ g = \text{id}_Y$$

gibt.

**Proof 20.1**

(1) Es sei also  $g : Y \rightarrow X$  eine Abbildung mit

$$g \circ f = \text{id}_X$$

d.h.

$$g(f(x)) = x \quad \text{für alle } x \in X \tag{11}$$

Z.z.:  $f$  ist surjektiv.

Es seien  $x_1, x_2 \in X$  mit  $f(x_1) = f(x_2)$ . Z.z.:  $x_1 = x_2$

Da  $f(x_1) = f(x_2)$ , folgt

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

Wegen 11 folgt  $x_1 = x_2$

(2) Sei  $h : Y \rightarrow X$  mit

$$f \circ h = \text{id}_Y,$$

d.h. es gilt

$$f(h(y)) = y \quad \text{für alle } y \in Y \tag{12}$$

Z.z.:  $f$  ist surjektiv. Sei dazu  $y \in Y$  (z.z.:  $\exists x \in X : f(x) = y$ )

Setze

$$x := h(y)$$

Dann gilt  $x \in X$  und wegen 12  $f(x) = f(h(y)) = y$

(3) “ $\Leftarrow$ ” klar mit (11) und (12)

“ $\Rightarrow$ ” Uff!