Analysis 1

01.12.2023
F. Gmeineder
P. Stephan
A. von Pippich
Wintersemester 2023
Abgabe: Bis zum 08.12.2023 um 10:00 Uhr

Universität Konstanz

Übungsblatt 7

Aufgabe 1: Noch mehr Reihen $8 \times 2{,}5 = 10$ Punkte + 10 Zusatzpunkte

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, absolute Konvergenz beziehungsweise Divergenz:

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3}$,

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+3}$,

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^3+3}$,

(iv) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)^n}{(3n^2+8n+1)^n}$,

(v) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$,

(vi) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{4n+3}{n^2-7n+2}$,

(vii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^5+10}{42^n \cdot n^5}$,

(viii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Aufgabe 2: Ein verschärftes Quotientenkriterium $(4 + 4) + 2 = 10$ Punkte

Es sei (a_n) monoton fallend mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter sei $\alpha > 1$. Wir definieren die Folge (b_n) durch

$$b_n := \left(\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) n\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

(i) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

  (a) konvergiert, falls $b_n \leq -\alpha < -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
  (b) divergiert, falls $b_n \geq -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(ii) Bestimmen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x(1+x)(2+x) \cdot \ldots \cdot (n+x)}{(n+1)!}$$

konvergiert oder divergiert.

Aufgabe 3: Auf die Reihenfolge kommt es an **10 Punkte**

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe, die konvergiert, aber nicht absolut konvergiert. Sei $S \in \mathbb{R}$ beliebig. Zeigen Sie, dass es eine bijektive Abbildung $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt, sodass

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = S$$

gilt.

Hinweis: Dies zeigt, dass man nicht absolut konvergente Reihen nicht einfach umordnen darf. Für die Lösung kann es sinnvoll sein, sich

$$a_k^+ := \frac{|a_k| + a_k}{2}$$

und

$$a_k^- := \frac{|a_k| - a_k}{2}.$$

anzuschauen. Zeigen Sie, dass $\sum a_k^+, \sum a_k^- = \infty$. *Betrachten Sie dann jeweils die Teilfolgen, die Sie erhalten, wenn Sie alle Nullen streichen. Summieren Sie dann* a_k^+ *so lange, bis sie über* S *sind, ziehen Sie anschließend* a_k^- *so lange ab, bis Sie unterhalb von* S *sind. Wiederholen Sie dieses Vorgehen.*

Aufgabe 4: Offen, abgeschlossen, kompakt? **$4 \times 2{,}5 = 10$ Punkte**

Entscheiden Sie mit Beweis, ob die folgenden Mengen offen, abgeschlossen und/oder kompakt sind.

(a)

$$M_1 := \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ 1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

(b)

$$M_2 := \left\{ x \in \mathbb{R} : n^2 < |x| < 2n^2 : n \in \mathbb{N} \right\}$$

(c)

$$M_3 := (1, 2) \cup \left\{ 1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

(d)

$$M_4 := \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2n} \leq x \leq 1 - \frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Hinweis: Der Begriff 'kompakt' wird erst am Dienstag in der Vorlesung eingeführt. Für diese Aufgabe dürfen Sie benutzen, dass eine Menge in $\mathbb{R}$ *genau dann kompakt ist, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Aufgabe 1 wird als Musterlösung hochgeladen, Aufgabe 2 und 4 in den Tutorien besprochen, Aufgabe 3 in der Plenumsübung.

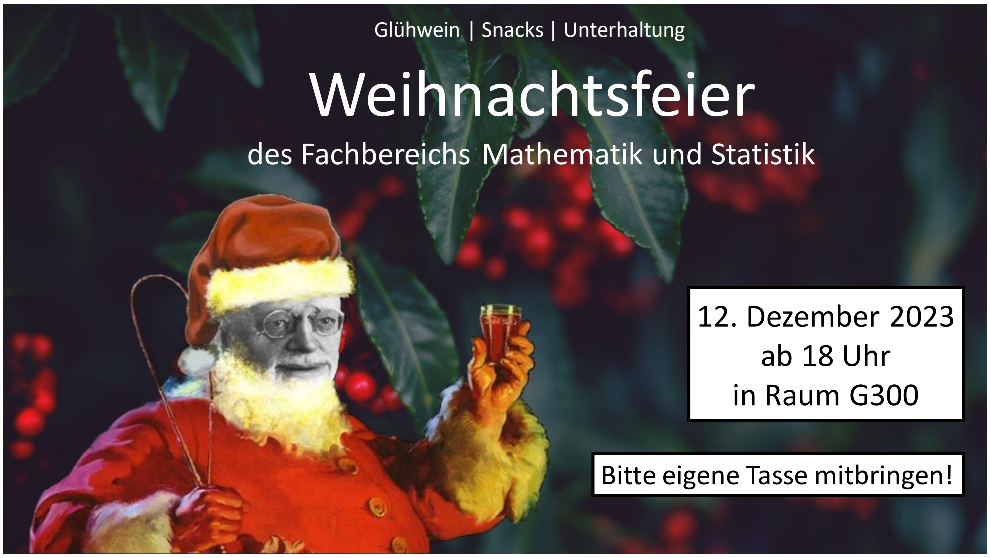

Abbildung 1: Herzliche Einladung zur Weihnachtsfeier