2024-02-09
Winter Semester 2023/2024

University of Konstanz
Faculty of Science (Mathematics and Statistics)

Analysis I

Contents

Organisation, Tipps & Tricks und Literaturhinweise

Mathe...

- ist intellektuell extrem herausfordernd
- kommt mit einem hohen Arbeitsaufwandr
- oft falschen Erwartungen und
- ist wie Ausdauersport

aber dafür ist Mathe eines der schönsten Studien c:

Generelles Zeitmanagement:

- Vor- und Nachbereitung wahrscheinlich mehr als die gesetzten $14 \times 3\,\mathrm{h} = 4.2 \cdot 10^1\,\mathrm{h}$
- Klausurvorbereitung auch mehr als $3.9 \cdot 10^1\,\mathrm{h}$
- Pro Woche $2 \times 1.5\,\mathrm{h}$, $2 \times 2\,\mathrm{h}$, $1.5\,\mathrm{h}$, $1.0 \cdot 10^1\,\mathrm{h}$
- Es gibt immer eine Aufgabe die man nicht lösen kann
- In die Vorlesungen kommen

Vorlesung:

- normal nicht alles zu verstehen
- Notizen was man nicht versteht
- Punkte konzise angehen
- **Mathe muss sich gedanklich setzen** - genügend Zeit zu verarbeiten

Übungen:

- zeitintensiv
- Ergebnisse vernünftig aufschreiben
- Weg zu einer korrekter Lösung ist sehr langwierig
- **nicht 10 Blätter Papier ab, von denen 9.5 inkonklusiv sind**
- also schön Aufschreiben

Wenn wir einen Satz gezeigt bekommen, dann bekommen wir nicht die gescheiterten Jahrelangen Versuche zur Schau, sondern nur die Ausgearbeitete Lösung $\to$ also bei uns auch langer weg, aber Aufschreiben nur klein

Übungszettel:

- 50% muss richtig sein
- bis Freitag 10:00 Uhr
- in F4
- diese Woche nicht so umfangreich, weil weniger Zeit
- auf ILIAS Terminfindung Abstimmung
- Donnerstag Einteilung in Tutorien
- Blätter tackern :c
- alle zwei Wochen Beweismechanik Aufgaben, nur digital nicht in Papier (ist dann die letzte Aufgabe)

Literaturempfehlung:

- Otto Forster: Analysis 1
  - kurz und knapp - aber konzise, udn das hilft
  - ähnliche Struktur wie Vorlesung
  - weig motivation und wenige Querverbindungen
- Königsberger: Analysis 1
  - kurz - aber konzise
  - alle themen der Vorlesung, andere Struktur
  - mehr motivation und Querverbindungen
- Klaus Fritsche: Grundkurs Analysis 1
  - ausführlich
- Daniel Grieser: Analysis I
  - Ausfühlich, aber mit Fokus auf das Wesentliche
  - alle Themen der Volesung enthalten, ähnliche Struktur
  - bunt??
- Harro Huser: Lehrbuch der Analysis Teil 1

  - extrem ausführlich,dick, an einigen stellen sehr extensiv
  - alle und mehr Themen als Vorlesung
  - Querverbindungen
- Walter Rudin: Analysis
  - sehr knapp und elegant
  - klassiker
  - alle themen der Volesung, leicht andere Struktur
  - empfehlenswertes Buch fortgeschrittene Leser*innen
  - nicht für Anfänger*innen
- Herber amann, Joachim Escher: Analysis I
  - strkt logischer Aufbau, damit teils länglich. Großes Bild
  - alle Themen, andere Struktur
  - auch nicht für anfänger*innen
- Terence Tao: Analysis (englisch, aber gut)
- Rober Denk, Reinhard Racke: Kompendium der ANalysis
  - kurz und knapp, teils wie Nachschlagewerk
  - alle themen
- Florian Modler, Martin Kreh: Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1
  - kurz und knapp, teils wie nachschalgewerk
  - von studierende für studierende
  - aber enthält ein paar Fehler

Part I.
Irgendwas

1 Natürliche Zahlen und elemntare Begriffe

1.1 Zahlbereiche

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$$
$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$
$$\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$
$$\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$$
$$\mathbb{R} := \{ \text{ reelle Zahlen } \}$$

Wir besprechen gar nicht was eine Menge ist, das ist zu philosophisch
Es ist schwierig Mengen zu Definieren, man kommt schnell auf logische Wiedersprüche

- Notation: für x schreiben wir für eine Eigenschaft A "$A(x)$", falls x A erfüllt.

→ Menge aller Objekte x mit $A(x)$

$$\{x : A(x)\}$$

→ gibt es kein x mit $A(x)$, so nennen wir die Menge leer, "$\emptyset$"

- $\exists \hat{=}$ Existenzquantor, "es existiert"
- A, B, Eig., $M := \{x : x \text{ erf. } A\}$
  $N := \{x : \text{ erf. } B\}$
  $M \subset N$, falls $\forall x \in M : x \in N$
- $M = N$, falls $M \subset N \vee N \subset M$
- "Echte Tielmenge": $M \subsetneqq N$, falls $M \subset N, N \neq N$.

Example 1.1.1 (gerade Zahlen)

$n \in \mathbb{N}_0$ gerade $:\iff (\exists k \in \mathbb{N}_0 : n = 2k)$

$$M := \{n \in \mathbb{N}_0 : \exists k \in \mathbb{N}_0 : n = 2k\} \quad (1)$$
$$= \{2k : k \in \mathbb{N}_0 \quad (2)$$

Example 1.1 $\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{N}_0 \subsetneqq \mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R}$

Zu $\mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R}$: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Widerspruchsbeweis: Ang., $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, so $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, mit $p \in \mathbb{N}_0, q \in \mathbb{N}$. Œ$p, q$ teilerfremd (d.h. Bruch ist vollständig gekürzt).. Also $p^2 = 2q^2$
$\implies$ p ist gerade. Also $p = 2l$ mit $l \in N_0$.
$\implies 4l^2 = p^2 = 2q^2 \implies 2l^2 = q^2 \implies q$ gerade.
$\implies p, q$ gerade. $\implies p, q$ nicht teilerfremd. ■

1.2 Vollständige Induktion

- Ziel: Beweis von Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}_0$

Dominoprinzip: Wenn alle Steine umfallen sollen,

- müssen wir den 1. Stein umwerfen,
- muss stehts der n-te Stein den $(n+1)$-ten umwerfen.

Prinzip (vollst. Ind.) Wollen wir eine Aussage $A(n) \forall n \in \mathbb{N}$ zeigen; so zeigen wir

(i) $A(1)$ gilt (Induktionsanfang)

(ii) Aus $A(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ stets $A(n+1)$ folgt. (Induktionsschritt)

Definition 1.2 Summen

Für $x\_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\sum_{k=1}^{n} x_k := x_1 + \ldots + x_n$$

Example 1.3 Geometrische Summe

$$\forall n \in \mathbb{N}:$$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} x^k}_{x^0+x^1+\ldots+x^n} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \tag{3}$$

I.A. $n = 1$

$$\sum_{k=0}^{1} x^k = x^0 + x^1 = 1 + x = \frac{(1-x)(1+x)}{1-x} = \frac{1-x^2}{1-x}$$

I.S.

$$n \to n+1$$

Angenommen, (equation) gilt für ein $n \in \mathbb{N}$. z.z. (equation) gilt für $n+1$

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1}$$

...

Example 1.4 Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $n^2 < 2^n$?

- $n = 1 \to 1 < 2$
  $n = 2 \to n^2 = 4 \not< 4 = 2^2$
  $n = 3 \to n^2 = 9 \not<< 2^3$
  $n = 4 \to n^2 = 16 \not< 16 = 2^4$
  $n = 5 \to n^2 25 < 32 = 2^5$

Wir versuchen die Aussage $\forall n \geq 5$ zu zeigen.

I.A.: $n = 5 : n^2 = 25 < 32 = 2^5$

I.S.: Ang., Aussage gilt für $n \geq 5$. Wir müssen zeigen:

$$(n+1)^2 < 2^{n+1}$$

$$(n+1)^2 = \underbrace{n^2}_{<2^n} + 2n + 1 < 2^n + 2n + 1 \,|\overset{?}{<} 2^{n+1} \text{ Angenommen, es gilt}$$

$$\forall n \geq 5 : 2n + 1 < 2^n \tag{4}$$

Dann: $(n+1)^2 < ... < 2^n + 2n + 1 = 2 * 2^n = 2^{n+1}$

- Wir zeigen (4) wiederum mit voll. Ind.

  I.A.: $n = 5 2n + 1 = 11 < 32 = 2^5$

  I.S.: Ang., (4) gilt für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $2(n+1) + 1 = 2n + 3 = (2n+1) + 2 < 2^n + 2 < 2^n + 2^n = 2 * 2^n = 2^{n+1}$.
  Damit folgt (4 und damit die eigentliche Aussage ■

Definition 1.5

für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die *Fakultät* via $n! := n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$, falls $n \geq 1$, und $0! := 1$. Für $k \in \{0, \ldots, n\}$ definieren wir den *Binomialkoeffizienten*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Lemma 1.6

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

Proof

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k)!(n-k+1)} + \frac{n!(k)}{(k-1)!(n-(k-1)k)!(k)}$$
$$= \frac{n!n + n!}{k!(n-k+1!} = \frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!}$$ ■

Example 1.7 (Binomische Formel)

Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$:

$$(x+y)^n ? \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Sei also $x, y \in \mathbb{R}$.

I.A.: $n = 0$. $(x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 y^0$

I.S.: Gelte die Aussage für $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} (x+y)^{n-1} = (x+y)(x+y)^n &= (x+y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} && (5) \\ &= x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + y \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} && (6) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} && (7) \end{aligned}$$

Indexverschiebung: $l = k+1$. $l \in \{1, \ldots, n+1\}$

$$\begin{aligned} (7) &= \underbrace{\sum_{l=1}^{n} \binom{n}{l-i} x^l y^{n+1-l}}_{\text{Hier Indexverschiebung}} + \underbrace{\sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} x^l y^{n+1-l}}_{\text{Hier nennen wir einfach } k = l} \\ &= \binom{n}{n} x^{n+1} y^0 + \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{l-1} + \binom{n}{l} \right) x^l y^{n+1-l} \right) + \binom{n}{0} x^0 y^{n+1} \\ &= \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} y^0 + \left(\sum_{l=1}^{n} \binom{n+1}{l} x^l y^{(n+1)-l} \right) + \binom{n+1}{0} x^0 y^{n+1} \\ &= \sum_{l=0}^{n+1} \binom{n+1}{l} x^l y^{(n+1)-l} \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

1.2.1. Characterisierung der natürlichen Zahlen

Definition 1.2.1

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heißt induktiv, falls

(i) $1 \in M$

(ii) $\forall x \in M : x + 1 \in M$

Example 1.2.2

(a) $\mathbb{N}$ sind ind. Menge.

