2024-07-05
Summer Semester 2024
Gruppe 3, Jonathan Weihing

University of Konstanz
Faculty of Science
(Mathematics and Statistics)

Übungsblatt 10

Elias Gestrich

Aufgabe 1: Polarkoordinaten

(a) Die Länge l_g einer Kurve $g : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$l_g = \int_a^b \left|g'(t)\right| \, \mathrm{d}t$$

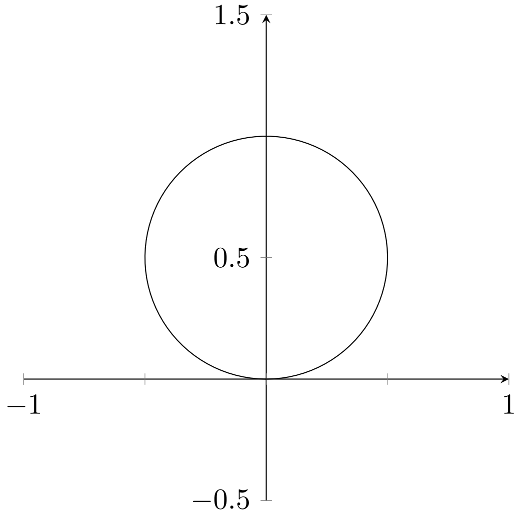
Für die Kurve γ gilt also

$$\begin{aligned}
l_\gamma &= \int_a^b \left|\gamma'(\phi)\right| \, \mathrm{d}\phi \\
&= \int_a^b \left\| \frac{\mathrm{d}f(r(\phi), \phi)}{\mathrm{d}\phi} \right\| \, \mathrm{d}\phi \\
&= \int_a^b \left| \frac{\mathrm{d}(r(\phi)\cos\phi, r(\phi)\sin(\phi))}{\mathrm{d}\phi} \right| \, \mathrm{d}\phi \\
&= \int_a^b \left|(r'(\phi)\cos\phi - r(\phi)\sin\phi, r'(\phi)\sin(\phi) + r(\phi)\cos\phi\right| \, \mathrm{d}\phi \\
&= \int_a^b \sqrt{(r'(\phi)\cos\phi - r(\phi)\sin\phi)^2 + (r'(\phi)\sin(\phi) + r(\phi)\cos\phi)^2} \, \mathrm{d}\phi \\
&= \int_a^b [(r'(\phi)^2\cos^2(\phi) - 2r(\phi)r'(\phi)\cos(\phi)\sin(\phi) + r(\phi)^2\sin^2\phi) \\
&\qquad + (r'(\phi)^2\sin^2(\phi) + 2r(\phi)r'(\phi)\cos(\phi)\sin(\phi) + r(\phi)^2\cos^2\phi)]^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}\phi \\
&= \int_a^b \sqrt{r'(\phi)^2(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)) + r(\phi)^2(\sin^2(\phi) + \cos^2\phi)} \, \mathrm{d}\phi \\
&= \int_a^b \sqrt{r'(\phi)^2 + r(\phi)^2} \, \mathrm{d}\phi
\end{aligned}$$

■

(b)

(a)



Es handelt sich um einen Kreis, mit Radius 0.5 und Mittelpunkt bei $(0, 0.5)$, da

$$\begin{aligned}
&\|(r(\phi)\cos(\phi), r(\phi)\sin(\phi)) - (0, 0.5)\| \\
=&\sqrt{r(\phi)^2\cos^2(\phi) + r(\phi)^2\sin^2(\phi) - 2\cdot 0.5\cdot r(\phi)\sin(\phi) + 0.25} \\
=&\sqrt{\sin^2(\phi) - \sin^2(\phi) + 0.25} \\
=&\,0.5
\end{aligned}$$

Also hat jeder Punkt der Kurve einen Abstand von 0.5 zum Punkt $(0, 0.5)$, was zu zeigen war.

