2024-06-20
Summer Semester 2024
Gruppe 3, Jonathan Weihing

University of Konstanz
Faculty of Science
(Mathematics and Statistics)

Übungsblatt 8

Elias Gestrich

Aufgabe 1: Taylor-Entwicklung I

$$
\begin{aligned}
\partial_x f &= \frac{1(x+y)-(x-y)\cdot 1}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2} \\
\partial_y f &= \frac{(-1)\cdot(x+y)-(x-y)\cdot 1}{(x+y)^2} = -\frac{2x}{(x+y)^2} \\
\partial_x^2 f &= -\frac{4y}{(x+y)^3} \\
\partial_y \partial_x f &= \frac{2(x+y)^2 - 2y\cdot 2\cdot(x+y)}{(x+y)^4} = \frac{2(x+y)-4y}{(x+y)^3} = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3} \\
\partial_x \partial_y f &= -\frac{2(x+y)^2 - 2x\cdot 2\cdot(x+y)}{(x+y)^4} = -\frac{2(x+y)-4x}{(x+y)^3} = -\frac{2(-x+y)}{(x+y)^3} = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3} \\
\partial_y^2 f &= \frac{4x}{(x+y)^3}
\end{aligned}
$$

0. Glied:

$$
\sum_{|\alpha|=0} \frac{\partial^\alpha f(1,1)}{\alpha!}\xi^\alpha = f(1,1) = 0
$$

1. Glied:

$$
\sum_{|\alpha|=1} \frac{\partial^\alpha f(1,1)}{\alpha!}\xi^\alpha = \frac{\partial_x f(1,1)}{1!}\xi_x + \frac{\partial_y f(1,1)}{1!}\xi_y = \frac{2}{2^2}\xi_x - \frac{2}{2^2}\xi_y = \frac{1}{2}\xi_x - \frac{1}{2}\xi_y = \frac{1}{2}\langle (1,-1), \xi \rangle
$$

2. Glied:

$$
\begin{aligned}
\sum_{|\alpha|=1} \frac{\partial^\alpha f(1,1)}{\alpha!}\xi^\alpha &= \frac{\partial_x^2 f(1,1)}{2!0!}\xi_x^2 + \frac{\partial_x\partial_y f(1,1)}{1!1!}\xi_x\xi_y + \frac{\partial_y^2 f(1,1)}{0!2!}\xi_x^2 \\
&= \frac{\frac{4}{2^3}}{2}\xi_x^2 + 0 + \frac{\frac{4}{2^3}}{2}\xi_y^2 \\
&= \frac{1}{4}\xi_x^2 + \frac{1}{4}\xi_y^2 \\
&= \frac{1}{4}\langle \xi, \xi \rangle \\
&= \frac{1}{4}\|\xi\|_2^2
\end{aligned}
$$

Also ist die Taylor-Entwicklung der Funktion f im Punkt $x_0 = (1,1)$ bis einschließlich den Gliedern 2. Ordnung:

$$T_{x_0}f(x_0+\xi) = 0 + \frac{1}{2}\left\langle (1,-1), \xi \right\rangle + \frac{1}{4}\left\|\xi\right\|_2^2$$
$$T_{x_0}f(x) = 0 + \frac{1}{2}\left\langle (1,-1), (x-x_0) \right\rangle + \frac{1}{4}\left\|(x-x_0)\right\|_2^2$$

Aufgabe 2: Taylor-Entwicklung II

$$\begin{aligned}
\partial_x f &= 0 + (y+\cos(y))\cos(x) \\
\partial_y f &= (1-\sin(y))\sin(x) + 0 \\
\partial_x^2 f &= -(y+\cos(y))\sin(x) \\
\partial_y\partial_x f &= (1-\sin(y))\cos(x) \\
\partial_x\partial_y f &= (1-\sin(y))\cos(x) \\
\partial_y^2 f &= -\cos(y)\sin(x)
\end{aligned}$$

0. Glied:

$$\sum_{|\alpha|=0} \frac{\partial^\alpha f\left(\frac{\pi}{2},0\right)}{\alpha!}\xi^\alpha = f\left(\frac{\pi}{2},0\right) = (0+1)\cdot 1 = 1$$

1. Glied:

$$\sum_{|\alpha|=1} \frac{\partial^\alpha f\left(\frac{\pi}{2},0\right)}{\alpha!}\xi^\alpha = \frac{\partial_x f\left(\frac{\pi}{2},0\right)}{1!}\xi_x + \frac{\partial_y f\left(\frac{\pi}{2},0\right)}{1!}\xi_y = (0+1)\cdot 0\cdot \xi_x + (1-0)\cdot 1\cdot \xi_y = \left\langle (0,1),\xi\right\rangle$$