(b) $A := \{2n : n \in \mathbb{N}_0\}$ nicht ind. Menge, da (i) $1 \neq A$, (ii) $2n + 1$ ist immer ungerade

(c) $B := \{2n + 1 : n \in \mathbb{N}_0\}$ nicht ind.: (i), aber $2n + 1 + 1 = 2(n + 1)$

(d) $\mathbb{Q}^+ := \{x \in \mathbb{Q} : q > 0\}$ ist ind. Teilmenge

- Sei $(A_i)_{i \in I}$ mit I Indexmenge eine Familie von Mengen. setze

$$\bigcap_{i \in I} := \{x : (\forall i \in I : x \in A_i)\} \quad \text{Schnitt}$$

$$\bigcup_{i \in I} := \{x : (\exists i \in I : x \in A_i)\} \quad \text{Vereinigung}$$

Proposition 1.2.3

Für eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ sind äquivalent

(i) $M = \mathbb{N}$

(ii) Ist $N \subset \mathbb{R}$ induktiv, so $M \subset N$

(iii)

$$M = \bigcap_{N \subset \mathbb{R}} N \text{ induktiv}$$

$(i) \iff (ii) \iff (iii)$

Proof

'$(i) \implies (ii)$': Sei $N \subset \mathbb{R}$ beliebige ind. Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zu zeigen: $M \overset{(i)}{=} \mathbb{N} \subset N$ Aber $1 \in \mathbb{N}$, und $1 \in N$ (da N ind.), Da N ind. ist, ist mit jeder nat. $x \in \mathbb{N}$ also auch $x \in N$. Damit $x + 1 \in \mathbb{N}$ $\boxed{\mathbb{N} \subset N.}$

'$(ii) \implies (iii)$' Wir zeigen:

$$\bigcap_{N \text{ ind. Menge}} N$$

ist ind. Menge
$\overset{(ii)}{\implies} M \overset{(ii)}{\subset} N \subset M$. Also

$$M = \bigcap_{N \text{ ind.}} N.$$

$$\bigcap_{N \text{ ind}} N \text{ induktiv:}$$

(i)

$$(\forall N \text{ ind: } 1 \in N) \implies 1 \in \bigcap_{N \text{ ind.}} N$$

(ii)

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \in \bigcap_{N \text{ ind.}} N \left(\implies x \in \bigcap_{N \text{ ind.}} N \right) \overset{\text{DEF.}}{\implies} \forall N \text{ ind.} : x{+}1 \in N \implies x{+}1 \in \bigcap_{N \text{ ind.}}$$

'$(iii) \implies (i)$' Noch zu zeigen (blöd glaube ich oder ÜA, wir hatten auf jeden Fall keine Zeit in der Vorlesung) ■

2 Körper

2.1 Was sind Strukturen?

2.2 Körper

Definition 2.2.1 Körper

in script of Prof. and on paper

Example 2.2.2

in script of Prof. and on paper

Example 2.2.3

in script of Prof. and on paper

Lemma 2.2.4

in script of Prof. and on paper

Lemma 2.2.5

in script of Prof. and on paper

$$\underset{\text{abzählbar}}{\overset{\mathbb{Q}}{\uparrow}} \qquad \underset{\text{nicht abzählbar}}{\overset{\mathbb{R}}{\uparrow}} \qquad \text{Kontinuumshypothese}$$

Definition 2.1

In der Situation von definition 2.2.1 sei $n \in \mathbb{N}$, sowie $x_1, \ldots, x_n \in K$. Wir definieren rekursiv $x_1 + \cdots + x_n := (x_1 + \cdots + x_{n-1}) + x_n, x : \cdots \cdot x_n := (x_1 \cdots x_{n-1}) \cdot x_n$

Definition 2.2

In der Situation von Definition 2.2.1 sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in K$. Wir definieren

$$x^0 := 1_K \text{ und } x^n := (x^{n-1} \cdot x, n \in \mathbb{N}$$

Ist $x \in K \setminus \{0\}$, so sei für $n \in \mathbb{N} : x^{-n} := (x^{-1})^n$.

Lemma 2.3

Für alle $x, y \in K, \quad m, n \in \mathbb{N}_0$:

i) $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$,

ii) $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$,

iii) $x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$

Ist zudem $x, y \neq 0_K$, so gelten diese Identitäten auch für $n, m \in \mathbb{Z}$

Proof i

Fixiere $n \in \mathbb{N}_0$, nun Induktion nach m.

I.A. $m = 0$. $x^n \cdot x^0 \overset{\text{Def.}}{=} x^n \cdot 1_K \overset{(M2)}{=} 1_K \cdot x^n \overset{(M3)}{=} x^n = x^{n+0}$

I.S. Gelte die Aussage für ein $m \in \mathbb{N}_0$. Zeige für $m \curvearrowright m+1$

$$x^n \cdot x^{m+1} \overset{\text{Def.}}{=} x^n\,(x^m) \cdot x) \overset{(M1)}{=} (x^n \cdot x^m) \cdot x \overset{\text{IV}}{=} x^{n+m} \cdot x \overset{\text{Def.}}{=} x^{n+m+1}$$ ■

2.3 Angeordnete Körper

- Ziel Vergleich von Elementen hinsichtlich "Größe"

Definition 2.3.1

Eine **Relation** auf einer Menge M ist eine Teilmenge $R \subset M \times M$. Ist $(x, y) \in R$, so schreiben wir auch xRy oder $R(x, y)$ und sagen, dass x und y über R in Relation stehen.

Example 2.3.2

$M =$ Stidierende im Hörsaal,
$(x, y) \in M \times M : xRy :\iff x$ kennt den Namen von y

- R **reflexiv**? (d.h. $\forall x \in M : xRy$) Ja
- R **symmetrisch**? (d.h. $\forall x, y \in M : xRy \iff yRx$)) Nein
- R **transitiv**? (d.h. $\forall x, y, z \in M : xRy \wedge yRx \implies xRz$) **Nein**

Definition 2.3.3

Sei R eine Relation auf einem Kürper K. R heiß **Ordnung** auf K, falls gilt

(i) **Trichotomie:** $\forall x \in K$: Entweder $0_K Rx, xR0_K$ oder $x = 0_K$

(ii) **Abgeschlossenheit bezüglich Addition** $\forall x, y \in K : 0_K Rx, 0_K Ry \implies 0_K R(x + y)$

(iii) **Abgeschlossenheit bezüglich Multiplikation** $\forall x, y \in K : 0_K Rx, 0_K Ry \implies 0_K R(x \cdot y)$

Das Tupel (K, R) heißt **angeordneter Körper.** (**Schreibe** auch '<' für R).

Setze für $a, b \in K$**:**

$$\begin{aligned}
a < b &:\iff 0_K < (b - a) \\
a > b &:\iff b < a \\
a \leq b &:\iff a < b \vee a = b \\
b \geq a &:\iff a \leq b
\end{aligned}$$

Lemma 2.3.4

Sei $(K,<)$ angeordneter Körper, $a,b,c \in K$

(i) Entweder $a > b, a = b \vee a < b$.

(ii) $a < b \wedge b < c \implies a < c$

(iii) $(a > 0 \implies (-a) < 0) \wedge (a < 0 \implies (-a) > 0)$

(iv) Gilt $a < b$, so ist

$$\begin{aligned} ac < bc, &\qquad c > 0 \\ ac > bc, &\qquad c < 0 \\ a^2 > 0, &\qquad a \neq 0 \end{aligned}$$

$$a > 0 \implies a^{-1} > 0$$

$$a < 0 \implies a^{-1} < 0$$

$b^{-1} < a^{-1}$, falls $a > 0$
$a + c < b + c$.

(v) $a < b \implies (-a) > (-b)$

Proof (i)-(iii)

(i) Da $a < b \iff 0_K < b - a$, folgt das aus Trichotomie und Def. von '$>$'.

(ii) zu zeigen: ayc, d.h. $0_K < c - a$.

$$c - a = (c + 0_K) - a = \underbrace{(c-b)}_{>0} + \underbrace{(b-a)}_{>0} > 0, \text{ d.h. } a < c$$

(iii) $a > 0$. Angenommen, $(-a) > 0$. $\overset{\text{Abg. Add.)}}{\implies} 0_K = a + (-a) > 0_K \overset{\text{Trich.}}{\implies} E$ Ist $-a = 0$, so $a = 0$, nach Trich. Wid. zu $a > 0$. Falls $a < 0$, analog. ■

Corollary 2.3.5

Es gibt keine Ordnung '$<$' auf $\mathbb{F}_2$, die $\mathbb{F}_2$ zu einem angeordneten Körper macht

Proof

Angenommen, '$<$' sei Ordnung. Da $0_K \neq 1_K$, gilt entweder $0_K < 1_K$ oder $1_K < 0_K$ (nach Trich.). Falls $0_K < 1_K$. Dann $0_K = 1_K + 1_K$ damit $0_K = 1_K + 1_K > 0_K + 1 = 1_K$. Widerspruch für $1_K < 0_K$ argumentiere analog.

- PRINZIP: $\mathbb{R} \wedge \mathbb{Q}$ sind angeordnete Körper

2.4 Der Betrag

('Abstand zur Null')

Definition 2.4.1

Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir den Betrag $|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

Lemma 2.4.2

Der in Def 2.4.1 eingeführte Betrag erfüllt

(i) $forall x \in \mathbb{R}|x| \geq 0$

(ii) $|x| = 0 \iff x = 0$

(iii) Multiplikativität: $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

(iv) **Dreiecksungleichung:** $\forall x, <\in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y|$

(v) $\forall x \in \mathbb{R} : |-x| = |x|$

(vi) $\forall x, y \in \mathbb{R} : y \neq 0 \implies \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

2.5 Das Archimedische Axiom

PRINZIP-Arch. Axiom: $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0 \exists n \in \mathbb{N} : x < n$

$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \underset{x}{|} \; \underset{n}{\cdot}$

- Das muss gefordert werden

2.6 Supremum, Infimum und die Supremumseigenschaft

- **Ziel**: Entscheidende Eigenschaft von $\mathbb{R}$

Definition 2.6.1

Eine nichtleere Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ heißt

- **nach oben beschränkt**, falls $\exists c \in \mathbb{R} \forall x \in A : x \leq c$. Ein solches c “obere Schranke”
- **nach unten beschränkt**, falls $\exists c \in \mathbb{R} \forall x \in A : c \leq x$ “ untere Schranke”

Example 2.6.2

- $A = N_0$ durch 0 nach unten, nach oben unbegrenzt
- $A = \{1, 2, \ldots, 10\}$ durch 1 nach unten, und durch $10, 11, \ldots$ nach oben beschränkt

Definition 2.6.3

Sei $a \subset \mathbb{R}$ nichtleer

(i) Ist A nach oben beschränkt, so heißt $s (=: \sup A)$ **Supremum** von A, falls s obere Schranke ist *und* **kleinste obere Schranke** ist d.h. $\forall c \in \mathbb{R} : c$ obere Schranke von $A \implies s \leq c$. Ist $s \in A$ Supremum von A, so heißt s **Maximum** von A.

