December 3, 2023 University of Konstanz
Winter Semester 2023/2024 Faculty of Science (Physics)

Übungsblatt Nr. 5

Jörg und Elias

Aufgabe 1: Freier Fall auf einem rotierenden Planeten

a) Für ein Bezugsystem S', welches sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse dreht, gilt im Verhältnis zum Inerzialsystem S: $\vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$. Hier haben wir speziell die Erde in deren Bezugsystem sich ruhende Objekte gegebenüber einem Inerzialsyste, mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{2\pi}{8.6400 \cdot 10^4\,\mathrm{s}} \approx 7.272 \cdot 10^{-5}\,1/\mathrm{s}$ bei kleinen Geschwindigkeiten ist also $2\vec{\omega} \times \vec{v}'$ sehr klein und für Objekte am Äquator gilt $r \approx 6.3 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$, dann gilt am Äquator, da $\vec{\omega}$ und $\vec{r}$ orthogonal: $|2\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')| = 2\omega^2 r \approx 6.7 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m/s^2}$ also auch klein.

b) Wenn ein Körper aus Ruhe von der Höhe h fallen gelassen wird, braucht er auf der Erde die Zeit $t = \sqrt{-\frac{2h}{a}}$, um auf der Erdoberfläche zu landen. Es gilt

$$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_C + \vec{F}_{ZF}$$

Da die Corioliskraft in Richtung der Schwerkraft vernachlässigt werden kann und die Zentrifugalkraft parallel zur Schwerkraft ist, gilt für die Kraft in Richtung der Schwerkraft:

$$\begin{aligned} \vec{F}_z' &= \vec{F} + \vec{F}_{ZF} \\ m\vec{a}_z' &= m\vec{a} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \end{aligned}$$

und da $\vec{\omega}$ nach Norden, $\vec{r}'$ orthogonal dazu nach oben und somit $\vec{\omega} \times \vec{r}'$ nach Osten, zeigt $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$ nach unten, mit dem negativen Vorzeichen, wiederrum nach oben und da $\vec{\omega}, \vec{r}', \vec{\omega} \times \vec{r}'$ orthogonal zueinander stehen gilt

$$a_z' = a + \omega^2 r'$$

D.h. wenn sich das Objekt zu begin in Stillstand auf der Höhe h befand, gilt

$$\begin{aligned} v_z' &= a't + \underbrace{v_0}_{=0\,\mathrm{m/s}} \\ z' &= \frac{1}{2}a't + \underbrace{z_0}_{=h} \end{aligned}$$

D.h. wenn das Objekt die Höhe $0\,\mathrm{m}$ hat, dann ist die Zeit $t = \sqrt{\frac{-2h}{a'}}$ verstrichen.

Die Corioliskraft, die orthogonal zu Schwerkraft zeigt, bekommt man durch:

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$$
$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times (\vec{v}'_z + \vec{v}'_y)$$
$$\vec{F}_C = \underbrace{-2m\vec{\omega} \times \vec{v}'_z}_{=\vec{F}_{Cy}} \underbrace{-2m\vec{\omega} \times \vec{v}'_y}_{=F_{Cz}}$$

Es gilt für die Kraft orthogonal der Schwerkraft:

$$\begin{aligned}
\vec{F}'_y &= \vec{F}_{C_y} \\
m\vec{a}'_y &= -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'_z \\
\vec{a}'_y &= -2\vec{\omega} \times \vec{v}'_z \\
\frac{dv'_y}{dt} &= -2\vec{\omega} \times \vec{a}'_z t \\
dv'_y &= -2\vec{\omega} \times a'_z t dt \\
\int_{v_{y0}=0}^{v_y} dv'_y &= -2 \int_{t_0=0}^{t} \vec{\omega} \times \vec{a}'_z t' dt' \\
\vec{v}'_y &= -\vec{\omega} \times \vec{a}'_z t^2 \\
\frac{d\vec{z}'_y}{dt} &= -\vec{\omega} \times \vec{a}'_z t^2 \\
\int_{z_{y0}=0\,\mathrm{m}}^{z_y} d\vec{z}'_y &= -\int_0^t \vec{\omega} \times \vec{a}'_z t'^2 dt' \\
\vec{z}_y &= -\frac{1}{3}\vec{\omega} \times \vec{a}'_z t^3
\end{aligned}$$

