2024-01-14
Winter Semester 2023/2024

University of Konstanz
Faculty of Science
(physics)

# Übungsblatt Nr. 9

## **Aufgabe 1:** Gradient, Divergenz, Rotation

a) $\operatorname{grad}\varphi = \left(\frac{3x^2y}{z^2}, \frac{x^3}{z^2}, \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3y}{z^3}\right)$

b) $\nabla \cdot \vec{A} = 4x^3y - 4y\sqrt{1-z^2} + 2z\exp(x^2+z^2)$

c) $\nabla \times \vec{A} = \left(-\frac{4yz}{\sqrt{1-z^2}}, -2x\exp(x^2+z^2), -x^4\right)$

## **Aufgabe 2:** Linienintegrale

a) mit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3, t \mapsto (t,t,t)$, also $x = t, y = t, z = t^3$

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{A} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \vec{A} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} 2t + t * t \\ 3t^2 - 6t \cdot t \\ 1 - 4t \cdot t \cdot t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^1 2t + t^2 + 3t^2 - 6t^2 + 1 - 4t^4 dt \\
&= \int_0^1 -4t^4 - 2t^2 + 2t + 1 dt \\
&= \left[ -\frac{4}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + t^2 + t \right]_0^1 \\
&= -\frac{4}{5} - \frac{2}{3} + 1 + 1 \\
&= -\frac{12}{15} - \frac{10}{15} + \frac{30}{15} \\
&= \frac{8}{15}
\end{aligned}$$

b) mit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3, t \mapsto (t^2, t, t^3)$, also $x = t^2, y = t, z = t^3$

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{A} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \vec{A} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} 2t^2 + t * t^3 \\ 3t^2 - 6t^2 \cdot t^3 \\ 1 - 4t^2 \cdot t \cdot t^6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \\ 3t^2 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^1 2t(2t^2 + t^4) + 3t^2 - 6t^5 + 3t^2(1 - 4t^9) dt \\
&= \int_0^1 4t^3 + 2t^5 + 3t^2 - 6t^5 + 3t^2 - 12t^1 1 dt \\
&= \int_0^1 4t^3 + 6t^2 - 4t^5 - 12t^1 1 dt \\
&= \left[ -t^1 2 - \frac{2}{3} t^6 + t^4 + 2t^3 \right]_0^1 \\
&= -1 - \frac{2}{3} + 1 + 2 \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

c)-e)

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \vec{B} = &\Bigg( \frac{2yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5} - \frac{2yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5}, \\
&\frac{2xz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5} - \frac{2xz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5}, \\
&\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5} - \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5} \Bigg) \\
= &(0,0,0)
\end{aligned}
$$

Also konservativ, da keine Wirbel Existieren, daher ist egal welchen Weg man nimmt und es gibt so ein Potenzialfeld $V = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ mit $-\operatorname{grad}(V) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} \\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} \end{pmatrix} = \vec{B}$ weshalb also nach dem Skript

$$\int_\gamma \vec{B} \cdot dr = V(r_1) - V(r_2)$$

also zwischen $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt das Linienintegral $V(e_x) - V(-e_x) = \frac{1}{2\sqrt{1^2+0^2+0^2}} - \frac{1}{2\sqrt{(-1)^2+0^2+0^2}} = 0$ egal mit welchem Weg