

---

# Analysis II

---

## Contents

<b>Organisatorisches</b>	<b>2</b>
<b>1 Grenzprozesse: Differentiation &amp; Integration</b>	<b>3</b>
1.1 Integration & Grenzprozesse . . . . .	3
1.2 Differentiation & Grenzprozesse . . . . .	4
1.3 Potenzreihen revisited . . . . .	5
1.4 Taylorreihen . . . . .	8
<b>2 Topologische Strukturen</b>	<b>12</b>
2.1 Metrische Räume . . . . .	12
2.2 Kompaktheit . . . . .	21
2.3 Spezielle Rolle von $\mathbb{R}^n$ . . . . .	24
<b>3 Kurven</b>	<b>27</b>
<b>4 Mehrdimensionale Differenzierbarkeit</b>	<b>31</b>
4.1 Partielle Ableitung . . . . .	32
4.2 Höhere Ableitungen und Satz von Schwarz . . . . .	35
<b>5 Taylorformel &amp; lokale Extrema</b>	<b>51</b>
<b>6 Der lokale Umkehrsatz &amp; implizite Funktionen</b>	<b>58</b>
<b>7 Einführung in Maß- &amp; Integrationstheorie</b>	<b>69</b>
7.1 $\sigma$ -Algebren & Messbarkeit . . . . .	69
7.2 Das Lebesgueintegral . . . . .	71
7.3 Fundamente der Lebesgueintegral . . . . .	72

## Organisatorisches

- Freitag 10 Uhr Abgabe
- Skript???
- Prüfung 2024-08-15

## Klausurthemen/-aufgaben

- (1) Taylorreihen
- (2) Metrische Räume
- (3) Banach
- (4) Stetigkeit & Abgeschlossenheit
- (5) Differenzierbarkeit
- (6) Kettenregel (schöne Aufgabe)
- (7) Kurven
- (8) Extrema

# 1 Grenzprozesse: Differentiation & Integration

**Wiederholung:**  $\Omega \subset \mathbb{R}$  nichtleer,  $f, f_1, f_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

- $f_j \rightarrow f$  **punktweise**  $\iff \forall x \in \Omega : f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x)$ .
- $f_j \rightarrow f$  **gleichmäßig**  $\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall j \geq N : \forall x \in \Omega : |f_j(x) - f(x)| < \varepsilon$   
 $\left( \iff \lim_{j \rightarrow \infty} \|f_j - f\|_{\infty, \Omega} = 0. \right)$

**Erinnerung:** Alle  $f_j$  stetig und  $f_j \rightarrow f$  gleichmäßig  $\implies f$  stetig.

**Zwei zentrale Fragen:**

- (a) Wann gilt  $f_j \xrightarrow{\text{geeignet}} f \xrightarrow{?} \int_a^b \underbrace{f(x)}_{\lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x)} dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_a^b f_j(x) dx$
- (b) Wann vererbt sich Differenzierbarkeit?  
 (z.B.  $(\forall j : f_j \text{ diffbar})$  und  $f_j \xrightarrow{\text{geeignet}} f \xrightarrow{?} f \text{ diff.}$ )

## 1.1 Integration & Grenzprozesse

### Example 1.1.1

$\Omega = (0, 1), f_j : \Omega \ni x \mapsto j \mathbb{1}_{(0, \frac{1}{j})}(x)$

Dann  $\cdot$  konvergiert  $(f_j)$  punktweise gegen die Nullfunktion.

[Archimedes:  $\forall x \in \Omega : \exists N \in \mathbb{N} : \frac{1}{x} < N$ , so  $\forall j \geq N + 1 : f_j(x) = 0$ ]

- $\forall j \in \mathbb{N} : \int_0^1 f_j(x) dx = j \int_0^{\frac{1}{j}} dx = j \cdot \frac{1}{j} = 1.$
- $f \equiv$  (Grenzfunktion)

Also

$$\int_0^1 \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = 0 \neq 1 = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^1 f_j(x) dx.$$

- Punktweise Konvergenz ist **zu schwach**, im Integrale zu kontrollieren.

### Theorem 1.1.2

Sei  $-\infty < a < b < \infty$ , sowie  $f, f_1, \dots : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar mit  $f_j \rightarrow f$  gleichmäßig auf  $[a, b]$ .  
 Dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_a^b f_j(x) dx.$$

**Proof Theorem 1.1.2**

$g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar, so

$$\begin{aligned}
 \left| \int_a^b g(x) dx \right| &\leq (b-a) \sup_{x \in [a, b]} |g(x)| \stackrel{g=f_j-f}{\implies} \left| \int_a^b f_j(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \\
 &= \left| \int_a^b f_j(x) - f(x) dx \right| \\
 &\leq (b-a) \underbrace{\sup_{x \in [a, b]} |f_j(x) - f(x)|}_{\rightarrow 0, j \rightarrow \infty \text{ da gleichm\u00e4\u00dfige Konvergenz}} \rightarrow 0. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

**1.2 Differentiation & Grenzprozesse**

**Grundfrage** Was misst die Supremumsnorm?  $\rightarrow$  "Gr\u00f6\u00dfe" einer Funktion  $\rightsquigarrow$  maximaler Wert der Betr\u00e4ge von  $f(x)$

- Angenommen.,  $\|f\|_{\infty, \mathbb{R}} \leq a$

**Example 1.2.1**

$$\Omega = (0, 1), f_j(x) := \frac{1}{j} \sin(2\pi j x)$$

$\forall x \in (0, 1) : |f_j(x)| \leq \frac{1}{j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ . Also:  $f \equiv 0$  punktweise Grenzfunktion, Konvergenz sogar gleichm\u00e4\u00dfig!

Grenzfunktion  $f$  diffbar, Ableitung  $f' \equiv 0$

Aber.  $f'_j(x) = 2\pi \cos(2\pi j x)$  mit  $\left| f'_j\left(\frac{1}{2}\right) \right| = 2\pi : f'_j \not\rightarrow f'$  punktweise.

**Example 1.2.2**

$$\Omega = (-1, 1), f_j(x) := \sqrt{x^2 + \frac{1}{j}} \rightarrow f(x) = |x|$$

- **Beh.:**  $f_j \rightarrow f$  gleichm\u00e4\u00dfig:  $\forall x \in (-1, 1) :$

$$\begin{aligned}
 |f_j(x) - f(x)| &= \left| \sqrt{x^2} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{j}} \right| \\
 &= \frac{\frac{1}{j}}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{j}}} \\
 &\leq \frac{1}{j} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{j}}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{j}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0
 \end{aligned}$$

- **Damit:** Alle  $f_j$ 's diffbar, aber  $f_j \rightarrow f$  gleichm\u00e4\u00dfig reicht nicht aus, um die Diffbarkeit von  $f$  zu sichern.

**Theorem 1.2.3**

Sei  $-\infty < a < b < \infty$ ,  $(f_j)$  eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen mit der folgenden Eigenschaft: Es konvergiert  $(f_j)$  punktweise gegen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  &  $(f'_j)$  konvergiert gleichmäßig gegen ein  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann ist  $f$  diffbar mit  $f' = g$ .

**Proof Theorem 1.2.3**

Zuerst:  $g$  ist stetig. Nun ist  $\forall x \in [a, b] : f_j(x) \stackrel{\text{HDI}}{=} f_j(a) + \int_a^x f'_j(t) dt \stackrel{\text{Theorem 1.1.2}}{\rightarrow} f(a) + \int_a^x g(t) dt \implies \forall x \in [a, b] : f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt$ . Aber  $x \mapsto \int_a^x g(t) dt$  stetig diffbar mit  $(\int_a^x g(t) dt)' = g(x)$ , also auch  $f$ , und es gilt  $f'(x) = g(x)$  für alle  $x \in [a, b]$  ■

**Bemerkung:** Sei für  $f \in C'([a, b]) = \{g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : g \text{ einmal stetig differenzierbar}\}$

$$\|f\|_{1,\infty;[a,b]} := \|f\|_{\infty;[a,b]} + \|f'\|_{\infty;[a,b]}$$

Dann:  $\|f_j - f\|_{1,\infty;[a,b]} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$  & alle  $f_j$  stetig diffbar  $\implies f$  stetig diffbar

**1.3 Potenzreihen revisited**

Potenzreihe:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{a_j}_{\text{Koeffizienten}} \left( x - \underbrace{x_0}_{\text{Entwicklungspunkt}} \right)^j$$

$$\bullet \sum_{j=1}^{\infty} a_j (x - x_0)^j = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots$$

Solange wir nur bis zu einem endlichen Wert gehen ist die "Potenzreihe" unendlich differenzierbar

Wie vererbt sich Differenzierbarkeit von Polynomen auf Potenzreihen

**Bemerkung:** (Thm. 8.3.3, Ana I) Weierstraß:  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $(f_j)$  Folge mit  $\sum_{j=0}^{\infty} \|f_j\|_{\infty;A} < \infty$ . Dann konvergiert  $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$  absolut und gleichmäßig auf  $A$ .  $\left[ \text{AK} \iff \sum_{j=0}^{\infty} |f_j(x)| < \infty, \text{GLM} \iff \text{klar} \right]$

**Theorem 1.3.1 Konvergenzverhalten von Potenzreihen**

Sei  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$  ein Entwicklungspunkt

(i) Ist  $x_1 \in \mathbb{R}$  so, dass  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (x_1 - x_0)^j$  konvergiert, so konvergiert  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$ .

Speziell konvergiert die Potenzreihe absolut und gleichmäßig auf allen Bällen  $B_r(x_0)$  mit  $0 < r < |x_1 - x_0|$ .

(ii) Die **formal differenzierte** Potenzreihe  $\sum_{j=1}^{\infty} j a_j (x - x_0)^{j-1}$  hat genau dieselben Eigenschaften

**Proof Theorem 1.3.1**

(i)  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (x_1 - x_0)^j$  Konvergenz  $\implies (a_j (x_1 - x_0))^j$  NF

$$\implies M := \sup_{j \in \mathbb{N}_0} |a_j (x_1 - x_0)^j| < \infty. \text{ Für } |x - x_0| < |x_1 - x_0|$$

setze

$$\theta := \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} < r < 1.$$

Damit

$$|a_j(x - x_0)^j| = \underbrace{(|a_j| \cdot |x_1 - x_0|^j)}_{\leq M} \left( \frac{|x - x_0|}{|x_1 - x_0|} \right)^j \leq M\theta^j.$$

Für

$$x \in B_r(x_0) : \|f_j\|_{\infty; B_r(x_0)} \leq M\theta^j, \text{ wobei } f_j(x) = a_j(x - x_0)^j.$$

Also:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|f_j\|_{\infty; B_r(x_0)} < \infty$$

nach geometrischer Reihe, Rest folgt mit Weierstraß.  $\implies$  (i) folgt. Zu (ii): Analog

### Wiederholung

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x - x_0)^j.$$

Konvergenzradius

$$\rho = \sup \left\{ r > 0 : \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x - x_0)^j \text{ konvergiert für alle } x \text{ mit } |x - x_0| < r \right\}$$

- Konvergenz von Potenzreihen immer auf Bällen

### Corollary 1.3.2

Eine Potenzreihe  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x - x_0)^j$  mit Konvergenzradius  $\rho$  und Konvergenzball  $B_\rho(x_0)$  stellt im **Inneren des Konvergenzballs** eine unendlich oft stetig differenzierbare Funktion dar ( $C^\infty(B_\rho(x_0))$ ), die gliederweise differenziert werden darf: Auf  $B_\rho(x_0)$  gilt:

$$\left( \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x - x_0)^j \right)' = \sum_{j=0}^{\infty} j a_j(x - x_0)^{j-1}$$

### Proof Corollary 1.3.2

Nach Theorem 1.3.1 konvergiert die Potenzreihe auf allen  $B_r(x_0)$  mit  $0 < r < \rho$  absolut und gleichmäßig. Hierfür bemerke, dass

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x - x_0)^j \& \sum_{j=0}^{\infty} j a_j(x - x_0)^{j-1}$$

denselben Konvergenzradius haben:

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{j \rightarrow \infty} \sqrt[j]{|a_j|}},$$

$$\frac{1}{\limsup_{j \rightarrow \infty} \sqrt[j]{j|a_j|}} = \rho.$$

Nun gilt:

$$\forall N \in \mathbb{N} : \left( \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j \right)' = \sum_{j=0}^{\infty} j a_j (x - x_0)^{j-1}$$

Einerseits konvergiert  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j$  gleichmäßig (also auch punktweise) auf  $B_r(x_0)$ , und andererseits  $\sum_{j=0}^{\infty} j a_j (x - x_0)^{j-1}$  gleichmäßig auf  $B_r(x_0)$ . Damit dürfen wir Limes und Ableitung vertauschen, und die Behauptung folgt nun induktiv ■

**Bemerkung:** Die vorausgegangenen Resultate vererben sich auf natürlich Art und Weise auf Funktionen  $f : \mathbb{C} \supset \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . (Mehr dazu in Funktionentheorie)

### Example 1.3.3 exp, sin, cos

$$\begin{aligned} \exp'(x) &= \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \right)' \\ &= \left( \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{j-1}}{(j-1)!} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \\ &= \exp(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin' &= \left( \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{(2j+1)!} (2j+1) x^{2j} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!} \\ &= \cos(x) \end{aligned}$$

Zur Systematisierung:

### Definition 1.3.4

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}$  offen. Wir nennen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  **analytisch**, falls gilt: Für jedes  $x_0 \in \Omega$  gibt es ein  $r > 0$  mit  $B_r(x_0) \subset \Omega$  so, dass  $f$  auf  $B_r(x_0)$  mit einer in  $B_r(x_0)$  konvergente Potenzreihe übereinstimmt.

Der Raum aller analytischen Funktionen auf  $\Omega$  wird  $C^\omega(\Omega)$  bezeichnet.

Differenzierbarkeit ist eine lokale Eigenschaft  $\xrightarrow{\text{Cor. 1.3.2}}$

$$\underbrace{C^\omega(\Omega)}_{\text{analytisch}} \subsetneq \underbrace{C^\infty(\Omega)}_{\infty\text{-oft stetig differenzierbar}}$$

DIESE INKLUSION IST STRIKT! (Blatt 1 / Aufgabe 3)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

## 1.4 Taylorreihen

**Grundfrage:** Wie ist eine Funktion durch Potenzfunktionen aufgebaut, oder anders: Wie lassen sich Funktionen durch Polynome approximieren?

- approximieren  $\exp$  um  $x_0 = 0$  mit affin-linearen Funktion, quadratischen Funktionen, ...
- **Wie** bekommen wir solche Approximationen?

Eine solche Approximationstrategie sollte/**muss** auch für Polynome funktionieren und irgendwann terminieren.

Hierzu:

$$p(x) = \sum_{j=0}^N a_j (x - x_0)^j = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

$$p'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \dots$$

- $p(x_0) = a_0$ .
- $p'(x_0) = a_1 \rightsquigarrow a_0 + a_1(x - x_0) = p(x_0) + p'(x_0)(x - x_0)$
- $p''(x_0) = 2a_2$
- $p^{(k)}(x_0) = k!a_k$

$$p(x) = \sum_{j=0}^N \frac{p^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j$$

### Theorem 1.4.1

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  Intervall,  $x_0 \in I$  &  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$   $(N+1)$ -mal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\forall x \in I : f(x) = \left( \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k \right) + \left( \frac{1}{N!} \int_{x_0}^x (x - t)^N f^{(N+1)}(t) dt \right).$$

*Taylorpolynom vom Grad  $N$  an/in  $x_0$*



*Restglied***Proof Theorem 1.4.1** $N = 0 :$  $\forall x \in I : f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t)dt$ . Gilt nach HDI. $N - 1 \hookrightarrow N$ . Nach IV gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + \frac{1}{(N-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{N-1} f^{(N)}(t)dt.$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(N-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{N-1} f^{(N)}(t)dt \\ &= - \int_{x_0}^x \frac{d}{dt} \left( \frac{(x-t)^N}{N!} \right) f^{(N)}(t)dt \\ &= - \left[ \left[ \frac{(x-t)^N}{N!} f^{(N)}(t) \right]_{t=x_0}^{t=x} - \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t)dt \right] \\ &= \frac{(x-x_0)^N}{N!} f^{(N)}(x_0) + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t)dt \end{aligned}$$

**Corollary 1.4.2**

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$   $(N+1)$ -mal stetig differenzierbar und gelte  $f^{(N+1)}(x) = 0$  für alle  $x \in I$ . Dann ist  $f$  ein Polynom vom Grad  $N$ .

**Theorem 1.4.3 Lagrange-Restglied**

In der Situation von Theorem 1.4.1 gibt es für  $x, x_0 \in I$  ein  $\xi \in (\min\{x, x_0\}, \max\{x, x_0\})$  so, dass

$$f(x) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} (x - x_0)^{N+1}$$

**Erinnerung:** (MWS der Integralrechnung) $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  regelint.,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so  $\exists \xi \in [a, b] :$ 

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\xi) \int_a^b \varphi(x)dx.$$

**Proof Theorem 1.4.3**

Nach Theorem 1.4.1:

$$f(x) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + \frac{1}{N!} \int_{x_0}^x (x-t)^N f^{(N+1)}(t)dt$$

 $\exists x > x_0$ . Wende MWS an auf  $\varphi(t) = (x-t)^N$ .

$$\implies \exists \xi \in [x_0, x] : \int_{x_0}^x (x-t)^N f^{(N+1)}(t) dt = f^{(N+1)}(\xi) \underbrace{\int_{x_0}^x (x-t)^N dt}_{\left[ -\frac{(x-t)^{N+1}}{N+1} \right]_{t=x_0}^{t=x}} = +f^{(N+1)}(\xi) \frac{(x-x_0)^{N+1}}{N+1}.$$

**Bemerkung:** (“Polynomialisierbarkeit”) Schicken wir  $x \rightarrow x_0$ , so auch  $\xi \rightarrow x_0$ , und damit ist der Approximierfehler von der Größenordnung eines Polynoms vom Grad  $N+1$ .

#### Definition 1.4.4

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $x_0 \in I$  &  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$   $\infty$ -oft stetig differenzierbar. Dann nennen wir

$$T_{x_0} f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

die **Taylorreihe** von  $f$  im **Entwicklungspunkt**  $x_0$

Kann, muss aber nicht  $f$  darstellen:  $\exists r > 0 : \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\} : f(x) \neq T_{x_0} f(x)$ .

#### Example 1.4.5

- $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist  $C^\infty$  &  $\exp^{(k)} = \exp \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$  mit  $x_0 = 0 : T_0 \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ .

- $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist  $C^\infty$ ,

$$- \sin^{(0)}(x) = \sin(x)$$

$$- \sin^{(1)}(x) = \cos(x)$$

$$- \sin^{(2)}(x) = -\sin(x)$$

$$- \sin^{(3)}(x) = -\cos(x)$$

$$x_0 = 0 : k \in \mathbb{N}_0 : \sin^{(4k)}(x_0) = 0, \text{ usw.}$$

$$T_0 \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{(4k+1)!} x^{4k+1} - \frac{1}{(4k+3)!} x^{4k+3} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

Analog für  $\cos$

#### Example 1.4.6

$$f(x) = \log(1+x)$$

$$\bullet f^{(0)}(x) = \log(1+x)$$

$$\bullet f^{(1)}(x) = (1+x)^{-1}$$

$$\bullet f^{(2)}(x) = -(1+x)^{-2}$$

$$\bullet f^{(3)}(x) = 2(1+x)^{-3} \text{ ind:}$$

$$\bullet f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} (k-1)! (1+x)^{-k}$$

$$T_0 f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (k-1)! (-1)^{k+1} (x)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k.$$

Falls  $|x| < 1$ , so konvergiert dies (Majorantenkriterium)

$$\begin{aligned}\log(1+x) &= \int_0^x \frac{dt}{1+t} \\ &= \int_0^x \frac{1}{1+t} dt.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-t)^k dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x t^k dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} x^{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k.\end{aligned}$$

$$\parallel \quad \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} q^n}_{s,} = \underbrace{\frac{1}{1-q}}_{sq=s-1}$$

| Weierstraß

**Später:**  $\log(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

## 2 Topologische Strukturen

### 2.1 Metrische Räume

**Ziel/Idee** Räume, in denen wir Abstände messen können.  $X$  Menge,  $d : X \times X \ni (x, y) \mapsto \underbrace{d(x, y)}_{\text{“Abstand”}}$

- (i) Abstand nicht-negativ
- (ii) Abstand  $0 \iff$  Objekte dieselben
- (iii) Abstand von  $x$  zu  $y$  = Abstand von  $y$  zu  $x$ .
- (iv) Gehen wir über Zwischenpunkte, so machen wir einen Umweg

#### Definition 2.1.1 Metrik, Metrischer Raum

Sei  $X$  eine Menge und  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Wir nennen  $d$  eine **Metrik** &  $(X, d)$  einen **metrischen Raum**, falls:

- (a) Pos. Definitheit:  $\forall x, y \in X : d(x, y) = 0 \iff x = y$ .
- (b) Symmetrie:  $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$ .
- (c) **Dreiecksungleichung**:  $\forall x, y, z \in X : d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

#### Example 2.1.2 Triviale Metrik

$X$  nichtleere Menge. **Triviale Metrik**:  $d(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$  (kein Vektorraum)

#### Example 2.1.3 Normierter Vektorraum & Metriken

Sei  $(X, \|\cdot\|)$  ein Vektorraum mit Norm:

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

mit

(N1)  $\forall x \in X : \|x\| = 0 \iff x = 0$ . (0 Nullvektor in  $X$ )

(N2)  $\forall x \in X : \forall \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ .

(N3)  $\forall x, y \in X : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

Wir definieren die kanonische Metrik in  $(X, \|\cdot\|)$  via

$$d(x, y) := \|x - y\|, \quad x, y \in X.$$

#### Example 2.1.4 $\mathbb{R}^n$ , Normen

$$\|(x_1, x_2, x_3)\|_2 := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Sei  $1 \leq p \leq \infty$ , und für  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  definieren

$$\|x\|_p := \left( \sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|x\|_\infty := \max |x_j|, \quad p = \infty$$

Dann ist  $\|\cdot\|_p$  eine **Norm auf  $\mathbb{R}^n$**  (“ $p$ -Norm”)

- Nichtnegativ klar. Positiv Definiert & Homogenität (N2): klar.
- Für Dreiecksungleichung: **Youngsche Ungleichung:**  $\forall 1 \leq p < \infty : \forall a, b \in \mathbb{R} : |ab| \leq \frac{1}{p} |a|^p + \frac{1}{p'} |b|^{p'}, p' := \frac{p}{p-1}$   
**Hölderexponent von  $p$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$**
- exp konvex:  $\forall \lambda \in [0, 1] : \forall x, y \in \mathbb{R} : \exp(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda \exp(x) + (1 - \lambda) \exp(y)$
- $\exists a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Dann:

$$\begin{aligned} |ab| &= \exp(\log(|ab|)) \\ &= \exp(\log|a| + \log|b|) \\ &= \exp\left(\frac{1}{p} \log|a|^p + \frac{1}{p'} \log|b|^{p'}\right) \\ &\leq \frac{1}{p} \exp \log|a|^p + \frac{1}{p'} \exp \log|b|^{p'} \end{aligned}$$

Zur Dreiecksungleichung: **Höldersche Ungleichung:**  $1 \leq p < \infty, x, y \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\sum_{j=1}^n |x_j y_j| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_{p'}$$

$\exists$  erst  $\|x\|_p = \|y\|_{p'} = 1$ .

$$\bullet \sum_{j=1}^n |x_j y_j| \leq \underbrace{\frac{1}{p} \sum_{j=1}^n |x_j|^p}_1 + \underbrace{\frac{1}{p'} \sum_{j=1}^n |y_j|^{p'}}_1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Für  $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  so  $\tilde{x} := \frac{x}{\|x\|_p}, \tilde{y} := \frac{y}{\|y\|_{p'}}$ .

