Analysis 1

17.11.2023

F. Gmeineder
P. Stephan
A. von Pippich

Wintersemester 2023

Abgabe: Bis zum 24.11.2023 um 10:00 Uhr

Universität Konstanz

Übungsblatt 5

Aufgabe 1: **5 + 5 = 10 Punkte**

(a) Sei (a_n) eine konvergente Folge. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{n}(a_1 + ... + a_n)$ gegen denselben Grenzwert konvergiert.

(b) Gilt auch die Umkehrung? Das heißt: Ist (a_n) eine Folge, für die $\frac{1}{n}(a_1 + ... + a_n)$ konvergiert, konvergiert dann auch (a_n) und zwar gegen denselben Grenzwert?

Aufgabe 2: **6 + 4 = 10 Punkte**

Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie: Gibt es ein $0 < q < 1$ mit $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq q|a_{n+1} - a_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert (a_n) gegen ein $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie hierzu, dass (a_n) Cauchy ist.

(b) Zeigen Sie durch Angabe eines Beispiels, dass es Cauchyfolgen (a_n) in $\mathbb{R}$ gibt, die das in (a) gegebene Kriterium verletzen. Das bedeutet, dass es eine Cauchyfolge gibt, für die kein $0 < q < 1$ mit $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq q|a_{n+1} - a_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3: **5 + 5 = 10 Punkte**

(a) Seien $a, b > 0$. Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge (a_n), wobei $a_n := (-1)^n a + (-1)^{n+1} b + \sqrt[n]{a+b}$.

(b) Es seien $(a_n), (b_n)$ zwei Folgen in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass in dieser Situation die Ungleichungskette

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n &\leq \liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n\end{aligned}$$

gilt, und geben Sie ein Beispiel von Folgen, für die in der voranstehenden Ungleichungskette überall '<' steht.

Aufgabe 4: **6 + 4 = 10 Punkte**

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}_{>0} := \{x \in \mathbb{R} \colon\ x > 0\}$, für die die Quotientenfolge $(\frac{a_{n+1}}{a_n})$ gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass $(\sqrt[n]{a_n})$ ebenfalls gegen a konvergiert.

(b) Zeigen Sie als Anwendung von (a), dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \mathrm{e} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}} = \frac{27}{\mathrm{e}^2}.$$

Tipp: Benutzen Sie ein 🔭-Produkt und das 🥪theorem.

Aufgabe 1 wird als Musterlösung hochgeladen, Aufgabe 2 und 3 in den Tutorien besprochen, Aufgabe 4 in der Plenumsübung.