Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

BMA 2

(a) Um zu zeigen, dass $a \in A$ gilt zu zeigen: $a \in \mathbb{N}$ und $a^2 + 2a > 3$
Setze nun $a := 1000$:
$1000 \in \mathbb{N}$ und $1000^2 + 2 \times 1000 = 1002000 > 3$ also ist $1000 \in A$

Um zu zeigen, dass $b \in B$ gilt zu zeigen: $b \in \mathbb{N}$ und $2 - \frac{2}{b} > -b$
Setze nun $b := 4$:
$4 \in \mathbb{N}$ und $2 - \frac{3}{4} = \frac{2\times 4-3}{4} = \frac{8-3}{4} = \frac{5}{4} > -4$, also $4 \in B$

(b) Um zu zeigen, dass $c \in C$ gilt zu zeigen: $c \in \mathbb{Z}$ und $\frac{2c}{5} < \frac{4}{c^2+1}$
Setze nun $c := 0$:
$0 \in \mathbb{Z}$ und $\frac{2\times 0}{5} = 0 < 4 = \frac{4}{0^2+1}$, also ist 0 in C

(c) Um zu zeigen, dass $A \subset B$ ist zu zeigen, dass $\forall a \in A : a \in B$:
Sei $a \in A$ zu zeigen $a \in B$:
Da $a \in A$ gilt $a \in \mathbb{N}$ und $a^2 + 2a > 3$.
Zu zeigen $a \in B$. D.h. zu zeigen $a \in \mathbb{N}$ und $2 - \frac{2}{a} > -a$
Da $a \in \mathbb{N}$ gegeben, durch $a \in \mathbb{N}$ bleibt zu zeigen $2 - \frac{2}{a} > -a$
Es gelte $a^2 + 2a > 3$, zu zeigen $2 - \frac{2}{a} > -a$: Durch Termumformung folgt:

$$\begin{aligned} a^2 + 2a > 3 \quad &|: a \\ a + 2 > \frac{3}{a} \quad &| -\frac{3}{a} - a \\ 2 - \frac{3}{a} > -a \end{aligned}$$

also gilt:

$$(a^2 + 2a > 3 \iff 2 - \frac{3}{a} > -a) \tag{1}$$

Also ist $\forall a \in A : a \in B$ $\square$

(d) Um zu zeigen $A = B$ gilt zu zeigen $A \subset B$ und $B \subset A$.
Mit (c) ist $A \subset B$ gezeigt und es bleibt $B \subset A$ zu zeigen.
Um zu zeigen, dass $B \subset A$ ist zu zeigen, dass $\forall b \in B : b \in A$:
Sei $b \in B$ zu zeigen $b \in A$:
Da $b \in B$ gilt $b \in \mathbb{N}$ und $2 - \frac{3}{b} > -b$.
Zu zeigen $b \in A$. D.h. zu zeigen $b \in \mathbb{N}$ und $b^2 + 2b > 3$
Da $b \in \mathbb{N}$ gegeben, durch $b \in \mathbb{N}$ bleibt zu zeigen $b^2 + 2b > 3$
Aus (1) folgt, dass wenn $2 - \frac{3}{b} > -b$ auch $b^2 + 2b > 3$
Also ist $\forall b \in B : b \in A$ $\square$

(e) Um zu zeigen, dass $A = C$, gilt zu zeigen, dass $C \subset A$ und $A \subset C$.
Zu zeigen $C \subset A$:
Da aus (b) folgt, dass $0 \in C$, zu zeigen $0 \in A$, also gilt im insbesondere zu zeigen $0 \in \mathbb{N}$ aber $0 \notin \mathbb{N}$ ist $0 \notin A$ und $C \not\subseteq A$, also $C \neq A$ $\square$