Also

$$\sum_{j=1}^n |\tilde{x}_j \tilde{y}_j| \leq \|\tilde{x}\|_p \|\tilde{y}\|_{p'} = 1 \implies \sum_{j=1}^n |x_j y_j| \leq \|x\|_p \|y\|_{p'}.$$

$x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
 \|x + y\|_p^p &= \sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p \\
 &= \sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^{p-1} |x_j + y_j| \\
 &\leq \sum_{j=1}^n \underbrace{|x_j + y_j|^{p-1}}_{a_j} \underbrace{|x_j + y_j|}_{b_j} + \sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^{p-1} |y_j| \\
 &\leq \left( \sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^{(p-1)p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left( \left( \sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{j=1}^n |y_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\
 &= \left( \sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} (\dots) \\
 &= \|x + y\|_p^{p-1} (\|x\|_p + \|y\|_p) \\
 \implies \|x + y\|_p &\leq \|x\|_p + \|y\|_p
 \end{aligned}$$

**Ziel:** Konvergenz auf metrischen Räumen.

Ana I :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall j \geq N : \underbrace{|x_j - x|}_{= \|x_j - x\|_2} < \varepsilon.$$

### Definition 2.1.5

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Eine Folge  $(x_j) \subset X$  **konvergiert gegen**  $x$  (bzgl.  $d$ ), falls

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall j \geq N : d(x_j, x) < \varepsilon.$$

Wir nennen  $(x_j)$  **Cauchy** (bzgl.  $d$ ), falls

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall i, j \geq N : d(x_i, x_j) < \varepsilon.$$

Wir nennen  $(X, d)$  **vollständig**, falls jede  $d$ -Cachyfolge bezüglich  $d$  konvergiert.

$r > 0, x \in X : B_r(x) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$  "offener Ball".

- $U \subset X$  **offen** bezüglich  $d \iff \forall x \in U : \exists r > 0 : B_r(x) \subset U$
- $U$  abgeschlossen  $\iff X \setminus U$  offen

**Hausdorff, Brief "... das Ende nicht ..."**

Lieber Freund Wollstein!

Wenn Sie diese Zeilen erhalten, haben wir drei das Problem auf andere Weise gelöst – auf die Weise, von der Sie uns beständig abzubringen versucht haben. Das Gefühl der

Geborgenheit, das Sie uns vorausgesagt haben, wenn wir erst einmal die Schwierigkeiten des Umzugs überwunden hätten, will sich durchaus nicht einstellen, im Gegenteil:

Auch Endenich  
Ist noch vielleicht das Ende nich!

Was in den letzten Monaten gegen die Juden geschehen ist, erweckt begründete Angst, dass man uns einen für uns erträglichen Zustand nicht mehr erleben lassen wird.

Sagen Sie Philipppsons, was Sie für gut halten, nebst dem Dank für ihre Freundschaft (der vor allem aber Ihnen gilt). Sagen Sie auch Herrn Mayer unseren herzlichen Dank für alles, was er für uns getan hat und gegebenenfalls noch getan haben würde; wir haben seine organisatorischen Leistungen und Erfolge aufrichtig bewundert und hätten uns, wäre jene Angst nicht, gern in seine Obhut gegeben, die ja ein Gefühl relativer Sicherheit mit sich gebracht hätte, – leider nur einer relativen.

Wir haben mit Testament vom 10. Okt. 1941 unseren Schwiegersohn Dr. Arthur König, Jena, Reichartsteig 14, zum Erben eingesetzt. Helfen Sie ihm, soweit Sie können, lieber Freund! helfen Sie auch unserer Hausangestellten Minna Nickol oder wer sonst Sie darum bittet; unseren Dank müssen wir ins Grab mitnehmen. Vielleicht können nun die Möbel, Bücher usw. noch über den 29. Jan. (unseren Umzugstermin) im Haus bleiben; vielleicht kann auch Frau Nickol noch bleiben, um die laufenden Verbindlichkeiten (Rechnung der Stadtwerke u. s. w.) abzuwickeln. – Steuerakten, Bankkorrespondenz u. dgl., was Arthur braucht, befindet sich in meinem Arbeitszimmer.

Wenn es geht, wünschen wir mit Feuer bestattet zu werden und legen Ihnen drei Erklärungen dies Inhalts bei. Wenn nicht, dann muss wohl Herr Mayer oder Herr Goldschmidt das Notwendige veranlassen. Für Bestreitung der Kosten werden wir, so gut es geht, sorgen; meine Frau war übrigens in einer evangelischen Sterbekasse – die Unterlagen dazu befinden sich in ihrem Schlafzimmer. Was augenblicklich an der Kostendeckung noch fehlt wird unser Erbe oder Nora übernehmen.

Verzeihen Sie, dass wir Ihnen über den Tod hinaus noch Mühe verursachen; ich bin überzeugt, dass Sie tun, was Sie tun können (und was vielleicht nicht sehr viel ist). Verzeihen Sie uns auch unsere Desertion! Wir wünschen Ihnen und allen unseren Freunden, noch bessere Zeiten zu erleben.

Ihr treu ergebener

- Felix Hausdorff

### **Lemma Hausdorfffeigenschaft metrische Räume**

*Ist  $(X, d)$  ein metrischer Raum, so gibt es für  $x, y \in X, x \neq y$  offene Mengen  $U, V$  mit  $x \in U, y \in V$  und  $U \cap V = \emptyset$*

### **Theorem 2.1.6**

*Sei  $(X, d)$  vollständiger metrischer Raum,  $U \subset X$ . Dann sind äquivalent:*

- (i)  $(U, d)$  vollständig.*
- (ii)  $U$  ist bezüglich  $d$  abgeschlossen*

**Proof Theorem 2.1.6**

“ $\implies$ ” Hierzu folgende Charakterisierung der Abgeschlossenheit:  $U \subset X$  abgeschlossen  $\iff U \subset X$  folgenabgeschlossen :  $\iff (x_j) \subset U$  Folge mit  $d(x_j, x) \rightarrow 0, j \rightarrow \infty$ , so  $x \in U$ .

**Bew. (Zwischenbehauptung)**

“ $\implies$ ” Sei  $(x_j) \subset U$  konvergent mit  $d(x_j, x) \rightarrow 0, x \in X \setminus U$ .  $U$  abgeschlossen  $\implies X \setminus U$  offen  $\implies \exists r \geq 0: B_r(x) \subset X \setminus U$ . Aber  $\exists N \in \mathbb{N} : \forall j \geq N : x_j B_r(x) \subset X \setminus U$ . Aber  $(x_j) \subset U \perp$

“ $\impliedby$ ” Angenommen,  $U$  nicht abgeschlossen, also  $X \setminus U$  nicht offen.  $\implies \exists x \in X \setminus U : \forall r > 0 : B_r(x) \not\subset X \setminus U$ , also  $B_r(x) \cap U \neq \emptyset$   
 $\implies$  also  $\forall j \in \mathbb{N} : \forall x_j \in B_{\frac{1}{j}}(x) \cap U$ . Dann  $(x_j) \subset U$  &  $d(x_j, x) \rightarrow 0$ , aber  $x \in X \setminus U$ .  
 Also  $U$  nicht folg.ab., also Beh. gez. ■

**Nun:** (i)  $\implies$  (ii) Sei  $(x_j) \subset U$  mit  $d(x_j, x) \rightarrow 0, x \in X$ . Dann ist  $(x_j)$   $d$ -Cauchy (da konvergent), also  $\exists y \in U : d(x_j, y) \rightarrow 0, j \rightarrow \infty$  (  $(X, d)$  VMR).

Nach Lemma (Hausdorff)  $x = y$ , also (ii)

“(ii)  $\implies$  (i)” Sei  $x_j \subset U$   $d$ -Cauchy, Wegen  $(X, d)$  VMR,  $\exists x \in X : d(x_j, x) \rightarrow 0$ .  
 Aber da  $U$  folgen abgeschlossen  $x \in U$  Also  $(U, d)$  VMR ■

**Example 2.1.7**

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, und sei  $C_b(U) := \{u : U \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ stetig und beschränkt}\}$   $\|u\|_{C(U)} := \sup_{x \in U} |u(x)|$  ist Norm auf  $C_b(U)$  (keine Norm auf  $C(U) \hat{=}$  stetige Funktionen auf  $U$ .)

$\|\cdot\|_{C(U)}$  ind. Metrik  $d(u, v) := \|u - v\|_{C(U)}$ .

**Beh.:**  $(C_b(U), d)$  ist **vollständig**.

Sei  $(u_j)$  Cauchyfolge in  $(C_b(U), d)$ , d.h.,  $\lim_{j, l \rightarrow \infty} \|u_j - u_l\|_{C(U)} = 0$ .

Für jedes  $x \in U : |u_j(x) - u_l(x)| \stackrel{\text{Def}}{\leq} \|u_j - u_l\|_{C(U)} \xrightarrow{j, l \rightarrow \infty} 0$ .

$\implies (u_j(x))$  Cauchy in  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ .  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  vollständig  $\implies \exists u(x) \in \mathbb{R} : u_j(x) \rightarrow u(x), j \rightarrow \infty$ . Zu zeigen:  $u \in C_b(U)$  &  $\|u_j - u\|_{C(U)} \rightarrow 0$ .

Für letzteres:

$$\forall x \in U : \forall j \in \mathbb{N} : |u(x) - u_j(x)| = \lim_{l \rightarrow \infty} |u_l(x) - u_j(x)| \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \|u_j - u_l\|_{C(U)},$$

also

$$\|u - u_j\|_{C(U)} \leq \lim_{l \rightarrow \infty} \|u_l - u_j\|_{C(U)},$$

also

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|u - u_j\|_{C(U)} \leq \lim_{j, l \rightarrow \infty} \|u_j - u_l\|_{C(U)} = 0.$$

Konvergenz bezüglich  $d$  ist gleichmäßige Konvergenz, und da alle  $u_j$ 's stetig, folgt  $u \in C(U)$  nach Analysis I. Genauer: z. z.  $u$  stetig. Sei  $x \in U$  und  $\varepsilon > 0$  beliebig. Hierzu  $|u(x) - u_j(y)| \leq \underbrace{|u(x) - u_j(x)|}_{\leq \varepsilon/3} + |u_j(x) - u_j(y)| + \underbrace{|u_j(y) - u(y)|}_{\leq \varepsilon/3} \quad \forall y \in U$ .

Wähle zuerst  $j \in \mathbb{N}$  mit  $\|u_j - u\|_{C(U)} < \frac{\varepsilon}{3}$ , und dann wegen  $u_j$  stetig  $\delta > 0 : |x - y| < \delta \implies |u_j(x) - u_j(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ . Nach obiger Abschätzung  $|u(x) - u(y)| < \varepsilon$ , also  $u$  stetig. Für Beschränktheit von  $u$ : Wähle  $j \in \mathbb{N} : \|u - u_j\|_{C(U)} \leq 1$ . Dann  $\forall x \in U : |u(x)| \leq \underbrace{|u_j(x) - u(x)|}_{\leq 1} + \underbrace{|u_j(x)|}_{< \infty} \leq \|u_j - u\|_{C(U)} + \|u_j\|_{C(U)} \implies u \text{ beschränkt}$



**Example 2.1.8**

Betrachte  $C_b([0, 2])$  mit **Norm**

$$\|u\|_{\mathcal{L}^1([0,2])} := \int_0^2 |u(x)| dx.$$

Zu positiver Definitheit:  $\|u\|_{\mathcal{L}^1([0,2])} = 0$ . Angenommen,  $u \equiv 0$ , so  $\exists x_0 \in [0, 2] : |u(x_0)| > 0$ .

Dann, für  $\varepsilon := \frac{|u(x_0)|}{2} : \exists \delta > 0 : |x_0 - x| < \delta \implies |u(x) - u(x_0)| < \frac{|u(x_0)|}{2} \implies |u(x)| - |u(x_0)| > -\frac{|u(x_0)|}{2} \implies |u(x)| > \frac{|u(x_0)|}{2} \implies \|u\|_{\mathcal{L}^1([0,2])} \geq \int_0^2 1_{B_\delta(x_0)} |u(x)| dx \geq \frac{|u(x_0)|}{2} \delta$

**Beh.:** Ist  $d$  die durch  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^1([0,2])}$  ind. Metrik, so ist  $(C_b([0, 2]), d)$  **nicht vollständig**: Definiere

$$u_j(x) := \begin{cases} x^j, & x \in [0, 1) \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann:  $(u_j)$   $d$ -Cauchy:

$$\|u_j - u_l\|_{\mathcal{L}^1([a,b])} = \int_0^1 |x^j - x^l| dx \leq \int_0^1 x^j dx + \int_0^1 x^l dx = \frac{1}{j+1} + \frac{1}{l+1} \xrightarrow{j,l \rightarrow \infty} 0, \text{ Cauchyeigenschaft.}$$

- Gäbe es ein  $u : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $d(u_j, u) \rightarrow 0$ , so notwendigerweise  $u = 0$  auf  $[0, 1)$  &  $u = 1$  auf  $(1, 2]$ . Dann aber  $u$  unstetig -  $(C_b([0, 2]), d)$  **nicht vollständig**.

**Example 2.1.9**

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_j \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq n\}$ , für  $1 \leq p \leq \infty$  sei  $d_p$  die durch  $\|\cdot\|_p$  ind. Metrik. Dann ist  $(\mathbb{R}^n, d_p)$  **vollständig**. Denn:

Ist  $(x_j) \subset \mathbb{R}^n$  eine Cauchyfolge bezüglich  $d_p$ , so sind die einzelnen Koordinatenfolgen Cauchy in  $\mathbb{R}$ .

$a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n : \forall i \in \{1, \dots, n\} :$

$$\begin{aligned} |a_i| &= (|a_i|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left( \sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq (n \|a\|_\infty^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= n^{\frac{1}{p}} \|a\|_\infty. \end{aligned}$$

$$\implies \forall p \in [1, \infty) : \underbrace{\|a\|_\infty}_{\max_{i=1, \dots, n} |a_i|} \leq \underbrace{\|a\|_p}_{(\sum_{k=1}^n |a_k|^p)^{\frac{1}{p}}} \leq n^{\frac{1}{p}} \|a\|_\infty \implies \|a\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|a\|_p = 1$$

Für  $1 \leq p \leq \infty$  sei  $\mathbb{B}_p := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \|x_1, x_2\|_p \leq 1\}$  **Bälle** bezüglich  $d_p$ .

(Für  $p = 1$  Quadrat mit Ecken  $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$ ., für  $1 < p < 2$  nähert sich zu einem Kreis mit Radius 1, für  $p = 2$  Kreis, für  $2 < p < \infty$  nähert sich Quadrat mit Seitenlänge 2, parallel zu Koordinatenachsen, für  $p = \infty$  Quadrat)

**Definition 2.1.10**

Seien  $(X, d_X)$  &  $(Y, d_Y)$  zwei metrische Räume &  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Wir nennen  $f$  **stetig** in  $x_0 \in X$ , falls gilt: Ist  $W \subset Y$  offen (bezüglich  $d_Y$ ) mit  $f(x_0) \in W$ , so ist  $f^{-1}(W)$  offen bezüglich  $d_X$ .  $f$  heißt **stetig** wenn  $f$  stetig in jedem  $x_0 \in X$  ist.

- **Warnung:** Das heißt **NICHT**, dass Bilder offener Mengen offen sind!

**Bsp.:**  $\sin : \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{offen}} \rightarrow \mathbb{R}$ , aber  $\sin(\mathbb{R}) = [-1, 1] \leftarrow$  abgeschlossen

### Theorem 2.1.11

Seien  $(X, d_X), (Y, d_Y)$  metrische Räume. Dann ist für  $f : X \rightarrow Y$  äquivalent:

- (i)  $f$  stetig in  $x_0$ .
- (ii)  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in X : d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$
- (iii) Ist  $(x_j) \subset X$  eine Folge mit  $d_X(x_j, x) \rightarrow 0$ , so  $d_Y(f(x_j), f(x_0)) \rightarrow 0, j \rightarrow \infty$ .

### Proof Theorem 2.1.11

- (i)  $\implies$  (ii): Sei  $\varepsilon > 0$ , also  $B_\varepsilon(f(x_0)) (= W)$  offen in  $Y$ . Da  $f$  stetig,  $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$  offen in  $X$ . Aber wegen  $x_0 \in f^{-1}(W)$  gibt es ein  $\delta > 0 : B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(W)$ , also  $f(B_\delta(x_0)) \subset W$ . Damit folgt (ii).
- (ii)  $\implies$  (iii): Sei  $\varepsilon > 0$ , dann wegen (ii)  $\exists \delta > 0 : d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ . Da  $d_X(x, x_j) \rightarrow 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall j \geq N : d_X(x, x_j) < \delta$ , also auch  $f(x_j) \in B_\varepsilon(f(x_0)) \implies$  (iii)
- $\neg$ (ii)  $\implies \neg$ (iii):  $\exists \varepsilon > 0 : \forall j \in \mathbb{N} : \exists x_j \in X : d_X(x, x_j) < \frac{1}{j}$ , aber  $d_Y(f(x_0), f(x_j)) > \varepsilon \implies f$  nicht folgenstetig, also  $\neg$ (iii)
- (ii)  $\implies$  (i):  $f$  stetig in  $x_0 \iff$  Ist  $W \subset Y$  offen,  $f(x_0) \in W$ , so  $f^{-1}(W)$  offen. Sei also  $W \subset Y$  offen mit  $f(x_0) \in W$ . Also  $\exists \varepsilon : B_\varepsilon(f(x_0)) \subset W$ .  $f$   $\varepsilon$ - $\delta$ -Stetigkeit, also  $\exists \delta > 0 : B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$ . Also  $f^{-1}(W)$  offen, d.h.  $f$  stetig. ■

### Example 2.1.12

Ist  $p(x_1, \dots, x_n) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha x^\alpha$  ein Polynom wobei  $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$  ein **Multiindex**, & für  $x = (x_1, \dots, x_n)$   $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$ . Dann ist  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, wobei  $\mathbb{R}^n$  mit euklidischer Metrik ausgestattet.

### Example 2.1.13

$\mathbb{R}^{n \times n} \hat{=} (n \times n)$ -Matrizen. Norm auf  $\mathbb{R}^{n \times n} : A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}, \|A\|_2 := \left( \sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ . Setze:

$$\text{GL}(n; \mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ invertierbar}\}.$$

**Frage:** Ist  $\text{GL}(n; \mathbb{R})$  **offen**? Ja.

$$\text{GL}(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

$\det(A)$  ist ein Polynom der Einträge von  $A$ . Also ist  $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Aber  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  offen in  $\mathbb{R}$ , & damit  $\text{GL}(n; \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$  **offen**.

**Konsequenz:** Ist  $A$  inv., so lassen sich die Einträge von  $A$  stets so “gering” abändern, dass wir wieder eine inv. Matrix erhalten.

### Theorem 2.1.14

Sei  $(X, d)$  vollständiger metrischer Raum &  $T : X \rightarrow X$  eine **Kontraktion**:

$$\exists 0 \leq L < 1 : \forall x, y \in X : d_X(Tx, Ty) \leq Ld(x, y).$$

Dann  $\exists! x_0 \in X : T_{x_0} = x_0$  (" $x_0$  Fixpunkt"). [Banach]

### Proof Theorem 2.1.14

**$T$  stetig:** Ist  $\varepsilon > 0$ , so wähle  $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$ , und wende  $\varepsilon$ - $\delta$ -Charakterisierung der Stetigkeit an.  $T$

**eindeutig:** Seien  $x, y \in X$  zwei Fixpunkte:  $T_x = x$  &  $T_y = y$ . Dann  $d(x, y) = d(T_x, T_y) \stackrel{\text{Kontraktion}}{\leq} Ld(x, y) \stackrel{0 \leq L < 1}{\implies} d(x, y) = 0 \implies x = y$ .

**Existenz:** Sei  $x \in X$  beliebig, definiere

$$x_{j+1} := T_{x_j}, j \in \mathbb{N}, x_1 := x.$$

Zu zeigen:  $(x_j)$  konvergiert gegen einen **Fixpunkt**.

**Vorbemerkung:**  $d(x_{k+1}, x_k) \stackrel{\text{Def}}{=} d(T_{x_k}, T_{x_{k-1}}) \stackrel{T \text{ Kont.}}{\leq} Ld(x_k, x_{k-1}) \stackrel{\text{Def}}{=} Ld(T_{x_{k-1}}, T_{x_{k-2}}) \stackrel{\text{Kontr.}}{\leq} L^2 d(x_{k-1}, x_{k-2}) \leq \dots \leq L^{k-1} d(x_2, x_1)$ . Zu zeigen:  $(x_j)$  **Cauchy**.

Seien  $j < l, j, l \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} d(x_j, x_l) &\leq \sum_{k=j}^{l-1} d(x_{k+1}, x_k) \\ &\leq d(x_2, x_1) \sum_{k=j}^{l-1} L^k \xrightarrow{j, l \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

da

$$\sum_{k=1}^{\infty} L^k \stackrel{0 \leq L < 1}{<} \infty \text{ (geom. Reihe).}$$

Also:  $(x_j)$  Cauchy  $\stackrel{(X, d)}{\implies} \text{VMR}$   $(x_j)$  konvergiert gegen  $x_0 \in X$ . **Zu zeigen:**  $x_0$  Fixpunkt.

$d(x_0, T_{x_0}) = \lim_{j \rightarrow \infty} d(\underbrace{x_j}_{T_{x_{j-1}}}, T_{x_{j-1}})$ . Damit  $x_0 = T_{x_0}$ .

$X \hat{=}$  Stadtgebiet von Konstanz.  $T$ : bildet Konst. auf Landkarte von Konstanz ab, Landkarte wird **in Konstanz** hingelegt:  $X \rightarrow X$ .  $L < 1 \hat{=}$  Landkarte ansonsten Unsinn.

### Example 2.1.15

Alle Bedingungen wichtig:

(i)  $X$  vollständig:  $(0, 1) \subset \mathbb{R}, T_x := \frac{1}{4}x^2$

- $|T_x - T_y| = \frac{1}{4} \underbrace{(|x| + |y|)}_{\leq 2} |x - y| \leq \underbrace{\frac{1}{2}}_{L < 1} |x - y|, \quad x, y \in (0, 1),$
- $T : (0, 1) \rightarrow (0, 1),$
- $((0, 1), d_{\text{Eukl.}})$  nicht vollst.

(ii)  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist keine Kontraktion,  $\exp x = x$  hat keine Lösung.

$$f(x) = 0, \underbrace{f(x) + x}_{T_x} = x$$

$T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  stetig, dann hat  $T$  einen Fixpunkt.

