Analysis 1

10.11.2023
F. Gmeineder
P. Stephan
A. von Pippich
Wintersemester 2023
Abgabe: Bis zum 17.11.2023 um 10:00 Uhr

Universität Konstanz

Übungsblatt 4

Aufgabe 1: **4 + (2+2+2) = 10 Punkte**

Es seien (a_n) und (b_n) Folgen mit Werten in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Ist (a_n) eine Nullfolge und (b_n) beschränkt, so konvergiert die Produktfolge $(a_n b_n)$ gegen Null.

(b) Sei (a_n) eine Nullfolge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie für jede der nachfolgenden Aussagen je eine bestimmt divergente Folge (b_n) an, so dass der entsprechende Fall eintritt. Beweisen Sie Ihre Aussagen.

(i) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.
(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 1$.
(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$.

Aufgabe 2: Konvergenz in der Praxis **2,5+,2,5+2,5+2,5 = 10 Punkte**

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz für $n \to \infty$ und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

(i) $a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$

(ii) $b_n := \frac{2^n + (-3)^n}{(-2)^n + 3^n}$, $n \in \mathbb{N}$

(iii) $c_n := \frac{n^2}{n^2+2n+2}$, $n \in \mathbb{N}$

(iv) $d_n := \frac{1}{n}(-1)^n + 1$, $n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 3: Kettenbruch **7+3 Punkte = 10 Punkte**

Sei $a_0 := 1$ und $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über monotone Konvergenz, dass (a_n) konvergiert und bestimmen Sie den Limes.

(b) Warum kann das Ergebnis als Wert eines unendlichen Kettenbruchs interpretiert werden?

(c) **Bonus - 2 Zusatzpunkte:** Was fällt Ihnen über die gekürzten Zähler und Nenner der Folgenglieder auf?

Hinweis: Der Satz über monotone Konvergenz wird erst in der Vorlesung am Dienstag behandelt. Dieser besagt, dass eine beschränkte, monotone Folge konvergiert.

Aufgabe 4: Beweismechanik **10 Punkte**

(a) Betrachte die folgenden Teilmengen der reellen Zahlen

$$A := \{x \in \mathbb{R} : |x-1| \geq 2\},$$
$$B := \{x \in \mathbb{R} : (x \leq 2) \wedge (x^2 - 1 < 0)\}.$$

Zeigen Sie, dass $A \subset \mathbb{R} \setminus B$ gilt.

(b) Es seien X eine Menge und $A, B \subset X$ zwei Teilmengen von X. Beweisen Sie die Mengengleichheit

$$X \setminus (A \setminus B) = (X \setminus A) \cup B.$$

Hinweis: Die Beweismechanik-Abgabe muss als Zweier-Team abgegeben werden. Speichern Sie Ihre gemeinsame Beweismechanik-Abgabe in einer PDF-Datei unter einem Namen der Form a1blatt4-bma-ihrnachname-nachnameihrespartners.pdf *ab, wobei Sie* ihrnachname *durch Ihren Nachnamen ersetzen usw. Laden Sie die Beweismechanik-Abgabe dann getrennt von den anderen Aufgaben auf der ILIAS-Seite der Vorlesung unter „Abgabe Beweismechanik-Aufgabe“ hoch. Die Abgabe im Zweier-Team ist verpflichtend. Pro Zweier-Team bitte nur eine Abgabe!*

Aufgabe 1 und 2 werden in den Tutorien besprochen, Aufgabe 3 als Musterlösung hochgeladen und Aufgabe 4 in der Plenumsübung.