(ii) Ist A nach oben unbeschränkt, so sei $+\infty$ das Supremum von A.

(iii) Ist A nach unten beschränkt, so nennen wir $s' \in \mathbb{R}$ **Infimum** von A, falls s' untere Schranke und für jede andere untere Schranke $d \in \mathbb{R}$ von A: $d \leq s'$. Ist $s' \in A$ Infimum, so heißt s' **Minimum** von A.

(iv) Ist A nach unten unbeschränkt, so sei $-\infty$ das Infimum von A

Schreibweise: $\sup(A), \max(A), \inf(A), \min(A)$.

Example 2.6.4

Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit ayb sei $(a, b) := \{\mathbb{R} : a < x < b\}$
Dann: $\sup((a, b)) = b \wedge \inf((a, b)) = a$.

- Obere Schranke: $\forall x \in (a, b) : x <) \implies b$ obere Schranke.
- Ist d andere obere Schranke, so $b \leq d$. Klar: $d > a$, also angenommen $a < d < b$.
  Dann $x := \frac{d+b}{2} \in (a, b), x > d. \implies d$ keine obere Schranke ↯
  Weiter $b \notin (a, b)$, also b Supremum, kein Maximum

$\boxed{\text{Prinzip}}$ (Supremumseigenschaft)
Jede nach oben beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}$ hat ein Supremum in $\mathbb{R}$ **Informell**: $(1, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$ hat $\sup = \sqrt{2}$ (später). Aber $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, also gilt die Supremumseigenschaft für $\mathbb{Q}$ nicht.

$\mathbb{R}$ ist

- Körper
- angeordente Körper
- bewerteter Körper
- Archimedisch angeordnete Körper
- **Supremumseigenschaft**

3 Folgen und Konvergenz

3.1 Reele Folgen und Konvergenz

Folge $a : \mathbb{N} \ni n \mapsto a(n) \in \mathbb{R}$. Schreibweisen:

$$(\underbrace{a_n}_{(=a(n))})_{n\in\mathbb{N}}(\ n \text{ Laufindex}), (a_n)$$

Example 3.1.1

$$a_n := 2n \to \text{ Folge der geraden Zahlen}$$

$$a_n := 2n+1 \to \text{ Folge der ungeraden Zahlen}$$

Definition 3.1.2 Konvergenz

Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ ($(a_n) \subset \mathbb{R}$) und $a \in \mathbb{R}$. Wir sagen, dass (a_n) gegen a **konvergiert**, falls $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : | a_n - a | < \varepsilon}$
Wir nennen a dann den **Grenzwert** oder **Limes** von (a_n) und schreiben

$$\lim_{n\to\infty} a := a$$

Gibt es $a \in \mathbb{R}$ so, dass (a_n),'gegen a konvergiert, so nennen wir (a_n) **konvergent**, andernfalls **divergent**.

Lemma 3.1.3

Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ eine Folge, die gegen $a, b \in \mathbb{R}$ konvergiert. Dann $a = b$.

Proof

Sei $\varepsilon > 0$ bel.. Dann

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\implies \forall n \geq N : |a - b| = |(a - a_n) + (a_n - b)| \leq |a_n - a| + |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\overset{\forall \varepsilon}{\implies} a = b. \quad \blacksquare$$

Für jedes $\varepsilon > 0$: Ab irgendeinem N bleibt die Folge für immer im ε-Streifen um a.

Example 3.1.4

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Vermute: Limes $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Mit Archimedes $\exists N \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{\varepsilon} < N$. Dann $\forall n \geq N : \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$. $\blacksquare$

Example 3.1.5

$\forall a \in \mathbb{R} : (a_n) = (a)$ (konstante Folge) konvergent gegeben a

Example 3.1.6

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach 1.2.3 $\forall n \geq 5 : n^2 < 2^n$. Nach Arch. $\exists N \in \mathbb{N} : N \geq 5 \wedge \frac{1}{\varepsilon} < N$. $\implies \forall n \geq N : \left|\frac{n}{2^n} - 0\right| = \frac{n}{2^n} \overset{\text{Ugl}}{<} \frac{1}{n} \overset{n\geq N}{\leq} \frac{1}{N} < \varepsilon$ ∎

Example 3.1.7

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$
Beh.: $\neg\exists a \in \mathbb{R} : (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konv. gg a. Angenommen, es gäbe so ein $a \in \mathbb{R}$. Wähle $0 < \varepsilon < 1$.
Dann $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |(-1)^n - a| < \varepsilon$.
Dann: $2 = |1 - (-1)| \leq \underbrace{|(1-a)|} \leq |(-a)^n - a| + \underbrace{|a+1|}_{|a-(-1)^n|} < 2\varepsilon < 2$

Example 3.1.8

(a_n) reele Folge.

- $\exists \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$.
  Für $\varepsilon = 1$ efüllt die Folge aus example 3.1.7 dies!
  Nicht äquivalent zu Konvergenz!
- $\forall \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$
  Folge aus example 3.1.7 erülllt dies - nicht äquivalent!

3.2 Rechenregeln für Grenzwerte

Theorem 3.2.1

Seien $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ konv. gegen $a \in \mathbb{R}$ bzw. $b \in \mathbb{R}$. Dann

(i) $(a_n + b_n)$ konvergiert gegen $a + b \lim_{(n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty}$

(ii) $(a_n \cdot b_n)$ konvergiert gegen $a \cdot b$

(iii) Ist $b \neq 0$ so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N \implies b \neq 0$, und es gilt:

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq N} \text{ konv gg } \frac{a}{b}.$$

Proof

Sei $\varepsilon > 0$
Wg. Konv. $a_n \to a \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$
Wg. Konv. $b_n \to b \exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2 : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

$(a_n), (b_n), a_n \to a, b_n \to b \implies a_n + b_n \to a + b$

Definition 3.2.2

Wir sagen, dass $(a_n) \subset \mathbb{R}$ **beschränkt** ist, falls $\exists M > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq M$.

Lemma 3.2.3

Konvergente Folgen sind beschränkt.

Proof

Angenommen, (a_n) konvergiert gegen $a \ni \mathbb{R}$. Mit $\varepsilon = 1$ ex. $N \in \mathbb{N}$:

$$(\forall n \geq N : |a_n - a| < 1) \implies \forall n \geq N : ||a_n| - |a|| < 1 \implies |a_n| \leq 1 + |a|$$

Setze $M := \max\{|a_1|, \dots, |a_N|, 1 + |a|\}$, so $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq M$. ■

Zurück zum Beweis von Satz 3.2.1 (b) und (c):

Proof

(b) zu zeigen $a_n \to a \wedge b_n \to b \implies a_n b_n \to ab$

$$|a_n b_n - ab| = |(a_n b_n - ab_n) + (ab_n - ab)| \leq |b_n| \cdot |a_n - a| + |a||b_n - b| \tag{8}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Da (b_n) beschr., ex. nach Lemma 3.2.3 ein $M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : |b_n| \leq M$. Da $a_n \to a, b_n \to b$

(1) $\exists N_1 \in \mathbb{N} \forall n \geq N_1 : |a_n - a| \frac{\varepsilon}{2M}$

(2) $\exists N_2 \in \mathbb{N} \forall n \geq N_2 : |a_n - a| \frac{\varepsilon}{1+|a|}$

(8) $\implies \forall n \geq N := \max\{N_1, N_2\} : |a_n b_n - ab|$

$$\overset{(8)}{\leq} M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \underbrace{|a| \cdot \frac{\varepsilon}{2(1 + |a|)}}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Damit (b).

(c) $a_n \to a, b_n \to b \neq 0 \implies \frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$

(1) $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |b_n| \neq 0.$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \widetilde{N} \forall n \geq \widetilde{N} : |b_n - b| < \varepsilon,$$

d.h. $|b| - \varepsilon \leq |b_n|$
Wende Dies auf $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$ an.
Dann $\forall n \geq \widetilde{N} : 0 < \frac{|b|}{2} \leq |b_n|$. setze nun $n_0 := \widetilde{N}$

(2) $b_n \to b \neq 0$, so $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$.

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{b_n b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n| \cdot |b|} \tag{9}$$

Für $n\widetilde{N} : \frac{|b|}{2} < |b_n|$, also $\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}$, also $\frac{1}{|b_n||b|} \frac{2}{|b|^2}$
Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists \widetilde{\widetilde{N}} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \widetilde{\widetilde{N}} : |b_n - b| < \frac{\varepsilon |b|^2}{2} \cdot \frac{2}{|b|^2} = \varepsilon$

(3) $a_n \to a, b_n \to b \neq 0 \overset{(2)}{\implies} (a_n \to a, \frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}) \overset{(b)}{\implies} \frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$ ■

Example 3.2.4

$a, b, c, d \in \mathbb{R}, c \neq 0, d \neq 0.$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{an^2+b}{cn^2+d} = \lim_{n\to\infty} \frac{a+\frac{b}{n^2}}{c+\frac{d}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

- $\frac{A}{n} \to 0$, Thm. 3.2.1 (b) : $\frac{b}{n^2} \to 0 \cdot 0 = 0 \overset{\text{Thm. 3.2.1 (b)}}{\Longrightarrow} \frac{b}{2} \to 0$
  (+) Thm. 3.2.1 (a): $a + \frac{1}{n^2} \to a$
- Nenner $c + \frac{d}{n^2} \to c \overset{\text{Thm. 3.2.1 (c)}}{\Longrightarrow} \frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{c}$. ∎

3.3 Stabilität der '$\leq$'-Relation unter Limesbildung

Theorem 3.3.1

Seien $(a_n), (b_n)$ zwei konvergente Folgen in $\mathbb{R}$: Seien $a, b \in \mathbb{R}$

(i) Gibt es $N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n \leq a$, so $\lim_{n\to\infty} a_n \leq a$.

(ii) Gibt es $N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : b \leq b_n$, so $b \leq \lim_{n\to\infty} b_n$.

Proof

Sei $\xi := \lim_{n\to\infty} a_n$. Für $\varepsilon > 0$ finden wir $\widetilde{N} \in \mathbb{N} : n \geq \widetilde{N} : |a_n - \xi| < \varepsilon$. Damit

$$\xi = (\xi - a_n) + a_n \leq |\xi - a_n| + a_n \leq \xi + a_n \leq a + \varepsilon \implies \xi \leq a.$$ ∎

Bemerkung: Satz falsch für '$<$' Bsp.