**Anwendung:** Gewöhnliche Differentialgleichungen

$T > 0, f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} :$

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), 0 < t \leq T. \\ u(0) = u_0. \quad u_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1)$$

**Beispiel:**

$$\begin{cases} u'(t) = u(t), t \in [0, 1] \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

**ANNAHME:**  $\exists L > 0 : \forall t \in [0, T] : \forall x, y \in \mathbb{R} : |f(t, x) - f(t, y)| \leq L |x - y|.$

**Beh.:** Unter dieser Annahme existiert genau eine Funktion  $u \in C^1([0, T])$  die 1 löst. (Variante des Satzes von **Picard-Lindelöf**)

$$T : C([0, T]) \rightarrow C([0, T]), \|a\|_{\sim} := \max_{t \in [0, T]} \exp(-2Lt) |u(t)|.$$

$$\exp -2LT \leq \exp -2LT \leq 1 \quad \forall t \in [0, T],$$

also

$$\exists c = c(T) > 0 : \frac{1}{c} \|u\|_{\sim} \leq \|u\|_{C([0, T])} \leq c \|u\|_{\sim}. \quad (2)$$

**Definiere:**

$$Tu(t) := u_0 + \int_0^t f(s, u(s)) ds$$

$u \in C([0, T])$ , so  $Tu \in C^1([0, T])$ .  $Tu(0) = u_0$ .

$$u'(t) \stackrel{u \text{ FP}}{=} (Tu)'(t) = f(t, u(t)).$$

Zu zeigen:  $T$  hat Fixpunkt, denn Fixpunkte von  $T$  sind die Lösungen von 1.  **$T$  Konstraktion:**  $u, v \in C([0, 1]) : \forall t \in [0, T] :$

$$\begin{aligned} \exp(-2Lt) |Tu(t) - Tv(t)| &\stackrel{\text{Def}}{=} \exp(-2Lt) \left| \int_0^t f(s, u(s)) - f(s, v(s)) ds \right| \\ &\stackrel{\text{Lip.}}{\leq} L \exp(-2Lt) \int_0^t \underbrace{(|u(s) - v(s)| \exp(-2Ls))}_{\leq \|u-v\|_N} \exp(2Ls) ds \\ &\leq L \exp(-2Lt) \|u - v\|_{\sim} \frac{1}{2L} \underbrace{(\exp(2Lt) - 1)}_{\leq \exp 2Lt} \\ &\leq \frac{1}{2} \|u - v\|_{\sim}. \end{aligned}$$

$$\implies \|Tu - Tv\|_{\sim} \leq \frac{1}{2} \|u - v\|_{\sim}$$

Wegen 2 ist  $C([0, T])$  mit der durch  $\|\cdot\|_{\sim}$  induzierten Metrik vollständig  $\stackrel{\text{Banach}}{\implies}$

■

## 2.2 Kompaktheit

- **Ana I:**  $A \subset \mathbb{R}$  **kompakt**  $\iff A$  abgeschlossen und beschränkt  
bezüglich Metrik,  
die von  $|\cdot|$  auf  $\mathbb{R}$  induziert

### Definition 2.2.1 Kompaktheit

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Wir nennen  $U \subset X$  **kompakt** genau dann wenn:

Ist  $(U_i)_{i \in I}$  eine **Familie von offenen Mengen** mit  $U \subset \bigcup_{i \in I} U_i$  (“ $(U_i)_{i \in I}$  überdeckt  $U$ ”). Dann gibt es **endlich viele**

$$i_1, \dots, i_N \in I \text{ mit } U \subset \bigcup_{j=1}^N U_{i_j}.$$

[Das muss für beliebige Familien mit obiger Eigenschaft gelten]

**D.h.:** **kompakt**  $\iff$  jede offene Überdeckung besitzt endliche Teilüberdeckung

- Kompaktheit bedeutet **nicht**, dass es eine endliche Überdeckung durch offene Mengen gibt.  
 [Überdecke  $U \subset X$  durch  $X$ , und  $X$  ist offen]

### Example 2.2.2

$\mathbb{R}, d \hat{=} \text{Metrik durch } |\cdot| \text{ induziert.}$

$(0, 1)$  **kompakt**? Betrachte für  $i \in \mathbb{N}_{\geq 3} : U_i := (\frac{1}{i}, 1 - \frac{1}{i})$ . Dann  $(0, 1) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$ . Angenommen, es gäbe endlich viele  $i_1, \dots, i_N \in \mathbb{N}$  mit  $(0, 1) = \bigcup_{j=1}^N U_{i_j}$ .  $\exists i_1 < \dots < i_N$ , dann  $U_{i_1} \subset \dots \subset U_{i_N}$ , also

$$\bigcup_{j=1}^N U_{i_j} = U_{i_N} = \left( \frac{1}{i_N}, 1 - \frac{1}{i_N} \right) \subsetneq (0, 1).$$

### Example 2.2.3

$$X \text{ Menge, } d(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

$U \subset X$  kompakt. Offene Überdeckung:  $0 < \varepsilon < 1$ . Für  $x \in U : B_\varepsilon(x)$  ist offen. Dann  $B_\varepsilon(x) = \{x\}$ . Dann  $U \subset \bigcup_{x \in U} B_\varepsilon(x)$ . Mit  $U$  kompakt:

$$\exists x_1, \dots, x_N \in U : U \subset \bigcup_{j=1}^N \underbrace{B_\varepsilon(x_j)}_{\{x_j\}} = \{x_1, \dots, x_N\}.$$

$\implies$  Kompakte Mengen sind hier notwendigerweise endlich.

**Hier:**  $U$  kompakt  $\iff U$  endlich.

### Definition 2.2.4 Relative & Präkompaktheit

Sei  $(X, d)$  metrischer Raum. Wir nennen  $U \subset X$

- (i) **relativ kompakt**, falls  $\bar{U}$  kompakt. Hier ist

$$\bar{U} := \bigcap \{V : V \text{ abg. \& } U \subset V\}$$

der Abschluss von  $U$ .

(ii) **präkompakt** (oder **totalbeschränkt**)

Für jedes  $\varepsilon > 0$  existieren endlich viele  $x_1, \dots, x_N \in U$  so, dass

$$U \subset \bigcup_{j=1}^N B_\varepsilon(x_j).$$

- Kompaktheit  $\implies$  Präkompaktheit.

$U$  kompakt,  $\varepsilon > 0 \implies U \subset \bigcup_{x \in U} B_\varepsilon(x)$ , also

$$\exists x_1, \dots, x_N \in U : U \subset \bigcup_{j=1}^N B_\varepsilon(x_j) \implies U \text{ präkompakt.}$$

$\implies$  FRAGE: Worin besteht der Unterschied zwischen Präkompaktheit und Kompaktheit?

**Theorem 2.2.5**

Sei  $(X, d)$  vollständiger metrischer Raum &  $U \subset X$ . Dann sind äquivalent:

- (i)  $U$  kompakt.
- (ii)  $U$  ist **folgenkompakt**: Ist  $(x_j) \subset U$  eine Folge, so besitzt  $(x_j)$  eine Teilfolge  $(x_{j_k})$ , die bezüglich  $d$  gegen ein  $x \in U$  konvergiert.
- (iii)  $U$  ist präkompakt und abgeschlossen.

**Proof Theorem 2.2.5**

- (i)  $\implies$  (ii): Angenommen,  $U$  kompakt, aber nicht folgenkompakt.

Also  $\exists (x_j) \subset U$  : keine Teilfolge konvergiert gegen in  $U$ .

Damit  $|\{x_j : j \in \mathbb{N}\}| = +\infty$  Wenn endlich, dann existiert mind. ein  $x \in \{x_j : j \in \mathbb{N}\}$ , welches unendlich oft angenommen wird, dann gäbe es aber eine Teilfolge, die diesen Wert unendlich oft annähme.

Weiter:  $\forall x \in U : \exists \varepsilon > 0$  : es gibt nur endlich viele  $x_j$ 's in  $B_\varepsilon(x)$ .

Damit ist  $(B_\varepsilon(x))_{x \in U}$  offene Überdeckung von  $U \xrightarrow{U_{\text{komp.}}} \exists \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N \in U$ .

$$\underbrace{U}_{\text{alle } x_j \text{'s}} \subset \bigcup_{j=1}^N \underbrace{B_\varepsilon(\tilde{x}_j)}_{\text{endlich viele } x_j \text{'s}}.$$

Aber  $(x_j) \subset U$ , Also liegen unendlich viele  $x_j$ 's in einem dieser Bälle - Widerspruch.

- (ii)  $\implies$  (iii):  $U$  **abgeschlossen**:  $U$  abgeschlossen  $\iff (x_j) \subset U$  mit  $x_j \rightarrow x \in X$ , so  $x \in U$ .

Sei also  $(x_j) \subset U$  mit  $x_j \rightarrow x \in X$ . zu zeigen  $x \in U$ .

Folgenkompaktheit aus (ii)  $\implies \exists (x_{j_k}) \subset (x_j) : \exists y \in U : x_{j_k} \rightarrow y$ . Aber auch  $x_{j_k} \rightarrow x, k \rightarrow \infty$ . Aber  $(X, d)$  Hausdorff, also sind Grenzwerte eindeutig, also  $x = y$ . Also  $x \in U$ ;  $U$  ist abgeschlossen.

Zur **Präkompaktheit**: Angenommen,  $U$  sei folgenkompakt, aber nicht präkompakt.

D.h.  $U$  lässt sich nicht durch endlich viele in  $U$  zentrierte offene  $\varepsilon$ -Bälle überdecken.

Sei  $\varepsilon > 0$  so, dass diese Eigenschaft gibt. Für  $x_1 \in U$  beliebig betrachte  $B_\varepsilon(x_1)$ . Dann  $\exists x_2 \in U \setminus B_\varepsilon(x_1)$ . Dann  $\exists x_3 \in U \setminus (B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2))$ . Iteriere dies - da  $U$  nicht präkompakt, bricht dies nie ab da  $U$  nicht präkompakt.

Dann ist  $(x_j) \subset U$  eine Folge mit  $j \neq l \implies d(x_j, x_l) \geq \varepsilon$ . Damit ist **keine** Teilfolge

von  $(x_j)$  Cauchy  $\implies$  keine **Teilfolge** kann konvergent sein  $\implies (x_j)$  hat konvergente Teilfolgen  $\perp$  - Widerspruch

(iii)  $\implies$  (i):

Angenommen  $U$  nicht kompakt. Damit  $\exists (U_i)_{i \in I}$  offene Überdeckung von  $U$ , die keine endliche Teilüberdeckung zulässt.

Wir verwenden die Präkompaktheit wie folgt: Sei  $\varepsilon = 1$ . Dann

$$\exists B^1 := B_1(\tilde{x}_1), \dots, B^N = B_N(\tilde{x}_N) : U \subset \bigcup_{j=1}^N B^j.$$

Damit existiert Ball (E)  $B^1$  so, dass  $U \cap B^1$  nicht durch endlich viele der  $U_i$ 's überdeckt werden kann. Nun Präkompaktheit mit  $\varepsilon_{\frac{1}{2}}$ . Dann gibt es einen  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ -Ball  $B^{(2)}$  so, dass  $U \cap B^1 \cap B^2 \neq \emptyset$  &  $U \cap B^{(1)} \cap B^{(2)}$  nicht durch endlich viele  $U_i$ 's überdeckt werden kann. — Angenommen  $U$  nicht kompakt. Dann  $\exists$  offene Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  von  $U$ : es gibt keine endliche Teilüberdeckung. Für  $\varepsilon = 1$  überdecke  $U$  via Präkompaktheit durch 1-Bälle  $B^{(1)}, \dots, B^{(N)}$ . Sei  $\mathbb{E} B^1 := B^{(1)}$  der ein Ball so, dass  $B^1 \cap U$  nicht durch endlich viele  $U_i$ 's überdeckt wird. Schreibe  $B^1 := B_1(x_1)$ . Überdecke nun mit Präkompaktheit  $U$  mit endlich vielen Bällen  $\tilde{B}^{(1)}, \dots, \tilde{B}^{(M)}$ . Unter denjenigen Bällen, die nichtleeren Schnitt mit  $U \cap B^1$  haben, gibt es einen Ball  $B^2$ , so, dass  $U \cap B^2$  nicht endlich viele  $U_i$ 's überdeckt werden kann. Schreibe  $B^2 = B_{\frac{1}{2}}(x_2)$ . Setze dies induktiv fort. Erhalte  $B^j := B_{2^{-j+1}}(x_j)$  so, dass  $d(x_j, x_{j+1}) \leq 2^{-j+2} \forall j \in \mathbb{N}$ , und kein  $U \cap B^j$  kann durch endlich viele  $U_i$ 's überdeckt werden. Damit  $\forall j, l \in \mathbb{N}, j > l$ .

$$d(x_l, x_j) \leq \sum_{i=l}^{j-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq \sum_{i=l}^{j-1} 2^{-i+2} \xrightarrow{j,l \rightarrow \infty} 0. \text{ (geom. Reihe)}$$

$\implies (x_j)$  Cauchy,  $(X, d)$  Vollständiger metrischer Raum  $\implies \exists x \in X : x_j \rightarrow x$ . Aber nach (iii)  $U$  abgeschlossen, also  $x \in U$ . Damit  $\exists i_0 \in I : x \in U_{i_0} : U_{i_0}$  offen  $\implies \exists r > 0 : B_r(x) \subset U_{i_0}$ . Da  $x_j \rightarrow x, \exists j_0 \in \mathbb{N} : \forall j \geq j_0 : B_{2^{-j+1}}(x_j) \subset B_1(x) \subset U_{i_0}$ . Damit kann ab  $j = j_0$  jeder Ball  $B_{2^{-j+1}}(x_j)$  durch **endlich viele**  $U_i$ 's überdeckt werden - Widerspruch.

### Example

$$l^2(\mathbb{N}) := \left\{ (x_j) : \|(x_j)\|_{l^2(\mathbb{N})} := \left( \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}$$

$$\mathbb{S} := \left\{ (x_j) \in l^2(\mathbb{N}) : \|(x_j)\|_{l^2(\mathbb{N})} = 1 \right\}.$$

Für  $i \in \mathbb{N} : e_i := (\delta_{ij})_{j \in \mathbb{N}}$ . Dann  $\forall i \in \mathbb{N} : e_i \in \mathbb{S}$ .

Angenommen,  $(e_i)$  hätte konvergente (bzgl. der durch  $\|\cdot\|_{l^2(\mathbb{N})}$  induzierte Metrik) Teilfolge. Das im Widerspruch zu  $\forall i \neq l : \|e_i - e_l\|_{l^2(\mathbb{N})} = \sqrt{2}$  - also kann keine Teilfolge Cauchy, und schon gar nicht konvergent sein.

$$\|e_i - e_l\|_{l^2(\mathbb{N})} = \left( |0|^2 + \dots + \underbrace{|1|^2}_{i\text{-ter Eintrag}} + |0|^2 + \dots + |0|^2 + \underbrace{|1|^2}_{l\text{-ter Eintrag}} + |0|^2 + \dots \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

**DIESE PATHOLOGIEEN GIBT ES IM ENDLICHDIMENSIONALEN NICHT!** (dass beschränkte Folgen keine konvergente Teilfolgen haben **müssen**)

### 2.3 Spezielle Rolle von $\mathbb{R}^n$

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$  (wobei  $\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 := \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ) ist ein **Banachraum**:  $\mathbb{R}^n$  ist mit der durch  $\|\cdot\|_2$  induzierten Metrik vollständig.

Was ist gelb und gekrümmt? – der Banachraum

#### Theorem 2.3.1

Eine Menge  $U \subset \mathbb{R}^n$  ist bezüglich der durch  $\|\cdot\|_2$  induzierten Metrik genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. [Heine - Borel]

(Hierbei bedeutet  $U$  beschränkt  $\iff \exists R > 0 : U \subset B_R(0)$ )

#### Proof Theorem 2.3.1

“ $\implies$ ”: Ist  $U$  kompakt, so abgeschlossen. Weiter ist hier die Kompaktheit zur Folgenkompaktheit äquivalent. Angenommen,  $U$  nicht beschränkt  $\implies \forall j \in \mathbb{N} : \exists x_j \in U : \|x_j\|_2 \geq j$ . Dann besitzt  $(x_j)$  keine konvergente Teilfolge. Also ist  $U$  doch nicht beschränkt

“ $\impliedby$ ”: Sei  $(x_j) \subset U$  eine Folge, zu zeigen  $(x_j)$  hat konvergente Teilfolgen. Schreibe  $x_j = (x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(n)})$ . Da  $U$  beschränkt,  $\exists C > 0 : \forall j \in \mathbb{N} : \forall i \in \{1, \dots, n\} : |x_j^{(i)}| \leq \|x_j\|_2 \leq C$ .

**Ana I:** Jede beschränkte Folge  $(a_j) \subset \mathbb{R}$  hat konvergente Teilfolge.

$\implies (x_j^{(1)}) \subset \mathbb{R}$  hat konvergente Teilfolge  $(x_{j_1(l)}^{(1)})_{l \in \mathbb{N}}$ .

$\implies (x_{j_1(l)}^{(2)}) \subset \mathbb{R}$  hat konvergente Teilfolge  $(x_{j_2(l)}^{(2)})_{l \in \mathbb{N}}$ .

$\vdots$

$\implies (x_{j_{n-1}(l)}^{(n)}) \subset \mathbb{R}$  hat konvergente Teilfolge  $(x_{j_n(l)}^{(n)})_{l \in \mathbb{N}}$ .

$\implies \forall i \in \{1, \dots, n\} : (x_{j_n(l)}^{(i)})_{l \in \mathbb{N}}$  konvergent

$\implies (x_{j_n(l)})_{l \in \mathbb{N}}$  konvergent bezüglich  $\|\cdot\|_2$  in  $\mathbb{R}^n$ . Aber  $U$  ist abgeschlossen, also ist der Limes von  $(x_{j_n(l)})_{l \in \mathbb{N}}$  in  $U$ . Also  $U$  folgenkompakt, also kompakt. ■

#### Definition 2.3.2

Zwei Normen  $\|\cdot\|, |||\cdot|||$  auf einem Vektorraum  $X$  heißen **äquivalent**, falls  $\exists c \geq 1 : \forall x \in X : \frac{1}{c} |||x||| \leq \|x\| \leq c |||x|||$ .

- $(x_j)$  Konvergenz bezüglich  $\|\cdot\| \iff (x_j)$  konvergiert bezüglich  $|||\cdot|||$

#### Theorem 2.3.3

Auf  $\mathbb{R}^n$  sind alle Normen **äquivalent**.



**Proof Theorem 2.3.3**

Normenäquivalenz ist transitiv  $\implies$  zu zeigen bel. Norm  $\|\cdot\|$  zu  $\|\cdot\|_2$  äquivalent. Für  $x \in \mathbb{R}^n$  :  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ , hierbei  $e_i = (\delta_{ij})_{j \in \{1, \dots, n\}}$ . Da  $\|\cdot\|$  Norm,

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| \underbrace{\|e_i\|}_{\leq \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \|e_i\|} = C \|x\|_2. \\ &\leq \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \|e_i\| \underbrace{\sum_{i=1}^n |x_i|}_{n \cdot \|x\|_2} \end{aligned}$$

Hierbei  $C = n \max_{i=1, \dots, n} \|e_i\|$ .

Für andere Richtung:

$$\|x\| = \underbrace{\left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\|}_{\geq \tilde{c}} \|x\|_2 \geq \tilde{c} \|x\|_2.$$

Für jedes  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  :  $\frac{x}{\|x\|_2} \in \mathbb{S}^{n-1} := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\|_2 = 1\}$ .  $\mathbb{S}^{n-1}$  kompakt,  $\|\cdot\| : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  stetig und  $\|\cdot\|(\mathbb{S}^{n-1})$  kompakt, also  $\tilde{c} := \min_{z \in \mathbb{S}^{n-1}} \|z\|$ . Da  $\|\cdot\|$  Norm,  $\tilde{c} > 0$ . Damit  $\tilde{c} \|x\|_2 \leq \|x\|$ . ■

- Auf  $\mathbb{R}^n$  sind jeweils zwei Normen **äquivalent**.

$$\|\cdot\|, \|\cdot\| : \exists c > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{c} \|x\| \leq \|x\| \leq c \|x\|.$$

**Wichtig, weil:** Bei Äquivalenz:  $\exists \delta > 0 : B_1^{\|\cdot\|}(0) \leq B_\delta^{\|\cdot\|}(0)$  **also:** Folgen konvergieren bezüglich

$$\|\cdot\| \iff \text{Folgen konvergieren bezüglich } \|\cdot\|. \quad \text{CE } \|\cdot\| = \|\cdot\|_2. \text{ Schreibe } x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i e_i\| \stackrel{\text{Hom.}}{=} \sum_{i=1}^n \underbrace{|x_i|}_{\leq \|x\|_2} \|e_i\| \leq \underbrace{\left( \sum_{i=1}^n \|e_i\| \right)}_{=: C} \|x\|_2$$

$$|x_i| = \left( |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2$$

- $\|x\| \geq \tilde{c} \|x\|_2$   $\left[ \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\| \geq \tilde{c} \right]$ .  
 $\frac{x}{\|x\|_2} \in \mathbb{S}^{n-1} = \underbrace{\{z \in \mathbb{R}^n : \|z\|_2 = 1\}}_{\text{kompakt, da abg. \& beschränkt}}$

- $\|\cdot\|$  bezüglich  $\|\cdot\|_2$  stetig.

$$\| \|x\| - \|y\| \| \leq \|x - y\| \leq C \|x - y\|_2,$$

also ist  $\|\cdot\|$  bezüglich  $\|\cdot\|_2$  (Lipschitz) stetig. Also nimmt  $\|\cdot\|$  auf  $\mathbb{S}^{n-1}$  (stetige Funktionen auf Kompakta) Minimum an:

$$m := \min_{\mathbb{S}^{n-1}} \|\cdot\| > 0.$$

Nun setze  $\tilde{c} := m$ . ■

**Note**

Die Äquivalenz aller Normen gilt nur in endlich dimensionalen Räumen.

Gesehen:  $(C([0, 2]), \|\cdot\|_{\infty;[0,2]})$  ist vollständig/Banach.

$(C([0, 2]), \|\cdot\|_1)$  ist nicht vollständig/Banach.

$\|f\|_1 := \int_0^2 |f(x)| \, dx$ . Angenommen  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_{\infty;[0,2]}$  äquivalent. Wir wissen:  $\exists(f_j) : (f_j) \|\cdot\|_1$ -Cauchy, nicht bezüglich  $\|\cdot\|_1$  konvergent.

Äq. d. Normen  $\implies (f_j) \|\cdot\|_{\infty;[0,2]}$ -Cauchy  $\xRightarrow{\text{Banach}} (f_j)$  konvergiert bezüglich  $\|\cdot\|_{\infty;[0,2]}$

Alle Normen äq.  $\implies (f_j)$  konvergiert bezüglich  $\|\cdot\|_1$ , und das ist ein **Widerspruch**. ■

### 3 Kurven

#### Definition 3.1

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall. Eine (steige/stetig diffbare) **Kurve** ist eine (%) Abbildung  $f : (f_1, \dots, f_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Hierbei bedeutet stetig/stetig differenzierbar, dass es die einzelnen Komponentenfunktionen  $f_i$  sind. Wir nennen  $\text{Sp}(f) := \{f(t) : t \in I\}$  die **Spur der Kurve**.

#### Example 3.2

$$f : [0, 2\pi] \ni t \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^2}$$

$$g : [0, 6\pi] \ni t \mapsto \begin{cases} f, & [0, 2\pi] \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & [2\pi, 4\pi] \\ f, & [4\pi, 6\pi] \end{cases}$$

$$h : [0, 2\pi] \ni t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(-t) \\ \sin(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$$

Sieht gleich aus, aber läuft in verschiedene Richtungen, und  $g$  macht wonky things

#### Example 3.3

Für  $v \in \mathbb{R}^n$  (Richtungsvektor) und  $a \in \mathbb{R}^n$  (Aufhängepunkt) sei

$$f : \mathbb{R} \ni t \mapsto a + tv \in \mathbb{R}^n.$$

Spur von  $f$  entspricht Gerade.  $[0, 1] \rightarrow$  Spur entspricht Strecke

#### Example 3.4 Helicen

$$f : \mathbb{R} \ni t \mapsto \begin{pmatrix} r \cos(t) \\ r \sin(t) \\ ct \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

#### Definition 3.5

Für eine differenzierbare Kurve  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $f = (f_1, \dots, f_n)$  heißt für  $t \in I$

$$f'(t) = (f'_1, \dots, f'_n(t))$$

**Tangentialvektor** an  $f$  in  $t$ . Ist  $f'(t) \neq 0$ , so heißt  $\frac{f'(t)}{\|f'(t)\|_2}$  der **Einheitstangentialvektor**.

