Analysis 1

15.12.2023
F. Gmeineder
P. Stephan
A. von Pippich
Wintersemester 2023
Abgabe: Bis zum 22.12.2023 um 10:00 Uhr

Universität Konstanz

Übungsblatt 9

Aufgabe 1: (Gleichmäßige) Stetigkeit **5 + 5 = 10 Punkte**

(a) Zeigen Sie, dass $x \mapsto \sqrt{x}$ gleichmäßig stetig ist auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeigen Sie hierzu die Ungleichung $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$ für alle $x, y \geq 0$.

(b) Zeigen Sie mit der ε-δ-Charakterisierung, dass

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^2}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1, \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ stetig ist, nicht jedoch in $x_0 = 1$.

Aufgabe 2: Sätze über stetige Funktionen I **5 + 5 = 10 Punkte**

(a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige und ungerade Funktion. Letzteres bedeutet, dass $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Zeigen Sie, dass f eine Nullstelle besitzt: $f(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}$. *Tipp: Zwischenwertsatz.*

(b) Sei $K \subset \mathbb{R}$ nichtleer, kompakt und $f\colon K \to K$ eine Funktion mit $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ für alle $x, y \in K$. Zeigen Sie, dass f genau einen Fixpunkt $x_0 \in K$ besitzt. *Tipp: Satz über stetige Funktionen auf Kompakta.*

Aufgabe 3: Sätze über stetige Funktionen II **8 + 2 = 10 Punkte**

(a) Zeigen Sie, dass keine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jeden ihrer Werte genau zweimal annimmt. *Hinweis: Zwischenwertsatz und Satz über stetige Funktionen auf Kompakta.*

(b) Skizzieren Sie den Graphen einer unstetigen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die jede reelle Zahl genau zweimal annimmt.

Aufgabe 4: Funktionenfolgen **5 + 5 = 10 Punkte**

Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz, und geben Sie gegebenenfalls die Grenzfunktion an.

(a) $f_n(x) := \sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2}, \quad (n \in \mathbb{N}),$

(b) $g_n(x) := x^2 \sum\limits_{k=0}^{n-1} (1 + x^2)^{-k}, \quad (n \in \mathbb{N}).$