Theorem 3.3.2 Sandwich-Thm

Seien $(a_n), (c_n) \subset \mathbb{R}$ konv. Folgen: $a_n, c_n \to a \in \mathbb{R}$ Ist $(b_n) \subset \mathbb{R}$, so dass $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N :$ $a_n \leq b_n \leq c_n$, so $b_n \to a$

Proof

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, |c_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, Für solche n : $a - \varepsilon < a_n - \frac{\varepsilon}{2} \leq b_n - \frac{\varepsilon}{2} \leq c_n - \frac{\varepsilon}{2} < a + \varepsilon \implies b_n \to a.$ ∎

3.4 Monotone Konvergenz, e und Wurzeln

Definition 3.4.1

Eine Folge (a_n) heißt

(i) mon. wachsend $\iff \forall n \in \mathbb{N} a_n \leq a_{n+1}$

(ii) streng mon. wachsend $\iff \forall n \in \mathbb{N} a_n < a_{n+1}$

(iii) mon. fallend $\iff \forall n \in \mathbb{N} a_n \geq a_{n+1}$

(iv) streng mon. fallend $\iff \forall n \in \mathbb{N} a_n > a_{n+1}$

Theorem 3.4.2

Eine monotone beshcränkte Folge konvergiert.

Proof

Œ(a_n) monoton wachsend und beschränkt, also existiert nach Supremumseigenschaft $a := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} < \infty$
Zu zeigen $a_n \to a$. Sei $\varepsilon 0$ bel.. Dann nach Def. des Supremums $\exists N \in \mathbb{N} : a - \varepsilon y a_N$. Für $n \geq N$ gilt $a_N \leq a_n$ wegen Monotonie $\implies |a_n - a| = a_n - a = a - a_N + \underbrace{a_N - a_n}_{\leq 0} \leq a - a_n < \varepsilon$. Also $a_n \to a$. ∎

Corollary 3.4.3

Der Grenzwert $e := \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$ existiert. Wir nennen e die **Eulerische Zahl**. Es gilt $2 \leq e \leq 3$.

Lemma 3.4.4

Sei $n \in \mathbb{N}_0, x > -1$. Dann $q + nx \leq (1+x)^n$.

Proof Cor. 3.4.4

zu zeigen: $(a_n) = \left(((1 + \frac{1}{n})^2\right)$ mon. wachs., beschr.

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^2} \\
&\overset{\text{Rechnen}}{=} \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\
&= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\
&\overset{\text{Bernoulli mit } x = -\frac{1}{n^2}}{\leq} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n-1} \\
&= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$\implies (a_n)$ mon. wachsend
Nun: (a_n) beschränkt. Bin. Formel:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$$|a_n| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \cdots \leq \frac{1}{k!}$$

$2^{k-1} \leq k! \forall k \in \mathbb{N}$

Damit

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \overset{\text{von davor}}{\leq} 2+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq 2+2\cdot\sum_{k=2} n\frac{1}{2^k} \leq 2+2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} \leq 2+2\cdot 1 = 4$$

$\implies$ Zahl e existiert! (nach Thm. 3.4.2)

Wiederholung:

- Konvergent $\implies$ Beschränkt
- Monoton + Beschränkt $\implies$ Konvergent

Corollary 3.4.5 Existenz von Quadratwurzeln

Sei $a \geq 0$, Dann existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = a$. Speziell gilt: Ist $x_0 > 0$ so konvergiert die durch

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

definierte Folge gegen die **eindeutige** positive Lösung $x \in \mathbb{R}_{>0}$ der Gleichung $x^2 = a$

Proof

(i) Beschränkt nach unten: Wir zeigen induktiv $x_1 > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$

I.A.: $x_0 > 0$ nach Voraussetzung

I.S.: Gelte $x_n > 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (I.V.). Dann ist

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{x_n}_{>0} + \overbrace{\frac{a}{\underbrace{x_n}_{>0}}}^{\geq 0}\right)$$

(ii) Monoton fallend:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - x_n \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_n} - x_n\right) \\ &= \frac{1}{2\underbrace{x_n}_{>0 \text{ nach (i)}}}\left(a - x_n^2\right) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} a - x_{n+1}^2 &= a - \frac{1}{4}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)^2 \\ &= a - \frac{1}{4}x_n^2 - \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}\cdot\frac{a^2}{x_n^2} \\ &= \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}\left(x_n^2 + \frac{a^2}{x_n^2}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\left(x_n - \frac{a}{x_n}\right)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Also ist (x_n) monoton fallend.

(iii) Es gilt $l := \lim_{n\to\infty} x_n$ und $l = \lim_{n\to\infty} x_{n+1}$.
Es folgt wegen $x_n x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n^2 + a\right)$, dass $l^2 = \frac{1}{2}\left(l^2 + a\right)$ und damit $l^2 = a$.

(iv) **Eindeutigkeit:** Seien $x, y > 0$ seien zwei Lösungen zu

$$x^2 = y^2 = a$$

Dann gilt $0 = x^2 - y^2 = \underbrace{(x+y)}_{>0}(x-y)$. Also ist $x - y = 0$, ∎

3.5 Einige Grenzwerte - alt und neu

- Für $k \in \mathbb{N}$ gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ (Iteratives Anwenden von Satz 3.2.1(i))

Definition 3.5.1 Bestimmte Divergenz

Eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ heißt

- Bestimmt divergent gegen $+\infty$ (in Symbolen $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$), flls zu jedem $k > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n \geq k$ für alle $n \geq \mathbb{N}$
- Bestimmt divergent gegen $-\infty$ (in Symbolen $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$), falls zu jedem $k < 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n \leq k$ für alle $n \geq N$.
- Ist (a_n) weder konvergent noch bestimmt divergent, so nennen wir (a_n) **unbestimmt divergent** und sagen "$\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert nicht".

- Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{falls } x > 1 \\ 1 & \text{falls } x = 1 \\ 0 & \text{falls } |x| < 1 \\ -\infty & \text{falls } x \geq -1 \end{cases}$$

  - Für $x > 1$ setzte $y := x - 1$, mit Bernoullischer Ungleichung:

$$x^n = (1+y)^n \geq 1 + ny \to \infty$$

  - Für $x = 1$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ $x^n = 1$.
  - Für $|x^{-1} > 1$ (falls $x \neq 0$) Sei $\varepsilon > 0$
    Also gilt es existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so das für alle $n \geq N$ gilt $|x^{-n}| \geq \frac{1}{\varepsilon}$, damit $|x^n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$
  - Rest folgt mit Beispiel 3.1.7
  -

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{falls } x \geq 1 \\ \frac{1}{1-x} & \text{falls } |x| < 1 \\ \text{existiert nicht} & \text{falls } x \leq -1 \end{cases}$$

4 Vollständigkeit

4.1 ???

Supremumseigenschaft zeichnet $\mathbb{R}$ aus.
Cauchy-Folgen
In $\mathbb{R}$ sind Cauchy-Folgen und konvergente Folgen gleich, in $\mathbb{Q}$ z.B. nicht.
Cauchy-Folgen sind beschränkt
es ist nicht so, dass alle Beschränkte Folgen, Cauchy-Folgen sind

Definition 4.1.1 Cauchyfolge

Eine reele Folge (a_n) heißt **Cauchy** oder **Cauchyfolge**, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für allle $n, m \geq N$. $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N : |a_n - a_m| < \varepsilon}$

Theorem 4.1.2

Sei (a_n) eine folge in $\mathbb{R}$. Dann gilt:

(i) Ist (a_n) konvergent, so ist (a_n)-Cauchy.

(ii) Ist (a_n) Cauchy, dann ist (a_n) beschränkt.

(iii) Ist (a_n) konvergent, so ist (a_n) beschränkt.

Proof

(i) Sei $\varepsilon 0$ beliebig. Da (a_n) konvergent, existiert ein $a \in \mathbb{R}$ und ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Seien $n, m \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(ii) Setze $\varepsilon = 1$. Dann finden wir ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| < 1$ für alle $n, m \geq N$.
Die Menge $\{|a_1|, \ldots, |a_N|\}$ ist endlich, hat also ein Maximum, nenne dieses M.
Für alle $n \geq \mathbb{N}$ gilt also $|a_n| \leq M$ falls $1 \leq n \leq M$,

$$|a_n| \leq |a_n - a_N| + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| \leq 1 + M \text{ falls } n \geq N$$

Deswegen ist (a_n) durch $1 + M$ beschränkt.

(iii) Direkt aus (i) und (iii)

Example 4.1.3 Beschränktheit und nicht Cauchy

Betrachte $(a_n) \coloneqq (-1)^n$. Dann ist $|a_n| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und speziell (a_n) beschränkt. Wähle $0 < \varepsilon < 2$. Dann gilt für bel $N \in \mathbb{N}$

$$|a_n - a_{n+1}| = 2 > \varepsilon$$

4.2 Teilfolgen undn der Satz von Bolzano-Weierstraß

- $$((-1)^n) : \begin{cases} \text{gerade Folgeglieder: immer } -1 \\ \text{ungerade Folgeglieder: immer } -1 \end{cases}$$

Definition 4.2.1

Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ Folge und $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine monoton wachsende Abbildung. Dann heißt $(a_{n(k)})$ **Teilfolge**

Example 4.2.2

$(a_n) = ((-1)^n)$

- $n(k) = 2k \rightsquigarrow (a_{n_k})$ = Teilfolge der geraden Folgenglieder
- $n(k) = 2k - 1 \rightsquigarrow (a_{n_k})$ = Teilfolge der ungeraden Folgenglieder

Definition 4.2.3

Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ und $(a_{n_k}) \subset (a_n)$ Teilfolge die gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert. Dann heißt a **Häufungspunkt** von (a_n). Wir definieren dann den **Limes superior** via

$$\limsup_{n\to\infty} := \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k,$$

und den **Limes inferior** via

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} a_k.$$

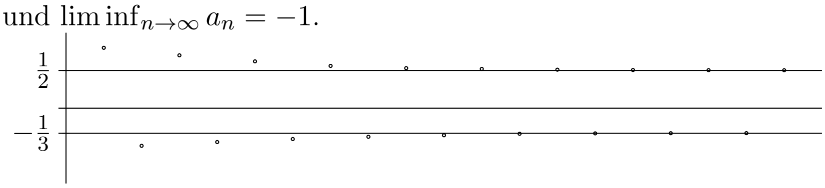
- a HP von $(a_n) \iff \forall\varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N : |a_n - < | < \varepsilon$.

Example 4.2.4

$(a_n) = (a)$ für $a \in \mathbb{R}$ (konstante Folge), so a einzelner Häufungspunkt; allgemeiner: Falls $a_n \to a$ konvergiert, so ist a einzelner Häufungspunkt.

Example 4.2.5

$(a_n) = (-1)^n$, so sind $+1$ und -1 Häufungspunkte der Folge. Weiter $\limsup_{n\to\infty} a_n = +1$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$.



Theorem 4.2.6 Bolzano Weierstraß

Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Lemma 4.2.7

Jede Folge in $\mathbb{R}$ hat eine monotone Teilfolge.

Proof

Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ beschränkt. Nach Lem 4.2.7 gibt es eine monotone Teilfolge, die natürlich auch beschränkt ist. Nach dem Satz über monotone, beschränkte Folgen konvergiert diese Teilfolge. ■

Brauchen:

Proof

Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ bel. Wir nennen $a_{n_0} (n_0 \in \mathbb{N})$ **Gipfelpunkt**, falls:

(i) **unendlich viele Gipfelpunkte**: Sei dann (a_{n_k}) Teilfolge der Gipfelpunkte. Dann

$$n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \cdots \text{ und}$$

$$a_{n_1} \geq a_{n_2} \geq a_{n_3} \geq \cdots$$

Also ist (a_{n_k}) monoton fallend.

