2024-06-16
Summer Semester 2024
Gruppe 3, Briefkasten 11, Baiz

University of Konstanz
Faculty of Science
(Mathematics and Statistics)

Übungsblatt 08

Elias Gestrich

Aufgabe 8.1:

(a) Zu zeigen: Wenn $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \gamma_i \in K^n, c \in K$ gilt, dass

$$\delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_i + c\gamma_i, \ldots, \alpha_n) = \delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n) + c\delta(\alpha_1, \ldots, \gamma_i, \ldots, \alpha_n)$$

Sei nun also $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \gamma_i \in K^n, c \in K$ gegeben. Betrachte:

$$\begin{aligned}
\delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_i + c\gamma_i, \ldots, \alpha_n) &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi)(\alpha_1)_{\pi(1)} \cdots \left((\alpha_i)_{\pi(i)} + c\,(\gamma_i)_{\pi(i)}\right) \cdots (\alpha_n)_{\pi(n)} \\
&\overset{\text{Körperaxiome}}{=} \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi)(\alpha_1)_{\pi(1)} \cdots (\alpha_i)_{\pi(i)} \cdots (\alpha_n)_{\pi(n)} \\
&\quad + \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi)(\alpha_1)_{\pi(1)} \cdots \left(c\,(\gamma_i)_{\pi(i)}\right) \cdots (\alpha_n)_{\pi(n)} \\
&\overset{\text{Körperaxiome}}{=} \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi)(\alpha_1)_{\pi(1)} \cdots (\alpha_i)_{\pi(i)} \cdots (\alpha_n)_{\pi(n)} \\
&\quad + c \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi)(\alpha_1)_{\pi(1)} \cdots (\gamma_i)_{\pi(i)} \cdots (\alpha_n)_{\pi(n)} \\
&= \delta(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) + c\delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \gamma_i, \alpha_{i+1}, \alpha_n) \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

(b)

"n-linear": Sei $z_1, \ldots, z_n, a_i \in K^n, c \in K$ gegeben, zu zeigen

$$\delta_B\left(z_1, \ldots, z_i + ca_i, z_n\right) = \delta_B\left(z_1, \ldots, z_n\right) + \delta_B\left(z_1, \ldots, z_{i-1}, a_i, z_{i+1}, \ldots, z_n\right)$$

Es gilt:

$$\delta_B\left(z_1, \dots, z_i + ca_i, z_n\right) = \det \begin{pmatrix} z_1 B \\ \vdots \\ \left(z_i + ca_i\right) B \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Dist.}}{=} \det \begin{pmatrix} z_1 B \\ \dots \\ z_i B + c\left(a_i B\right) \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$\overset{n\text{-lin. von det}}{=} \det \begin{pmatrix} z_1 B \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + c \det \begin{pmatrix} z_1 B \\ \vdots \\ z_{i-1} B \\ a_i B \\ z_{i+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$= \delta_B(z_1, \dots z_n) + c\delta_B\left(z_1, \dots, z_{i-1}, a_i, z_{i+1}, \dots, z_n\right)$$

"alternierend": Sei $i \neq j$ mit $z_i = z_j$, zu zeigen:

$$\delta_B\left(z_1, \dots, z_n\right) = 0$$

Betrachte hierfür:

$$\delta_B(z_1, \dots, z_n) = \det \begin{pmatrix} z_1 B \\ \vdots \\ z_n B \end{pmatrix}$$

Da $z_i = z_j$, ist auch $z_i B = z_j B$, also

$$\det \begin{pmatrix} z_1 B \\ \vdots \\ z_n B \end{pmatrix} = 0$$

Da det alternierend ■

Aufgabe 8.2:

" $\implies$ ": Sei $A \in M_{m\times m}(K), B \in M_{m\times n}(K), C \in M_{n\times m}(K)$ gegeben, zu zeigen

$$\det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & \mathcal{O} \end{array}\right) = 0$$

Sei

$$D = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & \mathcal{O} \end{array}\right)$$

So, dass $D_{ij} = 0$, wenn $m+1 \leq i, j \leq n+m$. **Beh.:** $\forall \pi \in S_{m+n} : \exists k \in \{m+1, \ldots, m+n\} : D_{k\pi(k)} = 0$. **Bew.:** Da $n > m$, muss ein $k \in \{m+1, m+n\}$ existieren, so dass $\pi(k) \in \{m+1, m+n\}$ für $k \in \{m+1, m+n\}$, da π bijektiv ist, also

$$|\pi(\{m, \ldots, m+n\}| = |\{m, \ldots, m+n\}| = n$$

Daraus folgt, dass $D_{1\pi(1)} \cdots D_{(m+n)\pi(m+n)} = 0$ für alle π, also

$$\det(D) = \sum_{\pi \in S_{m+n}} \operatorname{sign}(\pi) \prod_{k=1}^{m+n} D_{k\pi(k)} = 0$$

