2023-12-17
Winter Semester 2023/2024

University of Konstanz
Faculty of Science
(Physics)

Exercise 1: Resonanzkurve und Phasenverschiebung

a)

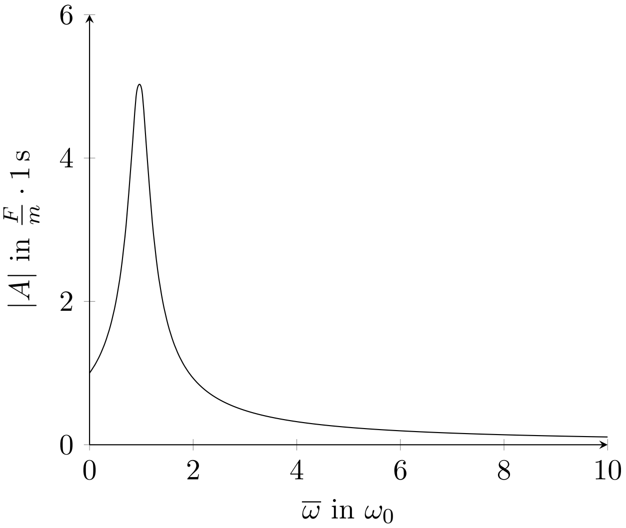

Figure 1: Amplitude in Abhängigkeit von $\overline{\omega}$

Ein Hochpunkt existiert, wenn $\sqrt{(\overline{\omega}^2-\omega_0^2)^2+4\beta^2\overline{\omega}^2}$ einen Tiefpunkt hat, also wenn $(\overline{\omega}^2-\omega_0^2)^2+4\beta^2\overline{\omega}^2$ einen Tiefpunkt hat, also wenn $4\overline{\omega}(\overline{\omega}^2-\omega_0^2+2\beta^2)=0$, und da für $\overline{\omega}$ kein Hochpunkt, aber $\overline{\omega}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$ ein Hochpunkt, also in die Funktion eingesetzt:

$$
\begin{aligned}
|A_{max}| &= \frac{F}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-2\beta^2-\omega_0^2)^2+4\beta^2(\omega_0^2-2\beta^2)}} \\
&= \frac{F}{m}\frac{1}{\sqrt{4\beta^4-8\beta^4+4\beta^2\omega_0^2}} \\
&= \frac{F}{m}\frac{1}{\sqrt{4\beta^2(\omega_0^2-\beta^2)}} \\
&= \frac{F}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}.
\end{aligned}
$$

Also wird die Amplitude kleiner wenn die Dämpfung größer wird.
Für $\beta \to 0$, gilt $|A| = \frac{F}{m}\frac{1}{\sqrt{(\overline{\omega}^2-\omega_0^2)^2+4\beta^2\overline{\omega}^2}} \to \frac{F}{m}\frac{1}{\overline{\omega}^2-\omega_0^2}$.
Für $\overline{\omega} \to 0$, gilt $|A| = \frac{F}{m}\frac{1}{\sqrt{(\overline{\omega}^2-\omega_0^2)^2+4\beta^2\overline{\omega}^2}} \to \frac{F}{m}\frac{1}{\omega_0^2}$.
Für $\overline{\omega} \to \infty$, gilt $|A| = \frac{F}{m}\frac{1}{\sqrt{(\overline{\omega}^2-\omega_0^2)^2+4\beta^2\overline{\omega}^2}} \to \frac{F}{m}\frac{1}{\overline{\omega}^2} \to 0$.

b)

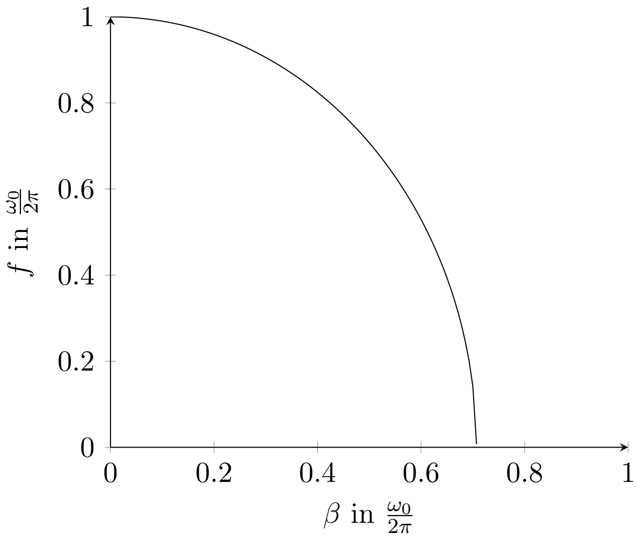

Figure 2: Frequenz bei maximaler Amplitude in Abhängigkeit der Dämpfung β

joa bei $\beta = 0$ ist $f = \frac{\omega_0}{2\pi}$ und bei sehr großer Reibung ist $f = 0$

c)

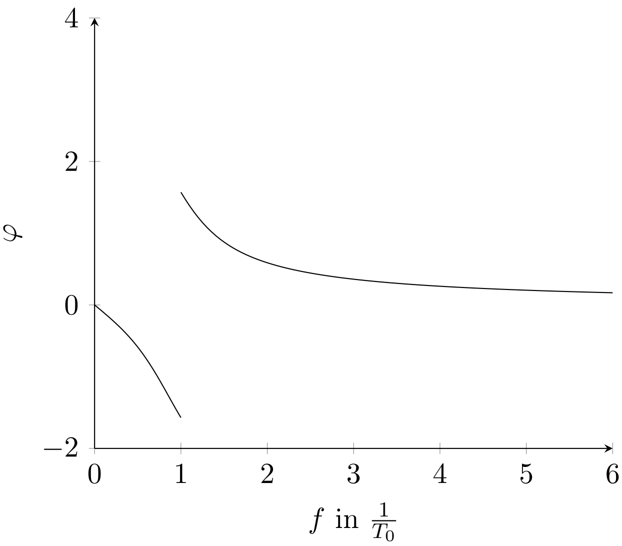

Figure 3: Phasenverschiebung über anregender Frequenz

Für $x^2 \to 1$ geht $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ gegen ∞ und somit $\arctan \frac{x}{x^2-1} \to \frac{\pi}{2}$.