(ii) **endlich viele oder keine Gipfelpunkte:** Hier existiert

$$N \in \mathbb{N} : n \geq N \implies a_n$$

kein Gipfelpunkt. Also gilt nicht: D. h. $\exists n_1 \geq N : a_N < a_{n_1} \implies a_{n_1}$ kein Gipfelpunkt $\implies \exists N_2 \gneqq n_1 : a_{n_1} < a_{n_2}$, usf. Dann ist (a_{n_k}) monoton wachsend. ■

4.3 Charakterisierung der Vollständigkeit

Für $a \leq b$ sei $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$. Der Durchmesser von $[a, b] : \operatorname{diam}([a, b]) = b - a$

Lemma 4.3.1

Sei (a_n) Cauchyfolge, die eine gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiente Teilfolge besitzt. Dann konvergiert (a_n) gegen a.

Proof

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N : |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$. Wähle zu $\varepsilon > 0$ ein solches $N \in \mathbb{N}$. Dann gibt es wegen konvergenter Teilfolge einen Index $\widetilde{N} \geq N : |a - a_{widetildeN}| < \frac{varepsilon}{2}$. Dann $\forall n \geq N$:

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= |(a_n - a_{\widetilde{N}}) + (a_{\widetilde{N}} - a)| \\ &< \underbrace{a_n - a_{\widetilde{N}}|}_{\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{a_{\widetilde{N}} - a|}_{\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon \end{aligned}$$

Theorem 4.3.2

Die folgenden Prinzipien sind auf $\mathbb{R}$ äquivalent:

(i) **Supremumseigenschaft:** Jede nichtleere, nach oben beschrenkte Menge hat ein Supremum.

(ii) **Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft:** Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge

(iii) **Vollständigkeit:** Jede Cauchyfolge konvergiert

(iv) **Intervallscachtelungsprinzip:** Sind $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \wedge [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ mit $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}([a_n, b_n]) = 0$, so **existiert genau ein**

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n].$$

Proof

Plan: $(i) \implies (ii) \implies (iii) \implies (iv) \implies (i)$

Ad $(i) \implies (ii)$ Die Supremumseigenschaft ist die einizige Zutat, um Bolzano-Weierstraß zu zeigen. Damit folgt (ii) aus (i)

Ad $(ii) \implies (iii)$ Sei (a_n) Cauchyfolge. Nach letzter Vorlesung ist (a_n) beschränkt, und nach (ii) hat (a_n) also konvergiert Teilfolge. Nach Lem 4.3.1 konvergiert dann aber bereits $(a_n) \implies (iii)$

Ad $(iii) \implies (iv)$ Sei $([a_n, b_n])$ eine **Intervallschachtelung** mit $\operatorname{diam}([a_n, b_n]) \to 0, n \to \infty$.. Sei $\varepsilon > 0$. Dann

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \underbrace{\operatorname{diam}([a_n, b_n])}_{b_n - a_n} < \varepsilon$$

. Dann $\forall n, m \geq N : a_m \in [a_n, b_n]$ (da Intervallschachtellung), also:

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - b_n| < \varepsilon \implies (a_n) \text{ **Cauchy**}.$$

Ähnlich: $(b_n)\text{Cauchy} \overset{(iii)}{\implies} \exists a, b \in \mathbb{R} : a_n \to a, b_n \to b.$

$$|a - b| = \lim_{n\to\infty} \underbrace{|a_n - b_n}_{\operatorname{diam}([a_n,b_n])} = 0 \implies a = b.$$

Kurz zu

$$a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] : (a_n) \text{ monoton wachsend}, (b_n) \text{ monoton fallend}$$

$$\overset{\text{Stabilität der KG-Relation}}{\implies} \left.\begin{array}{r} a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a \\ b \geq \cdots \geq b_2 \geq b_1 \end{array}\right\}$$

$$\implies a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a = b \leq \cdots \leq b_2 \leq b$$

hier fehlt noch was ...

Ad $(iv) \implies (i)$ Sei $A \subset \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt. Zu zeigen A besitzt Supremum. Wähle $x_0 \in A$, sowie $y_0 \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke von A. Seien für $n \in \mathbb{N}_0$ die Intervalle $[x_0, y_0], \dots, [x_n, y_n]$ definiert. Setzte dann

$$x_{n+1} := \begin{cases} x_n, & \text{falls } [\frac{x_n+y_n}{2}, y_n] \cap A \neq \emptyset \\ \xi \in [\frac{x_n+y_n}{2}, y_n] \cap A & \text{sonst} \end{cases}$$

$$y_{n+1} := \begin{cases} \frac{x_n+y_n}{2}, & \text{falls } [\frac{x_n+y_n}{2}, y_n] \cap A \neq \emptyset \\ y_n & \text{sonst} \end{cases}$$

- $[x_{n+1}, y_{n+1}] \subset [x_n, y_n]$: % (sieht man ja)
- Beh.: $|x_n - y_n| \leq 2^{-n}|x_0 - y_0 \forall n \in \mathbb{N}_0$ (reference star)

I.A.: erfüllt.

I.S.: $n \curvearrowright n+1$. Gelte (star) für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Entweder

(a) $|x_{n+1} - y_{n+1}| = \left|x_n - \left(\frac{x_n+y_n}{2}\right)\right| = \frac{1}{2}|x_n - y_n| \overset{IV}{\leq} 2^{-(n+1)}|x_0 - y_0|$

(b) $|x_{n+1} - y_{n+1}| = |\xi - y_n| = y_n - \xi \leq y_n - \frac{1}{2}(x_n + y_n) = \frac{1}{2}(x_n - y_n) \overset{IV}{\leq} 2^{-(n+1)}|x_0 - y_0|$

$\implies \operatorname{diam}([x_N, y_n]) \to 0, n \to \infty$. Nach $(iv) \exists! x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0}[x_n, y_n]$. **Zeige nun:** $x = \sup(A)$. x **obere Schranke**. Hierzu: $x = \lim_{n\to\infty} y_n$. Also $\forall z \in A$:

$$z \overset{\forall n}{\leq} y_n \overset{n\to\infty}{\to} x \implies z \leq x \implies \text{obere Schranke}$$

x **kleinste obere Schranke:** Angenommen es gäbe $x' \in \mathbb{R}, x' \lneq x \wedge x'$ obere Schranke. Aber $x_n \to x$ Aber $\forall n \in \mathbb{N}_0 : x_n \in A$. Dann aber $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : x' < x_n < x$. (Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2}|x - x'|$)). Widerspruch, da x' keine obere Schranke. Also gilt (i) ■

Example einfach Beispiel aus Vorlesung

Ich glaube das soll zeigen, dass irgendwas an $\mathbb{R}$ besonders

$$[\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + \frac{1}{n}]$$

$$\sqrt{2} - \frac{2}{n} \leq a_n leq \sqrt{2} - \frac{1}{n}$$

$$\sqrt{2} + \frac{1}{n} \leq b_n leq \sqrt{2} + \frac{1}{n}$$

$[a_n, b_n], a_n, b_n \in \mathbb{Q}$

5 Reihen und deren Konvergenz

5.1 Reihen, Konvergenz und absolute Konvergenz

Definition 5.1.1

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge. Dann heißt die Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$s_k := \sum_{n=1}^{k} a_n$$

die **Reihe** (u $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ assoziiert):

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_n.$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt **konvergent**, falls die Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und wir bezeichnen dan mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auch ihren Limes. Andernfalls heißt die **Reihe divergent**.

Verschärfung:

Definition 5.1.2

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt **absolut konvergent**, falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Lemma 5.1.3

Absolute Konvergenz impliziert Konvergenz.

Proof

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent, so ist $(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy.

$$\implies \forall \varepsilon > 0 : \exists k_0 \in \mathbb{N} \forall k \geq l \geq k_0 :$$

$$\sum_{n=l+1}^{k} |a_n| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \implies & \left| \sum_{n=1}^{k} a_n - \sum_{n=1}^{l} a_n \right| \\ = & \left| \sum_{n=l+1}^{k} a_n \right| \\ \overset{\text{DUG}}{\leq} & \sum_{n=l+1}^{k} |a_n| \\ \leq & \varepsilon \end{aligned}$$

Also $\left(\sum_{n=1}^{k} a_n\right)_k$ Cauchy, also fergit wg Voll. ax. ■

Example 5.1.4 Geometrische Reihe

Sei $q \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$$

genau dann, wenn $|q| < 1$. Aus Kapitel 1 wissen wir, dass

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}, \text{ also}$$

$$\sum_{n=1}^{N} q^n = \frac{q-q^{N+1}}{1-q} \overset{N\to\infty}{\to} \frac{q}{1-q}.$$

Speziell konvergiert die Reihe (absolut).

- $$q = 1 : \sum_{n=1}^{N} q^n = N \to \infty, N \to infty.$$
- $$q > 1 : \sum_{n=1}^{N} q^n, \text{ also } \sum_{n=1}^{N} \to \infty, N \to infty.$$
- $$q \leq -1 \leadsto \text{ Alternation, keine Konvergenz}$$

Example 5.1.5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

- $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \text{ konvergiert}$$

  $$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n-1} = \frac{A(n-1)+Bn}{n(n-1)} = \frac{\overbrace{-A}^{1} + \overbrace{(A+B)}^{=0}n}{n(n-1)}$$

  $$\begin{aligned}\sum_{n=2} N \frac{1}{n(n-1)} &= \sum_{n=2}^{N} \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N} \\ &= 1 - \frac{1}{N} \overset{\mathbb{N}\to\infty}{\to} 1.\end{aligned}$$

Damit:

$$\forall N \in \mathbb{N}, N \geq 2 : \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2} \leq 1 + \underbrace{\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n-1)}}_{\text{beschränkt in N}} \implies \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \right)_{N \in \mathbb{N}} \quad \text{beschränkt}$$

Example 5.1.6 Harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \textbf{divergent}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{n}}_{2^k - \text{Summanden}} \leq 1 + \underbrace{\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{2^{k+1}}}_{\frac{2^k}{2^{k+1}}} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$$

Lemma 5.1.7

Konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

so ist (a_n) eine Nullfuloge.