#### Example 3.6

Kurven sind im Allgemeinen **nicht** injektiv. Wir sagen,  $x \in \mathbb{R}^n$  ist **Doppelpunkt der Kurve**, falls es  $t_1, t_2 \in I$  gibt mit  $t_1 \neq t_2$  und  $x = f(t_1) = f(t_2)$ .

**Z.B.**  $f(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$   $t \in \mathbb{R}$

**Definition 3.7** **Rektifizierbare Kurven (Kurven endlicher Länge)**

Eine Kurve  $f : \underbrace{[a, b]}_{\text{kompakt}} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **rektifizierbar** mit **Länge**  $L \geq 0$ , falls

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : a = t_0 < \dots < t_k = b$$

und

$$\max_{i=1, \dots, k} |t_i - t_{i-1}| < \delta \implies |p_f(t_0, \dots, t_k) - L| < \varepsilon > 0.$$

Hierbei:

$$p_f(t_0, \dots, t_k) := \sum_{i=1}^k \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|_2$$

(Länge des Polygonzugs)

**Theorem 3.8** **Stetig differenzierbare Kurven und Rektifizierbarkeit**

Jede stetig differenzierbare Kurve  $f : \underbrace{[a, b]}_{\text{kompakt}} \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist **rektifizierbar** mit

$$L_f = \int_a^b \|f'(t)\|_2 \, dt.$$

$$\bullet \quad f' = (f'_1, \dots, f'_n) \quad \|f'(t)\|_2 = \sqrt{|f'_1(t)|^2 + \dots + |f'_n(t)|^2}.$$

**Proof** **Theorem 3.8**

**Hilfsaussage (H1):** Für jedes  $\varepsilon > 0 : \exists \delta > 0$ , sodass

$$\forall s, t \in [a, b], 0 < |s - t| < \delta \implies \left\| \frac{f(s) - f(t)}{s - t} - f'(t) \right\|_2 < \varepsilon$$

**Bew. (H1):** Durch komponentenweise Betrachtung genügt der eindimensionale Fall. Auf  $[a, b]$  ist dann  $f'$  gleichmäßig stetig. Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es ein  $\delta > 0$ , sodass  $|\xi - t| < \delta \implies |f'(\xi) - f'(t)| < \varepsilon \, \forall \xi, t \in [a, b]$  mit  $|\xi - t| < \delta$ . Seien  $s, t \in [a, b]$  mit  $|s - t| < \delta$ , dann ex. nach MWS ein

$$\xi \in [\min\{s, t\}, \max\{s, t\}]$$

mit

$$f'(\xi) = \frac{f(s) - f(t)}{s - t}$$

Insgesamt wegen  $|\xi - t| < \delta$  folgt

$$\left\| \frac{f(s) - f(t)}{s - t} - f'(t) \right\|_2 < \varepsilon$$

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar und  $\varepsilon > 0$ . Nach MWS d. Int. gibt es ein  $\delta' > 0$ , sodass für jede Partition

$$a = t_0 < \dots < t_k = b \quad \text{gilt}$$

$$\max_{i=0,\dots,k-1} |t_{i+1} - t_i| \implies \left| \int_a^b \|f'(t)\|_2 \, dt - \sum_{i=0}^{k-1} \|f'(t_i)\|_2 (t_{i+1} - t_i) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

**MWS:**  $\exists \xi \in [t_{i+1}, t_i] : \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t)\|_2 \, dt = \|f'(\xi)\|_2 (t_{i+1} - t_i)$  Wähle  $\delta > 0$  wie in H1 für  $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$  statt  $\varepsilon$ . Setze  $\tilde{\delta} := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Dann gilt

$$\max_i |t_{i+1} - t_i| < \tilde{\delta} \implies \|f(t_{i+1}) - f(t_i) - f'(t_i)(t_{i+1} - t_i)\|_2 < \frac{\varepsilon(t_{i+1} - t_i)}{2(b-a)}$$

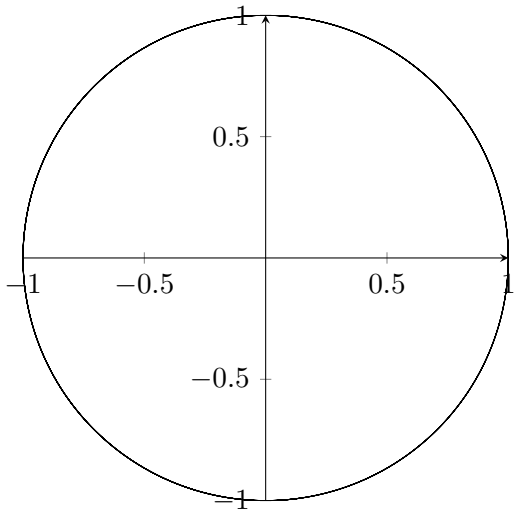
Mit umgekehrter  $\triangle$ -Ungleichung

$$\max_i |t_{i+1} - t_i| < \tilde{\delta} \implies \left| \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\|_2 - \|f'(t_i)(t_{i+1} - t_i)\|_2 \right| < \frac{\varepsilon(t_{i+1} - t_i)}{2(b-a)} \quad \blacksquare$$

### Example 3.9

Sei  $f : [0, 2\pi] \ni t \mapsto (\cos(t), \sin(t)) \in \mathbb{R}^2$ . dann  $f'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$  und damit

$$L_f = \int_0^{2\pi} \|f'(t)\|_2 \, dt = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi$$



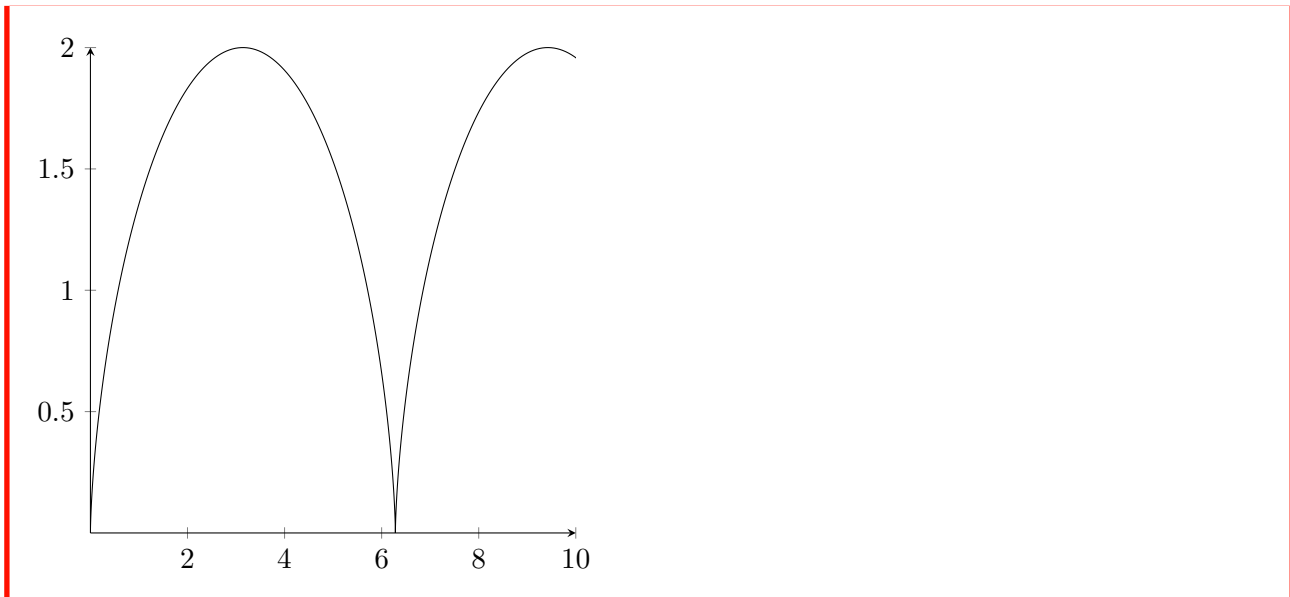
### Example 3.10

$$f : [0, 2\pi] \ni t \mapsto (t - \sin(t), 1 - \cos(t)) \in \mathbb{R}^2, f'(t) = (1 - \cos(t), \sin(t))$$

Damit

$$\|f'(t)\|^2 = ((1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t)) = 1 - 2\cos(t) = 4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$L_f = \int_0^{2\pi} \|f'(t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} 2\sin\left(\frac{t}{2}\right) \, dt = 8$$



## 4 Mehrdimensionale Differenzierbarkeit

Für

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist } f'(x_0) := \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Umformuliert:  $f$  ist genau dann in  $x_0 \in \mathbb{R}$  differenzierbar, wenn es eine lineare Abbildung  $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  so, dass

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)|}{|h|} = 0$$

mit  $L(h) = f'(x_0) \cdot h$ ,  $h$  ein Vektor

### Definition 4.1 Differenzierbarkeit

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $x_0 \in \Omega$ . Wir nennen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  **differenzierbar in**  $x_0$ , falls eine lineare Abbildung  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  existiert mit

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)|}{|h|} = 0.$$

( $h$  Vektor)

Wir nennen  $Df(x_0) := L$  die **totale Ableitung** von  $f$  in  $x_0$

Umformuliert: Mit  $R(x_0, h) := |f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)|$ , ist die Differenzierbarkeit von  $f$  in  $x_0$  äquivalent zu

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{R(x_0, h)}{|h|} = 0.$$

Daraus folgt die Eindeutigkeit der totalen Ableitung. Ist  $\tilde{L}$  eine weitere, so folgt für jeden Einheitsvektor

$$e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-te Stelle}}, 0, \dots, 0)$$

$$(L - \tilde{L})(e_i) = \lim_{t \searrow 0} \frac{(L - \tilde{L})(te_i)}{|te_i|} = 0 \implies L = \tilde{L}$$

Ist  $h = (h_1, \dots, h_n)^T \in \mathbb{R}^n$ , so schreibe

$$h = \sum_{i=1}^n h_i e_i$$

Damit folgt

$$Df(x_0)(a) = L(h) = \sum_{i=1}^n L(h_i e_i) = \sum_{i=1}^n h_i L(e_i)$$

Deswegen definieren wir

$$\nabla f(x_0) := (L(e_1), \dots, L(e_n))$$

Damit gilt der Zusammenhang  $Df(x_0)(h) = \nabla f(x_0) \cdot h$

**Example 4.2**

Sei  $f(x) = Ax + b$  mit  $A \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  und  $b \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $L(h) := Ah$  und  $\nabla f(x_0) = A$  f.a.  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

**Example**

Sei  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine symmetrische Matrix (d.h.  $a_{ij} = a_{ji}$ ). Wir betrachten  $f(x) := x^t(Ax) (= \langle x, Ax \rangle)$ . Für  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  gilt  $f(x_0 + h) - f(x_0) = 2x_0^t Ah + h^t Ah$ . Definiere  $L(h) := 2x_0^t Ah$ . Dann ist  $L$  eine lineare Abbildung von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}$  und für  $R(h) := h^t Ah$  gilt, dass  $|R(h)| \leq c|h|^2$ . Also  $\nabla f(x_0) = 2x_0^t A$

**Anschauliche Interpretation**

$$\text{Gr}(f) := \{(x, f(x)) : x \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^{n+1} (\text{Graph von } f).$$

Ist  $f$  in  $x_0$  differenzierbar, so gibt uns

$$T_{f_{x_0}} := f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0)$$

eine affin-lineare Approximation von  $f$  in  $x_0$ .

Der Graph von  $T_{f_{x_0}}$  also  $\text{Gr}(T(f_{x_0})) := \{(x, x_{n+1}) : x_{n+1} = T_{f_{x_0}}(x)\}$  heißt **Tangentialhyperebene**

**Theorem 4.4**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x_0$ . Dann ist  $f$  stetig in  $x_0$ .

**Proof Theorem 4.4**

Folgt direkt aus der Differenzierbarkeit, denn

$$|f(x_0) - f(x_0)| \leq |\nabla f(x_0) \cdot h + R(h)| \xrightarrow{|h| \rightarrow 0} 0$$

**4.1 Partielle Ableitung****Definition Niveaumenge**

Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  ( $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ), dann definiere die Niveaumengen für  $c \in \mathbb{R}$ :

$$N_f(c) := \{x \in U : f(x) = c\} \subset \mathbb{R}^n$$

**Definition 4.5 Partielle Ableitungen**

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann heißt  $f$  im Punkt  $x_0 \in U$  **partiell differenzierbar in der  $i$ -ten Koordinate**, falls der Limes

$$D_i f(x) := \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x + e_i h) - f(x)}{h}$$

existiert und endlich ist mit  $e_i := (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-te}}, 0, \dots, 0)$ . Sei  $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$ . Für  $i = 1, \dots, n$  betrachte die Funktion

$$\xi \mapsto f_i(\xi) := f(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \dots, x_n).$$



Dann folgt direkt aus Definition 4.5, dass

$$D_i f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(x_i + h) - f_i(x_i)}{h} = f'_i(x_i).$$

#### Definition 4.6 (stetige partielle Differenzierbarkeit)

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Dann heißt eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  **partiell differenzierbar**, falls  $D_i f(x)$  f.a.  $x \in U$  und alle  $i = 1, \dots, n$  existiert.  $f$  heißt stetig partiell differenzierbar, falls zusätzlich alle partiellen Ableitungen  $D_i f : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig sind.

**Schreibweise:** statt  $D_i f$  schreibt man auch

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Entsprechend

$$D_i f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}.$$

#### Example 4.7

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto F(x, y) := \exp(x^2 + y^2)$$

Für  $f(x) := \exp(x^2 + c^2)$  gilt  $f'(x) = 2x \exp(x^2 + c^2)$ . D.h.

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \exp(x^2 + y^2) = 2x \exp(x^2 + y^2)$$

und analog

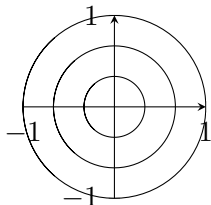
$$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = 2y \exp(x^2 + y^2).$$

#### Example 4.8

Betrachte  $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $r(x) := \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ . Die Niveaumengen

$$N_f(c) = \{x \in \mathbb{R}^n : r(x) = c\}$$

sind Sphären mit Radius  $c > 0$ .



**Beh.:** Die Funktion  $r$  ist in  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  partiell differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial r}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{r_i}$$

für  $x \neq 0$ .

Für  $x \neq 0$

$$\frac{d}{dx} |x| = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

“Beweis” der Behauptung:

Betrachte  $\xi \mapsto \sqrt{x_1^2 + \dots + \xi^2 + \dots + x_n^2}$ , das ist differenzierbar! Es gilt

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (x_1^2 + \dots + x_i^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} = 2x_i \cdot \frac{1}{2} (x_1^2 + \dots + x_i^2 + \dots + x_n^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{x_i}{r(x)}$$

### Example 4.9

Sei  $n \geq 2$  betrachte  $F(x) : \begin{cases} \frac{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}{r(x)^n} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$  In  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  ist  $F$  partiell differenzierbar (nach vorherigem Beispiel). Für die partielle Ableitung nach  $x_1$  gilt

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x_1} = \frac{x_2 \cdots x_n}{r_n} - n \frac{x_1^2 x_2 \cdots x_n}{r^{n+2}}.$$

Analog für partielle Ableitung in Richtung  $x_i$   $F$  ist auch in  $x = 0$  partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h \cdot e_i) - F(0)}{h} = 0.$$

$\implies F$  ist auf ganz  $\mathbb{R}^n$  partiell differenzierbar.

ABER:  $F$  ist in  $x_0 = 0$  nicht stetig, denn betrachte  $a_k = (\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k})$ ,  $k \geq 1$ . Es gilt  $r(a_k) = \frac{\sqrt{n}}{k}$ , also  $F(a_k) = \frac{(\frac{1}{k})^n}{(\frac{\sqrt{n}}{k})^n} = n^{-\frac{n}{2}} \neq 0 = F(0)$ .

**Also: Partiiell differenzierbar  $\nRightarrow$  stetig.**

**Beobachtung:** Komponenten von  $\nabla f(x)$  sehen aus wie

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{|f(x + h e_i) - f(x)|}{|h|}.$$

D.h.  $\nabla f(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$  und (totale) Differenzierbarkeit  $\implies$  partielle Differenzierbarkeit.

### Example 4.10

$\nabla r(x) = \frac{x}{r}$  und  $\nabla f(r) = f'(r) \frac{x}{r}$ , zum Beispiel  $\nabla \frac{1}{r} = -\frac{x}{r^3}$  (Manche schreiben “grad” statt “ $\nabla$ ”)

### Example 4.11

Seien  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$  zwei partiell differenzierbare Funktionen. Dann

$$\nabla(fg) = g \cdot \nabla f + f \cdot \nabla g.$$

### Definition 4.12 Divergenz

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  und  $v = (v_1, \dots, v_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein partiell differenzierbares Vektorfeld (VF = Abbildung nach  $\mathbb{R}^n$ , partiell differenzierbar = jede Komponente ist partiell differenzierbar). Dann

definiere Divergenz von  $V$  durch

$$\operatorname{div} v := \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} v_k$$

**Bemerkung:** Formal kann man schreiben

$$\operatorname{div} v = \langle \nabla, v \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} v_i.$$

**Rechenregel:**

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (f v_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i + f \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (f : U \rightarrow \mathbb{R}^n).$$

$$\implies \operatorname{div}(f v) = \langle \nabla f, v \rangle + f \cdot \operatorname{div} v. \quad (\text{Formal } \langle \nabla, f v \rangle = \langle \nabla f, v \rangle + f \langle \nabla, v \rangle).$$

### Example

$$F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n, F(x) := \frac{x}{r(x)}.$$

Da

$$\operatorname{div} x = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = n \text{ und}$$

$$\langle x, x \rangle = r^2(x).$$

Damit folgt

$$\operatorname{div} \frac{x}{r} = \left\langle \nabla \frac{1}{r}, x \right\rangle + \frac{1}{r} \operatorname{div} x = \left\langle -\frac{x}{r^3}, x \right\rangle + \frac{n}{r} = \frac{n-1}{r}$$

## 4.2 Höhere Ableitungen und Satz von Schwarz

### Theorem 4.13 Schwarz

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  und  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig partiell differenzierbar in  $\Omega$ . Dann gilt f. a.  $1 \leq i, j \leq n$ , dass

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} u = \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} u.$$

**$\mathbb{R}$  versus  $\mathbb{R}^n$ :**

Im  $\mathbb{R}$  gibt es zwei Möglichkeiten.

Im  $\mathbb{R}^n$  gibt es unendlich viele Möglichkeiten.

Zwei (drei) Möglichkeiten, über Differenzierbarkeit zu sprechen:

- Zurückführen auf die 1-dim Situation.

$$x_j \mapsto f(\underbrace{x_1, \dots, x_{j-1}}_{\text{friere ein}}, x_j, \underbrace{x_{j+1}, \dots, x_n}_{\text{friere ein}})$$

“ $j$ -te partielle Funktion”

$$\partial_j f(x_0) := \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f_j(x_j + h) - f_j(x_j)}{h}$$

( $h$  ist eine Zahl, also  $h \in \mathbb{R}$ )

- **Richtungsableitungen:**  $\nu \in \mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$  (mit  $|\cdot|$  Euklidische Norm  $|x| := \|x\|_2$ )

$$\partial_\nu f(x_0) := \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0 + h\nu) - f(x_0)}{h}$$

( $h$  ist eine Zahl, also  $h \in \mathbb{R}$ ) Hierbei interessiert nur, was  $f$  entlang  $x_0 + \mathbb{R}\nu$  macht. Dies liefert **eine** Art der Ableitung:

Richtungsableitung entlang  $\nu$ . Partielle Ableitung entspricht Richtungsableitung bezüglich  $\nu \in \{e_1, \dots, e_n\}$ . Jede Richtung  $\nu$  lässt sich als  $\nu = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$  schreiben - können wir also Richtungsableitungen über partielle Ableitungen ausdrücken? → Ja, später.

- Linearisierbarkeit: In 1-dim Differenzierbarkeit entspricht lokale Approximierbarkeit durch affin-lineare Funktion entspricht Approximierung des Graphen durch Tangenten  
 $\rightsquigarrow$  Differenzierbarkeit entspricht Approximierbarkeit (lokal) durch affin-lineare Funktionen (!)  
 entspricht Approximierbarkeit des Graphen durch affine Hyperebenen.

### Definition Hyperebenen

Hyperebene  $(n-1)$ -dim. Untervektorräume im  $\mathbb{R}^n$ .  
 Algebraische Charakterisierung:

$$\Phi \in (\mathbb{R}^n)^*. \quad \ker(\Phi).$$

### Definition Affin-lineare Hyperebenen

$$x_0 + \ker(\Phi) = \{x_0 + y : \Phi(y) = 0\}$$

$$\bullet \quad \Phi(x_1, x_2, x_3) := x_1, \quad \ker(\Phi) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$x_0 + \ker(\Phi)$ , Ebene parallel zur  $x_2, x_3$ -Ebene

$$\bullet \quad \mathbb{E} = \{(x_1, x_2, x_3) : 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1\} = x_0 + \ker(\Phi)$$

$$\bullet \quad f(x_1, x_2) = e^{-x_1^2 - x_2^2}, x \mapsto e^{-x^2}$$

**Ziel:** Differenzierbarkeit  $\implies$  partielle Differenzierbarkeit ( $\Leftarrow$  falls partielle Ableitung stetig)

### Theorem 4.15 Schwarz

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  zwei mal stetig partiell differenzierbar (d.h., die zweite partiellen Ableitungen  $\partial_i \partial_j f$  existieren und sind stetig) in  $x_0 \in \Omega$ , so gilt:

$$\partial_i \partial_j f(x_0) = \partial_j \partial_i f(x_0)$$

**MWS:**  $g : \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar,  $-\infty < a < b < \infty$ , so  $\exists \xi \in [a, b]$ :

$$g'(\xi) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

**Proof Theorem 4.15**

☐  $n = 2$ .  $i = 1, j = 2$ .  $(x_1, x_2)$  entspricht  $(x, y)$ .