2. Glied:

$$\begin{aligned}
\sum_{|\alpha|=2} \frac{\partial^\alpha f\left(\frac{\pi}{2},0\right)}{\alpha!}\xi^\alpha &= \frac{\partial_x^2 f\left(\frac{\pi}{2},0\right)}{2!0!}\xi_x^2 + \frac{\partial_x\partial_y f\left(\frac{\pi}{2},0\right)}{1!1!}\xi_x\xi_y + \frac{\partial_y^2 f\left(\frac{\pi}{2},0\right)}{0!2!}\xi_y^2 \\
&= \frac{-(0+1)\cdot 1}{2}\xi_x^2 + (1-0)\cdot 0\xi_x\xi_y - \frac{1\cdot 1}{2}\xi_y^2 \\
&= -\frac{1}{2}\xi_x^2 - \frac{1}{2}\xi_y^2 \\
&= -\frac{1}{2}\left\|\xi\right\|_2^2
\end{aligned}$$

Also ist die Taylor-Entwicklung der Funktion f im Punkt $x_0 = \left(\frac{\pi}{2},0\right)$ bis einschließlich den Gliedern 2. Ordnung:

$$T_{x_0}f(x_0+\xi) = 1 + \left\langle (0,1),\xi\right\rangle - \frac{1}{2}\left\|\xi\right\|_2^2$$
$$T_{x_0}f(x) = 1 + \left\langle (0,1),(x-x_0)\right\rangle - \frac{1}{2}\left\|(x-x_0)\right\|_2^2$$

Aufgabe 3: Schrankensatz

Theorem 4.29

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$. Sei $\xi \in \mathbb{R}^n$ so, dass

$$[x_0, x_0 + \xi] := \{x_0 + t\xi : 0 \leq t \leq 1\} \subset \Omega.$$

Ist f stetig differenzierbar, so

$$f(x_0 + \xi) - f(x_0) = \int_0^1 \underbrace{Df}_{\in \mathbb{R}^{m\times n}} (x_0 + t\xi)\ dt \cdot \xi.$$

Hierbei setzen wir für

$$A : [a, b] \to \mathbb{R}^{m\times n},$$

wobei $A(x) = (a_{ij}(x))_{i=1,\ldots,m,j=1,\ldots,n}$:

$$\int_a^b A(x)\ dx := \left(\int_a^b a_{ij}(x)\ dx\right)_{ij}.$$

Proof Thm. 2.29

$g(t) := f(x_0, +t\xi)$. Dann

$$\begin{aligned}
f(x_0 + \xi) - f(x_0) &= g(1) - g(0) \\
&= \begin{pmatrix} g_1(1) - g_1(0) \\ \vdots \\ g_m(1) - g_m(0) \end{pmatrix} \\
&= (g_k(1) - g_k(0))_{k=1,\ldots,m} \\
&\overset{\text{Hauptsatz}}{=} \left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g_k(t)\ \mathrm{d}t\right)_{k=1,\ldots,m} \\
&= \left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_k(x_0 + t\xi)\right)_{k=1,\ldots,m} \\
&\overset{\text{Kettenregel}}{=} \left(\left\langle \int_0^1 \mathbf{Df_k}(x_0 + \xi)\ \mathrm{d}t, \xi \right\rangle\right)_{k=1,\ldots,m} \\
&= \int_0^1 \underbrace{Df}_{\mathbb{R}^{m\times n}} (x_0 + t\xi)\ \mathrm{d}t \cdot \underbrace{\xi}_{\mathbb{R}^{n\times 1}}
\end{aligned}$$

■

Theorem Schrankensatz

In der Situation von Thm 4.29 gilt

$$\|f(x_0 + \xi) - f(x_0)\|_2 \leq M \|\xi\|_2,$$

wobei

$$M := \sup_{0\leq t\leq 1} \|(Df)(x_0 + t\xi)\|$$

Operatornorm, Lemma 4.22

Proof Schrankensatz

Nach Thm. 4.29:

$$
\begin{aligned}
\|f(x_0+\xi)-f(x_0)\|_2 &= \left\| \int_0^1 (Df)\,(x_0+t\xi)\ \mathrm{d}t\cdot\xi \right\|_2 \\
&\overset{(*)}{\leq} \int_0^1 \|Df(x_0+t\xi)\cdot\xi\|_2\ \mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^1 \underbrace{|(Df)(x_0+t\xi)|}_{\leq M}\cdot|\xi|_2\ \mathrm{d}t \\
&\leq M\cdot\|\xi\|_2\,.
\end{aligned}
$$

Zu $(*)$: Ist $v:[a,b]\to\mathbb{R}^m$ stetig. Dann:

$$
\left\| \int_a^b v(t)\ \mathrm{d}t \right\|_2 \leq \int_a^b \|v(t)\|_2\ \mathrm{d}t.
$$