Und da $\vec{\omega}$ orthogonal zu $\vec{a}_z$:

$$z_y = -\frac{1}{3}\omega a' t^3$$
$$z_y = -\frac{1}{3}\omega a' \sqrt{-\frac{2^3 h^3}{a'^3}}$$
$$z_y = -\frac{2}{3}\omega \sqrt{-\frac{2h^3}{a'}}$$

Die Richtung kann erlesen werden aus

$$\vec{z}_y = -\frac{1}{3}\vec{\omega} \times \vec{a}'_z t^3$$

Da nämlich $\vec{\omega}$ Richtung Norden und a'_z gen Erdmittelpunkt zeigt, zeigt $\vec{\omega} \times \vec{a}'_z$ Richtung Westen.

c) Da dann $\vec{r}'$ und $\vec{\omega}$ nicht mehr orthogonal zueinaner stehen würden, wäre die Zentrifugalkraft kleiner, also die scheinbare Schwerkraft wäre größer. Und da das Objekt in Richtung der Schwerkraft beschleunigt wird, und diese parallel zu $\vec{r}'$ ist, ist auch die Corioliskraft $\vec{F}_C = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$ kleiner, und die Ablenkung wird geringer.

Aufgabe 2: Einwegachterbahn

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
E_1 &= E_0 \\
mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 &= mgh_0 + \frac{1}{2}mv_1^2 \\
mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 &= mgh_0 \\
v_1^2 &= 2g(h_0 - h_1) \\
v_1 &= \sqrt{2g(h_0 - h_1)}
\end{aligned}
$$

a) $v_1 = \sqrt{2g(h_0 - 2R)}$ Wenn $2R > h_0$ dann steht etwas negatives unter der Wurzel, das ist nicht so schön...
$R_{max} = \frac{1}{2}h_0$

b) $v_3 = \sqrt{2g(h_0 - h_3)} = \sqrt{2g(h_0 - (h_0 - h_0\cos\alpha)} = \sqrt{2gh_0\cos\alpha}$, also:

$$\vec{v} = \sqrt{2gh_0\cos\alpha}\begin{pmatrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{pmatrix}$$

c)

$$
\begin{aligned}
v_y &= \sqrt{2gh_0\cos\alpha}\sin(\alpha) - gt \\
h &= \sqrt{2gh_0\cos\alpha}\sin(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 + h_0(1-\cos\alpha)
\end{aligned}
$$

wenn also das Teilchen auf Höhe 0 ist:

$$
\begin{aligned}
0 &= \sqrt{2gh_0\cos\alpha}\sin(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 + h_0(1-\cos\alpha) \\
t &= \frac{\sqrt{2gh_0\cos\alpha}\sin(\alpha) + \sqrt{2gh_0\cos\alpha\sin^2\alpha + 2gh_0(1-\cos\alpha)}}{g} \\
t &= \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \cdot \left(\sqrt{\cos\alpha}\sin(\alpha) + \sqrt{\cos\alpha\sin^2\alpha + (1-\cos\alpha)}\right) \\
t &= \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \cdot \left(\sqrt{\cos\alpha}\sin(\alpha) + \sqrt{\cos\alpha(1-\cos^2\alpha) + 1 - \cos\alpha}\right) \\
t &= \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \cdot \left(\sqrt{\cos\alpha}\sin(\alpha) + \sqrt{\cos\alpha - \cos^3\alpha + 1 - \cos\alpha}\right) \\
t &= \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \cdot \left(\sqrt{\cos\alpha}\sin(\alpha) + \sqrt{1-\cos^3\alpha}\right)
\end{aligned}
$$

und dann hat es die Strecke $\delta x = v_3 \cos(\alpha) t$ zurückgelegt:

$$\delta x = \sqrt{2gh_0 \cos\alpha} \cos\alpha \cdot \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \cdot \left(\sqrt{\cos\alpha} \sin(\alpha) + \sqrt{1 - \cos^3\alpha}\right)$$
$$\delta x = 2gh_0 \cdot \sqrt{\cos^3\alpha} \cdot \left(\sqrt{\cos\alpha} \sin\alpha + \sqrt{1 - \cos^3\alpha}\right)$$
$$\delta x = 2gh_0 \cdot \left(\sqrt{\cos^4\alpha} \sin\alpha + \sqrt{\cos^3\alpha - \cos^6\alpha}\right)$$
$$\delta x = 2gh_0 \cdot \left(\sin\alpha \cos^2\alpha + \sqrt{\cos^3\alpha - \cos^6\alpha}\right)$$

was quasi zu zeigen war