$\Omega$  offen  $\implies \exists \delta > 0 : \{(x, y) : |x| < \delta, |y| < \delta\} \subset \Omega$ , wobei ☐  $x_0 = 0$

(1) Fixiere  $y \in \mathbb{R}$  mit  $|y| < \delta$ . Definiere

$$F_y : (-\delta, \delta) \ni x \mapsto f(x, y) - f(x, 0) \in \mathbb{R}$$

Mit MWS

$$\exists \xi \in \mathbb{R} : |\xi| \leq |x| : F'_y(\xi)x = F_y - F_y(0) \quad (\heartsuit)$$

$$F'_y(\xi) = (\partial_1 f)(\xi, y) - (\partial_1 f)(\xi, 0).$$

Wiederum MWS.

$$\exists \eta \in \mathbb{R} : |\eta| \leq |y| : (\partial_1 f)(\xi, y) - (\partial_1 f)(\xi, 0) = \partial_2 \partial_1 f(\xi, \eta) \cdot y \quad (\heartsuit\heartsuit)$$

Hiermit:

$$\begin{aligned} & f(x, y) - f(x, 0) - f(0, y) + f(0, 0) \\ &= \underbrace{(f(x, y) - f(x, 0))}_{=F_y(x)} - \underbrace{(f(0, y) - f(0, 0))}_{=F_y(0)} \\ &\stackrel{\text{Def.}}{=} F_y(x) - F_y(0) \\ &\stackrel{(\heartsuit)}{=} F'_y(\xi) \cdot x \\ &\stackrel{(\heartsuit\heartsuit)}{=} \partial_2 \partial_1 f(\xi, \eta)x \cdot y \end{aligned} \quad (\dagger)$$

(2) Fixiere nun  $x$ , betrachte  $G_x(y) := f(x, y) - f(0, y)$ . Analog wie für (1):

$$\exists \tilde{\eta} \in \mathbb{R} : |\tilde{\eta}| \leq |y| : G_x(y) - G_x(0) = G'_x(\tilde{\eta}) \cdot y.$$

Daneben mit MWS

$$\exists \tilde{\xi} \in \mathbb{R} : |\tilde{\xi}| \leq |x| : G'_x(\tilde{\eta}) = \partial_2 f(x, \tilde{\eta}) - \partial_2 f(0, \tilde{\eta}) = \partial_1 \partial_2 f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \cdot x$$

$$\implies f(x, y) - f(x, 0) - f(0, y) + f(0, 0) = \partial_1 \partial_2 f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})xy$$

$$\stackrel{(\dagger)}{\implies} \partial_2 \partial_1 f(\xi, \eta)xy = \partial_1 \partial_2 f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})xy$$

$\stackrel{xy \neq 0}{\implies} \partial_2 \partial_1 f(\xi, \eta) = \partial_1 \partial_2 f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$  hier hängen aber  $\xi, \tilde{\xi}$  von  $x$  und  $\eta, \tilde{\eta}$  von  $y$  ab. Nach Konstruktion:  $(x, y) \rightarrow (0, 0) \implies (\xi, \eta), (\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \rightarrow 0$ . Da  $f$  **zweimal stetig partiell differenzierbar**:

$$\partial_1 \partial_2 f(0, 0) = \lim_{(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \rightarrow (0, 0)} \partial_1 \partial_2 f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = \lim_{(\xi, \eta) \rightarrow (0, 0)} \partial_2 \partial_1 f(\xi, \eta) = \partial_2 \partial_1 f(0, 0). \quad \blacksquare$$

Dies kann iteriert werden:  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$   $k$ -mal stetig partiell differenzierbar und  $\pi : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$  Permutation (d.h. bijektiv), so gilt für alle  $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ :

$$\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} = \partial_{i_{\pi(1)}} \cdots \partial_{i_{\pi(k)}} f.$$

**Satz von Schwarz:**  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  zwei mal stetig partiell differenzierbar  $\implies \forall i, j \in$

$$\{1, \dots, n\} : \partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f.$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f := \partial_i f.$$

- Damit:  $Hf = \nabla^2 f := (\partial_{ij} f)_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$  (**Hessematrix**). Mit Schwarz ist dies eine **symmetrische Matrix** (Bei Fr. Kuhlmann besonders aufpassen).

$$A = A^T.$$

Dann gibt es eine Basis  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ : Darstellende Matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Dann z.B.  $v_1$  entspricht  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ , also

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  Abbildung verhält sich auf  $\text{span}\{v_1\}$  wie Streckung.

#### Example 4.16 Rotation und Gradient

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \vdots \\ \partial_n f \end{pmatrix}.$$

Falls  $n = 3$  definiere **Rotation** ("curl") von  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  durch

$$\text{rot}(v) = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix}$$

Die Rotation annihilert den Gradienten  $\boxed{\text{rot}(\nabla f) = 0} \quad \forall f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig partiell differenzierbar (beachte:  $\nabla f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ )

$$\text{rot}(\nabla f) = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \\ \partial_3 f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 \partial_3 - \partial_3 \partial_2 f \\ \partial_3 \partial_1 - \partial_1 \partial_3 f \\ \partial_1 \partial_2 - \partial_2 \partial_1 f \end{pmatrix} \stackrel{\text{Schwarz}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Lemma Poincaré-Lemma**

*Für später* Ist  $\operatorname{rot}(v) = 0$ , gibt es ein  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : v = \nabla f$ ? (Ja, aber nur in  $\mathbb{R}^3$ , nicht in  $\Omega$ )

**Example 4.17**

Die **Divergenz** von  $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist definiert als

$$\operatorname{div}(f) = \sum_{i=1}^n \partial_i f_i.$$

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

**Beh.:**  $\boxed{\operatorname{div}(\operatorname{rot}(g)) = 0}$  Mit **Schwarz**:

$$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} \begin{pmatrix} \partial_2 g_3 - \partial_3 g_2 \\ \partial_3 g_1 - \partial_1 g_3 \\ \partial_1 g_2 - \partial_2 g_1 \end{pmatrix} = \partial_1 (\partial_2 g_3 - \partial_3 g_2) + \partial_2 (\partial_3 g_1 - \partial_1 g_3) + \partial_3 (\partial_1 g_2 - \partial_2 g_1) \\ \stackrel{\text{Schwarz}}{=} 0$$

Damit: Divergenz annulliert Rotation.

$$f \rightarrow \nabla f \rightarrow \operatorname{rot}(\nabla f) \equiv 0$$

$$g \rightarrow \operatorname{rot} g \rightarrow \operatorname{div}(\operatorname{rot} g) = 0$$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\nabla} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\operatorname{rot}} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\operatorname{div}} \mathbb{R}$$

“**Differentialkomplex**”

**Example 4.18**

Für  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  zweimal stetig partiell differenzierbar:

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \partial_i \partial_i f \left( =: \sum_{i=1}^n \partial_i^2 f \right)$$

“Laplace-Operator”

Das ist die Spur ( $\hat{=}$  Summe über Diagonal Elemente) der Hessematrix. Ist  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  zweimal stetig partiell differenzierbar mit  $\boxed{\Delta f = 0}$ , so heißt  $f$  **harmonisch**. (Erstes Beispiel einer partiellen Differentialgleichung)

- $f(x) = a \cdot x + b, a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}, \Delta f = 0$ .
- $f(x) = \varphi(|x|)$ , mit  $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), |x| := \|x\|_2$

**Frage:** Wie muss  $\varphi$  aussehen?

$$f(x) = \varphi(|x|).$$

$$\text{Dann } \partial_i f(x) = \varphi'(|x|) \frac{x_i}{|x|}$$

$$\partial_i \partial_i f(x) = \partial_i \left( \varphi'(|x|) \frac{x_i}{|x|} \right) = \varphi''(|x|) \frac{x_i^2}{|x|^2} + \varphi'(|x|) \frac{|x| - x_i \frac{x_i}{|x|}}{|x|^2} = \varphi''(|x|) + \varphi'(|x|) \frac{|x|^2 - x_i^2}{|x|^3},$$

also

$$0 \stackrel{!}{=} \Delta f \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{i=1}^n \partial_i \partial_i f = \varphi''(|x|) + \varphi'(|x|) \frac{n}{|x|} - \varphi'(|x|) \frac{1}{|x|}.$$

Setze  $\boxed{r := |x|}$

$$\implies 0 = \varphi''(r) + \frac{\varphi'(r)}{r}(n-1)$$

$$\implies \frac{1-n}{r} \psi(r) = \psi'(r), \text{ wobei } \boxed{\psi := \varphi'}$$

$$\stackrel{\psi \neq 0}{\implies} \frac{1-n}{r} = \frac{\psi'(r)}{\psi(r)} = (\log(\psi(r)))'.$$

$$\implies \int_1^r \frac{1-n}{s} ds = \int_1^r (\log(\psi(s)))' ds = \log(\psi(r)) + C$$

$$\implies (1-n) \log(r) = \log(\psi(r)) + C \stackrel{\text{GE } C=0}{=} \log(r^{1-n}) = \log(\psi(r))$$

Also  $\psi(r) = r^{1-n}$ , aber  $\psi(r) := \varphi'(r)$ , also

$$\varphi(r) = \frac{1}{2-n} r^{2-n} \quad \text{für } n \geq 3$$

$$\varphi(r) = \log(r) \quad \text{für } n = 2.$$

Mit diesen  $\varphi$ 's löst  $f(x) := \varphi(|x|)$  die Laplacegleichung  $\Delta f = 0$ . Diese Funktion  $f$  heißt auch **Fundamentallösung des Laplaceoperators**.

**In 1d ( $n = 1$ ):**

$$\Delta f(x) \stackrel{1\text{-d}}{=} f''(x) \stackrel{!}{=} 0$$

Integriere

$$f'(x) - f'(0) = \int_0^x f''(s) ds = 0$$

$$\implies \text{lösen: } f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}$$

Fordern wir weiter Radialsymmetrie im 1d so muss  $a = 0$ , also  $f$  konstant sein.

Nun zur Differenzierbarkeit von Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^n \supset \underbrace{\Omega}_{\text{offen}} \rightarrow \mathbb{R}^m$$



**Definition 4.19**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  Abbildung. Wir nennen  $f$  in  $x_0$  (total) **differenzierbar**, falls es einen Ball  $B_r(x_0) \subset \Omega$  und eine Funktion  $\varphi : B_r(0) \rightarrow \mathbb{R}^m$  gibt mit

$$(i) \quad \forall h \in B_r(0) : f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + \varphi(h), \text{ wobei } A \in \underbrace{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)}_{\text{lin Abb. } \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \times n} \text{ ist.}$$

(ii)

$$\lim_{|h| \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{\varphi(h)}{|h|} = 0.$$

**Theorem 4.20**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  in  $x_0 \in \Omega$  differenzierbar mit

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + o(|h|)$$

mit  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ . Dann:

(i)  $f$  stetig in  $x_0$

(ii) Alle Komponenten  $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  (wobei  $f = f_1, \dots, f_n$ ) sind in  $x_0$  **partiell** differenzierbar mit  $\partial_j f_i(x_0) = a_{ij}$ , falls wir  $A$  mit der darstellenden Matrix bezüglich Einheitsvektoren identifizieren.

**Proof Satz 4.20**

(i) Da  $A$  linear,  $\|Ah\|_2 \leq C \|h\|_2 \rightarrow 0, \|h\|_2 \rightarrow 0$ . Da  $f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + o(\|h\|_2) \xrightarrow{\|h\|_2 \rightarrow 0} f(x_0)$

(ii) Haben:  $f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + \varphi(h)$

$$\underbrace{e_i^T f}_{f_i}(x_0 + h) = e_i^T f(x_0) + e_i^T Ah + e_i^T \varphi(h),$$

wende dies mit  $h = te_j, |t|$  hinreichend klein:

$$\frac{1}{t} f_i(x_0 + te_j) - f_i(x_0) = e_i^T A e_j + e_i^T \underbrace{\frac{\varphi(te_j)}{t}}_{\rightarrow 0} \rightarrow a_{ij}$$

**Note**

Wir schreiben auch  $Jf, Df$ , (oder  $\nabla f$ ) “**Jacobimatrix**”, “Gradient”

Zur hier implizit verwendeten “Beschränktheit” linearer Abbildungen.

**Lemma 4.21**

Seien  $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$  normierte Räume,  $T : X \rightarrow Y$  linear. Dann sind äquivalent:

(i)  $T$  ist stetig in  $x = 0$ ,

(ii)  $T$  ist stetig,

(iii)  $T$  ist Lipschitzstetig

(iv)  $T$  ist **beschränkt**, d.h. hier:  $\|T\| := \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} \|Tx\|_Y < \infty$

**Proof Lem. 4.21**

“(iv)  $\implies$  (iii)”:

$$\begin{aligned} \|Tx - Tx'\|_Y &\stackrel{\text{lin}}{=} \|T(x - x')\|_Y \\ &\stackrel{\text{(iv)}}{\leq} \|T\| \|x - x'\|_X \\ &\stackrel{\text{iii}}{=} \|x - x'\|_X \left\| T \frac{(x - x')}{\|x - x'\|_X} \right\|_Y \end{aligned}$$

“(iii)  $\implies$  (ii)”:

“(ii)  $\implies$  (i)”:

“(i)  $\implies$  (iv)”:

Betrachte  $\neg(\text{iv}) \implies \neg(\text{i})$ . Falls  $\neg(\text{iv})$ , so existiert  $(x_j) \subset X : \|Tx_j\|_Y > j \|x_j\|_X$  (für alle  $j \in \mathbb{N}$ ). Definiere

$$y_j := \frac{x_j}{j \|x_j\|_X}.$$

Dann:  $\|y_j\|_X = \frac{1}{j} \rightarrow 0, j \rightarrow \infty, T$  lin, also  $T(0) = 0$ , aber  $\|Ty_j\| > 1 \forall j \in \mathbb{N}$ . Widerspruch. ■

Bis jetzt Differenzierbarkeit  $\not\implies$  partiell Differenzierbarkeit, Differenzierbarkeit  $\not\implies$  stetig, partiell differenzierbar  $\not\implies$  stetig

**Example 4.22**

Betrachte

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- $f|_{\mathbb{R} \times \{0\}} = f|_{\{0\} \times \mathbb{R}} \equiv 0 \implies f$  partiell differenzierbar in  $(0, 0)$ .
- $(x_j, y_j) := \left(\frac{1}{j^2}, \frac{1}{j}\right)$ , so  $(x_j, y_j) \rightarrow (0, 0)$ . Aber:  $f(x_j, y_j) = \frac{\frac{1}{j^2} \cdot \frac{1}{j^3}}{\frac{1}{j^4} + \frac{1}{j^4}} = \frac{1}{2} \neq 0 \nrightarrow$  nicht differenzierbar??

**Theorem 4.23**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine in  $\Omega$  partiell diffbare Funktion. Weiter sei  $x_0 \in \Omega$  so, dass alle  $\partial_j f, j \in \{1, \dots, n\}$  in  $x_0$  **stetig** sind. Dann ist  $f$  in  $x_0$  **differenzierbar**.

$$f = (f_1, \dots, f_n), \partial_j f = (\partial_j f_1, \dots, \partial_j f_m)$$

**Proof Thm. 4.23**

$\Omega$  offen  $\implies \exists \delta > 0 : B_\delta(x_0) \subset \Omega$ . Sei nun  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$  so, dass  $|\xi| < \delta$ . Definiere

$$z^{(k)} := x_0 + \sum_{i=1}^k \xi_i e_i, k = 0, \dots, n.$$

- $z^{(k)}, z^{(k+1)}$  unterscheiden sich in  $(k+1)$ -te Koordinate.
- Damit ex. nach **Mittelwertsatz** für  $k$  ein  $\theta_k \in [0, 1] : f(z^{(k)}) - f(z^{(k-1)}) = \partial_k f(y^{(k)}) \cdot \xi_k$ ,  
 $y^{(k)} = z^{(k-1)} + \theta_k \xi_k e_k$ . Damit:

$$f(x_0 + \xi) - f(x_0) = \sum_{k=1}^n \partial_k f(y^{(k)}) \cdot \xi_k.$$

Setze  $a_k := \partial_k f(x_0)$  Dann:

$$f(x_0 + \xi) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n a_k \xi_k + \varphi(\xi),$$

wobei

$$\varphi(\xi) = \sum_{k=1}^n \left( \partial_k f(y^{(k)}) - a_k \right) \xi_k.$$

Definiere

$$A\xi := \sum_{k=1}^n a_k \xi_k,$$

weiter

$$\frac{|\varphi(\xi)|}{|\xi|} \leq \sum_{k=1}^n \underbrace{\left| \partial_k f(y^{(k)}) - a_k \right|}_{\xrightarrow{|\xi| \rightarrow 0} 0} \cdot \frac{|\xi|}{|\xi|} \xrightarrow{|\xi| \rightarrow 0} 0.$$

Also:  $f$  differenzierbar in  $x_0$

**Theorem 4.24 Kettenregel**

Seien  $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$  offen,  $f : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^m, g : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^k$  Abbildungen mit  $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$ . Sei  $f$  in  $x_0 \in \Omega$  und  $g$  in  $f(x_0) \in \Omega_2$  differenzierbar. Dann ist  $g \circ f : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^k$  in  $x_0$  **differenzierbar** mit

$$D(\underbrace{g \circ f}_{\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k})(x_0) = \underbrace{(Dg)(f(x_0))}_{\mathbb{R}^{k \times m}} \cdot \underbrace{Df(x_0)}_{\mathbb{R}^{m \times n}}$$

**Proof Thm 4.24**

$f$  diffbar in  $x_0$ , also

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Df(x_0) \cdot h + \varphi_1(h) \tag{A}$$

für  $|h|$  genügend klein mit

$$\lim_{|h| \searrow 0} \frac{|\varphi_1(h)|}{|h|} = 0.$$

Definiere

$$y_0 = f(x_0).$$

Da  $g$  diffbar in  $y_0$ :

$$g(y_0 + h') = g(y_0) + Dg(y_0) \cdot h' + \varphi_2(h'),$$

für alle  $|h'|$  genügend klein und

$$\underbrace{\lim_{|h'| \searrow 0} \frac{|\varphi_2(h')|}{|h'|}}_{\lim_{h' \in \mathbb{R}^m, |h'| \searrow 0} \frac{|\varphi_2(h')|}{|h'|}} = 0 \quad (\text{B})$$

Für den Beweis kombiniere (A) und (B). Setze

$$Df(x_0) := \mathcal{A}$$

$$Dg(y_0) := \mathcal{B}$$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x_0 + h) &= g(f(x_0 + h)) \\ &\stackrel{(\text{A})}{=} g(f(x_0) + \mathcal{A} \cdot h + \varphi_1(h)) \\ &= g(f(x_0) + h') \\ &= g(y_0) + \mathcal{B} \cdot h' + \varphi_2(h') \\ &= (g \circ f)(x_0) + \mathcal{B}(\mathcal{A} \cdot h + \varphi_1(h)) + \varphi_2(\mathcal{A} \cdot h + \varphi_1(h)) \\ &= (g \circ f)(x_0) + \mathcal{B} \cdot \mathcal{A} \cdot h + \underbrace{(\mathcal{B} \cdot \varphi_1(h) + \varphi_2(\mathcal{A} \cdot h + \varphi_1(h)))}_{=: \varphi(h)} \end{aligned} \quad (*)$$

zu zeigen

$$\lim_{|h| \searrow 0} \frac{|\varphi(h)|}{|h|} = 0.$$

•

$$\frac{|\mathcal{B} \cdot \varphi_1(h)|}{|h|} \stackrel{\text{Lem. 4.22}}{\leq} \underbrace{\|\mathcal{B}\|}_{< \infty} \underbrace{\frac{|\varphi_1(h)|}{|h|}}_{\xrightarrow{|h| \searrow 0} 0} \rightarrow 0, |h| \searrow 0.$$

Schreibe  $\varphi_2$  als  $\varphi(h') = |h'| \eta(|h'|)$ ,  $\eta : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $\lim_{t \searrow 0} \eta(t) = 0$ . Andererseits mit selbem Argument für  $f$ :  $\exists \tilde{\eta} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\lim_{t \searrow 0} \tilde{\eta}(t) = 0$ :  $\varphi_1(h) = |h| \tilde{\eta}(|h|)$

•

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A} \cdot h + \varphi_1(h)| &\leq |\mathcal{A} \cdot h| + |\varphi_1(h)| \\
&\leq \|\mathcal{A}\| |h| + |h| |\tilde{\eta}(|h|)| \\
&= (\|\mathcal{A}\| + |\tilde{\eta}(|h|)|) |h|.
\end{aligned}$$

Damit

$$\begin{aligned}
|\varphi_2(\mathcal{A} \cdot h + \varphi_1(h))| &= |\eta(\mathcal{A} \cdot h + \varphi_1(h))| |\mathcal{A} \cdot h + \varphi_1(h)| \\
&\leq |\eta(\mathcal{A} \cdot h + \varphi_1(h))| (\|\mathcal{A}\| + |\tilde{\eta}(|h|)|) |h| \\
&\leq |\eta(\|\mathcal{A}\| \cdot |h| + |\varphi_1(h)|)| \cdot (\|\mathcal{A}\| + |\tilde{\eta}(|h|)|) |h| \\
&\leq |\eta(\|\mathcal{A}\| \cdot |h| + |\tilde{\eta}(|h|)|)| \cdot (\|\mathcal{A}\| + |\tilde{\eta}(|h|)|) |h| \\
\Rightarrow \frac{|\varphi_2(\mathcal{A} \cdot h + \varphi_1(h))|}{|h|} &\leq |\eta((\|\mathcal{A}\| + |\tilde{\eta}(|h|)|) |h|)| (\|\mathcal{A}\| + |\tilde{\eta}(|h|)|)
\end{aligned}$$

**Definition 4.23**

nennen wir für  $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$  falls existieren

$$\partial_\nu f(x_0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t\nu) - f(x_0)}{t}$$

die **Richtungsableitung** von  $f$  in  $x_0$  in Richtung  $\nu$

**Ziel:**

Reduziere dies auf partielle Ableitungen (also die Richtungsableitungen der Standard Einheitsvektoren)

**Theorem 4.24**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar, so gilt für  $x_0 \in \Omega$  &  $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$ .

$$\partial_\nu f(x_0) = \langle Df(x_0), \nu \rangle$$

Hierbei ist für

$$a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n)$$

$$\langle a, b \rangle = \sum_{j=1}^n a_j b_j$$

**Proof Thm. 4.24**

Definiere für  $\varepsilon > 0$  hinreichend klein:

$$\varphi(t) := x_0 + t\nu, t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

(d.h.  $\exists \varphi((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset \Omega$ . Dann setze  $g(t) := f(\varphi(t))$ . Es ist

$$\begin{aligned} Dg(t) &= D((f \circ \varphi)(t)) \\ &= (Df)(\varphi(t)) \cdot D\varphi(t) \\ &= (Df)(x_0 + t\nu) \cdot \nu \end{aligned}$$

Aber mit

$$t \rightarrow 0 : \partial_\nu g(x_0) = Dg(0) = (Df)(x_0) \cdot \nu = \sum_{j=1}^n (\partial_j f)(x_0) \cdot \nu_j. \quad \blacksquare$$

**Recap:** Sei

$$\langle v, w \rangle := \sum_{j=1}^n v_j w_j$$

das Euklidische Skalarprodukt ( $v = (v_1, \dots, v_n), w = (w_1, \dots, w_n)$ ).  $\|v\|_2 = \sqrt{\langle v, v \rangle}$  ist dann die Euklidische 2-Norm. Sind  $v, w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , so definieren wir den **Winkel** zwischen  $v$  und  $w$  durch

$$\cos(\theta) := \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|_2 \|w\|_2}, \theta \in [0, \pi]$$

#### Lemma 4.25 Cauchy-Schwarz-Bunyakowski

Für alle  $v, w \in \mathbb{R}^n$ :

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\|_2 \|w\|_2$$

#### Proof Lem. 4.25

$$\|v\| = \|w\| = 1.$$

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + 2\langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= 2 + 2\langle v, w \rangle \\ &\leq (\|v\| + \|w\|)^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\implies \langle v, w \rangle \leq 1.$$

Selbes Argument mit  $w \rightarrow -w$  liefert  $-1 \leq \langle v, w \rangle$ . Also  $|\langle v, w \rangle| \leq 1$ . Für  $v, w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  gibt dies

$$\left| \left\langle \frac{v}{\|v\|_2}, \frac{w}{\|w\|_2} \right\rangle \right| \leq 1 \implies \frac{|\langle v, w \rangle|}{\|v\|_2 \|w\|_2} \leq 1 \quad \blacksquare$$

#### Note 4.26

Der Gradient von  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  zeigt in  $x_0 \in \Omega$  **immer** in die Richtung des stärksten Anstieges der

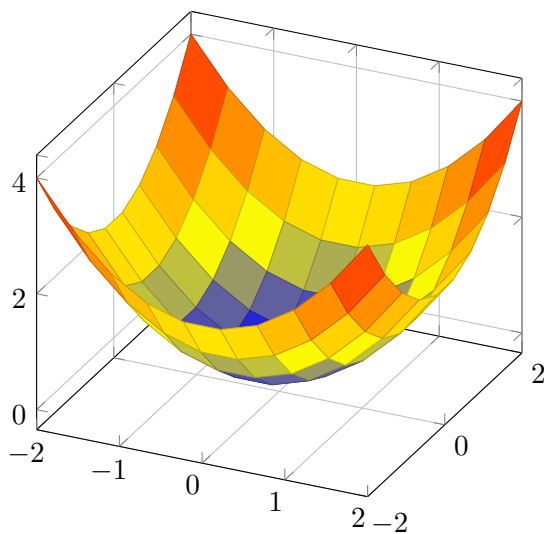
Funktion  $f$  in  $x_0$ . Genauer

$$\partial_\nu f(x_0) = \langle Df(x_0), \nu \rangle = \cos(\theta) \|Df(x_0)\|_2 \underbrace{\|\nu\|_2}_{=1} = \cos(\theta) \|Df(x_0)\|_2.$$

Die rechte Seite wird maximal für  $\theta = 0$ . In diesem Fall sind aber  $Df(x_0), \nu$  kollinear, also Behauptung

### Example 4.27

$$f : (x_1, x_2) \mapsto \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2).$$

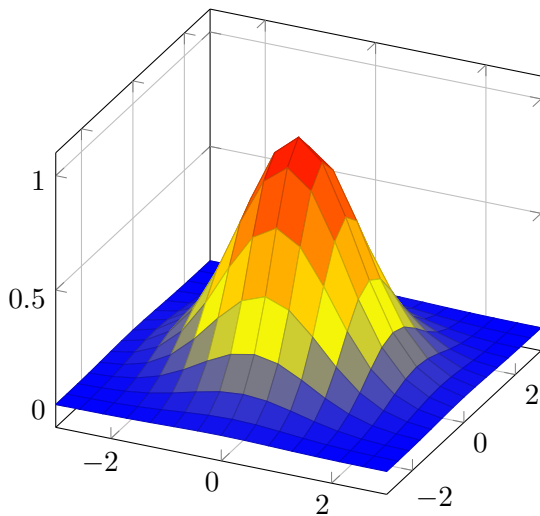


$$Df(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$$

$$Df(1, 1) = (1, 1)$$

### Example 4.28

$$g : (x_1, x_2) \mapsto \exp\left(-\frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2)\right)$$



$$Dg(x_1, x_2) = (-x_1, -x_2) \exp\left(-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right)$$

$$Dg(1, 1) = (-1, -1) \frac{1}{e}$$

### Theorem 4.29

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Wir nennen dann  $\mathcal{N}_f(c) := \{x \in \Omega : f(x) = c\}$ ,  $c \in \mathbb{R}$  die **Niveaumenge** von  $f$  zum Wert  $c$ .