(b)

$$\begin{aligned}
l &= \int_0^\pi \sqrt{r(\phi)^2 + r'(\phi)^2}\ \mathrm{d}\phi \\
&= \int_0^\pi \sqrt{\sin^2(phi) + \cos^2(\phi)}\ \mathrm{d}\phi \\
&= \int_0^\pi 1\ \mathrm{d}\phi = \pi
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Implizite Funktion

Sei $\psi(x,y) : B_1((2,1)) \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto -\frac{x^2}{2} + \sqrt{\frac{x^4}{4} + 3xy - y + 2}$, sodass

$$\begin{aligned}
G(x,y,\psi(x,y)) =& \frac{x^4}{4} - 2\cdot\frac{x^2}{2}\cdot\sqrt{\frac{x^4}{4} + 3xy - y + 2} + \frac{x^4}{4} + 3xy - y + 2 \\
&- 3xy - \frac{x^4}{2} + x^2\sqrt{\frac{x^4}{4} + 3xy - y + 2} \\
&+ y - 2 \\
=&\, 0
\end{aligned}$$

$\psi(x,y)$ ist wohldefiniert, da für $(a,b) \in B_1((2,1))$ existieren $\xi_x, \xi_y \in (-1,1)$, sodass $(a,b) = (2+\xi_x, 1+\xi_y)$ und

$$\begin{aligned}
\psi(a,b) &= \frac{(2+\xi_x)^4}{4} + 3(2+\xi_x)(1+\xi_y) - (1+\xi_y) + 2 \\
&= \frac{(2+\xi_x)^4}{4} + (1+\xi_y)(3(2+\xi_x) - 1) + 2 \\
&= \frac{(2+\xi_x)^4}{4} + (1+\xi_y)(6 + 3\xi_x - 1) + 2 \\
&= \frac{(2+\xi_x)^4}{4} + (1+\xi_y)(5 + 3\xi_x) + 2 \\
&\geq \frac{(2-1)^4}{4} + (1-1)(5-3) + 2 \\
&> 0
\end{aligned}$$

Also ist die Wurzel wohldefiniert in $\mathbb{R}$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -x + \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{3}{4}x^3 + 3y}{\sqrt{\frac{x^4}{4} + 3xy - y + 2}}\right)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{3x - y}{\sqrt{\frac{x^4}{4} + 3xy - y + 2}}\right)$$

Also

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial x}(2,1) &= -2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{3}{4}\cdot 8 + 3}{\sqrt{\frac{16}{4} + 6 - 1 + 2}}\right) \\
&= -2 + \frac{1}{2}\left(\frac{6+3}{\sqrt{4+6-1+2}}\right) \\
&= \frac{9}{2\sqrt{11}} - 2 \\
&= \frac{9\sqrt{11}}{22} - 2 \\
&= \frac{-44 + 9\sqrt{11}}{22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial y}(2,1) &= \frac{1}{2}\left(\frac{6-1}{\sqrt{11}}\right) \\
&= \frac{5\sqrt{11}}{22}
\end{aligned}$$

Also $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ invertierbar.

Aufgabe 2.1: Implizite Funktion II

Formuliere das Gleichungssystem als

$$\begin{aligned} (u(x,y))^2 + v(x,y)e^{-u(x,y)} + x(u(x,y)) - 1 &= 0 \\ xy + y(v(x,y)) + \frac{u(x,y)}{v(x,y)} - x &= 0 \end{aligned}$$

und definiere

$$F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u^2 + ve^{-u} + xu - 1 \\ xy + yv + \frac{u}{v} - x \end{pmatrix}$$

Für $(x_0, y_0) = 0$ gilt

$$0 + 0 + \frac{u(0,0)}{v(0,0)} - 0 = 0$$

Also $u(0,0) = 0$ Also

$$0^2 + v(0,0)e^{-0} + 0 - 1 = 0$$

Also $v(0,0) = 1$

Es gilt insbesondere $F(0,0,0,1) = 0$. Es gilt:

$$\begin{pmatrix} \partial_u F_1 & \partial_v F_1 \\ \partial_u F_2 & \partial_v F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u - ve^{-u} + x & e^{-u} \\ \frac{1}{v} & y - \frac{u}{v^2} \end{pmatrix}$$

Für $(x,y) = (0,0)$ ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2u - ve^{-u} + x & e^{-u} \\ \frac{1}{v} & y - \frac{u}{v^2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 - 1 + 0 & 1 \\ 1 & 0 - 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\rightsquigarrow \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 - 1 \neq 0 \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also invertierbar, nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es also eine offene Menge U um $(0,0)$, so dass für $(x,y) \in U$ gilt: $F(x,y,u(x,y),v(x,y)) = 0$ Außerdem ist

$$D(u,v)(0,0) = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Also

$$\partial_x u(0,0) = 1, \partial_y u(0,0) = 1, \partial_x v(0,0) = 2, \partial_y v(0,0) = 1$$