November 14, 2023 Universität Konstanz
Wintersemester 2023/2024 Fachbereich Mathematik und Statistik

BMA 4

Aufgabe 4: Beweismechanik

a) **Vor.:**

$$A := \{x \in \mathbb{R} : |x-1| \geq 2\},$$
$$B := \{x \in \mathbb{R} : (x \leq 2) \wedge (x^2 - 1 < 0)\}$$

Beh.: $A \subset \mathbb{R} \setminus B$

Proof

Z.z $\forall a \in A : a \in \mathbb{R} \setminus B$
Gegeben $a \in A$, d.h. $a \in \mathbb{R}$ und $|a-1| \geq 2$, zu zeigen $a \in \mathbb{R} \setminus B$.
Also zu zeigen $a \in \mathbb{R}$ und $a \notin B$
$a \in \mathbb{R}$ gegeben, noch zu zeigen $a \notin B$. Da $|a-1| \geq 2$ gegeben, gilt:

Fall 1: $a - 1 \geq 2$, also $a \geq 3$.
Wir führen einen Beweis durch Widerspruch und nehmen dazu an, $a \in B$. Dann gilt insbesondere $(a \leq 2) \wedge (a^2 - 1 < 0)$, also insbesondere $a \leq 2$, was im Widerspruch zu $a \geq 3$ steht. Also ist unsere Annahme falsch, dass $a \in B$, folglich gilt $a \notin B$.

Fall 2: $-(a-1) \geq 2$, also $-a + 1 \geq 2$, also $a \leq -1$, also $-a \geq -(-1) = 1$

$$a \leq -1$$
$$a^2 \geq -a \underbrace{\geq}_{\text{da } -a \geq 1} 1$$
$$a^2 - 1 \geq 0$$

Wir führen einen Beweis durch Widerspruch und nehmen dazu an, dass $a \in B$. Dann gilt insbesondere $(a \leq 2) \wedge (a^2 - 1 < 0)$, also insbesondere $a^2 - 1 < 0$, was in einem Widerspruch zu $a^2 - 1 \geq 0$ steht. Also war die Annahme falsch, dass $a \in B$ und daraus folgt, dass $a \notin B$ gilt. $\square$

b) **Vor.:** X eine Menge und $A, B \subset X$ zwei Teilmengen von X.
Beh.:

$$X \setminus (A \setminus B) = (X \setminus A) \cup B$$

Proof

Zu zeigen $X \setminus (A \setminus B) \subset (X \setminus A) \cup B$ und $X \setminus (A \setminus B) \supset (X \setminus A) \cup B$

'$\subset$': zu zeigen $\forall x \in X \setminus (A \setminus B) : x \in (X \setminus A) \cup B$, sei $x \in X \setminus (A \setminus B)$ gegeben, also $x \in X$ und $x \notin A \setminus B$, zu zeigen $x \in (X \setminus A) \cup B$, also zu zeigen $x \in (X \setminus A) \vee x \in B$, also zu zeigen $(x \in X \wedge x \notin A) \vee x \in B$.

$$\begin{aligned} x \notin \{a \in X : a \in A \wedge a \notin B\} &\mid \text{Def.} \\ \neg\,(x \in \{a \in X : a \in A \wedge a \notin B\}) &\mid \text{Def.} \\ \neg\,(x \in A \wedge x \notin B) &\mid \text{De Morgan} \\ x \notin A \vee x \in B & \\ (wahr \wedge x \notin A) \vee x \in B & \end{aligned}$$

Und da $x \in X$ gegeben gilt: $(x \in X \wedge x \notin A) \vee x \in B$, was zu zeigen war

'$\supset$' Also zu zeigen $\forall x \in (X \setminus A) \cup B : x \in X \setminus (A \setminus B)$.
Sei

$$x \in (X \setminus A) \cup B \tag{1}$$

gegeben, zu zeigen $x \in X \setminus (A \setminus B)$.
Aus $X \setminus A \subset X$ und $B \subset X$ folgt $x \in X$. Aus (1) folgt:

$$\begin{aligned} x \in X \setminus A \vee x \in B &\mid \text{Def.} \\ (x \in X \wedge x \notin A) \vee x \in B &\mid \text{Distributivität} \\ (x \in X \vee x \in B) \wedge (x \notin A \vee x \in B) &\mid \text{Da } B \subset X \\ (x \in X) \wedge (x \notin A \vee x \in B) &\mid \text{De Morgan} \\ (x \in X) \wedge (\neg\,(x \in A \wedge x \notin B)) &\mid \text{Definition} \\ (x \in X) \wedge (\neg\,(x \in \{a \in A \wedge a \notin B\})) & \\ (x \in X) \wedge x \notin \{a \in A \wedge a \notin B\}) &\mid \text{Definition} \\ (x \in X) \wedge (x \notin A \setminus B) &\mid \text{Definition} \\ x \in X \setminus (A \setminus B) & \end{aligned}$$

$\square$