2024-05-16
Summer Semester 2024
Gruppe 3, Jonathan Weihing

University of Konstanz
Faculty of Science
(Mathematics and Statistics)

Übungsblatt 5

Elias Gestrich

Aufgabe 1: Bogenlänge

$$f' : [a, b] \to \mathbb{R}^3 = (-r \sin t, r \cos t, c).$$

Also $|f'(t)| = \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2 + c^2} = \sqrt{r^2 \cdot (\sin^2(t) + \cos^2(t)) + c^2} = \sqrt{r^2 + c^2}$.
Also

$$L = \int_a^b \left|f'(t)\right| \, \mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{r^2 + c^2} \, \mathrm{d}t = \sqrt{r^2 + c^2}(b - a)$$

Aufgabe 2: Logarithmische Spirale

(a)

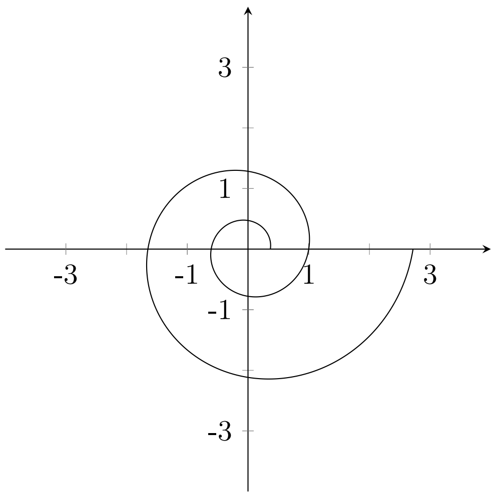

Figure 1: Logarithmische Spirale

(b)

$$\begin{aligned}
L_{[a,b]} &= \int_a^b |f'(t)| \, \mathrm{d}t \\
L_{[a,b]} &= \int_a^b |(c\exp(ct)\cos t - \exp(ct)\sin t, c\exp(ct)\sin t + \exp(ct)\cos t| \, \mathrm{d}t \\
L_{[a,b]} &= \int_a^b |(\exp(ct)\cdot(c\cos t - \sin t), \exp(ct)\cdot(c\sin t + \cos t)| \, \mathrm{d}t \\
L_{[a,b]} &= \int_a^b \sqrt{\exp(2ct)\cdot(c\cos t - \sin t)^2 + \exp(2ct)\cdot(c\sin t + \cos t)^2} \, \mathrm{d}t \\
L_{[a,b]} &= \int_a^b \exp(ct)\sqrt{c^2\cos^2 t - 2c\cos(t)\sin(t) + \sin^2 t + c^2\sin^2 t + 2c\sin(t)\cos(t) + \cos^2 t} \, \mathrm{d}t \\
L_{[a,b]} &= \int_a^b \exp(ct)\sqrt{c^2\cos^2 t + \sin^2 t + c^2\sin^2 t + \cos^2 t} \, \mathrm{d}t \\
L_{[a,b]} &= \int_a^b \exp(ct)\sqrt{c^2+1} \, \mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{\sqrt{c^2+1}}{c}\exp ct\right]_a^b \\
&= \frac{\sqrt{c^2+1}}{c}(\exp(cb) - \exp(ca)) \\
&= \sqrt{1+\frac{1}{c^2}}(\exp(cb) - \exp(ca))
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to-\infty} L_{a,0} &\overset{(b)}{=} \lim_{a\to-\infty} \sqrt{1+\frac{1}{c^2}}(\underbrace{\exp(0)}_{=1} - \underbrace{\exp(ca)}_{\overset{a\to-\infty}{\to} 0}) \\
&= \sqrt{1+\frac{1}{c^2}}(1-0) \\
&= \sqrt{1+\frac{1}{c^2}}
\end{aligned}$$

(d) Sei

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, g(t) = (r\cos t, r\sin t),$$

Da für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, $|g(t)| = r$, müssen wir nur eine Lösung für $|f(t_0)| = r$ finden, dann existiert genau ein Punkt auf den Kreis, der auf dem selben Punkt liegt.
$|f(t_0)| = \sqrt{\exp(2ct)\cos^2(t) + \exp(2ct)\sin^2(t)}\exp(ct_0) \overset{!}{=} r \implies t_0 = \frac{\log r}{c}$

$$f(t_0) = r\cos\left(\frac{\log r}{c}\right), r\sin\left(\frac{\log r}{c}\right) = g\left(\frac{\log r}{c}\right)$$