Dann steht  $Df(x)$  für  $x \in \mathcal{N}_f(c)$  senkrecht in folgendem Sinne:

Ist  $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\varphi((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset \mathcal{N}_f(c)$  mit  $\varphi(0) = x$  stetig differenzierbar, so  $\langle \varphi'(0), Df(x) \rangle = 0$

### Proof Theorem 4.29

Definiere

$$g(t) := f(\varphi(t)) = c$$

dann

$$\underbrace{(Df)(\varphi(t))}_{Df(0)} \underbrace{D\varphi(t)}_{\varphi'(0)} = 0$$

### Theorem 4.29

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $x_0 \in \Omega$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Sei  $\xi \in \mathbb{R}^n$  so, dass

$$[x_0, x_0 + \xi] := \{x_0 + t\xi : 0 \leq t \leq 1\} \subset \Omega.$$

Ist  $f$  stetig differenzierbar, so

$$f(x_0 + \xi) - f(x_0) = \int_0^1 \underbrace{Df}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}}(x_0 + t\xi) dt \cdot \xi.$$

Hierbei setzen wir für

$$A : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n},$$



wobei  $A(x) = (a_{ij}(x))_{i=1,\dots,m,j=1,\dots,n}$ .

$$\int_a^b A(x) \, dx := \left( \int_a^b a_{ij}(x) \, dx \right)_{ij}.$$

**Proof Thm. 2.29**

$g(t) := f(x_0, +t\xi)$ . Dann

$$\begin{aligned} f(x_0 + \xi) - f(x_0) &= g(1) - g(0) \\ &= \begin{pmatrix} g_1(1) - g_1(0) \\ \vdots \\ g_m(1) - g_m(0) \end{pmatrix} \\ &= (g_k(1) - g_k(0))_{k=1,\dots,m} \\ &\stackrel{\text{Hauptsatz}}{=} \left( \int_0^1 \frac{d}{dt} g_k(t) \, dt \right)_{k=1,\dots,m} \\ &= \left( \int_0^1 \frac{d}{dt} f_k(x_0 + t\xi) \, dt \right)_{k=1,\dots,m} \\ &\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \left( \left\langle \int_0^1 \mathbf{D}f_{\mathbf{k}}(x_0 + \xi) \, dt, \xi \right\rangle \right)_{k=1,\dots,m} \\ &= \int_0^1 \underbrace{Df(x_0 + t\xi)}_{\mathbb{R}^{m \times n}} \, dt \cdot \underbrace{\xi}_{\mathbb{R}^{n \times 1}} \end{aligned} \quad \blacksquare$$

**Theorem 4.30 Schrankensatz**

In der Situation von Thm 4.29 gilt

$$\|f(x_0 + \xi) - f(x_0)\|_2 \leq M \|\xi\|_2,$$

wobei

$$M := \sup_{0 \leq t \leq 1} \|(Df)(x_0 + t\xi)\|$$

Operatornorm, Lemma 4.22

**Proof Thm 4.30**

Nach Thm. 4.29:

$$\begin{aligned} \|f(x_0 + \xi) - f(x_0)\|_2 &= \left\| \int_0^1 (Df)(x_0 + t\xi) \, dt \cdot \xi \right\|_2 \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \int_0^1 \|Df(x_0 + t\xi) \cdot \xi\|_2 \, dt \\ &\leq \int_0^1 \underbrace{|(Df)(x_0 + t\xi)|}_{\leq M} \cdot |\xi|_2 \, dt \\ &\leq M \cdot \|\xi\|_2. \end{aligned}$$

**Zu (\*)**: Ist  $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig. Dann:

$$\left\| \int_a^b v(t) \, dt \right\|_2 \leq \int_a^b \|v(t)\|_2 \, dt.$$

Sei hierzu

$$\eta := \int_a^b v(t) \, dt = \begin{pmatrix} \int_a^b v_1(t) \, dt \\ \vdots \\ \int_a^b v_m(t) \, dt \end{pmatrix}$$

Definiere

$$\begin{aligned} K := \|\eta\|_2 &\implies K^2 = \|\eta\|_2^2 \\ &= \langle \eta, \eta \rangle \\ &= \left\langle \int_a^b v(t) \, dt, \eta \right\rangle \\ &= \int_a^b \langle v(t), \eta \rangle \\ &\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \int_a^b \|v(t)\|_2 \cdot \underbrace{\|\eta\|_2}_K \, dt \\ &= K \int_a^b \|v(t)\|_2 \, dt. \end{aligned}$$

☐  $K \neq 0$ , kürze durch  $K$ . ■

## 5 Taylorformel & lokale Extrema

**Ziel:** Approximation durch Polynome im Mehrdimensionalen; Reduzierung auf 1-D Taylorapproximationen.

### Definition Notation

Für  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$  ("Multiindex"):

$$|\alpha| := |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n| (= \alpha_1 + \dots + \alpha_n)$$

$$\alpha! := \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$$

Ist  $f$   $|\alpha|$ -mal stetig differenzierbar, so sei

$$\partial^\alpha f := \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} f$$

**Bedeutung:**  $\alpha_i$  entspricht wie oft man nach der  $i$ -ten Variablen partiell ableitet. Hierbei  $\partial_i^{\alpha_i} f := \underbrace{\partial_i (\partial_i \dots (\partial_i f))}_{\alpha_i\text{-mal}}$ .

### Theorem 5.1

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$   $k$ -mal stetig differenzierbar und  $x_0 \in \Omega$ . Sei  $\xi \in \mathbb{R}^n$  so, dass  $[x_0, x_0 + \xi] \subset \Omega$ . Dann ist  $g: [0, 1] \ni t \mapsto f(x_0 + t\xi) \in \mathbb{R}$   $k$ -mal stetig differenzierbar und

$$\frac{d^k g}{dt^k} = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (\partial^\alpha f)(x_0 + t\xi) \xi^\alpha.$$

### Proof Thm. 5.1

$$\forall k \in \mathbb{N}: \frac{d^k g}{dt^k}(t) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \partial_{i_k} \dots \partial_{i_1} f(x_0 + t\xi) \xi_{i_1} \dots \xi_{i_k}$$

$k = 1$ :

$$\frac{d}{dt} f(x_0 + t\xi) = \langle Df(x_0 + t\xi), \xi \rangle = \sum_{i=1}^n (\partial_i f)(x_0 + t\xi) \xi_i$$

$k - 1 \rightsquigarrow k$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dt^k} g &= \frac{d}{dt} \left( \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} g(t) \right) \\ &\stackrel{\text{I.V.}}{=} \frac{d}{dt} \sum_{i_1, \dots, i_{k-1}=1}^n \partial_{i_{k-1}} \dots \partial_{i_1} f(x_0 + t\xi) \cdot \xi_{i_1} \dots \xi_{i_{k-1}} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_{k-1}=1}^n \partial_{i_{k-1}} \dots \partial_{i_1} \left( \sum_{i_k=1}^n \partial_{i_k} f(x_0 + t\xi) \cdot \xi_{i_k} \right) \xi_{i_1} \dots \xi_{i_{k-1}} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \partial_{i_k} \dots \partial_{i_1} f(x_0 + t\xi) \cdot \xi_{i_1} \dots \xi_{i_k} \end{aligned}$$

**Kombinatorisch:** Wege des Satzes von Schwarz (Vertauschbarkeit partieller Ableitungen) treten hier partielle Ableitungen öfters auf. Speziell tritt  $\partial^\alpha f \frac{k!}{\alpha!}$  mal auf, und das zeigt die Behauptung. ■

### Theorem 5.2 Taylor, mehrdimensional

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $x_0 \in \Omega$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^n$  mit  $[x_0, x_0 + \xi] \subset \Omega$ . Sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$   $(k+1)$ -mal stetig differenzierbar. Dann  $\exists \theta \in [0, 1]$ :

$$f(x_0 + \xi) = \underbrace{\sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!} \xi^\alpha}_{\text{Taylorpolynom der Ordnung } k} + \underbrace{\sum_{|\alpha|=k+1} \frac{\partial^\alpha f(x_0 + \theta\xi)}{\alpha!} \xi^\alpha}_{\text{assoziertes Restglied}}$$

### Proof Thm 5.2

Setze

$$g : [0, 1] \ni t \mapsto f(x_0 + t\xi) \in \mathbb{R}$$

$k+1$ -mal stetig differenzierbar  $\implies$  [1-d Taylor]  $\implies \exists \theta \in [0, 1]$ :

$$g(1) = \sum_{m=0}^k \frac{1}{m!} g^{(m)}(0) + \frac{g^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!}.$$

Aber

$$\begin{aligned} \frac{g^{(m)}(0)}{m!} &= \frac{1}{m!} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0) \xi^\alpha = \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0) \xi^\alpha. \\ \implies \sum_{m=0}^k \frac{1}{m!} g^{(m)}(0) &= \sum_{m=0}^k \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0) \xi^\alpha = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0) \xi^\alpha. \end{aligned}$$

■

### Corollary 5.3

Sei  $\Omega$  offen,  $x_0 \in \Omega$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$   $k$ -mal stetig differenzierbar. Dann haben wir bereits

$$f(x_0 + \xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0) \xi^\alpha + o(|\xi|^k).$$

mit  $|\xi| \searrow 0$ .

$$\left[ \frac{|f(x_0 + \xi) - \sum (\dots)|}{|\xi|^k} \xrightarrow{|\xi| \searrow 0} 0 \right]$$

### Proof Cor. 5.3

Nach Theorem 5.2

$$\left| f(x_0 + \xi) - \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0) \xi^\alpha \right| = \left| \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{(\partial^\alpha f(x_0 + \theta\xi) - \partial^\alpha f(x_0))}{\alpha!} \cdot \frac{\xi^\alpha}{|\xi|^k} \right| \xrightarrow{|\xi| \searrow 0} 0$$

■

**Note 5.4**

Ist  $f$  in der Situation von Cor 5.3 zweimal stetig differenzierbar, so gilt

$$f(x_0 + \xi) = \underbrace{f(x_0)}_{|\alpha|=0} + \underbrace{\langle Df(x_0), \xi \rangle}_{|\alpha|=1} + \underbrace{\frac{1}{2} \langle D^2 f(x_0) \xi, \xi \rangle}_{|\alpha|=2} + o(|\xi|^2), |\xi| \searrow 0.$$

**Plan für heute:**

- Notwendige & hinreichende Kriterien für **Extrema** (bzw. lokale Ext.)
- “Krümme” von Graphen

**Definition 5.5**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen &  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Wir sagen, dass  $f$  in  $x_0 \in \Omega$

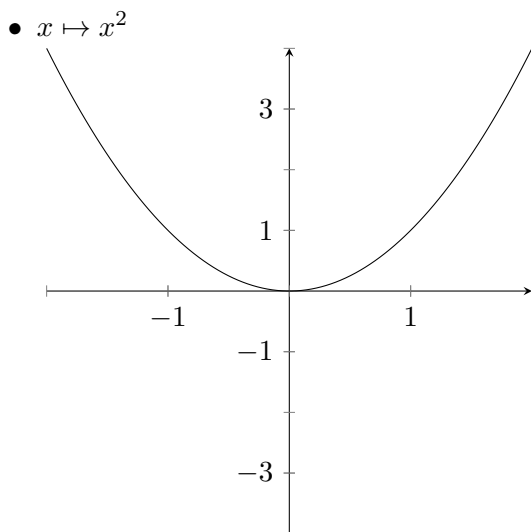
- ein **lokales Maximum** besitzt, falls  $\exists U \subset \Omega$  offen  $\forall x \in U : f(x) \leq f(x_0)$ .
- ein **lokales Minimum** besitzt, falls  $\exists U \subset \Omega$  offen  $\forall x \in U : f(x) \geq f(x_0)$ .
- ein **lokales Extremum**, falls in  $x_0$  ein lokales Maximum/Minimum vorliegt

**Theorem 5.6**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine partiell differenzierbare Funktion. Hat  $f$  in  $x_0$  ein lokales Extremum, so  $\nabla f(x_0) = (\partial_1 f(x_0), \dots, \partial_n f(x_0)) = (0, \dots, 0)$

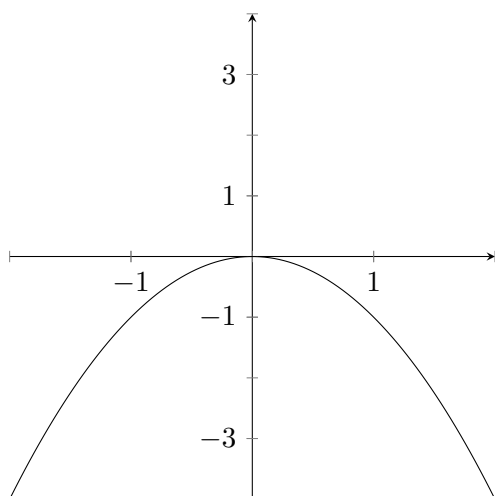
**Proof Thm. 5.6**

Sei  $U \subset \Omega$  wie in dder Definition des lokalen Extremum, (E lokales Maximum. Dann  $\exists \varepsilon > 0 : \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon) : \forall j : x_0 + te_j \in U$ . Nun hat also für jedes  $j \in \{1, \dots, n\}$  die Funktion  $g_j(t) := f(x_0 + te_j)$  ein lokales Maximum in  $t = 0$ ;  $g_j : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ . Damit nach Ana 1:  $0 \stackrel{!}{=} g'_j(0)$ , aber  $g'_j(t) = \langle Df(x_0 + te_j), e_j \rangle$  & daher  $g'_j(0) = \partial_j f(x_0)$ . ■

**Ziel:** Hinreichende Bedingung

“pos. gekrümmt”

- $x \mapsto -x^2$



“neg. gekrümmt”

- Für  $x \mapsto ax^2$  definiert  $a \in \mathbb{R}$  das Krümmungsverhalten

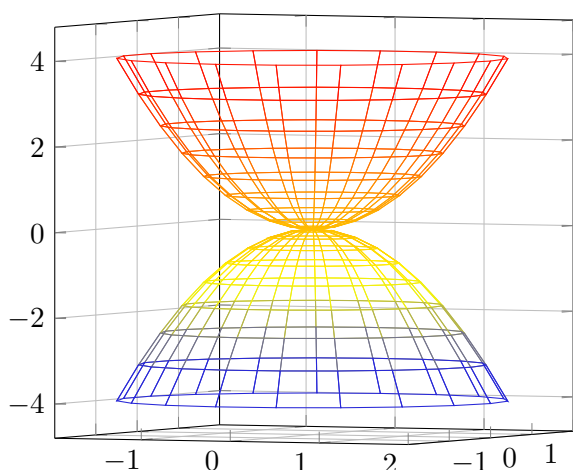
Für MULTI-DIM.: Substitute von  $x \mapsto ax^2$  sind die quadratischen Formen:  $q : \mathbb{R}^n \ni x \mapsto \langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$ , wobei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

### Example 5.7

Sei  $A = E_n$  ( $(n \times n)$ -Einheitsmatrix),  $\mathbb{E}$  für  $n = 2$ . Dann

$$q : \mathbb{R}^n \ni x \mapsto \|x\|_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

$$\tilde{q} : \mathbb{R}^n \ni x \mapsto -\|x\|_2^2 \text{ (zu } A = -E_h)$$



### Definition 5.8

Eine symmetrische Matrix  $A \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n}$  (also  $a_{ij} = a_{ji}$ ) heißt

- pos. definit, falls  $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \langle Ax, x \rangle > 0$ .
- pos semidefinit, falls  $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \langle Ax, x \rangle \geq 0$ .
- neg. definit, falls  $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \langle Ax, x \rangle < 0$ .

- neg. semidefinit, falls  $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \langle Ax, x \rangle \leq 0$ .
- undefinit, falls keine der obigen Bedingungen erfüllt sind.

**Note 5.9**

Ang.,  $A \in \mathbb{R}_{sym}^{n \times n}$  erfüllt  $\forall x \in B_\varepsilon(0) : \langle Ax, x \rangle \geq 0$ . Für  $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  sei

$$x_\varepsilon := \frac{\varepsilon}{2} \frac{y}{\|y\|_2}.$$

Dann

$$x_\varepsilon \in B_\varepsilon(0) \& \underbrace{\langle Ax_\varepsilon, x_\varepsilon \rangle}_{\underbrace{\frac{\varepsilon^2}{4} \frac{1}{\|y\|_2^2} \langle Ay, y \rangle}_{>0}} \geq 0$$

**Theorem 5.10**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar und  $x_0 \in \Omega$  mit  $Df(x_0) = 0$ . Dann gilt: Ist

- (i)  $D^2f(x_0)$  (bzw.  $Hf(x_0)$ ) **pos. definit**, so hat  $f$  in  $x_0$  ein lokales Minimum
- (ii)  $D^2f(x_0)$  (bzw.  $Hf(x_0)$ ) **neg. definit**, so hat  $f$  in  $x_0$  ein lokales Maximum
- (iii) Ist  $D^2f(x_0)$  ( $Hf(x_0)$ ) indefinit, so liegt kein lokales Extremum in  $x_0$  vor.

**Proof Thm. 5.10**

Nur (i), (ii), (iii) analog. Nach Tayorentwicklung zu Ordnung 2 schreibe

$$f(x) = f(x_0) + \langle Df(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle D^2f(x_0)(x - x_0), (x - x_0) \rangle + r(x) \|x - x_0\|_2^2$$

für alle  $x \in \omega$  &  $\lim_{x \rightarrow x_0} |r(x)| = 0$ . Definiere  $A := D^2f(x_0)$ . Betrachte

$$q : x \mapsto \langle Ax, x \rangle.$$

Dann ist  $q$  stetig, und nimmt  $\mathbb{S}^{n-1}$  ein Minimum an ( $\mathbb{S}^{n-1}$  kompakt). Sei nun  $\varepsilon := \min_{\mathbb{S}^{n-1}} q$ ,  $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$ . Nun ist  $A$  pos. definit, also  $\varepsilon > 0$ . Dann, z.B. mit Bem. 5.9:  $\langle Ay, y \rangle \geq \varepsilon \|y\|_2^2$  für alle  $y \in \mathbb{R}^n$ . Denn  $\forall y \neq 0 : \frac{y}{\|y\|_2} \in \mathbb{S}^{n-1}$ , also  $\left\langle A \frac{y}{\|y\|_2}, \frac{y}{\|y\|_2} \right\rangle \geq \varepsilon$ . Weiter  $\exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta(x_0) : |r(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Hiermit

$$\begin{aligned} \forall x \in B_\delta(x_0) : f(x) &= f(x_0) + \underbrace{\langle A(x - x_0), (x - x_0) \rangle}_{\geq \varepsilon \|x - x_0\|_2^2} + r(x) \|x - x_0\|_2^2 \\ &\geq f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \|x - x_0\|_2^2 - \underbrace{|r(x)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \|x - x_0\|_2^2 \\ &\geq f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \|x - x_0\|_2^2 - \frac{\varepsilon}{2} \|x - x_0\|_2^2 = f(x_0). \end{aligned}$$

■

Zum Überprüfen der (pos.) Definitheit: Hauptminoren für  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$

$$|A_1| = a_{11}.$$

$$|A_2| = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$|A_k| = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} \text{ "k-te Hauptminore"}$$

### Theorem 5.11 Hirwitz

Sei  $A \in \mathbb{R}_{sym}^{n \times n}$ .  $A$  ist

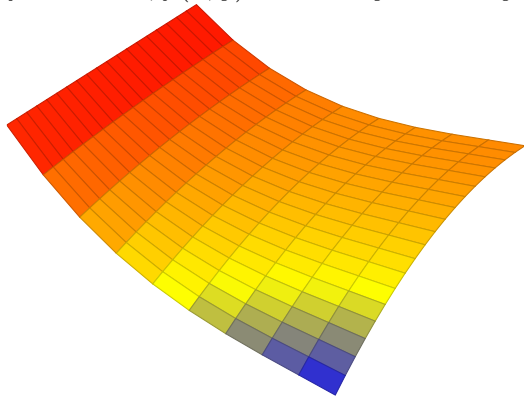
(i) pos. definit, falls alle Hauptminoren  $> 0$  sind.

