2024-04-21
Winter Semester 2023/2024

University of Konstanz
Faculty of Science
(Physics)

Übungsblatt 02

Davina Schmidt, Elias Gestrich

Aufgabe 1: Glas im Bodensee

a)

$$
\begin{aligned}
m_G &= m_W \\
&= \rho_W \cdot V_W \\
&= 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot A \cdot \frac{h}{2} \\
&= 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2 \cdot \frac{20 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}}{2} \\
&= 0.1\,\mathrm{kg}
\end{aligned}
$$

b) Sei $F_L = p_0 A$ die Kraft, die die Luft durch den Luftdruck von oben auf das Glas ausübt und F_G, die Gewichtskraft des Glases. Außerdem sei $F = p_1 \cdot A$, die Kraft, die die Luft aus dem innerem des Glases auf den Glasboden ausübt. Dabei muss gelten:

$$
\begin{aligned}
F &= F_G + F_L \\
p_1 A &= m_G \cdot g + p_0 \cdot A \\
p_1 &= \frac{m_G \cdot g}{A} + p_0 \\
&= \frac{0.1\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\mathrm{m/s}^2}{1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2} + 1 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \\
&= 100\,981\,\mathrm{Pa}
\end{aligned}
$$

Da $pV =$ konst. gilt:

$$
\begin{aligned}
p_0 h A &= p_1 (h - d) A \\
\frac{p_0}{p_1} h &= h - d \\
d &= \left(1 - \frac{p_0}{p_1}\right) h \\
d &\sim 1.94\,\mathrm{mm}
\end{aligned}
$$

Da immernoch 0.1 kg Wasser verdrengt werden müssen, gilt

$$\begin{aligned}\frac{h}{2}A &= (x-d)A\\ d+\frac{h}{2} &= x\\ x &\sim 0.1\,\mathrm{m} + 1.94\,\mathrm{mm}\\ x &\sim 10.2\,\mathrm{cm}\end{aligned}$$

c) Der Druck p auf das Glas, wenn das Glas vollständig unterwasser ist, ist der Luftdruck p_0 plus den Druck p_w der Wassersäule über dem Glas, für welchen gilt: $p_w = \frac{F}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{tA\rho g}{A} = t\rho g$ für t die Tiefe des Glases. Folglich gilt:

$$p = p_0 + p_w$$

Damit das Glas weniger Auftrieb als Abtrieb hat, muss das Gewicht des verdränkten Wassers kleiner sein, als das Gewicht des Glases, Also muss das Volumen der Luft kleiner sein als $\frac{1}{2}hA$, also gilt

$$p > p_0 \cdot \frac{hA}{\frac{1}{2}hA} = 2p_0$$

Also

$$\begin{aligned}p &= p_0 + p_w\\ 2p_0 &= p_0 + p_w\\ p_0 &= t\rho g\\ t &= \frac{p_0}{\rho g}\\ t &= \frac{1\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}}{1000\,\mathrm{kg/m^3}\cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2}}\\ t &\sim 10.2\,\mathrm{m}\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Hydrodynamisches Paradoxon

Da in der Aufgabe sehr wenig Informationen gegeben sind, habe ich mir ein paar Fakten ausgedacht: Annahme $p_{\text{statisch}} + p_S = p_0 = p = \text{konst}$ wobei p_0 der Außendruck ist und p_S der Staudruck. Sei d der Abstand der beiden Platten.
$v\rho A = \text{ konst.} \implies vA = \text{ konst} \implies v_1\pi R_1^2 = v(r)\cdot 2\pi r d \implies v(r) = v_1 \cdot \frac{R_1^2}{2rd}$, für r der radiale Abstand zur Mitte der Platten. Also ist der Staudruck in Abhängigkeit von r:

$$p_S = \frac{1}{2}\rho_L v(r)^2 = \frac{1}{2}\rho_L v_1^2 \cdot \frac{R_1^4}{4r^2d^2}$$

Die gesamte Kraft auf die Untere Platte ist also:

$$\begin{aligned}
F_L &= \int_{R_1}^{R_2} 2\pi r(p_0 - p_S)dr + p_0 \cdot \pi R_1^2 \\
&= \pi p_0 \int_{R_1}^{R_2} 2r dr - \frac{1}{4}\pi\rho_L v_1^2 \cdot \frac{R_1^4}{d^2}\int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r}dr + \pi p_0 R_1^2 \\
&= \pi p_0 [r^2]_{R_1}^{R_2} - \frac{1}{4}\pi\rho_L v_1^2 \cdot \frac{R_1^4}{d^2}[\ln r]_{R_1}^{R_2} + \pi p_0 R_1^2 \\
&= \pi p_0 R_2^2 - \pi R_1^2 - \frac{1}{4}\pi\rho_L v_1^2 \cdot \frac{R_1^4}{d^2}(\ln R_2 - \ln R_1) + \pi p_0 R_1^2 \\
&= \pi p_0 R_2^2 - \frac{1}{4}\pi\rho_L v_1^2 \cdot \frac{R_1^4}{d^2}\ln\frac{R_2}{R_1}
\end{aligned}$$

Damit die Platte angehoben wird:

$$\begin{aligned}
F_G + F_L &< p_0 \pi R_2^2 \\
Mg &< p_0 \pi R_2^2 - F_L \\
Mg &< p_0 \pi R_2^2 - p_0 \pi R_2^2 + \frac{1}{4}\pi\rho_L v_1^2 \cdot \frac{R_1^4}{d_2}\ln\frac{R_2}{R_1} \\
Mg &< \frac{1}{4}\pi\rho_L v_1^2 \cdot \frac{R_1^4}{d_2}\ln\frac{R_2}{R_1} \\
v_1^2 &> \frac{4Mgd^2}{\pi R_1^4 \ln\frac{R_2}{R_1}} \\
v_1 &> \sqrt{\frac{4Mgd^2}{\pi R_1^4 \ln\frac{R_2}{R_1}}} \\
v_1 &> \frac{2d}{R_1^2} \cdot \sqrt{\frac{Mg}{\pi \ln\frac{R_2}{R_1}}}
\end{aligned}$$