Sei hierzu

$$
\eta \coloneqq \int_a^b v(t)\ \mathrm{d}t = \begin{pmatrix} \int_a^b v_1(t)\ \mathrm{d}t \\ \vdots \\ \int_a^b v_m(t)\ \mathrm{d}t \end{pmatrix}
$$

Definiere

$$
\begin{aligned}
K \coloneqq \|\eta\|_2 \implies K^2 &= \|\eta\|_2^2 \\
&= \langle \eta,\eta\rangle \\
&= \left\langle \int_a^b v(t)\ \mathrm{d}t, \eta \right\rangle \\
&= \int_a^b \langle v(t),\eta\rangle \\
&\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \int_a^b \|v(t)\|_2\cdot\underbrace{\|\eta\|_2}_{K}\ \mathrm{d}t \\
&= K\int_a^b \|v(t)\|_2\ \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Œ $K\neq 0$, kürze durch K. ■

(a) Ich denke das ist ein Tippfehler und $\varphi(1)=y$, weil ja. Betrachte

$$
g \coloneqq f\circ\varphi_{x,y}
$$

sodass $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Sei $L_g \coloneqq c\sup_{x\in\Omega}\|Df(x)\|$ Dann gilt nach der Kettenregel

$$
Dg = (Df)(\varphi_{x,y})\cdot D\varphi_{x,y} \leq \sup_{x\in\Omega}\|Df(x)\|\cdot c\,\|x-y\| = L_g\,\|x-y\|
$$

Den Schrankensatz (Theorem 4.30) dürfen wir anwenden mit $x_0=0$ und $\xi=1$, da $[x_0,x_0+\xi]=[0,1]\subset[0,1]$. Nach diesem gilt:

$$
\|f(x)-f(y)\|_2 = \|g(0)-g(1)\|_2 = \|g(1)-g(0)\|_2 \leq M\,\|1-0\|_2
$$

mit

$$M := \sup_{0\leq t\leq 1} \|(Dg)(0 + 1\cdot t)\| \leq L_g \|x-y\|_2$$

Also

$$\|f(x) - f(y)\|_2 \leq L_g \|x-y\|_2$$

(b) Sei $\Omega := B_2(0) \setminus \left[\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]$. Dann gibt es trivialer Weise (?) eine stetige Abbildung $\psi_{x,y} : [0,1] \to \Omega$ mit $\psi_{x,y}(0) = x, \psi_{x,y}(1) = y$. Betrachte die Folgen

$$(x_i)_{i\in\mathbb{N}} : x_i = \left(1, \frac{1}{i}\right)$$

$$(y_i)_{i\in\mathbb{N}, i>4} : y_i = \left(1, -\frac{1}{i}\right)$$

So, dass

$$\begin{aligned}\|x_i - y_i\|_2^2 &= (1-1)^2 + \left(\frac{1}{i} - \left(-\frac{1}{i}\right)\right)^2 \\ &= 0 + \frac{4}{i} \\ &\overset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

Angenommen es gibt solche φ_{x_i,y_i}, welche die Anforderungen erfüllt. Der Weg von x_i nach y_i ist aber mindestens eine Länge von 2, da man einmal um den Schnitt herum muss. Nach Definition 3.8 Ist φ_{x_i,y_i} rektifizierbar mit

$$2 \leq L_{\varphi_{x_i,y_i}} = \int_0^1 \left\|\varphi'_{x_i,y_i}(t)\right\| \; \mathrm{d}t \leq \int_0^1 c\,\|x_i - y_i\| \; \mathrm{d}t = c\,\|x_i - y_i\| \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0 < 2.$$

Was ein Widerspruch ist. Also war die Annahme falsch und es existieren keine solche φ_{x_i,y_i}

(c) Entweder, $f(x)$ bildet auf den Winkel φ der Polardarstellung ab mit $\varphi \in (0, 2\pi)$, oder

$$f : \Omega \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0, & x_1 \leq 0, \\ x_1, & x_1 > 0 \wedge x_2 > 0, \\ -x_1 & x_1 > 0 \wedge x_2 < 0 \end{cases}$$

Dann wäre

$$\begin{aligned}\partial_1 f(x) &= \begin{cases} 0, & x_1 \leq 0, \\ 1, & x_1 > 0 \wedge x_2 > 0, \\ -1 & x_1 > 0 \wedge x_2 < 0 \end{cases} \\ \partial_2 f(x) &= 0 \\ \partial_1^2 f(x) &= 0 \\ \partial_1\partial_2 f(x) &= 0 \\ \partial_2\partial_1 f(x) &= 0 \\ \partial_2^2 f &= 0\end{aligned}$$

partielle Ableitungen sind stetig, da $\partial_1 f(x_1, x_2) \to 0, x_1 \to 0$. Also f differenzierbar mit $\sup_{x\in\Omega} \|Df\| < \infty$, aber analog zu (b) ist f nicht Lipschitzstetig