2024-07-05
Summer Semester 2024
Gruppe 3, Briefkasten 11, Baiz

University of Konstanz
Faculty of Science
(Mathematics and Statistics)

Übungsblatt 11

Elias Gestrich

Aufgabe 11.1:

(b) Sei A_i A ohne die $i+1,\dots,n$-ten Zeilen und Spalten. Entwickle die n-te Zeile $\det(A)$, sodass

$$\det(A) = (-1)^{n+n} a_{nn} \det(A_{n-1}) = (-1)^{2n} a_{nn} \det(A_{n-1}) = a_{nn} \det(A_{n-1})$$

Folge dieses Scheme:

$$\begin{aligned}\det(A) &= a_{nn} \det(A_{n-1}) \\ &= \underbrace{(-1)^{2(n-1)}}_{=1} a_{nn} a_{(n-1),(n-1)} \det(A_{n-2}) \\ &= \cdots = a_{nn} a_{(n-1),(n-1)} \cdots a_{22} \det(a_{11}) \\ &= \prod_{i=1}^{n} a_{ii}\end{aligned}$$

Aufgabe 11.2:

(a) **Vor.:** $\mathcal{B}$ Basis zu W und $(\overline{\alpha_1},\dots,\overline{\alpha_n})$ Basis zu V/W, also insbesondere $\overline{\alpha_1},\dots,\overline{\alpha_n}$ linear unabhängig
Bew.: Zu zeigen $\mathcal{B}' \coloneqq \{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ l.u. und $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}'$ l.u., also $\operatorname{span} \mathcal{B}' \cap W = \{0\}$, also für $c_1,\dots,c_n \in K$, die nicht alle Null sind gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i \notin W$$

Zum Widerspruch, nehme an es gäbe soche $c_1,\dots,c_n$, dann würde gelten

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i \in W \implies \overline{\sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i} = \overline{0} = \sum_{i=1}^{n} c_i \overline{\alpha_i}$$

also $\overline{\alpha_1},\dots,\overline{\alpha_n}$ linear abhängig was im Widerspruch zur Vor. steht.

(b) **Vor.:** Für alle $\alpha \in W$ gilt $T(\alpha) \in W$
Beh.: Für alle $f \in K[x]$ gilt für alle $\alpha \in W$, dass $f(T)(\alpha) \in W$.
Bew.: Beh. $\forall i \in N_0, \alpha \in W : T^i(\alpha) \in W$. Bew. der Beh. durch vollständige Induktion: Sei $\alpha \in W$ beliebig:

I.A. $i = 0$: $T^0(\alpha) = \operatorname{Id}(\alpha) = \alpha \in W$

I.V. $T^i(\alpha) \in W$

I.S. $i \rightsquigarrow i+1$:

$$T^{i+1}(\alpha) = T\left(\underbrace{T^i(\alpha)}_{\in W \text{ nach I.V.}}\right) \in W$$

Aufgabe 11.3:

(a) Sei $\mathcal{B}_1$ Basis von U_1 und $\mathcal{B}_2$ Basis von U_2, sodass $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ eine geordnete Basis von U, wobei die ersten m Elementen aus U_1 und die $m+1$ bis n-ten Elemente aus U_2 kommen. Dann ist nach Vorlesung

$$[T]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} [T_{U_1}]_{\mathcal{B}_1} & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

so dass Das MinPol T