Corollary 5.1.8 Trivialkriterium

Ist (a_n) **keine Nullfolge**, so divergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Proof Lem 5.1.7

Nach Voraussetzung ist

$$\left(\sum_{n=1}^{k} a_n \right)_{k \in \mathbb{N}}$$

Cauchy. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, so $\exists k_0 \in \mathbb{N} \forall k, l \geq k_0 : \left| \sum_{n=1}^{k} a_n - \sum_{n=1}^{l} a_n \right| < \varepsilon \overset{k=l+1}{\rightsquigarrow} \forall l \geq k_0 :$ $|a_{l+1} < \varepsilon \implies (a_n)$ Nullfolge

5.2 Konvergenzkriterien

- Leibniz $\rightsquigarrow$ alternierende Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

Proposition 5.2.1 Leibnizkriterium

Ist $(a_n) \subset \mathbb{R}$ **monoton fallende Nullfolge**, so **konvergiert** die alternierende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$$

Bemerkung: Satz 5.2.1 sagt **nichts** über absolute Konvergenz. Denn sei $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$. Dann ist (a_n) monoton fallende Nullfolge

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty$$

Proof (Satz 5.2.1)

Für

$$k \in \mathbb{N} : s_k := \sum_{n=1}^{k}(-1)^n a_n$$

- **gerade Indices:** $k = 2j, j \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} s_{2j} &= -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \cdots + \overbrace{(-1)^{2j-1}}^{=-1} + a_{2j} \\ &= -a_1 + a_2 - a_3 \cdots - a_{2j-1} + a_{2j} - a_{2j+1} + \underbrace{\underbrace{a_{2j+2}}_{a_{2(j+1)}}}_{\leq 0} \end{aligned}$$

$\implies s_{2j} \geq s_{2(j+1}$
und $s_2j \geq -a_1 + a_{2j}$ und $a_{2j} \to 0 \implies (s_{2j})$ nach unten beschränkt. Satz über monotone beschränkte Folgen: (s_{2j}) konvergiert $s_{2j} \to s$

- **Analog:** (s_{2j+1}) monoton wachsend und nach oben beschränkt $\implies (s_{2j+1})$ konvergiert, $s_{2j+1} \to s'$

- $S = s' : |s - s'| = lim_{j\to\infty} \underbrace{|s_{2j+1} - s_{2j}|}_{|\sum_{k=1}^{2j+1}(-1)^k a_k - \sum_{k=1}^{2j}(-1)^k a_k|} = \lim_{j\to\infty}\left|(-1)^{2j+1}a_{2j+1}\right| = \lim_{j\to\infty}|a_{2j+1}| = 0.$

Zu zeigen : Die ganze Reihe konvergiert gegen s:
Sei $\varepsilon > 0$:

Fall 1:

$$\exists k_1 \in \mathbb{N} \forall k \geq k_1 : \left|\sum_{n=1} 2k(-1)^n a_n - s\right| < \varepsilon$$

Fall 2:

$$\exists k_2 \in \mathbb{N} \forall k \geq k_2 : \left|\sum_{n=1} 2k + 1(-1)^n a_n - s\right| < \varepsilon$$

Sei nun $N := \max\{2k_1, 2k_2 + 1\}$. Dann $\forall j \geq N$:

$$\left|\sum_{n=1} j(-1)^n a_n - s\right| < \varepsilon.$$

Damit folgt die Behauptung ∎

Example 5.2.2 Alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \underbrace{\frac{1}{n}}_{a_n}$$

konvergiert nach Leibniz, da (a_n) eine monoton fallende Nullfolge

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{9n^2-n+100}{20n^3+n^2+4}$$

dann muss man feststellen, dass gegen Null und ab einem gewissen Zeitpunkt monoton fallend

Ab jetzt: Kriterien für absolute Konvergenz

Proposition 5.2.3 (Majorantenkriterium/Minorantenkriterium)

Seien $(a_n), (b_n) \in \mathbb{R}$ so, dass

(a) $|a_n| \leq |b_n| \forall n \in \mathbb{N}$ und

$$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n| < \infty.$$

Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

(b) $|a_n| \leq |b_n| \forall n \in \mathbb{N}$ und

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \infty.$$

Dann divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Proof (Satz 5.2.3)

Sei $\varepsilon > 0$. Da

$$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n| < \infty$$

gibt es

$$N \in \mathbb{N} : \forall k, m \geq N : \sum_{n=k}^{m}|b_n| < \varepsilon \text{ (Cauchyfolge/Partialsummen der Beträge)}$$

Daher auch

$$\sum_{n=k}^{m}|a_n| \overset{\text{Vor.}}{\leq} \sum_{n=k}^{m}|b_n| < \varepsilon.$$

Also ist

$$\left(\sum_{n=1}^{N}|a_n|\right)_{N\in\mathbb{N}}$$

Cauchy, und damit folgt (a) nach Vollständigkeit von $\mathbb{R}$. (b) Analog. ∎

Vergleich mit geometrischen Reihen

Proposition 5.2.4 (Quotientenkriterium)

Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$

(a) Es gebe $0 \leq q < 1 \wedge N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$a_n \neq 0 \wedge \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q \quad \forall n \geq N$$

Dann konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

absolut.

(b) Es gebe $1 \leq q < \infty \wedge N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$a_n \neq 0 \wedge \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q \quad \forall n \geq N$$

Dann divergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Proof (Satz 5.2.4)

(a) Zuerst:

$$a_n \neq 0, \underbrace{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q}_{|a_{n+1} \leq q|a_n|}(< 1) \quad \forall n \geq N$$

Beh.: $\forall j \in \mathbb{N}_0 : |a_{N+j}| \leq q^j |a_N|$.

I.A. $j = 0$ yus is correct

I.S. $j \curvearrowright j+1$.

$$|a_{N+j+1}| \overset{\text{Nach Vor.}}{\leq} q|a_{N+j}| \overset{\text{I.V.}}{\leq} q^{j+1}|a_N| \qquad \blacksquare$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} &= \underbrace{\sum_{n=1}^{N-1}}_{<\infty} |a_n| + \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \\
&= \left(\sum_{n=1}^{N-1}\right) + \sum_{j=0}^{\infty} |a_{N+j}| \\
&= \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{N-1}\right)}_{<\infty} + \underbrace{|a_N| \sum_{j=0}^{\infty} q^j}_{<\infty \; q<1 \text{ geometrische Reihe}}
\end{aligned}$$

(b) Via Induktion.: $|a_n| \neq 0, \forall j \in \mathbb{N}_0 : |a_{N+1}| \geq q^j |a_N|$

$|a_{N+1}| \geq q^j |a_N| \overset{j\to\infty}{\not\to} 0. \implies (a_n)$ keine NUllfolge $\implies$ [Trivialkriterium] ■

Corollary 5.2.5

Ist $(a_n) \subset \mathbb{R}$ so, dass $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n \neq 0$. Konvergiert

$$\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$$

mit

$$\lim_{n\to\infty} \ldots$$

Example 5.2.6

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n!}{2^n}}_{=a_n}$$

1.

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0$$

2.

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ldots$$

Proposition 5.2.7 (Wurzelkriterium)

Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$. Dann:

(i) Es gebe $0 \leq q < 1 \wedge N \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \forall n \geq N$. Dann konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

absolut.

(ii) Es gebe $1 \leq q < \infty \wedge N \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[n]{|a_n|} > q \forall n \geq N$. Dann divergergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Proof

Analog zum Quotientenkriterium, ab $n = N$ nutze $|a_N| \leq q^n$ + Geom

Example

Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vielleicht sogar absolut? Nullfolge? -> nein reihe divergent Trivialkriterium
-> ja:

Alternierende Reihe -> ja Leibniz -> konvergienz/Divergenz
-> nein: Quotiont -> ja Quotientenkriterium
-> nein: Potent -> ja Wurzelkriterium
-> nein: geeignete Maj.? -> nein: Tricky

Corollary 5.2.8 Wurzelkriterium in Limesform

Ist $a_n \subset \mathbb{R}$ Folge mit

(i)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

, so konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

absolut.

(ii)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

, so divergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

.

Example 5.2.9

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n}_{a_n},$$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+2} \\ &= \frac{2}{3} < 1 \implies \text{ absolute Konvergenz nach Wurzelkriterium} \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \implies \lim_{\sqrt[n]{a_n}} = a,$$

falls $a, a_1, \ldots \in \mathbb{R}_{>0}$
Das bedeuteet: Liefert das Quotientenkriterium eine Entscheidung, so auch das Wurzelkriterium. Aber **Vorsicht**, das bedeutet nicht, dass das Wurzelkriterium “leichter” anzuwenden ist.

Proposition 5.2.10 Reihenverdichtungskriterium

Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}_{>0}$ eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

genau dann, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

konvergiert. (verdichtete Reihe)

Proof Satz 5.2.10

$\forall N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2^N} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{N} \underbrace{\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} a_n}_{2^{k-1}\text{-Summanden}} \\ &\geq a_1 + \sum_{k=1}^{N} 2^{k-1} a_{2^k} \\ &= a_1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} 2^k a_{2^k}. \end{aligned}$$

$\implies$ Konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

so auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2^N} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{N} \sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} \underbrace{a_n}_{\leq a_{2^{k-1}+1}} \\ &\leq a_1 + \sum_{k=1}^{N} 2^{k-1} a_{2^{k-1}+1} \\ &= a_1 + a_2 + \sum_{k=2}^{N} 2^{k-1} a_{2^{k-1}+1} \\ &= a_1 + a_2 + \sum_{j=1}^{N-1} 2^j \underbrace{a_{2^j+1}}_{\leq a_{2^j}} \\ &\leq a_1 + a_2 + \sum_{j=1}^{N-1} 2^j a_{2^j+1}\end{aligned}$$

$\implies$ Konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n},$$

so auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

■

Example 5.2.11

Für welche $s > 0$ konvergiert

$$\sum_{n?1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^s}}_{a_n} ?$$

- Quotientenkriterium: $\to 1$ Fail
- **Reihenverdichtung:** Verdichtete Reihe:

$$\sum_{n?1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{ns}} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(2^{1-s}\right)^n}_{} q.$$

Das ist eine **geometrische Reihe**, die genau für $|q| < 1$. aber $q = 2^{1-s} < 1$ genau dann wenn $s > 1$

5.3 Umordnung von Reihen

Definition 5.3.1

Wir nennen eine bijektive Abbildung $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine **Umordnng**. Ist $(a_n) \subset \mathbb{R}$, so heißt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{sigma(n)}$$

die (zu σ gehörige) Umordnung der Reihe.
Wir nennen die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

unbedingt konvergent, falls **jede** Umordnung der Reihe gegen denselben Wert konvergiert. Konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

aber nicht unbedingt, so heißt die Reihe bedingt konvergent.

Proposition 5.3.2 Dirichletscher Umordnungssatz

Eine absolut konvergierende Reihe ist unbedingt konvergent.

