Übungsblatt No. 10

Aufgabe 2: Drehimpulserhaltung

Es gilt mit m_e die Masse des Eises und m_p die Masse von Prof. Müller und Prof. Nowak, sodass sie zusammen (bzw. das gesamte Karussell) $2m_p$ wiegen.

$$
\begin{aligned}
F_R &= -F_z \\
|F_R| &= |F_z| \\
\left|\mu \cdot \vec{F}_G\right| &= |\underbrace{m_e\,\vec{\omega} \times \underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{orthogonal}}}_{\text{orthogonal}}| \\
\mu \cdot m_e \cdot g &= m_e \omega^2 r \\
\mu &= \frac{1}{g}\omega^2 r
\end{aligned}
$$

Es gilt wegen Drehimpulserhaltung (M im Index steht für Prof. Müller, N für Prof. Nowak und 1 für vorher, 2 für wenn Prof. Müller einen Abstand von $1\,\mathrm{m}$ vom Mittelpunkt des Karussells steht):

$$
\begin{aligned}
\vec{L}_1 &= \vec{L}_M + \vec{L}_N \\
L_1 &= L_M + L_N \\
J_1\omega_1 &= J_M\omega_2 + J_N\omega_2 \\
2m_p r_1^2\omega_1 &= m_p r_M^2\omega_2 + (m_p + m_e) r_1^2\omega_2 \\
2 \cdot 4\,\mathrm{m}^2 \cdot 1\,\frac{1}{\mathrm{s}} &= \left(1\,\mathrm{m}^2 + \left(1 + \frac{m_e}{m_p}\right) 4\,\mathrm{m}^2\right)\omega_2 \\
\omega_2 &= \frac{8\,1/\mathrm{s}}{5 + \frac{4m_e}{m_p}}
\end{aligned}
$$

oben Eingesetzt ergibt das:

$$
\begin{aligned}
\mu &= \frac{1}{g} \cdot \frac{6.4 \cdot 10^1\,1/\mathrm{s}^2}{\left(5 + \frac{4m_e}{m_p}\right)^2} \cdot 2\,\mathrm{m} \\
\mu &= \frac{1.28 \cdot 10^2\,\mathrm{m/s}^2}{\left(5 + \frac{4m_e}{m_p}\right)^2 g}
\end{aligned}
$$

Da wahrscheinlich das Eis nicht mehr als $1 \cdot 10^{-1}$ kg und Prof. Müller und Prof. Nowak eher mehr als $5.0 \cdot 10^{1}$ kg wiegen wird, also $\frac{4m_e}{m_p} \ll 1$ gilt:

$$\mu \approx \frac{1.28 \cdot 10^{2}\,\mathrm{m/s^2}}{25g}$$
$$\mu \approx 0.52$$

Aufgabe 3: Stabile Kreisbahnen

Zu dem Kraftfeld gehört für $z \neq 1$ das Potential $V = -\frac{1}{2} \cdot \frac{k}{(z-1)r^{z-1}}$, da $\mathrm{grad}(V(r)) = \vec{F}(r)$
Es gilt:

$$\begin{aligned} V_{eff}(r) &= \frac{\vec{L}^2}{2mr^2} + V(r) \\ &= \frac{\vec{L}^2}{2mr^2} - \frac{k}{2(z-1)r^{z-1}} \end{aligned}$$

Für ein Minimum muss gelten, dass die erste Ableitung gleich Null ist, also:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\vec{L}^2}{mr^3} + \frac{k}{r^z} \\ \frac{\vec{L}^2}{mr^3} &= \frac{k}{r^z} \\ r^{z-3} &= \frac{mk}{\vec{L}^2} \end{aligned}$$

Außerdem muss die zweite Ableitung größer gleich Null sein, also:

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{3\vec{L}^2}{mr^4} - \frac{zk}{r^{z+1}} \\ \frac{zk}{r^{z+1}} &< \frac{3\vec{L}^2}{mr^4} \\ zk &< \frac{3\vec{L}^2}{m} \cdot r^{z-3} \qquad | \quad \text{aus obiger Gleichung} \\ zk &< \frac{3\vec{L}^2}{m} \cdot \frac{mk}{\vec{L}^2} \\ z &< 3 \end{aligned}$$

also gilt $z < 3$ Da das Potential für $r \to \infty$ begrenzt sein soll, muss $z \geq 1$ sein, da für $z < 1$ gilt, dass $V \overset{r\to\infty}{\to} -\infty$.
Für $z = 1$ gilt $V = -k \log |x|$, was auch gegen unendlich geht.
Und wenn z auch ganzzahlig sein soll gibt es nur $z = 2$ als Möglichkeit.