University of Konstanz
Faculty of Science
(Physics)

Übungsblatt 08

Davina Schmidt, Elias Gestrich

Aufgabe 1: Kondensatoren

a)

$$C_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \frac{A}{2d}$$
$$C_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_2 \frac{A}{2d}$$
$$Q_1 = C_1 U_1 \iff \frac{Q_1}{C_1} = U_1$$
$$Q_2 = C_2 U_2 \iff \frac{Q_2}{C_2} = U_2$$
$$U_1 = U_2$$

$$\begin{aligned}
\frac{Q_1}{C_1} = U_1 = U_2 &= \frac{Q_2}{C_2} \\
Q_2 &= \frac{C_2}{C_1} Q_1 \\
Q_2 &= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 \frac{A}{2d}}{\varepsilon_0 \varepsilon 1 \frac{A}{2d}} Q_1 \\
Q_2 &= \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon 1} Q_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q &= Q_1 + Q_2 \\
&= Q_1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} Q_1 \\
&= \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) Q_1 \\
Q_1 &= \frac{Q}{1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}
\end{aligned}$$

$$Q_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} Q_1$$
$$Q_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cdot \frac{Q}{1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$
$$Q_2 = \frac{1}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \cdot \frac{Q}{1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$
$$Q_2 = \cdot \frac{Q}{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + 1}$$

$$Q = CU$$
$$C = \frac{Q}{U}$$
$$C = \frac{Q_1 + Q_2}{U}$$
$$C = \frac{Q_1}{U} + \frac{Q_2}{U}$$
$$C = \frac{Q_1}{U_1} + \frac{Q_2}{U_2}$$
$$C = \frac{Q_1}{\frac{Q_1}{C_1}} + \frac{Q_2}{\frac{Q_2}{C_2}}$$
$$C = C_1 + C_2$$
$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \frac{A}{2d} + \varepsilon_0 \varepsilon_1 \frac{A}{2d}$$
$$C = \varepsilon_0 \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right) \frac{A}{2d}$$

b)

$$C_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \frac{2A}{d}$$
$$C_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_2 \frac{2A}{d}$$
$$Q_1 = C_1 U_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \frac{2A}{d} U_1$$
$$Q_2 = C_2 U_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_2 \frac{2A}{d} U_2$$

Es gilt $Q_1 = Q_2$, da man sich vorstellen kann, dass man zwei Kondensatoren hat, die in Reihe geschaltet sind, und dann sind an beiden Kondensatorplatten die selbe Ladung

$$\varepsilon_0 \varepsilon_1 \frac{2A}{d} U_1 = Q_1 = Q_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_2 \frac{2A}{d} U_2$$
$$U_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} U_1$$

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 \\ &= U_1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} U_1 \\ &= \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) U_1 \end{aligned}$$
$$U_1 = \frac{U}{1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$

$$U_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} U_1$$
$$U_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot \frac{U}{1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$
$$U_2 = \frac{1}{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \cdot \frac{U}{1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$
$$U_2 = \cdot \frac{U}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + 1}$$

$$Q = CU$$
$$C = \frac{Q}{U}$$
$$C = \frac{1}{\frac{U_1 + U_2}{Q}}$$
$$C = \frac{1}{\frac{U_1}{Q_1} + \frac{U_2}{Q_2}}$$
$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$
$$C = \frac{1}{\frac{C_2 + C_1}{C_1 C_2}}$$
$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Aufgabe 2: Punktladung im Dielektrikum

Für das Feld innerhalb der Kugel gilt:

$$\vec{E}_{innen} = \frac{\vec{E}_{vac}}{\varepsilon_r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{Q}{r^3} \vec{r}$$

Außerhalb:

$$\vec{E}_{aussen} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^3} \vec{r}$$

Da die Ladung außen an der Kugel die der Ladung innen in der Kugel ausgleicht (so wie bei einer Holkugel bei der Gravitation es von außen gleich ist, wie wenn die Masse im Zentrum wäre. Dann gleicht die Ladung auf der "Hohlkugel" der Kugeloberfläche die Ladung die an der Punktladung Q ansitzt aus)
Potenzial:

$$\varphi_{innen} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{Q}{|r|} + C_1$$

$$\varphi_{aussen} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{|r|} + C_2$$

Denn dann ist jeweils

$$-\operatorname{grad} \varphi_{innen} = \vec{E}_{innen}$$

$$-\operatorname{grad} \varphi_{aussen} = \vec{E}_{aussen}$$

Bestimmung von C_1 und C_2, dafür $\varphi \stackrel{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Also $C_2 = 0$. Stetigkeit an der Kugeloberfläche, also für $r = R$ muss gelten $\varphi_{innen}(R) = \varphi_{aussen}(R)$:

$$\begin{aligned}
\varphi_{innen}(R) &= \varphi_{aussen}(R) \\
\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{R} + C_1 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} + C_2 \\
C_1 &= \varepsilon_r \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{R} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{R} \\
C_1 &= (\varepsilon_r - 1)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{R}
\end{aligned}$$

Die Polarisationsladung lässt sich bestimmen durch $\varepsilon_0 \left(E_{vac}(R) - E_{innen}(R)\right) = \left|\vec{P}\right| = \frac{Q_{pol}}{A}$. Also

$$\begin{aligned}
Q_{pol} &= A\left(\varepsilon_0\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}R - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{R^3}R\right)\right) \\
Q_{pol} &= 4\pi R^2\left((\varepsilon_r - 1)\frac{1}{4\pi\varepsilon_r}\frac{Q}{R^2}\right) \\
Q_{pol} &= \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}Q
\end{aligned}$$