Proof Satz 5.3.2

Sei

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

absolut konvergent und $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv. Sei $\varepsilon > 0$

1
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$
konvergiert
$$\implies \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq m \geq n_0 : \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$$
(Parialsummen Cauchy)

2 Ist
$$s = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|,$$
so
$$\exists n_1 \geq n_0 : \left| \sum_{k=1}^{n_1} a_k - s \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

3 Wähle $m_1 \in \mathbb{N} : \{1, \dots, n_1\} \subset \{\sigma(1), \dots, \sigma(m_1)\}(\rightsquigarrow \sigma \text{ bijektiv})$

Sei $n \geq m_1$ beliebig. Dann $\exists n_2, \dots, n_l \in \mathbb{N} : n_1 < n_2 < \dots < n_l$

$$\{1, \dots, n_1, n_2, \dots, n_l\} = \{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\}.$$

$$\implies \left|\sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} - \sum_{k=1}^{n_1} a_k\right| = \left|\sum_{j=2}^{l} a_{n_j}\right|$$
$$\leq \sum_{k=n_2}^{n_l} |a_k|$$
$$\overset{1}{<} \frac{\varepsilon}{2}$$

Nun

$$\forall n \geq m : \left|s - \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}\right|$$

$$\leq \underbrace{\left|s - \sum_{k=1}^{n} a_k\right|}_{\overset{2}{\leq} \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\left|\sum_{k=1}^{n_1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}\right|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$ ■

Proposition 5.3.3 Riemannscher Umordnungssatz

Sei

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

konvergent nicht absolut konvergent. Dann gibt es zu jedem $s \in \mathbb{R}$ eine Umordung σ mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = s.$$

Part II.
Funktionen und Stetigkeit

6 Elementare topologische Konzepte in $\mathbb{R}$

6.1 Offene und abgeschlossene Mengen

Definition 6.1.1

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ heißt **abgeschlossen** falls der Grenzwert jeder konvergenten Folge $(x_n) \subset \mathbb{R}$ auch zu A gehört: $x_1, x_2, \ldots \in A$ und $x_n \to x \in \mathbb{R} \implies x \in A$. Ist hingegen $\mathbb{R} \setminus A$ abgeschlossen, so heißt A **offen**.

Example 6.1.2

$a < b$, $A := [a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ Sei $(x_n) \subset A$, d.h., $x_1, x_2, \ldots \in A$ mit $x_n \to x(x = \lim_{n\to\infty} x_n)$

Stabilität von '$\leq$', '$\geq$' unter Limesbildung $\underset{a \leq x_n \leq b}{\implies} a \leq x, x \leq b \implies x \in A \implies A$ abgeschlossen.
Setzte für $\varepsilon > 0, x \in \mathbb{R} : B_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < \varepsilon\}$ "offener ε-Ball um x"

Lemma 6.1.3

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ ist offen genau dann, wenn

$$\forall x \in A \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset A$$

Proof Lemma 6.1.3

" $\implies$ " Angenommen $\exists x \in A \forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \not\subset A$
$\implies \exists x \in A \forall n \in \mathbb{N} : \exists x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap (\mathbb{R} \setminus A)$. $\implies (x_n) \subset \mathbb{R} \setminus A \wedge x_n \to x \in A$. Also kann $\mathbb{R} \setminus A$ nicht abgeschlossen sein, also A nicht offen. $\implies$ (A offen $\implies$ Bedinung gilt) ■

" $\impliedby$ " zu zeigen ... gilt $\implies$ A offen. ($\iff$ $\mathbb{R} \setminus A$ enthalten)
Sei $(x_n) \subset \mathbb{R} \setminus A$ konvergent gegen $x \in \mathbb{R}$. Angenommen, $x \in A$. Nach stern $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset A$. Da $x_n \to x : \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : x_n \in B_\varepsilon(x) \subset A$. Damit $\forall n \geq N : x_n \in A$ Widerspruch zu $x_n \in \mathbb{R} \setminus A$ ■

Theorem 6.1.4 (offene Teilmenge als Topologie)

Das System T aller offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ hat folgende Eigenschafften

T1) $\emptyset, \mathbb{R} \in T$

T2) $A, B \in T \implies A \cap B \in T$

T3) Ist I Eine Indexmenge und $(A_i)_{i\in I} \subset T$, so ist $\bigcup_{i\in I} A_i \in T$

Das bedeutet, dass T eine **Topologie** auf $\mathbb{R}$ ist.

- Allgemein: Topologien $\hat{=}$ Systeme offener Mengen

Proof

Alles nach Lem. 6.1.3

(T1) $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{T}$

$$A \text{ offen} \iff \forall x \in A : \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset A$$

$A = \emptyset$, so trivialer weiße erfüllt. für $A = \mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}; \forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \implies \text{(T1)}$$

(T2) zz.: A, B offen $\implies A \cap B$ offen

(i) $A \cap B = \emptyset \overset{\text{(T1)}}{\implies} a \cap B \in T$

(ii) $A \cap B \neq \emptyset \implies \exists x : x \in A \wedge x \in B.$

$$A \wedge B \text{ offen } \implies \exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 : B_{\varepsilon_1}(x) \subset A \wedge B_{\varepsilon_2}(x) \subset B.$$

Dann $B_\varepsilon(x) \subset B_{\varepsilon_1}(x) \subset A \wedge B_\varepsilon(x) \subset B_{\varepsilon_2}(x) \subset B$
$\implies B_\varepsilon(x) \subset A \cap B \implies A \cap B \in \mathcal{T}$

(T3) $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{T}$ (d.h. $\forall i \in I : A_i$ ist offen)
zu zeigen $\bigcup_{i \in I} A_i$ offen. Sei $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Dann $\exists i_0 \in I : x \in A_{i_0}$. Aber A_{i_0} offen, also $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset A_{i_0}$. Damit $B_\varepsilon(x) \subset A_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} A_i$. Also $\bigcup_{i \in I} A_i$ offen. ■

Lemma 6.1.5

Seien $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$. Dann ist (a, b) offen und für $-\infty < a \leq b < \infty$ das Intervall $[a, b]$ abgeschlossen.

Proof Lem 6.1.5

(a, b) offen: $x \in (a, b)$ $\varepsilon := \min\{d_1, d_2\} \implies B_\varepsilon(x) \subset (a, b)$ enthalten.
$\implies (a, b)$ offen. $[a, b]$ abgeschlossen.: Hierzu $\mathbb{R} \setminus [a, b]$ offen. Aber $\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$. Das ist nach Thm 6.1.4 offen $\implies [a, b]$ abgeschlossen ■

Definition 6.1.6 Häufungs-, Berührpunkte

Sei $A \in \mathbb{R} \wedge a \in \mathbb{R}$. Wir nennen a einen

i) **Berührungspunkt** von A, falls in jedem $B_\varepsilon(a)\varepsilon > 0$, mindestens ein Element aus A liegt.

ii) **Häufungspunkt** von A, falls in jedem $B_\varepsilon(a), \varepsilon > 0$, unendlich viele Elemente aus A liegen

Example 6.1.7

$A = (0, 1] \cup \{2\}$

- Dann ist $a = 0$ Berührpunkt und Häufungspunkt

Formal: Sei $\varepsilon > 0$ und sei $(x_n) = (\frac{1}{n})$. Dann $(x_n) \subset (0, 1]$ und $x_n \to 0$. D.h. $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |x_n| < \varepsilon$, also $0 < x_n < \varepsilon$. Damit ist 0 Häufungpunkt von A.

- Dann ist $a = 2$ Berührpunkt, aber kein Häufungspkt.
  Ist $0 < \varepsilon < 1$, so $'B_\varepsilon(2) \cap A = \{2\}$. Also ist $a = 0$ Berührungspunkt, aber kein Häufungspunkt von A

6.2 Kompaktheit

Definition 6.2.1

Wir nenn eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ **kompakt** falls jede Folge in A eine Teilfolge hat, die gegen ein Element aus A konvergiert. D.h.: Ist $(x_n) \subset A$, so $\exists (x_{n_k}) \subset (x_n) \exists x \in A : x \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$.

Example 6.2.2

Wir betrachten

$$A := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\},$$

$$B := [0, 1],$$

$$C := [0, \infty)(= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\})$$

- A ist **nicht kompakt:** Betrachte $(x_n) = (\frac{1}{n})$.
  Per Def: $(x_n) \subset A$. Aber $x \to 0$. Jede Teilfolge von (x_n) konvergiert auch gegen $x = 0$.Aber $0 \notin A$. Damit konvergiert jede Teilfolge von (x_n) gegen $0 \notin$, also A nicht kompakt
- B ist **kompakt**: Sei $x_n \subset [0, 1]$. Also (x_n) beschränkt. Nach Bolzano-Weierstraß hat (x_n) eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k}) : x_{n_k} \to x \in \mathbb{R}$. Aber $[0, 1]$ ist abgeschlossen, also $x \in [0, 1]$. Da (x_n) beliebig, B kompakt
- C ist **nicht kompakt:** $(C = [0, \infty))$. Betrachte $(x_n) = (n)$. Dann $(x_n) \subset C$ und jede Teilfolge divergiert gegen $+\infty$. Also konvergiert keine Teilfolge und damit C nicht kompakt

Theorem 6.2.3 Heine-Borel

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Proof Theorem 6.2.3

" $\implies$ " zu zeigen: A kompakt $\implies$ A abgeschlossen und beschränkt
Abgeschlossen: zu zeigen $(x_n) \subset A$ konvergiert mit $x_n \to x \in \mathbb{R}$, so $x \in A$.
Sei (x_n) eine solche Folge. DAnn konvergiert x_n gegen $x \in \mathbb{R}$. Nach Kompaktheit $\exists (x_{n_k}) \subset (x_n) \exists <\in A : x_{n_k} \to y$. Aber **jede** Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert gegen denselben Limes. Also $x_{n_k} \to x, k \to \infty$. Aber Limiten sind eindeutig, also $x = y \in A$. Also $x \in A$, also ist A abgeschlossen
Beschränkung: Angenommen, A ist nicht beschränkt, Œnach oben unbeschränkt. Dann gibt es eine Folge $x_n \subset A$, die monoton gegen $+\infty$ divergiert. Dann aber auch jede Teilfolge, und damit kann keine Teilfolge konvergieren $\implies$ Widerspruch zu Kompaktheit. $\implies$ A ist beschrnänkt

" $\impliedby$ " Sei $A \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen und beschrännkkt. Sei $(x_n) \subset A$. Da A beschränkt, ist (x_n) beschränkt. Nach Bolzano-Weierstraß $\exists (x_{n_k}) \subset (x_n) \exists x \in \mathbb{R} : x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Aber A ist abgeschlossen und damit $x \in A$. Also ist A kompakt ■

- Maximum ist Supremum, das in der Menge enhalten ist, und Minimum ist Infimum, das in der Menge enthalten ist

Theorem 6.2.4

Ist $K \subset \mathbb{R}$ kompakt, so existieren $\max(K) \wedge \min(K)$.

Proof Thm. 6.2.4

Œfür Maximum. Sei $m := \sup(K)$. Nach Heine-Borel: K beschränkt, also $m < \infty$. Da $m = \sup(K), \exists (x_n) \subset K : x_n \to m$. Nach Heine-Borel: K abgeschlossen $\implies m = \lim_{n\to\infty} x_n \in K$. Damit ist m Maximum. ■

- $[0,1]$ kompakt, $\min[0,1] = 0, \max[0,1] = 1$.
- $(0,1)$ nicht kompakt, $\inf(0,1) = 0 \notin (0,1)$
- $[0,\infty)$ nicht kompakt, $\sup[0,\infty) = \infty \notin \mathbb{R}$.