Sei also $t_1 := \frac{\log r}{c} = t_0$, sodass $f(t_0) = g(t_1)$

$$f'(t) \overset{(b)}{=} (\exp(ct)\cdot(c\cos t - \sin t), \exp(ct)\cdot(c\sin t + \cos t)) = \exp ct(c\cos t - \sin t, c\sin t + \cos t)$$

$$\implies f'(t_0) = r(c\cos t_0 - \sin t_0, c\sin t_0 - \cos t_0)$$

$$\left|f'(t)\right| \overset{(b)}{=} \sqrt{c^2+1}\exp(ct) \implies \left|f'(t_0)\right| = r\sqrt{c^2+1}$$

$$g'(t) = (-r\sin t, r\cos t)$$

$$\left|g'(t)\right| = r$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= \arccos \frac{\langle \exp(ct_0)(c\cos t_0 - \sin t_0, c\sin t_0 + \cos t_0), (-r\sin t_1, r\cos t_1)\rangle}{\sqrt{c^2+1}r\cdot r} \\
&= \arccos r\frac{-cr\cos(t_0)\sin(t_0) + r\sin^2(t_0) + cr\sin(t_0)\cos(t_0) + r\cos^2(t_0)}{r^2\sqrt{c^2+1}} \\
&= \arccos r\frac{r\sin^2(t_0)) + r\cos^2(t_0)}{r^2\sqrt{c^2+1}} \\
&= \arccos r\frac{r}{r^2\sqrt{c^2+1}} \\
&= \arccos \frac{1}{\sqrt{c^2+1}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Vollst. elliptisches Integral 2. Gattung

(a) Substitution mit $\varphi(t) = \sin(t)$, sodass $\varphi' = \cos$ und $\varphi^{-1}(a) = \arcsin(a) < \frac{\pi}{2}$ für $a < 1$

$$\begin{aligned}
\lim_{a\nearrow 1}\int_0^a \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\ \mathrm{d}t &= \lim_{a\nearrow 1}\int_0^{\phi^{-1}(a)} \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2(t)}}{\sqrt{1+\sin^2(t)}}\cos(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \lim_{a\nearrow 1}\int_0^{\varphi^{-1}(a)} \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2(t)}}{\sqrt{\cos^2(t)}}\cos(t)\ \mathrm{d}t \\
&\qquad \text{da } \cos(t) > 0 \text{ für } 0 \le t < \frac{\pi}{2} \\
&= \lim_{a\nearrow 1}\int_0^{\arcsin(a)} \sqrt{1-k^2\sin^2(t)}\ \mathrm{d}t \\
&\le \lim_{a\nearrow 1}\int_0^{\arcsin(a)} 1\ \mathrm{d}t \\
&\le \lim_{a\nearrow 1}[t]_0^{\arcsin(a)} \\
&\le \lim_{a\nearrow 1}\arcsin(a) \\
&\le \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Also existiert

$$E(k) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2(t)}\ \mathrm{d}t$$

(b) Ich weiß nicht wie ich das Argumentieren soll, aber ich bin davon ausgegangen, dass

$$\int_{a\cdot\frac{\pi}{2}}^{(a+1)\cdot\frac{\pi}{2}} f(\sin^2(x))\ \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2(x))\ \mathrm{d}x$$

Sodass

$$\int_{a\cdot\frac{\pi}{2}}^{(a+4)\cdot\frac{\pi}{2}} f(\sin^2(x))\ \mathrm{d}x = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2(x))\ \mathrm{d}x \tag{1}$$