“ $\Longleftarrow$:” Sei $A = \begin{pmatrix}1\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}0\end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix}1\end{pmatrix}$, und $m = n = 1$, dann gilt:

$$\det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & \mathcal{O} \end{array}\right) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 - 0 \cdot 1 = 0$$

Aber da $n \not> m$ steht dies im Widerspruch zur Aussage “$\det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & \mathcal{O} \end{array}\right) = 0$ genau dann, wenn $n > m$ erfüllt ist.”

Aufgabe 8.3:

$$\begin{aligned}
\det(A+B) - (\det(A) + \det(B)) &= (a_{11} + b_{11})(a_{22} + b_{22}) - (a_{12} + b_{12})(a_{21} + b_{21}) \\
&\quad - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \\
&= a_{11}a_{22} + a_{11}b_{22} + b_{11}a_{22} + b_{11}b_{22} \\
&\quad - a_{12}a_{21} - a_{12}b_{21} - b_{12}a_{21} - b_{12}b_{21} \\
&\quad - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \\
&= a_{11}b_{22} + b_{11}a_{22} - a_{12}b_{21} - b_{12}a_{21}
\end{aligned}$$

$$\det(C) + \det(D) = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} + d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}$$

Setze $c_{11} = a_{11}, c_{12} = a_{12}, c_{21} = b_{21}, c_{22} = b_{22}$ und $d_{11} = b_{11}, d_{12} = b_{12}, d_{21} = a_{21}, d_{22} = a_{22}$, so gilt:

$$\begin{aligned}
\det(A+B) - (\det(A) + \det(B)) &= a_{11}b_{22} - a_{12}b_{21} + b_{11}a_{22} - b_{12}a_{21} \\
&= c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} + d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21} \\
&= \det(C) + \det(D)
\end{aligned}$$

Sei zum Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

So dass

$$\det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2, \det(B) = 5 \cdot 8 - 6 \cdot 7 = 40 - 42 = -2$$

und

$$\det(A+B) = (1+5)\cdot(4+8) - (2+6)\,(3+7) = 6\cdot 12 - 8\cdot 10 = 72 - 80 = -8$$

Setze

$$C \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, D \coloneqq \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Sodass $\det(C) = 1\cdot 8 - 2\cdot 7 = 8 - 14 = -6$ und $\det(D) = 5\cdot 4 - 6\cdot 3 = 20 - 18 = 2$ Also

$$\begin{aligned} \det(A+B) - (\det(A) + \det(B)) &= -8 - (-2 + (-2)) \\ &= -8 - (-4) \\ &= -8 + 4 \\ &= -4 \\ &= -6 + 2 \\ &= \det(C) + \det(D) \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

Aufgabe 8.4:

(a)

$$\begin{aligned} \det(A+B) &= \det(2a|b-e|2c|b+d) \\ &\overset{n\text{-linear}}{=} \det(2a|b|2c|b+d) - \det(2a|e|2c|b+d) \\ &\overset{n\text{-linear}}{=} \det(2a|b|2c|b) + \det(2a|b|2c|d) - \det(2a|e|2c|b) - \det(2a|e|2c|d) \\ &\overset{\text{alt.}}{=} \det(2a|b|2c|d) - \det(2a|e|2c|b) - \det(2a|e|2c|d) \\ &\overset{\text{alt.}}{=} 4\det(a|b|c|d) + 4\det(a|-e|c|b) + 4\det(a|d|c|e) \\ &= 4\,(3 - 2 + 5) \\ &= 24 \end{aligned}$$

(b) Entwicklung nach der 4. Spalte:

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= -2 \cdot_n \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot_n \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= -2 \cdot_n (1 \cdot_n 2 \cdot_n 1 +_n 3 \cdot_n 2 \cdot_n 4 +_n 4 \cdot_n 3 \cdot_n 2 \\
&\quad -_n 4 \cdot_n 2 \cdot_n 4 -_n 2 \cdot_n 2 \cdot_n 1 -_n 1 \cdot_n 3 \cdot_n 3) \\
&\quad +_n (1 \cdot_n 2 \cdot_n 0 +_n 3 \cdot_n 2 \cdot_n 3 +_n 4 \cdot_n 3 \cdot_n 1 \\
&\quad -_n 4 \cdot_n 2 \cdot_n 3 -_n 2 \cdot_n 1 \cdot_n 1 -_n 0 \cdot_n 3 \cdot_n 3) \\
&= -_n 2 \cdot_n (2 +_n 3 \cdot_n 2 \cdot_n 4 +_n 4 \cdot_n 3 \cdot_n 2 \\
&\quad -_n 4 \cdot_n 2 \cdot_n 4 -_n 2 \cdot_n 2 -_n 3 \cdot_n 3) \\
&\quad +_n (3 \cdot_n 2 \cdot_n 3 +_n 4 \cdot_n 3 \\
&\quad -_n 4 \cdot_n 2 \cdot_n 3 -_n 2 \cdot_n 1) \\
&= \overline{-2\,(2 + 24 + 24 - 32 - 4 - 9) + 18 + 12 - 24 - 2} \\
&= \overline{-2\,(2 + 48 - 32 - 13) + 30 - 26} \\
&= \overline{-2\,(50 - 45) + 30 - 26} \\
&= \overline{-2\,(5) + 4} \\
&= \overline{-10 + 4} \\
&= \overline{-6}
\end{aligned}$$

Also ist die Determinante über $\mathbb{F}_5$ gleich 4 und über $\mathbb{F}_{11}$ gleich 5

Zusatzaufgabe für Interessierte

Beh.: für alle $(b_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{b_i}$$

ist gerade genau dann wenn n gerade.

I.A. $n = 1$: $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{b_i} = (-1)^{b_1}$ ist ungerade

I.V. wenn n gerade, so $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{b_i}$ gerade, sonst ungerade

I.S. $n \curvearrowright n + 1$:

$$\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{b_i} = (-1)^{b_{n+1}} + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{b_i}$$

Also wenn n gerade, dann ist die Summe $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{b_i}$ gerade so, dass wenn man eins addiert oder subtrahiert das ergebnis ungerade ist, für n ungerade analog, wie gewünscht.

Beh.: $m = \frac{3n}{2}$ für n gerade, und $m = \frac{3n-1}{2} = \frac{3(n-1)}{2} + 1$ wenn n ungerade

I.A. $n = 1$, dann gilt $2|\det(A)$, da für $A = \begin{pmatrix}2\end{pmatrix}$ gilt $2 = 1 \cdot 2 + 0$ und für $A = \begin{pmatrix}-2\end{pmatrix}$ gilt $-2 = -1 \cdot 2 + 0$. Aber $4 \not| \det(A)$, da für $A = \begin{pmatrix}2\end{pmatrix}$ gilt $\forall l \in \mathbb{Z}$, dass $4l < 2$ oder $4l > 2$.

I.V. $m = 2n$ für n gerade, und $m = 2n - 1$ wenn n ungerade

I.S. für n gerade: Sei $(b_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ eine Folge, sodass

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{b_i} \cdot 2 \cdot \det(A[i|j])$$

Nach I.V. ist die größtmögliche zweierpotenz, die alle $\det(A[i|j])$ teilt $2^{\frac{3n}{2}}$ so, dass für alle $c \in \mathbb{Z}, A \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ gilt $c|\det(A) \iff c|\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{b_i} \cdot 2 \cdot 2^{\frac{3n}{2}} \iff c|2^{\frac{3n}{2}+1}\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{b_i}$. Da $\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{b_i}$ ungerade ist für n gerade, gilt also $c|\det(A) \iff c|2^{\frac{3n}{2}+1}$ Also ist das größte m gleich $\frac{3n}{2} + 1$ für n gerade

für n ungerade: Sei $(b_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ eine Folge, sodass

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{b_i} \cdot 2 \cdot \det(A[i|j])$$

Nach I.V. ist die größtmögliche zweierpotenz, die alle $\det(A[i|j])$ teilt $2^{\frac{3n-1}{2}}$ so, dass für alle $c \in \mathbb{Z}, A \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ gilt $c|\det(A) \iff c|\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{b_i} \cdot 2 \cdot 2^{\frac{3n-1}{2}} \iff c|2^{\frac{3n-1}{2}+1}\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{b_i}$. Da $\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{b_i}$ gerade ist für n ungerade, gilt also $c|\det(A) \iff c|2^{\frac{3n-1}{2}+2}$ Also ist das größte m gleich $\frac{3n-1}{2} + 2 = \frac{3(n+1)}{2}$ für n gerade Was zu zeigen war.