BMA

Vor.: $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ und $0 < a_1 < b_1$ Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{b\in\mathbb{N}}$ Folgen reeler Zahlen, rekursiv definiert durch

$$a_{n+1} := \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} \text{ und } b_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Beh.:

(a) (i) $0 < a_n < b_n$,

(ii) $a_n \leq a_{n+1}$ und $b_n \geq b_{n+1}$

(iii) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$

(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} und (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren gegen den gleichen Limes und $(a_n - b_n)$ ist eine Nullfolge

(c) $\exists! x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$ und für dieses x gilt $x = \sqrt{a_1b_1}$

Proof

(a) (i) **I.V.** $\exists n : 0 < a_n < b_n$

I.A. $n = 1$

$0 < a_n < b_n$ gegeben.

I.S. $n \curvearrowright n + 1$

zu zeigen $0 < a_{n+1} < b_{n+1}$, also zu zeigen:

$$0 < \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} < \frac{a_n + b_n}{2}$$

$$\begin{aligned} 0 < \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} &< \frac{a_n + b_n}{2} \\ 0 < 4a_nb_n &< (a_n + b_n)^2 \\ 0 < 4a_nb_n &< a_n^2 + 2a_nb_n + b_n^2 \\ -4a_nb_n < 0 &< a_n^2 - 2a_nb_n + b_n^2 \\ \underbrace{-4a_nb_n}_{\text{da } a_n>0 \text{ und } b_n>0} < 0 &< (a_n - b_n)^2 \end{aligned}$$

■

(ii)

$$\begin{aligned}
a_n &\leq 1 \cdot a_n \\
a_n &\leq \frac{2b_n}{b_n + b_n} a_n \quad | \quad \text{da } a_n + b_n \leq b_n + b_n \iff \frac{1}{b_n + b_n} \leq \frac{1}{a_n + b_n} \\
a_n &\leq \frac{2b_n}{a_n + b_n} a_n \\
a_n &\leq a_{n+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &\geq 1 \cdot b_n \\
b_n &\geq \frac{2b_n}{2} \quad | \quad \text{da } a_n + b_n \leq b_n + b_n \\
b_n &\geq \frac{a_n + b_n}{2} \\
b_n &\geq b_{n+1}
\end{aligned}$$

■

(iii) Also zu zeigen: $\forall x \subset [a_{n+1}, b_{n+1}] : x \in [a_n, b_n]$. Sei $x \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$ gegeben, zu zeigen: $x \in [a_n, b_n]$.
Also zu zeigen $a_n \leq x \leq b_n$. Es gilt, da $x \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$: $a_n \leq a_{n+1} \leq x \leq b_{n+1} \leq b_n$ ■

(b) zu zeigen $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.
Da $(a_n), (b_n)$ monoton und durch sich gegenseitig beschränkt, gilt $(a_n), (b_n)$ konvergent, also $\exists a := \lim_{n\to\infty} a_n$ und $\exists b := \lim_{n\to\infty} b_n$, wähle ein solches a und b. Zu zeigen $a = b$.
Es gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + b_n}{2} \\
\lim_{n\to\infty} b_n &= \frac{a + b}{2} \\
b &= \frac{a + b}{2} \\
2b &= a + b \\
b &= a
\end{aligned}$$

Und zu zeigen $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Also $0 = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n)$ ■

(c) zu zeigen Existiert $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$ und Eindeutigkeit dieses x'es Setze $x := \sqrt{a_1 b_1}$ zu zeigen $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$

I.V. $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}} = a_1 b_1$

I.A. $n = 1$
$a_1 b_1 = a_1 b_1$ gegeben.

i.S. $n \curvearrowright n + 1$

$$\begin{aligned}
a_{n+1} b_{n+1} &= \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \cdot \frac{a_n + b_n}{2} \\
a_{n+1} b_{n+1} &= a_n b_n \quad | \quad \text{nach I.V.} \\
a_{n+1} b_{n+1} &= a_1 b_1
\end{aligned}$$

Also $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = a_1 b_1$
Also $a_1 b_1 = \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = (\lim_{n\to\infty} a_n)$
Also $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{a_1 b_1} = x$
Also $x \geq a_n$ und $x \leq b_n$, also $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$. Noch zu zeigen Eindeutigkeit von x
Da $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}([a_n, b_n]) = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$ gilt das Intervallschachtelungsprinzip, also $\exists! guenter \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$, also folgt für ein soches $guenter$, $x = guenter$ und da $guenter$ eindeutig ist, ist auch x eindeutig. ■

(e)

$$[a_1, b_1] = [1, 2]$$
$$[a_2, b_2] = \left[\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right]$$
$$[a_3, b_3] = \left[\frac{24}{17}, \frac{17}{12}\right]$$
$$[a_4, b_4] = \left[\frac{816}{577}, \frac{577}{408}\right]$$

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = \frac{3}{2}$$
$$x_3 = \frac{17}{12}$$
$$x_4 = \frac{577}{408}$$