Für $a^2 \leq b^2$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \left|\sqrt{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)}\right|\ \mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi} \left|\sqrt{a^2\sin^2(t) + (b^2 - b^2\sin^2(t))}\right|\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2 - (b^2 - a^2)\sin^2(t)}\ \mathrm{d}t \\
&= b\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \frac{b^2 - a^2}{b^2}\sin^2(t)}\ \mathrm{d}t \\
&\overset{(1)}{=} 4b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{b^2 - a^2}{b^2}\sin^2(t)}\ \mathrm{d}t \\
&= 4bE\left(\frac{b^2 - a^2}{b^2}\right)\ \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Für $a^2 > b^2$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \left|\sqrt{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)}\right|\ \mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi} \left|\sqrt{a^2 - a^2\cos^2(t) + b^2\cos^2(t)}\right|\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \left|\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2(t)}\right|\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \left|\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\sin^2\left(t - \frac{\pi}{2}\right)}\right|\ \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left|\sqrt{(a^2 - (a^2 - b^2)\sin^2(t)}\right|\ \mathrm{d}t \\
&= a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left|\sqrt{(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\sin^2(t)}\right|\ \mathrm{d}t \\
&\overset{(1)}{=} 4b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\sin^2(t)}\ \mathrm{d}t \\
&= 4bE\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)
\end{aligned}$$

Aufgabe 4: Nochmal Kompaktheit

Vor.: X kompakt folgt $\forall (U_i)_{i\in I}$ Familien offener Mengen mit $X \subset \bigcup_{i\in I}$ impliziert es gibt eine endliche Indexmenge I_0 mit $X \subset \bigcup_{i\in I_0} U_i$.

Beh.: X kompakt $\iff$ für jedes zentrierte System $\{A_i\}_{i\in I} : \bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$

Bew.:

$\Longrightarrow$**:** Sei X eine kompakte Menge und $\{A_i\}_{i\in I}$ ein zentriertes System so, dass für alle endlichen Indexmengen $I_0 \subset I$ gilt, $\bigcap_{i\in I_0} A_i \neq \emptyset$, zu zeigen $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$.
Zum Widerspruch nehmen wir an, dass $\bigcap_{i\in I} A_i = \emptyset$.
Sei $(U_i)_{i\in I}$ definiert durch $U_i := X \setminus A_i$. Da A_i abgeschlossen, muss U_i offen sein. Es gilt

$$X = X \setminus \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} X \setminus A_i = \bigcup_{i\in I} U_i$$

Da

$$\begin{aligned} X \setminus \bigcap_{i\in I} A_i &= \{x \in X : \neg (\forall i \in I : x \in A_i)\} \\ &= \{x \in X : \exists i \in I : x \notin A_i\} \\ &= \{x \in X : \exists i \in I : x \in U_i\} \\ &= \bigcup_{i\in I} U_i \end{aligned}$$

Also (U_i) Familie offener Mengen die X überdecken. Da X kompakt existiert ein I_0 so, dass $X \subset \bigcup_{i\in I_0} U_i$. Für dieses I_0 gilt: $\bigcap_{i\in I_0} A_i = X \setminus \bigcup_{i\in I_0} U_i = \emptyset$. Also $\{A_i\}_{i\in I}$ kein zentriertes System - Widerspruch

$\Longleftarrow$**:** Gelte für alle Zentrierten Systeme $\{A_i\}_{i\in I}$, dass $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Zu zeigen X kompakt, bzw. jede offene Überdeckung (U_i) hat eine endliche Teilüberdeckung $X \subset U_i$.
Sei (U_i) eine offene Überdeckung von X, so dass U_i^C abgeschlossen, da U_i offen. Zu zeigen es gibt eine endliche Teilüberdeckung. Zum Widerspruch, es existiert keine solche Teilüberdeckung, also $X \not\subset \bigcup_{i\in I_0} U_i$, also $\exists x \in X : x \notin \bigcup_{i\in I_0} U_i$, bzw $\forall i \in I_0 : x \notin U_i$, also $\forall i \in I_0 : x \in U_i^C$. Für alle endlichen Indexmengen I_0. Daraus folgt aus Vor. (für alle zentrierten Systeme gilt $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$), dass $\bigcap_{i\in I} U_i^C \neq \emptyset$, also gibt es ein $x \in \bigcap_{i\in I} U_i^C$ für das gilt, $\forall i \in I : x \in U_i^C$, also $\forall i \in I : x \notin U_i$, also U_i keine offene Überdeckung - Widerspruch.