Integrierter Kurs I (WiSe 2023/24)

Prof. M. Müller, Prof. U. Nowak, T. Dannegger

Universität Konstanz

Übungsblatt Nr. 2

Abgabe in Ilias bis zum 13.11.2023, 08:00 Uhr.
Besprechung am 15.11.2023 in der Übung.

Aufgabe 1: Orthonormalbasis (3 Punkte)

Seien $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ orthogonale Einheitsvektoren.

a) Berechnen Sie **(1 Punkt)**

$$(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_3 \quad \text{und} \quad (4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2) \cdot (7\vec{e}_1 - 16\vec{e}_3).$$

b) Bestimmen sie X so, dass die Vektoren

$$\vec{a} = 2\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + X\vec{e}_3 \quad \text{und} \quad \vec{b} = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$$

orthogonal zueinander sind. **(1 Punkt)**

c) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\vec{v} = 1\vec{e}_1 - 1\vec{e}_2 + 1\vec{e}_3 \quad \text{und} \quad \vec{w} = -3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 1\vec{e}_3$$

linear unabhängig sind. **(1 Punkt)**

Aufgabe 2: Raketengleichungen (5 Punkte)

Eine senkrecht startende Rakete der Anfangsmasse m_0 stößt pro Zeiteinheit die Gasmenge α mit der Geschwindigkeit v_0 aus. Die Gravitationskraft soll dabei als konstant angenommen werden, das heißt wir fliegen nicht allzu weit ins All und die Luftreibung wird vernachlässigt, das heißt wir verlassen die Atmosphäre schnell.

a) Gesucht ist die Bewegungsgleichung für die Geschwindigkeit der Rakete sowie deren Lösung. **(3 Punkte)**

b) Berechnen Sie daraus die Steighöhe als Funktion der Zeit. **(1½ Punkte)**

c) Warum ist es sinnvoll mehrstufige Raketen zu bauen? **(½ Punkt)**

Hinweis: Möglicherweise hilfreich ist die Substitution

$$u = 1 - \frac{\alpha t}{m_0} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}u = -\frac{\alpha \mathrm{d}t}{m_0}. \tag{$*$}$$

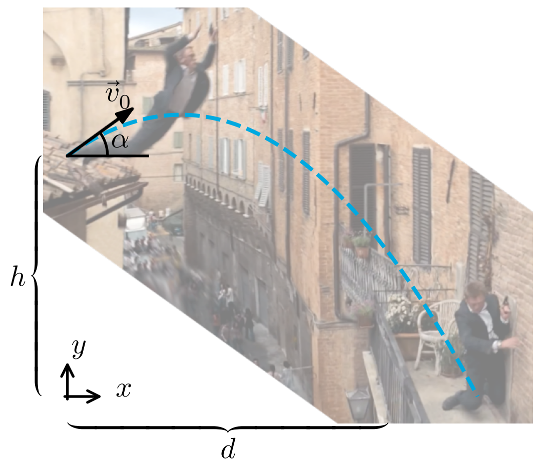
Aufgabe 3: Freier Fall (2 Punkte)

Ein Sprung von der Fahrradbrücke ist ein gutes Beispiel für den freien Fall im Gravitationsfeld. Da das als Experiment zu gefährlich ist, nähern wir uns dem Problem mithilfe der sicheren theoretischen Physik. Abstrahieren Sie die springende Person als Massenpunkt mit Masse m im homogenen Schwerefeld der Erde mit Fallbeschleunigung $g \approx 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ und vernachlässigen Sie die Luftreibung[1].

a) Nach welcher Zeit trifft der Massenpunkt auf dem Wasser in $h = 8\,\mathrm{m}$ Tiefe auf und welche Geschwindigkeit hat er dort? **(1 Punkt)**

b) Eine halbe Sekunde später wird ein Rettungsring hinterher geworfen. Mit welcher Anfangsgeschwindigkeit v_0 muss der Ring geworfen werden, damit er gleichzeitig wie der Massenpunkt aus a) auf die Wasseroberfläche trifft? **(1 Punkt)**

Aufgabe 4: Schräger Sprung (unbepunktet)



James Bond verfolgt irgendeinen Bösewicht über die Dächer einer alten italienischen Stadt. An einer Stelle springt er von einem Dach zu einem gegenüberliegenden Balkon, der $d = 4\,\mathrm{m}$ entfernt und $h = 3\,\mathrm{m}$ tiefer liegt.

a) Schafft er es über den Zwischenraum, wenn er horizontal abspringt mit einer Geschwindigkeit von $v_0 = |\vec{v}_0| = 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$?

b) Bestimmen Sie die Sprungweite $x(\alpha)$ als Funktion des Absprungwinkels α bei gleichbleibender Absprunggeschwindigkeit v_0. Zeichnen Sie $x(\alpha)$ im Bereich zwischen 0° und 90°.

c) Unter welchem Winkel sollte er abspringen, um die Sprungweite x zu maximieren?

Hinweis: Eine grafische Lösung ist ausreichend.

[1] Der freie Fall mit Reibung folgt auf einem der nächsten Übungsblätter.