(ii) (neg. definit) Die Hauptminoren wechseln mit neg. Vz beginnend ihre Vorzeichen:  $|A_1| < 0, |A_2| > 0, |A_3| < 0, \dots$

- $-I$ :  $|A_1| = -1, |A_2| = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1, \dots$

### Example 5.12

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) := x^3 + xy^2 + x^2 - y^2.$$



**Frage:** Wo lokale Extrema?

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + y^2 + 2x \\ 2(x-1)y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\implies x = 1 \vee y = 0$$

$$\nabla(x, y) = \begin{pmatrix} 5 + y^2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies \exists y = 0 \implies 3x^2 + 2x \stackrel{!}{=} 0 \implies x = -\frac{2}{3} \vee x = 0. \text{ Kritische Punkte: } \xi_1 := (0, 0), \xi_2 = \left(-\frac{2}{3}, 0\right).$$

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x + 2 & 2y \\ 2y & 2(x-1) \end{pmatrix}.$$

Dann

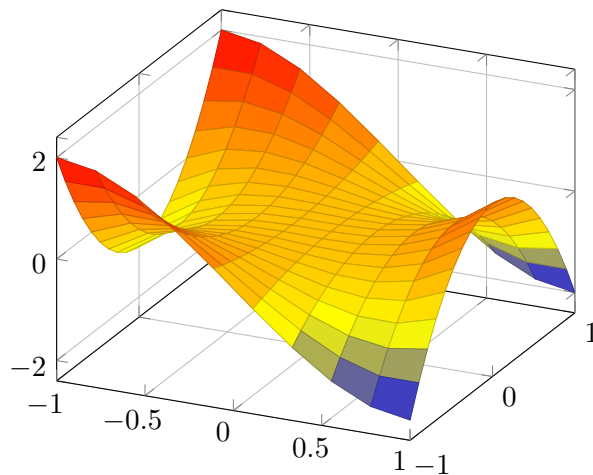
$$D^2 f(\xi_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = A,$$



$|A_1| = 2 > 0, |A_2| < 0$ . Aber  $A$  ist indefinit:  $\left\langle A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle > 0, \left\langle A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle < 0$ . Also nach Thm. 5.10 c) **kein** lokales Extremum.

$$(x, y) = \left(-\frac{2}{3}, 0\right), D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

Eintrag links oben neg.,  $\det D^2 f(x, y) = \frac{20}{3} > 0$ . Also ist  $D^2 f(x, y)$  nach Hurwitz **neg. definit**  $\Rightarrow$  bei  $(-\frac{2}{3}, 0)$  hat  $f$  ein **lok. Maximum**. Dies ist **kein** globales Maximum, denn für  $(x, 0) : f(x, 0) = x^3 + x^2 \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$ .



- **Affensattel:**  $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y^2 \\ -6xy \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (x, y) = (0, 0)$$

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & -6x \end{pmatrix} \stackrel{(x,y)=(0,0)}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{kein lok. Extremum}$$

## 6 Der lokale Umkehrsatz & implizite Funktionen

- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenzierbar. Was müssen an  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  fordern, so dass es eine offene Menge  $V$  mit  $x_0 \in V$  &

$$\underbrace{f : V \rightarrow f(V)}_{f|_V}$$

ist bijektiv mit differenzierbarer Umkehrfunktion?

- Falls  $y \in f(V)$ , löse dann  $\exists! x \in V : f(x) = y$ .

Idee:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)}_{\text{linearisiertes } f} + \left( \underbrace{\text{Rest}}_{\text{vernachlässigbar}} \right)$$

lokal:

$$f(x) \hat{=} f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) = y$$

Wollen wir dies lösen, also

$$Df(x_0)(x - x_0) = y - f(x_0),$$

so muss  $Df(x_0)$  invertierbar sein. Frage: Auch hinreichend?

### Lemma 6.1

Sei  $\text{GL}(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A \text{ invertierbar}\}$  ist offen in  $\mathbb{R}^{n \times n}$  bezüglich jeder Norm, und  $\text{inv} : \text{GL}(n) \ni A \mapsto A^{-1} \in \text{GL}(n)$  ist stetig differenzierbar.

### Proof Lem 6.1

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \mapsto \det(A)$$

ist ein Polynom, also stetig. Damit  $\text{GL}(n) = \det^{-1}(\underbrace{\mathbb{R} \setminus \{0\}}_{\text{offen}})$  offen. Differenzierbarkeit folgt aus der CRAMERSchen Regel. Nämlich

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{cof}(A)^T$$

$$\text{cof}(A) = m_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

mit  $M_{ij}$ , der  $(i, j)$ -te Minore (det der Matrix, ohne  $i$ -te Zeile,  $j$ -te Spalte). (siehe Lin. Alg.) Damit ist  $A \mapsto \frac{1}{\det(A)} \text{cof}(A)$  eine  $\mathbb{R}^{n \times n}$ -wertige Abbildung, deren einzelne Komponenten rationale Funktionen in den Einträgen von  $A$  sind.  $\rightarrow$  **Beh.**

### Theorem 6.2

Sei  $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$  offen,  $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  bijektiv. Sei  $x_0 \in \Omega_1$  &  $f$  in  $x_0$  differenzierbar,

$f^{-1}$  in  $f(x_0)$  differenzierbar. Dann  $m = n$ ;  $Df(x_0)$  inv &  $(Df^{-1})(f(x_0)) = (Df(x_0))^{-1}$

$$f^{-1}(f(x)) = x, f(f^{-1}(x)) = x \implies (Df^{-1})(x)(Df)(f^{-1}(x)) = 1$$

**Proof Thm. 6.2**

$$A := Df(x_0), B := (Df^{-1})(f(x_0)).$$

$$f \circ f^{-1} = \text{Id}_{\Omega_2} \text{ \& } f^{-1} \circ f = \text{Id}_{\Omega_1} \xrightarrow{\text{Kettenregel}} BA = E_n, AB = E_m$$

Mit  $E_n$  ist die  $(n \times n)$ -Einheitsmatrix, und  $E_m$  ist die  $(m \times m)$ -Einheitsmatrix. ■

**Frage:** Wann ist  $f^{-1}$  differenzierbar?

**Lemma 6.3**

Seien  $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  bijektiv & stetig differenzierbar. Weiter sei  $f^{-1}$  stetig &  $\forall x \in \Omega_1 : Df(x) \in \text{GL}(n)$ . Dann ist  $f^{-1}$  **stetig differenzierbar**.

**Proof Lem 6.3**

Zu zeigen:  $f^{-1}$  ist in jedem  $b = f(x_0), x_0 \in \Omega_1$  differenzierbar

**1. Reduktion**  $x_0 = 0, f(x_0) = 0$ . Ansonsten betrachte  $g(x) = f(x_0 + x) - f(x_0)$

**2. Reduktion** Sei  $C := (Df(0))^{-1}$ . Wir zeigen die Aussage für  $(Cf)^{-1}$ , denn  $D((Cf)^{-1}) = C^{-1}(Df^{-1})$  (+  $C$  invertierbar!)

**3. Reduktion** Damit  $\Leftrightarrow Df(0) = E_n$ .

- $f$  in 0 differenzierbar  $\implies \exists r : \Omega_1 \xrightarrow{\text{stetig}} \mathbb{R}^n : r(0) = 0 \text{ \& } \forall x \in \Omega_1 : f(x) \stackrel{\text{3. Red.}}{=} f(0) + E_n x + r(x) \|x\|_2$
- Setze

$$s(y) := \begin{cases} -r(x) \frac{\|x\|_2}{\|y\|_2}, & y \neq 0, y = f(x) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \implies -r(x) \|x\|_2 = s(y) \|y\|_2$$

$f(0) = 0$ . Also  $f^{-1}(0) = 0$ . Für alle  $y = f(x), y \neq 0$ .

$$\begin{aligned} f^{-1}(y) = x &= f(x) - r(x) \|x\|_2 \\ &= y + s(y) \|y\|_2 \\ &= \underbrace{f^{-1}(0)}_0 + E_n y + s(y) \|y\|_2 \end{aligned}$$

Dies gilt auch für  $y = 0$ . Also ist  $f^{-1}$  in 0 differenzierbar. Also auch für alle  $x_0 \in \Omega_1$ .

—  
Zunächst gilt

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_{\Omega_1},$$

damit folgt nach Kettenregel

$$(Df^{-1})(f(x))(Df(x)) = E_n,$$

also

$$(Df^{-1})(f(x)) = (Df(x))^{-1}$$

mit  $y = f(x)$  folgt, dass

$$Df^{-1} = \underbrace{\text{inv}}_{\text{Lem. 6.1 stetig}} \circ \underbrace{Df}_{\text{stetig nach Vor.}} \circ \underbrace{f^{-1}}_{\text{stetig nach I teil des Bew.}}$$

Also  $Df^{-1}$  stetig ■

#### Definition 6.4

Seien  $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$  offen. Eine stetig differenzierbare, bijektive Abbildung  $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  heißt **Diffeomorphismus**, falls

$$f^{-1} : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$$

ebenfalls stetig differenzierbar ist.

#### Theorem 6.5 Lokaler Umkehrsatz

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar. Sei  $x_0 \in \Omega$  so, dass  $Df(x_0)$  invertierbar ist. Dann gibt es eine offene Umgebung  $U$  von  $x_0$ , sodass  $f(U)$  eine offene Umgebung von  $f(x_0)$  ist und  $f|_U : U \rightarrow f(U)$  ein Diffeomorphismus ist:  $f|_U$  ist stetig differenzierbar und  $(f|_U)^{-1}$  ist stetig differenzierbar.

#### Proof Theorem 6.5

Sei  $x_0 = 0$  und  $f(x_0) = 0$ , ansonsten betrachte  $x \mapsto f(x + x_0) - f(x_0)$ . Betrachte mit  $C := (Df(0))^{-1}$  den Isomorphismus  $T : x \mapsto Cx$ . Nach Lemma 5.3 gilt

$$D(T \circ f)(0) = C \cdot Df(0) = E_n.$$

Also können wir annehmen, dass  $x_0 = f(x_0) = 0$  und  $Df(0) = E_n$ . Wir benutzen:

- den Schrankensatz
- den Banachschen Fixpunktsatz

**Schritt 1** Wir wollen

$$f(x) = y$$

lösen. Setzen für  $y \in \mathbb{R}^n$  und  $x \in \Omega$  definiere

$$g_y(x) := y + x - f(x).$$

Wir wollen

$$g_y(x) = x$$

lösen. Nach Voraussetzung ist  $Df$  stetig in  $x_0 = 0$ . Daher gibt es ein  $r > 0$ , sodass

$$K := \overline{B_{2r}}(0) \subset \Omega,$$

sowie

$$\forall x \in K : \|E_n - Df(x)\| < \frac{1}{2}$$

Da  $Dg_y(x) = E_n Df(x)$ , folgt mit Schrankensatz

$$\forall x_1, x_2 \in K : \|g_y(x_1) - g_y(x_2)\| \leq \max_{x \in K} \|E_n - Df(x)\| \|x_1 - x_2\|_2 \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|_2$$

Daraus folgt, dass  $\forall x \in K, y \in B_r(0) : \|g_y(x)\|_2 \leq \|g_y(x) - g_y(0)\|_2 + \|g_y(0)\|_2 \leq \frac{1}{2} \|x\|_2 + \|y\|_2 < r + r = 2r$ .

$\implies g_y : K \rightarrow K$  ist kontrahierende selbstabbildung. Da  $K$  abgeschlossen und beschränkt ist, ist  $K$  kompakt, als BFS anwendbar.

- Ziel erreicht: Für jedes  $y \in B_r(0)$  gibt es genau ein  $x \in K$  so, dass  $g_y(x) = x$ , also  $f(x) = y$  mit  $B_{2r}(0)$ .

Für  $y \in B_r(0)$  definieren wir  $h(y)$  also das eindeutig bestimmte  $x \in B_{2r}(0)$ , also

$$h(y) := x,$$

$$V := B_r(0)$$

und

$$U := f^{-1}(V) \cap B_{2r}(0)$$

Dies definiert eine Umkehrabbildung

$$h : V \rightarrow U$$

zu  $f|_U : U \rightarrow f(U)$

### Schritt 2 $h$ ist stetig

Seien  $y_1, y_2 \in V$ . Definiere  $x_1 = h(y_1)$  und  $x_2 := h(y_2)$ . Da  $g_y(x) = x$  folgt  $x_1 - x_2 = g_0(x_1) - g_0(x_2) + f(x_1) - f(x_2)$ . D.h.

$$\|x_1 - x_2\|_2 \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|_2 + \|f(x_1) - f(x_2)\|_2,$$

also

$$\|h(y_1) - h(y_2)\|_2 \leq 2 \|y_1 - y_2\|_2.$$

Also  $h$  stetig.

**Schritt 3** Invertierbarkeit von  $Df(x)$  auf  $U$ . Sei  $x \in U$ , dann gilt  $\|x\|_2 < 2r$ . Dann gilt

$$\forall v \in \mathbb{R}^n : \|v - Df(x)v\|_2 \leq \frac{1}{2} \|v\|_2$$

Angenommen  $v \in \ker(Df(x))$ . Dann  $\|v\|_2 \leq \frac{1}{2} \|v\|_2$ , also  $v = 0$ . Also  $Df(x)$  invertierbar. Behauptung folgt aus Lemma 6.3 ■

**Corollary 6.6 Satz von der Offenheit**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetig differenzierbare Funktion, sodass  $Df(x)$  für alle  $x \in \Omega$  invertierbar ist. Dann ist  $f(\Omega)$  offen.

**Proof Korollar 6.6**

Nach lokalem Umkehrsatz gibt es für jedes  $x \in \Omega$  eine offene Umgebung  $U_x$ , sodass  $f(U_x)$  offen ist. D.h.

$$f(\Omega) = \bigcup_{x \in \Omega} f(U_x)$$

ist offen. ■

**Example 6.7**

$$f(x_1, x_2) = (x_1 x_2^2, x_1^{x_2})$$

auf

$$\Omega = (0, \infty) \times \mathbb{R}.$$

Wir beachten, dass  $x_1^{x_2} = \exp(x_2 \log x_1)$ . Damit gilt

$$Df(x) = \begin{pmatrix} x_2^2 & 2x_1 x_2 \\ x_2 x_1^{x_2-1} & \log(x_1) x_1^{x_2} \end{pmatrix},$$

im Punkt  $(1, 2)$  gibt

$$Df(1, 2) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ist invertierbar.  $\implies$  Lokal umkehrbar.

**Corollary 6.8**

Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

eine injektiv, stetig differenzierbar mit  $Df(x)$  invertierbar für alle  $x \in U$ . Dann ist  $f(U)$  offen und

$$f^{-1} : f(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

stetig differenzierbar.

**Proof Korollar 6.8**

Nach Korollar 6.6:  $f(U)$  offen. Sei nun  $b \in f(U)$  und sei  $a = f^{-1}(b)$ . Nach Satz 6.5 existiert eine offene Umgebung  $W \subseteq f(U)$  von  $b$ , sodass  $f|_W^{-1}$  stetig differenzierbar ist. ■

**Example 6.9**

Sei  $f : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  definiert als

$$f(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

$f$  ist injektiv und stetig differenzierbar. Es ist

$$Df(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Also  $\det(Df(r, \varphi)) = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r > 0$ . Also ist  $Df(r, \varphi)$  invertierbar und somit  $g = f^{-1}$  stetig differenzierbar auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Für  $(x, y) = f(r, \varphi)$  gilt

$$Dg(x, y) = (Df(r, \varphi))^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\frac{1}{r} \sin \varphi & \frac{1}{r} \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\|(x, y)\|} & \frac{y}{\|(x, y)\|} \\ -\frac{y}{\|(x, y)\|^2} & \frac{x}{\|(x, y)\|^2} \end{pmatrix}$$

Sei nun  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F(a, b) = 0$ . Wir suchen für die eindeutige Lösbarkeit der Gleichung

$$F(x, y) = 0$$

Werte  $y$  in Abhängigkeit von  $x$  in einer Umgebung von  $(a, b)$

**Example 6.10**

Für

$$F(x, y) = x - y^2.$$

Es ist  $F(1, 1) = 0$  Definiere

$$g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

durch

$$g(x) = \sqrt{x}$$

Dann gilt  $f(x, g(x)) = 0$  in einer Umgebung von  $(1, 1)$

**Definition   Notation**

Für

$$g : X \rightarrow Y$$

sei  $\text{Gr}(g) = \{(x, g(x)) : x \in X\}$  der Graph von  $g$

**Note**

Seien  $(u, v) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$  und  $W$  Umgebung von  $(u, v)$ . Dann existieren Umgebungen  $W_0$  von  $u$  und  $W_1$  von  $v$  mit  $W_0 \times W_1 \subseteq W$ .

**Proof**

Für  $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$  und  $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$  ist

$$\|(x, y)\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 \leq (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2,$$

also

$$\|(x, y)\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$$

Wähle also  $\varepsilon > 0$  mit  $B_\varepsilon((u, v)) \subseteq W$ . Dann ist

$$B_{\frac{\varepsilon}{2}}(u) \times B_{\frac{\varepsilon}{2}}(v) \subseteq B_\varepsilon((u, v)) \subseteq W. \quad \blacksquare$$

**Definition   Notation**

Seien

$$U_1 \subseteq \mathbb{R}^k \text{ und}$$

$$U_2 \subseteq \mathbb{R}^m$$

offen und

$$F : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$$

differenzierbar. Für  $(a, b) \in U_1 \times U_2$  setze

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a, b) = \begin{pmatrix} D_1 F_1(a, b) & \dots & D_k F_1(a, b) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 F_m(a, b) & \dots & D_k F_m(a, b) \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) = \begin{pmatrix} D_{k+1} F_1(a, b) & \dots & D_{k+m} F_1(a, b) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{k+1} F_m(a, b) & \dots & D_{k+m} F_m(a, b) \end{pmatrix}.$$

Es gilt also

$$DF(a, b) = \left( \frac{\partial F}{\partial x}(a, b) \mid \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \right)$$

Somit ist für  $(u, v) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$

$$DF(a, b)(u, v) = \frac{\partial F}{\partial x}(a, b) \cdot u + \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \cdot v.$$

**Theorem 6.11   Implizite Funktionen**

Seien  $U_1 \subseteq \mathbb{R}^k$  und  $U_2 \subseteq \mathbb{R}^m$  offen und sei

$$F : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$$

stetig differenzierbar. Weiter sei  $(a, b) \in U_1 \times U_2$  mit

$$F(a, b) = 0$$



und

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)$$

sei invertierbar. Dann gibt es offene Umgebungen  $V_1 \subseteq U_1$  von  $a$  und  $V_2 \subseteq U_2$  von  $b$ , sowie eine stetig differenzierbare Funktion

$$g : V_1 \rightarrow V_2$$

mit

$$\text{Gr}(g) = \{(x, y) \in V_1 \times V_2 : F(x, y) = 0\} \quad (\text{d.h. } F(x, g(x)) = 0)$$

Weiterhin gilt

$$Dg(a) = - \left( \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(a, b)$$

### Proof Satz 6.11

Definiere

$$H : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^{k+m}$$

durch

$$H(x, y) = (x, F(x, y)).$$

$H$  ist stetig differenzierbar und es gilt

$$DH(a, b) = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$\det(DH(a, b)) = \underbrace{\det\left(\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)\right)}_{\neq 0 \text{ nach Annahme}} \cdot \det(E_k) \neq 0$$

Also ist  $DH(a, b)$  invertierbar  $\implies$  Lokaler Umkehrsatz:

- Es gibt eine offene Umgebung  $V \subseteq U_1 \times U_2$  von  $(a, b)$  und  $W \subseteq \mathbb{R}^{k+m}$  von  $H(a, b)$  derart, dass  $h := H|_V$  eine Bijektion von  $V$  nach  $W$  ist, für die  $h^{-1}$  stetig differenzierbar ist.

Sei

$$h^* : W \rightarrow \mathbb{R}^m$$

die Funktion, die

$$h^{-1}(u, v) = (u, h^*(u, v))$$

für alle  $(u, v) \in W$  erfüllt. Dann

$$\forall (x, y) \in V : (F(x, y) = 0 \iff H(x, y) = (x, 0) \iff y = h^*(x, 0)) \quad (*)$$

Nach Bemerkung existieren offene Umgebungen  $W_1$  von  $a$  und  $V_2$  von  $b$  mit  $W_1 \times V_2 \subseteq V$ . Nun ist  $h^*(a, 0) = b$  und  $x \mapsto h^*(x, 0)$  ist stetig. Also existiert eine offene Umgebung  $V_1 \subseteq W_1$  von  $a$  mit  $h^*(x, 0) \in V_2$  für alle  $x \in V_1$ . Definiere

$$g : V_1 \rightarrow V_2 \quad \text{durch} \quad g(x) = h^*(x, 0).$$

$h^{-1}$  ist stetig differenzierbar, also ist es auch  $g$  und es gilt

$$\text{Gr}(g) = \{(x, y) \in V_1 \times V_2 : F(x, y) = 0\},$$

denn

“ $\subseteq$ ” Sei  $x \in V_1$ . Dann ist  $(x, g(x)) \in V_1 \times V_2$  und  $g(x) = h^*(x, 0)$ , also

$$F(x, g(x)) = 0$$

nach (\*).

“ $\supseteq$ ” Sei  $(x, y) \in V_1 \times V_2$  mit  $F(x, y) = 0$ . Dann  $(x, y) \in V$ , nach (\*)  $y = g(x)$

Nun zum Zusatz: Es ist  $F(a, g(x)) = 0$ , da  $g(a) = b$ . Also gilt für  $g(x) = F(x, g(x))$ , dass

$$0 = Dg(a) = DF(a, b) \begin{pmatrix} E_k \\ Dg(a) \end{pmatrix} = \frac{\partial F}{\partial x}(a, b) + \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) Dg(a)$$

und daher

$$Dg(a) = - \left( \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(a, b) \quad \blacksquare$$

- **Satz über die implizite Funktion. Frage:** Können wir  $f^{-1}(\{0\}) = \{x : f(x) = 0\}$  lokal als Graph schreiben. D.h., gegeben  $x_0 \in f^{-1}(\{0\})$ ,  $\exists U$  offen,  $x_0 \in U$ ,  $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$  offen,  $g : V \rightarrow \mathbb{R} : U \cap f^{-1}(\{0\}) = \{(x', g(x')) : x' \in V\}$

$$f : (x, y) = x^2 + y^2 - 1, x_0 = (0, -1).$$

Dann ist  $f^{-1}(\{0\}) \cap U$  realisierbar als  $\{(x, g(x)) : x \in (-\alpha, \alpha)\}$ ,  $g(x') = -\sqrt{1 - |x'|^2}$

- $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^k, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^m$  offen,  $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^m, F = (F_1, \dots, F_m)$  stetig differenzierbar. Für  $(a, b) \in \Omega_1 \times \Omega_2$  setze

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a, b) = \begin{pmatrix} \partial_1 F_1(a, b) & \dots & \partial_k F_1(a, b) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 F_m(a, b) & \dots & \partial_k F_m(a, b) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) = \begin{pmatrix} \partial_{k+1} F_1(a, b) & \dots & \partial_{k+m} F_1(a, b) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{k+1} F_m(a, b) & \dots & \partial_{k+m} F_m(a, b) \end{pmatrix},$$

Dann

$$DF(a, b) = \left( \frac{\partial F}{\partial x}(a, b), \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \right)$$

$\leadsto F(a, b) = 0$  &  $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)$  invertierbar. Dann  $\exists V_1 \subset \Omega_1, V_2 \subset \Omega_2$  offene Umgebungen von  $a$  bzw.  $b$ ,  $g : V_1 \rightarrow V_2$  stetig differenzierbar mit

$$\text{Gr}(g) := \{(x, y) \in V_1 \times V_2 : F(x, y) = 0\}$$

$$\& Dg(a) = - \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(a, b)$$

**Example 6.12**

$$F(x, y) := x^2 + y^2 - 1, m = 1, k = 1$$

$$F : \underbrace{\mathbb{R}}_{k=1} \times \underbrace{\mathbb{R}}_{m=1} \rightarrow \underbrace{\mathbb{R}}_{m=1}$$

- $x_0 = (0, -1)$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \frac{\partial F}{\partial y} = 2y,$$

dann  $\frac{\partial F}{\partial y}(0, -1) = -2 \neq 0 \implies$  **inv.**, also in Einklang mit Parametrisierung  $g(x) = -\sqrt{1 - |x|^2}$ .

