Integrierter Kurs I (WiSe 2023/24)

Prof. M. Müller, Prof. U. Nowak, T. Dannegger

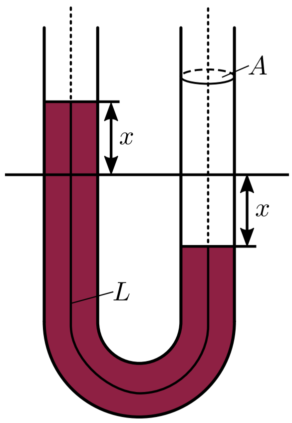
Universität Konstanz

Übungsblatt Nr. 8

Abgabe in Ilias bis zum 08.01.2024, 08:00 Uhr.
Besprechung am 10.01.2024 in der Übung.

Aufgabe 1: Glühwein im U-Rohr (5 Punkte)

Ein U-Rohr ist mit Glühwein gefüllt, der sich reibungsfrei darin bewegen kann, siehe Abbildung. Die Höhe der Glühweinsäule wird durch $x(t)$ bezeichnet, mit $x = 0$ im Gleichgewicht. Die Länge der Glühweinsäule ist L, die Dichte von Glühwein ist ϱ und die Querschnittsfläche des U-Rohrs ist A.



a) Rechnen Sie die Kraft auf der Säule in Abhängigkeit von x aus. **(1 Punkt)**

b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung der Glühweinsäule. Zeigen Sie, dass sie der Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators entspricht, und geben sie die Eigenfrequenz ω_0 des Glühweins an. **(2 Punkte)**

c) Berechnen Sie die Lösung der Bewegungsgleichung für allgemeine Anfangsbedingungen $x(t=0) = x_0$ und $v(t=0) = v_0$.

Da es sich um eine lineare, homogene Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten handelt, kann man den komplexen Ansatz

$$z(t) = A_1 \exp(\lambda_1 t) + A_2 \exp(\lambda_2 t) \tag{$*$}$$

mit $x(t) = \mathrm{Re}(z(t))$ verwenden[1]. Bestimmen Sie die Werte von $\lambda_{1,2}$ durch Einsetzen in die Differenzialgleichung. Geben Sie die Koeffizienten $A_{1,2}$ über die Anfangswerte x_0 und v_0 an. **(2 Punkte)**

[1] Jede lineare, homogene Differenzialgleichung kann durch eine Superposition von solchen Exponentialfunktionen gelöst werden, wie Sie in der Vorlesung gelernt haben.

Aufgabe 2: Rutschendes Geschenkband (5 Punkte)

Beim Geschenkeverpacken endet ein Geschenkband der Länge l an der Tischkante, sodass es zu einem Teil x überhängt, siehe Abbildung. Auf das Band wirkt die Gewichtskraft und eine Reibungskraft mit Reibungskoeffizient $\mu > 0$ zwischen Band und Tisch. Stellen Sie die Bewegungsgleichung für $x(t)$ auf und lösen Sie sie. Nehmen Sie dazu an, dass das Band zu Beginn ruhe und ein Stück $0 < x_0 < l$ überhängt. Wie lange dauert es, bis das Band vom Tisch heruntergerutscht ist? Wie groß darf x_0 höchstens sein, damit das Band auf dem Tisch liegen bleibt?

Hinweis: Substituieren Sie geschickt, um die Differenzialgleichung in eine homogene zu überführen. Dann funktioniert der gleiche Ansatz $(*)$ wie in Aufgabe 1.

Aufgabe 3: Temperaturprofil (unbepunktet)

Wenn eines der Geschenke nah an eine Kerze gerät, stellt sich auf dem Geschenkpapier, abhängig vom Winkel zwischen dem Papier und der Flamme, ein Temperaturprofil ein, das wir durch

$$T(x, y) = T_0 \mathrm{e}^{\left(-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)}$$

mit den Parametern $a, b > 0$ parametrisieren können.

a) Welche Form haben die Isolinien (Linien konstanter Temperatur)? Fertigen Sie eine Skizze dazu an.

b) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla T(x, y)$. Zeichnen Sie das Gradientenfeld ebenfalls in die Skizze ein.

c) Berechnen Sie die Ableitungen

$$\frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial x \partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y \partial x}.$$

Frohe Weihnachten und einen guten Start ins Jahr 2024!