2024-01-24
Winter Semester 2023/2024

University of Konstanz
Faculty of Science
(Mathematics and Statistics)

BMA

Aufgabe 1: Beweismechanikaufgabe

Beh.: $f : D \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^2}$

(i) ist nicht gleichmäßig stetig in $D = (0, 1)$ und

(ii) gleichmäßig stetig in $D = (1, \infty)$.

Proof

(i) z.z. $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x, x_0 \in D : |x - x_0| < \delta \land |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Wähle $\varepsilon < 1$, sei $\delta > 0$, sei $\mathbb{R}_{>0} \ni a := \min\{\delta, 1\}$ dann wähle $x = \frac{a}{2}, x_0 \frac{a}{3}$ so, dass $|x - x_0| = \left|\frac{3a-2a}{6}\right| = \frac{a}{6} < a \leq \delta$.
Aber es gilt

$$\left|\frac{4}{a^2} - \frac{9}{a^2}\right| = \frac{5}{a^2} \geq 5 > 1 > \varepsilon \qquad \blacksquare$$

(ii) z.z. $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, x_0 \in D : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$, dann gilt für alle $x, x_0 \in D$, also $1 < x, x_0$ mit $|x - x_0| < \delta$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x_0^2}\right| &= \left|\frac{x_0^2 - x^2}{x^2 x_0^2}\right| \\
&= \left|\frac{(x_0 - x) \cdot (x_0 + x)}{x^2 x_0^2}\right| \\
&= |(x_0 - x)| \cdot \left|\frac{x_0 + x}{x^2 x_0^2}\right| \\
&\leq \delta \cdot \left|\frac{x_0}{x^2 x_0^2} + \frac{x}{x^2 x_0^2}\right| \qquad | \quad \text{Da } 1 < x < x^2, 1 < x_0 < x_0^2 \\
&\leq \delta \cdot \left|\frac{x_0}{x_0} + \frac{x}{x}\right| \\
&= 2\delta \\
&= \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$