- Bei  $x_0 = (-1, 0)$  wegen  $\frac{\partial F}{\partial y}(-1, 0) = 0$  nicht erwartbar.

**Example 6.13**

$$F(x_1, \dots, x_8) = x_1^2 + \dots + x_4^2 - x_5^2 - \dots - x_8^2.$$

Wir nennen  $F^{-1}(\{0\}) =: \mathcal{K}$  den **Simonskegel**:  $x \in \mathcal{K} \implies \lambda x \in \mathcal{K}$ .

**Extrema unter Nebenbedingungen**

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  (Wärmeverteilung)

$\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  (Lokation der Krösen)

**Ziel:** Maximiere  $f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

Das ist fast trivial, Grund:  $\gamma \hat{=}$  Parametrisierung wird als bekannt vorausgesetzt. Allgemein ist eine solche nicht bekannt.

**Theorem 6.14 Lagrange-Multiplikatoren**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar & setze  $\mathcal{M} := \{x \in \Omega : f(x) = 0\}$ . Sei  $a \in \mathcal{M}$  mit  $Df(a) \neq 0$ , & sei  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar so, dass  $h$  in  $a$  ein lokales Extremum unter  $f = 0$  besitzt: D.h.,  $\exists U \subset \Omega$  offen,  $a \in U : \forall x \in U \cap \mathcal{M} : \underbrace{h(x) \leq h(a)}_{\text{lok. Max}} \text{ bzw. } \underbrace{h(a) \leq h(x)}_{\text{lok. Min.}}$ . Dann

$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \boxed{Dh(a) = \lambda Df(a)}. \text{ Ein solches } \lambda \text{ hei\ss} \mathbf{Lagrange-multiplikator}.$

- Sagt nur, was in kritischen Punkten gelten muss!

**Proof Theorem 6.14 Lagrange-Multiplikatoren**

$\exists \partial_n f(a) \neq 0, n \geq 2$ .

$$a := (a_1, \dots, a_n), c := (a_1, \dots, a_{n-1}).$$

Nach impliziter Funktionen  $\exists V$  offene Umgebung von  $c, W$  offenen Umgebung von  $a_n : V \times W \subset \Omega$ ,

$g : V \rightarrow W$  stetig differenzierbar mit  $\text{Gr}(g) = \mathcal{M} \cap (V \times W)$ . Weiter:

$$\forall i \in \{1, \dots, n-1\} : \partial_i g(c) = -\frac{\partial_i f(a)}{\partial_n f(a)}. \quad (*)$$

Sei  $h^*(x) := h(x, g(x))$ . Nun:  $h^*$  hat Extremum (lokal) in  $c$ , also

$$\forall i \in \{1, \dots, n-1\} : 0 = \partial_i h^*(c) = ((Dh)(c, \underbrace{g(c)}_{=a_n})) \cdot \begin{pmatrix} e_i \\ \partial_i g(c) \end{pmatrix} = (\partial_i h)(a) + (\partial_n h)(a) (\partial_i g)(c).$$

**Setze:**

$$\lambda := \frac{\partial_n h(a)}{\partial_n f(a)},$$

$$(\partial_i h)(a) = -(\partial_n h)(a)(\partial_i g)(c) + (*)$$

$$(\partial_n h)(a) = \lambda(\partial_n f)(a) \quad \blacksquare$$

**Letztes Mal:** Lagrange-Multiplikatoren

- $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar,  $m := \{x \in U : f(x) = 0\}$ . Sei  $a \in m : Df(a) \neq 0$ . Weiter sei  $j := U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar, sodass  $h$  unter  $m$  ein lokales Extremum besitzt. Dann ex.  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit

$$Dh(a) = \lambda Df(a)$$

Finde diejenigen Punkte  $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ , die von  $a = (1, 1, 1)$  den kleinsten/größten Abstand haben. Setze:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \text{ und}$$

$$h(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2.$$

Auf  $\mathbb{S}^2$  ist  $Df(x, y, z) \neq 0$ . Angenommen  $(x, y, z)$  lok. Extremstelle. Dann:

$$Dh(x, y, z) = \lambda Df(x, y, z) \iff \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2(y-1) \\ 2(z-1) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

Also  $x-1 = \lambda x \implies x = \frac{1}{1-\lambda} = y = z$ . Andererseits gilt  $1 \stackrel{!}{=} x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{(1-\lambda)^2}$ . Also  $\lambda = 1 \pm \sqrt{3}$ . Also sind  $P_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$  und  $P_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$  Kandidat\*innen für lok. Extrema. Da  $\mathbb{S}$  kompakt, ex. Max./Min durch Einsetzen in  $h$  ergibt sich  $P_1$  also Min. und  $P_2$

**1-Nebenbedingung:**

$$D(f(x, y, z) + \lambda h(x, y, z))$$

**$n$ -Nebenbedingungen:**

$$D \left( f(x, y, z) + \sum_{j=1}^n \lambda_j h_j(x, y, z) \right) = 0$$

## 7 Einführung in Maß- & Integrationstheorie

- **Ziel:** Erweiterung der Integrationstheorie von 1-dim auf mehrdimensionale Fall. Teaser auf Ana III.

**Idee:**

- Ana I: Erkläre Integrale für Treppenfunktion, dann Grenzübergang via sup-Norm: Regelintegral, sehr restriktiv.
- Ana II: Erklärt Integral für einfache Funktionen, dann Grenzübergang auf Integrallevel.  
→ Ana III: “Grund” hierfür:
- Treppenfunktion:

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbb{1}_{I_i}$$

$I_i$  Intervalle, partitionieren  $[a, b]$

- Einfache Funktionen:

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbb{1}_{\Omega_i}$$

$\Omega_i$  “messbare” Mengen.

### 7.1 $\sigma$ -Algebren & Messbarkeit

#### Definition 7.1

Sei  $\Omega$  eine Menge,  $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  (Potenzmenge) heißt  **$\sigma$ -Algebra**, falls

- (i)  $\emptyset, \Omega \in \mathfrak{A}$
- (ii)  $A \in \mathfrak{A} \implies A^c \in \mathfrak{A}$
- (iii)  $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{A}$ .

$(\Omega, \mathfrak{A})$  heißt **Messraum**

- **Unterschied zur Topologie:** Eine Topologie auf  $\Omega$  ist ein System  $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  mit

- (i)  $\emptyset, \Omega \in \mathcal{T}$
- (ii)  $A, B \in \mathcal{T} \implies A \cap B \in \mathcal{T}$
- (iii)  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{T} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{T}$

Topologie kann keine Komplementbildung!

**Lemma 7.2**

Sei  $\Omega$  eine Menge &  $(A_i)_{i \in I}$  eine Familie von  $\sigma$ -Algebren. Dann ist  $\bigcap_{i \in I} A_i$  eine  $\sigma$ -Algebra.

**Proof Lemma 7.2**

Übungsaufgabe

Damit ist für  $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}$ , dann ist  $\sigma(\mathfrak{A}) := \bigcap \{ \mathfrak{B} : \mathfrak{B} \text{ } \sigma\text{-Algebra mit } \mathfrak{A} \subset \mathfrak{B} \}$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra, die  $\mathfrak{A}$  enthält.

**Definition 7.3**

Sei  $(\Omega, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Dann heißt  $\mathfrak{B}(\Omega) := \sigma(\mathcal{T})$ .

- $\mathfrak{B}(\Omega) \hat{=}$  kleinsten  $\sigma$ -Algebra, die alle offenen Mengen enthält.
- Auf  $\mathbb{R}^n$  bilden die bezüglich der euklidischen Norm offenen Mengen eine Topologie. Damit ist  $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$  eine kanonische  $\sigma$ -Algebra auf  $\mathbb{R}^n$ .

**Definition 7.4**

Seien  $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1), (\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$  zwei Messräume.  $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  heißt  $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$  messbar, falls

$$\forall A \in \mathfrak{A}_2 : f^{-1}(A) \in \mathfrak{A}_1.$$

- Oft nützlich: Funktionen mit Werten in  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ . Dann  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, (\Omega, \Sigma)$  Messraum,  $\Sigma$ -messbar,  $f^{-1}((t, \infty]) \in \Sigma, \forall t \in \mathbb{R}$

**Example 7.5 Einfache Funktion**

Sei  $(\Omega, \Sigma)$  ein Messraum &  $A_1, \dots, A_N \in \Sigma, \alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}$ . Dann heißt

$$x \mapsto f(x) := \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$$

**einfache Funktion**

**Definition 7.6**

Sei  $(\Omega, \mathfrak{A})$  ein Messraum. Wir nennen  $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow [0, \infty]$  ein **Maß**, falls

- $\mu(\emptyset) = 0$ ,
- Sind  $A_1, A_2, \dots, \in \mathfrak{A}$  paarweise disjunkt, so

$$\mu \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

- $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2)$
- $\mu$  heißt **Wahrscheinlichkeitsmaß**, falls  $\mu(\Omega) = 1$  Falls  $\mu(\Omega) < \infty$ , so heißt  $\mu$  **endliches Maß**

Zur "Volumenmessung" in  $\mathbb{R}^n$ :

**Theorem 7.7**

Es gibt genau ein Maß  $\mathcal{L}^n$  auf  $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$  ( $\hat{=}$  Borelsche  $\sigma$ -Algebra), das für alle  $a_1 < b_1, \dots, a_n < b_n$  gilt:

$$\mathcal{L}^n((a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

**7.2 Das Lebesgueintegral**

- Hervorragende Eigenschaften bezüglich Vertauschen von Grenzprozessen.
- **Recap:** (Regelintegral)  
Für Treppenfunktion  $f = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbb{1}_{I_i}$

$$\int_0^1 f \, dx = \sum_{i=1}^N \alpha_i |I_i|$$

Regelfunktion  $\hat{=}$  es gibt eine Folge von Treppenfunktionen, die gegen die Funktionen bezüglich der **Supremumsnorm** konvergiert. ( $\|f\|_{\infty;[0,1]} := \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$ )

Da die Sup-Norm die absolute “Größe” von Funktionen kontrolliert, ist dieser Integralbegriff **zu restriktiv**

**Lebesgues Ansatz**

Sei  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  ein Maßraum (Menge,  $\sigma$ -Algebra, Maß).

(L1) Ist

$$f = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$$

einfach, so sei

$$\int_{\Omega} f \, d\mu := \sum_{i=1}^N \alpha_i \mu(A_i) \quad (A_i \in \mathfrak{A})$$

Hierbei  $\alpha_1, \dots, \alpha_N \geq 0$ .

(L2) Ist  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$  messbar (also  $\Sigma$ - $\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ -messbar), so existiert eine Folge  $(f_i)$  von einfachen Funktionen mit  $f_i \nearrow f$ .

(L3) Für  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  messbar sei nun

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_i \, d\mu,$$

wobei  $(f_i)$  eine Folge von einfachen Funktionen mit  $f_i \nearrow f$  ist (existent nach (L2)). Diese Def. von  $\int_{\Omega} f \, d\mu$  hängt **nicht** von  $(f_i)$  ab.  $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$

**Lebesgue:**  $\mathcal{L}(\mathbb{Q}) = 0$ .

**Grund:**  $x \in \mathbb{R}$ , so  $\mathcal{L}^1(\{x\}) = 0$ . Sind  $U, V$  messbar, so  $\mathcal{L}^1(U) \leq \mathcal{L}^1(V)$ . Für  $\varepsilon > 0$  ist  $\mathcal{L}^1((x - \varepsilon, x + \varepsilon)) = 2\varepsilon \implies \mathcal{L}^1(\{x\}) \leq \mathcal{L}^1((x - \varepsilon, x + \varepsilon)) = 2\varepsilon \searrow 0$ . Damit nach  $\sigma$ -Add.

$$\left( \mu \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i), \text{ falls die } A_i \text{'s messbar + pw. disjunkt} \right) :$$

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{x_i\} \implies \mathcal{L}^1(\mathbb{Q}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^1(\{x_i\}) = 0.$$

Damit

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} d\mathcal{L}^1 = 0, \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} d\mathcal{L}^1 = +\infty$$

(L4) **Letztlich:**

Ist  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar, so setze  $f^+ := \max\{f, 0\}$ ,  $f^- := \max\{-f, 0\}$  (womit  $f = f^+ - f^-$ ). Wir definieren, falls entweder

$$\int_{\Omega} f^+ d\mu, \int_{\Omega} f^- d\mu, \quad \int_{\Omega} f d\mu := \int_{\Omega} f^+ d\mu - \int_{\Omega} f^- d\mu.$$

Messbare Funktionen.  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  mit  $\int_{\Omega} f^+ d\mu < \infty$  oder  $\int_{\Omega} f^- d\mu < \infty$  heißen **quasiintegrabel**. Ist  $\int_{\Omega} |f| d\mu < \infty$ , so heißt  $f$  **integrabel**.

### 7.3 Fundamente der Lebesgueintegral

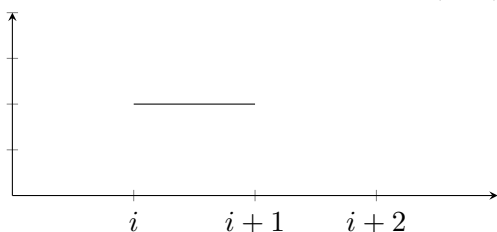
- Vertauschen von Grenzprozessen. Für das **Regelintegral**:  $[a, b], f_i \rightarrow f$  gleichmäßig  $\implies \int_a^b f_i(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$

#### Theorem Dominierte Konvergenz, Lebesgue

Sei  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  Maßraum, sowie  $f, f_1, f_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  integrabel und  $f_i \rightarrow f$  **punktweise**. Weiter gebe es ein integrables  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\forall i \in \mathbb{N} : |f_i| \leq |F|$ . Dann gilt

$$\int_{\Omega} \underbrace{f}_{=\lim_{i \rightarrow \infty} f_i} d\mu = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_i d\mu.$$

- $\Omega = \mathbb{R}, \Sigma = \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \mu = \mathcal{L}^1, f_i = \mathbb{1}_{(i, i+1)}, f = 0$ , dann  $f_i \rightarrow f$  punktweise.



$$\forall i \in \mathbb{N} : \int_{\Omega} f_i d\mu = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(i, i+1)} d\mathcal{L}^1 = 1. \quad \text{& } \int_{\Omega} f d\mu = 0. \quad (1 \nrightarrow 0)$$

Eine integrierbare Majorante  $F$  muss notwendigerweise für Große  $x$  einmal “unter”  $f_i$  liegen. Unmöglich.



- $\Omega = (0, 1), \Sigma = \mathfrak{B}((0, 1)), \mu = \mathcal{L}^1$ .  $f_i := i \mathbb{1}_{(0, \frac{1}{i})}$ .  $\forall i \in \mathbb{N} : \int_{\Omega} f_i \, d\mu = 1$ .  $f_i \rightarrow 0$  punktweise überall, und  $\int_{\Omega} f \, d\mu = 0$ . ( $1 \nrightarrow 0$ )

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}} f \, d\mathcal{L}^1}_{\text{“Masse”}} = 0 \neq \lim_{i \rightarrow \infty} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f_i \, d\mathcal{L}^1}_{\text{“Masse”}} \quad \text{Masse geht verloren}$$

- Kann hierbei auch im Limes dazukommen? **Nein**, wegen **Lemma von Fatou**.

### Theorem 7.8 Monotone Konvergenz, Beppo Levi

Sei  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  Maßraum,  $f_1, f_2, f_3, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  messbar mit  $f_i \nearrow f$  für ein  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  messbar. So gilt

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_i \, d\mu.$$

$$[f_i \nearrow f : \forall i \in \mathbb{N} : \forall x \in \Omega : f_i(x) \leq f_{i+1}(x) \& \forall x \in \Omega : f(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x)]$$

- Keine integrierbare Majorante gefordert! Speziell darf  $\int_{\Omega} f \, d\mu = \infty$  passieren.
- Stattdessen bei **punktweiser Konvergenz**:

$$|f| \leq \lim_{i \rightarrow \infty} |f_i| \leq |F| \& F \text{ integrierbar,}$$

also auch  $f$  integrierbar, also  $\int_{\Omega} |f| \, d\mu < \infty$

### Corollary 7.9 Lemma von Fatou

Sei  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  ein Maßraum &  $f, f_1, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  messbar mit  $f = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i$  punktweise. Angenommen,  $\forall i \in \mathbb{N} : f_i \geq 0$ . Dann

$$\underbrace{\int_{\Omega} f \, d\mu}_{\int_{\Omega} \liminf_{i \rightarrow \infty} f_i \, d\mu} \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_i \, d\mu$$

### Proof Corollary 7.9

$$g_k := \inf_{l \geq k} f_l \nearrow \liminf_{i \rightarrow \infty} f_i.$$

Dann

$$\int_{\Omega} g_k \, d\mu \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \underbrace{\liminf_{i \rightarrow \infty} f_i}_f \, d\mu$$

$$\int_{\Omega} f \, d\mu \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \underbrace{\inf_{l \geq k} f_l}_{f_k} \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k \, d\mu. \quad \blacksquare$$

•

$$f_i = \mathbb{1}_{[i, i+1]} \geq 0, \quad \int_{\Omega} f \, d\mu = 0 < 1 = \liminf_{i \rightarrow \infty} \underbrace{\int_{\Omega} f_i \, d\mu}_1.$$

•

$$f_i = i \mathbb{1}_{(0, \frac{1}{i})}, \Omega = \mathbb{R}, \Sigma = \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \mu = \mathcal{L}^1.$$

$f_i \rightarrow 0$  punktweise

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = 0 < 1 = \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_i \, d\mu$$

### Note

Wir können **nicht** ohne Weiteres auf  $f_i \geq 0$  verzichten.  $f_i := -\frac{1}{i} \mathbb{1}_{(0, i)}$ , so  $f_i \rightarrow 0$  (gleichmäßig), also  $f \equiv 0$ .

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = 0 > -1 = \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_i \, d\mu.$$

(Hierbei  $\Omega = \mathbb{R}, \Sigma = \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \mu = \mathcal{L}^1$ )

Ausweg: Man nimmt an, dass  $\exists H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  integrierbar mit  $\forall i \in \mathbb{N} : f_i \geq -H$ . Denn dann  $0 \leq H + f_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} H + f$  punktweise, also nach

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} H + f \, d\mu &\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} H + f_i \, d\mu. \\ \underbrace{\int_{\Omega} H \, d\mu}_{\in \mathbb{R}} + \int_{\Omega} f \, d\mu &\leq \underbrace{\int_{\Omega} H \, d\mu}_{\in \mathbb{R}} + \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_i \, d\mu. \\ \iff \int_{\Omega} f \, d\mu &\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_i \, d\mu. \end{aligned}$$

- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ; Lebesguemaß auf  $\mathbb{R}^2$ : Eindeutig bestimmtes Maß auf  $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) : \mathcal{L}^2((a, b) \times (c, d)) = (d - c) \cdot (b - a)$ . ( $\forall a, b, c, d$ )

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \, d\mathcal{L}^2(x, y) \stackrel{?}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \, d\mathcal{L}^1(x) \, d\mathcal{L}^1(y).$$

[Guido Fubini]

- Ein Maßraum heißt  **$\sigma$ -endlich**, falls

$$\exists V_1, V_2, \dots \in \Sigma : V_1 \subset V_2 \subset \dots, \Omega = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} V_k \text{ \& } \forall k \in \mathbb{N} : \mu(V_k) < \infty.$$

Dies ist z.B. erfüllt für alle endlichen Maße, aber auch:  $\mathbb{R}^k$  mit  $\Sigma = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n), \mu = \mathcal{L}^n$ .

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [-k, k]^n \text{ \& } \forall k \in \mathbb{N} : \mathcal{L}^n([-k, k]^n) = (2k)^n < \infty.$$

- Für zwei Maßräume  $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1), (\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$  sei  $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$  die von allen Mengen der Form  $A \times B, A \in \Sigma_1, B \in \Sigma_2$  erzeugt  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega_1 \times \Omega_2$ . Wir nennen  $\mu : \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \rightarrow [0, \infty]$  ein Produktmaß bezüglich  $\mu_1 \& \mu_2$ , falls

$$\forall A \in \Sigma_1 : \forall B \in \Sigma_2 : \mu(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B)$$

Sind  $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1), (\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$   $\sigma$ -endlich, so ist ein Produktmaß eindeutig durch  $\mu_1, \mu_2$  festgelegt.

### Theorem 7.10 Fubini

Seien  $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1), (\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$  zwei  $\sigma$ -endliche Maßräume & sei  $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$   $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ -messbar & auf  $\Omega_1 \times \Omega_2$  integrierbar,

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} |f| \, d\mu < \infty,$$

wobei  $\mu := \mu_1 \otimes \mu_2$  **das** Produktmaß von  $\mu_1, \mu_2$  ist. Dann ist für  $\mu_1$ -fast alle  $x \in \Omega_1$  die Funktion  $\Omega_2 \ni y \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$   $\Sigma_2$ -messbar, für  $\mu_2$ -fast alle  $y \in \Omega_2$  die Funktion  $\Omega_1 \ni x \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$   $\Sigma_1$ -messbar, und es gilt:

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y) \, d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x, y) = \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f(x, y) \, d\mu_2(y) \, d\mu_1(x) = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} f(x, y) \, d\mu_1(x) \, d\mu_2(y).$$

### Theorem 7.11 Transformationssatz ( $\hat{=}$ Substitutionsregel aus Ana. I)

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\Phi : \Omega \rightarrow \Phi(\Omega)$  ein  $C^1$ -**Diffeomorphismus** ( $\Phi : \Omega \rightarrow \Phi(\Omega)$  ist  $C^1$ ,  $\Phi$  ist bijektiv &  $\Phi^{-1} : \Phi(\Omega) \rightarrow \Omega$  ist  $C^1$ ). Dann ist eine Funktion  $f : \Phi(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  bezüglich  $\mathcal{L}^n$  integrierbar genau dann, wenn  $\Omega \ni x \mapsto f(\Phi(x)) |\det D\Phi(x)|$  integrierbar bezüglich  $\mathcal{L}^1$  ist. In diesem Fall gilt:

$$\int_{\Phi(\Omega)} f \, d\mathcal{L}^n = \int_{\Omega} f(\Phi) |\det D\Phi| \, d\mathcal{L}^n$$

### Example 7.12

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx = \sqrt{2\pi}.$$

•

$$\begin{aligned} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \right)^2 &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, d\mathcal{L}^1(x) \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}} \, d\mathcal{L}^1(y) \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \, d\mathcal{L}^1(x) \, d\mathcal{L}^1(y) \\ &\stackrel{z=(x,y)}{=} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{|z|^2}{2}} \, d\mathcal{L}^2(z) \end{aligned}$$