Exercise 2: Gedämpfter harmonischer Oszillator

$m = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho = 2.09 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{kg}$

a) $\beta = \frac{6\pi\eta R}{2m} = 4.50 \cdot 10^{-2}\,1/\mathrm{s}$
$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 4.07 \cdot 10^{-1}\,\mathrm{s}$

Da $\beta^2 - \omega_0^2 < 0$ gilt $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ gilt:
$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} = 4.07 \cdot 10^{-1}\,\mathrm{s}$

b) Da $\beta^2 - \omega_0^2 < 0$ gilt $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ gilt:
$x(t) = A * \exp(-\beta t)\,(\sin(\omega t + \varphi))$, also

$$
\begin{aligned}
\Lambda &= -\ln \frac{\hat{x}_{n+1}}{\hat{x}_n} \\
&= -\ln \left| \frac{\exp\left(-\beta\left(t_n + \frac{T}{2}\right)\right) \sin\left(\omega\left(t_n + \frac{T}{2}\right) + \varphi\right)}{\exp(-\beta t_n)\sin(\omega t_n + \varphi)} \right| \\
&= -\ln \left| \frac{\exp\left(-\beta\left(t_n + \frac{T}{2}\right)\right) \sin\left(\omega t_n + \omega\frac{2\pi}{\omega} + \varphi\right)}{\exp(-\beta t_n)\sin(\omega t_n + \varphi)} \right| \\
&= -\ln \left| \frac{\exp\left(-\beta\left(t_n + \frac{T}{2}\right)\right) \sin(\omega t_n + \varphi + \pi)}{\exp(-\beta t_n)\sin(\omega t_n + \varphi)} \right| \\
&= -\ln \left| \frac{-\exp\left(-\beta\left(t_n + \frac{T}{2}\right)\right) \sin(\omega t_n + \varphi)}{\exp(-\beta t_n)\sin(\omega t_n + \varphi)} \right| \\
&= -\ln \frac{\exp\left(-\beta\left(t_n + \frac{T}{2}\right)\right)}{\exp(-\beta t_n)} \\
&= -\ln\exp\left(-\beta\left(t_n + \frac{T}{2}\right)\right) + \ln\exp(-\beta t_n) \\
&= -\left(-\beta\left(t_n + \frac{T}{2}\right)\right) + (-\beta t_n) \\
&= \beta\left(t_n + \frac{T}{2}\right) - \beta t_n \\
&= \beta\frac{T}{2} \\
&= 9.15 \cdot 10^{-3}
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
\frac{\hat{x}_{n+4}}{\hat{x}_n} &= \frac{\hat{x}_{n+4}}{\hat{x}_{n+3}} \cdot \frac{\hat{x}_{n+3}}{\hat{x}_{n+2}} \cdot \frac{\hat{x}_{n+2}}{\hat{x}_{n+1}} \cdot \frac{\hat{x}_{n+1}}{\hat{x}_{n+0}} \\
&= (\exp -\Lambda)^4 \\
&= \exp -4\Lambda \\
&= 96.4\,\%
\end{aligned}
$$

d) Die Energie, die in Wärmeenergie umgeführt wurde, ist die Energie, welche nicht mehr in der Schwingung hängt, da bei der größten Auslenkung die Geschwindigkeit null ist, ist die gesamte

Energie in der Spannenergie, also:

$$\begin{aligned}
E_{span_n} - E_{span_{n+4}} &= \frac{1}{2}D\hat{x}_n^2 - \frac{1}{2}D\hat{x}_{n+4}^2 \\
&= \frac{1}{2}D\left(\hat{x}_n^2 - \hat{x}_n^2\exp(-8\Lambda)\right) \\
&= \frac{1}{2}D\hat{x}_n^2\left(1 - \exp(-8\Lambda)\right) \\
&= \frac{1}{2}D\hat{x}_0^2\left(1 - \exp(-8\Lambda)\right) \\
&= 1.76 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

e) Der aperiodische Grenzfall ist bei $\beta^2 - \omega_0^2 = 0$, also

$$\begin{aligned}
\beta^2 &= \omega_0^2 \\
\frac{6^2\pi^2\eta^2R^2}{2^2m^2} &= \frac{D}{m} \\
\frac{9\pi^2\eta^2R^2}{m^2} &= \frac{D}{m} \\
\eta^2 &= \frac{Dm}{9\pi^2R^2} \\
\eta &= \sqrt{\frac{Dm}{9\pi^2R^2}} \\
\eta &= \frac{\sqrt{Dm}}{3\pi R} \\
\eta &= 3.43\,\frac{\mathrm{N\,s}}{\mathrm{m}^2}
\end{aligned}$$