6.3 Dichtheit, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$

Dichtheit bezieht sich auf Approximierbarkeit.
informell: $B \in \mathbb{R}$ liegt **dicht** in $\mathbb{R}$, falls jedes Element aus $\mathbb{R}$ durch Eemente aus B approximiert werden kann.

Definition 6.3.1

Sei $A \subset \mathbb{R}$. Eine Teilmenge $B \subset A$ heißt **dicht in** A, falls

$$\forall x \in A \forall \varepsilon > 0 \exists y \in B_\varepsilon(x) : y \in B.$$

Theorem 6.3.2 $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$

- Bereits in Kapitel 3 gesehen: $\sqrt{2}$ kann durch rationale Zahlen approximiert werden. D.h. $\exists (x_n) \subset \mathbb{Q} : x_n \to \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. (speziell $\mathbb{Q}$ nicht abgeschlossen) Thm 6.3.2: Das geht für alle $x \in \mathbb{R}$

Theorem 6.3.3 Dezimaldarstellungen

$$\forall x \in [0,1] \forall k \in \mathbb{N} \exists ! a_k \in \{0,\dots,9\} : x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 10^{-k}. \tag{10}$$

Proof Satz 6.3.3

10 entspricht $0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$
(Übungsblatt 6 Aufgabe 3) ■

Proof Satz 6.3.2

Sei $x \in [0,1] \wedge x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 10^{-k}$ die Dezimaldarstellung aus Satz 6.3.3. Definiere (x_n) via $x_n := \sum_{k=1}^{\infty} a_k 10^{-k} \in \mathbb{Q}$. Aber $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, also ist $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ dicht in $[0,1]$. Ist $x \in \mathbb{R}$, so sei $m \in \mathbb{Z}$ die größte ganze Zahl mit $m \leq x$. Dann $x = m + \Theta, \Theta \in (0,1]$. Nach erstem Teil $\exists (\Theta_n) \subset \mathbb{Q} \cap [0,1] : \lim_{n\to\infty} \Theta_n$. Dann $(m + \Theta_n) \subset \mathbb{Q} \wedge x = \lim_{n\to\infty} \underbrace{m + \Theta_n}_{\in \mathbb{Q}}$. Also $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$. ■**Erinnerung:** $\mathbb{Q}$ abzählbar (Cantorsches Diagonalschema, Kapitel 1)

Theorem 6.3.4

$\mathbb{R}$ ist überabzählbar

Proof 6.3.5 Satz 6.3.4

Angenommen $\mathbb{R}$ abzählbar, so auch $(0,1)$. Dann $\exists x_n \subset (0,1) : \forall x \in (0,1) \exists n \in \mathbb{N} : x = x_n$. Nach 6.3.3 knnen wir schreiben:
$\forall a_{ij} \in \{0, \dots, 9\}$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, a_{11}a_{12}a_{13}\dots \\ x_2 &= 0, a_{21}a_{22}a_{23}\dots \\ x_3 &= 0, a_{31}a_{32}a_{33}\dots \\ \vdots &= \end{aligned}$$

$$b_{jj} \coloneqq \begin{cases} a_{jj} + 2 & = \text{falls} a_{jj} \leq 5 \\ a_{jj} - 2 & = \text{falls} a_{jj} > 5 \end{cases}$$

Betrachte $z \coloneqq 0, b_{11}b_{22}b_{33}b_{44}\dots$. Damit $\forall j \in \mathbb{N} : |z - x_j| \geq 10^{-j}$, also $\forall j \in \mathbb{N} : x_j \neq z$.
$\implies$ $\mathbb{R}$ ist überabzählbar. ■

$\boxed{\left|\sum_{k=1}^{\infty} b_k k 10^{-k} - \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} 10^{-k}\right| = \mathit{something}}$

7 Funktionen und Stetigkeit

7.1 Funktinen

$$\Omega \subset \mathbb{R}, f : \Omega \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$$

Setze

$$\mathrm{Gr}(f) := \{(x, f(x)) : x \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^2$$

und nennen dies den **Graphen** von f. In diesem Kontext nennen wir x auch das **Argument** von f und $f(x)$ den **Funktionswert** von f in x. Der Graph ist also die Menge aller Tupel bestehend aus Argumenten und Funktionswerten.

Example 7.1.1 Polynomfunktionen

Ist $n \in \mathbb{N}_0, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$ Dann:

$$\gamma : \mathbb{R} \ni x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$$

Polynomfunktion vom Grad n. Kurz: Polynom

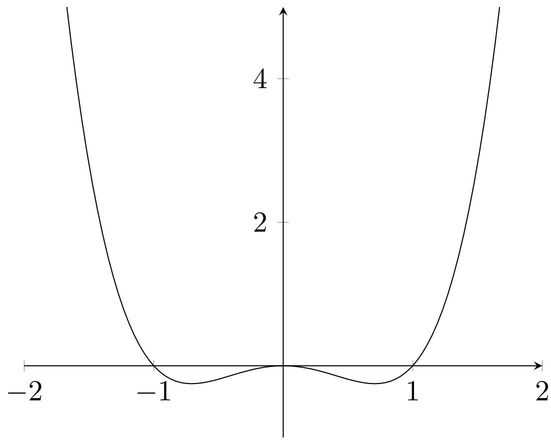


Figure 1: Beispiel Polynom

Hierbei ist $f(x) = x^4 - x^2$

Example 7.1.2 Rationale Funktionen

Sind $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Polynome, so heißt

$$\frac{p}{q} : \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : q(x) = 0\} \ni x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$$

rationale Funktion. Als Beispiel sehen wir uns die rationale Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \to \frac{x^4 + 1}{x^2} \in \mathbb{R}$$

an. Ihr Graph hat die folgende Gestalt:

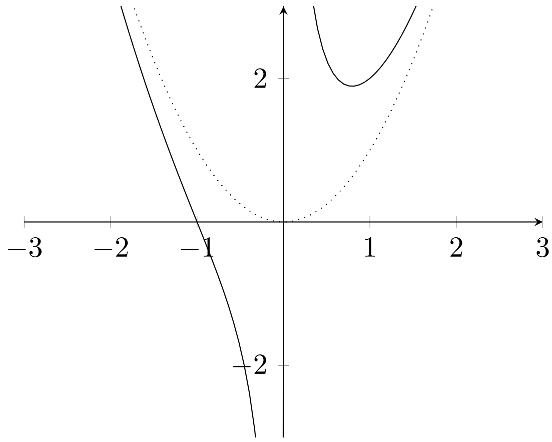


Figure 2: Beispiel Rationale Funktion

In diese Graphik ist auch der (gepunktete) Graph der Quadratfunktion $x \to x^2$, dem sich der Graph von f für große Argumente immer mehr, annähert. In diesem Kapitel werden wir *Grenzwerte* von Funktionen einführen, die uns diese *Annäherung* genau fassen lassen.

Example 7.1.3

$$|\cdot| : \mathbb{R} \ni x \mapsto |x| = \begin{cases} x & = x \geq 0 \\ -x & = x < 0 \end{cases}$$

"Betragsfunktion"
Der Graph ist dann gegeben durch

$$\mathrm{Gr}(|\cdot| = \{(x, x) : x \geq 0\} \cup \{(x, -x) : x < 0\},$$

was wiederum wie folgt visualisiert wird:

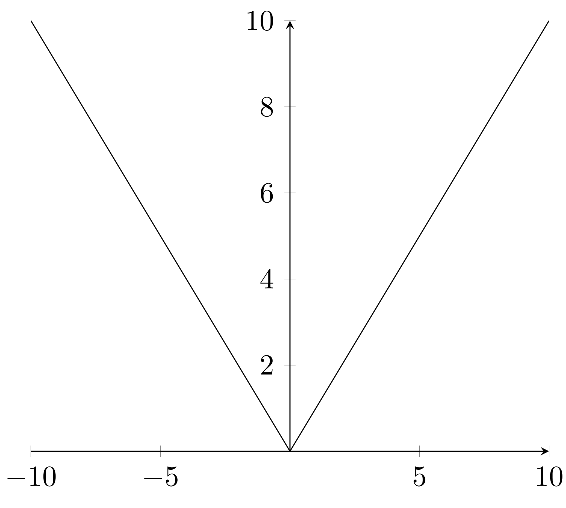


Figure 3: Betragsfunktion

Example 7.1.4

Für $x \in \mathbb{R}$
$\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq 0\}$
$\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \ni x \mapsto \lfloor x \rfloor \in \mathbb{R}$ "Gaußklammer"

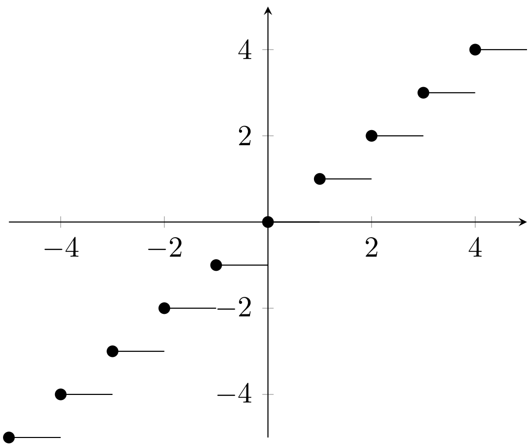


Figure 4: Floor Funktion

Example 7.1.5

Für $x \in \mathbb{R} : \operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & = x > 0 \\ 0, & = x = 0 \\ -1, & = x < 0 \end{cases}$ "Signumsfunktion"

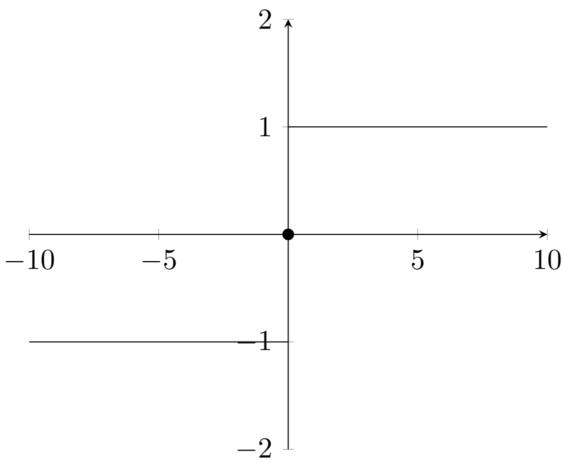


Figure 5: Signums Funktion

7.2 Stetigkeit

Idee: Kleine Änderung der Argumente ⇒ kleine Änderung der Funktionswerte

Definition 7.2.1

Sei $A \subset \mathbb{R}$ nichtleer. Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ heißt **stetig in** $x_0 \in A$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Ist f in **jedem** $x_0 \in A$ stetig, so nennen wir f **stetig** (in A)
Ist f in $x_0 \in A$ nicht stetig, so heißt f in x_0 **unstetig**

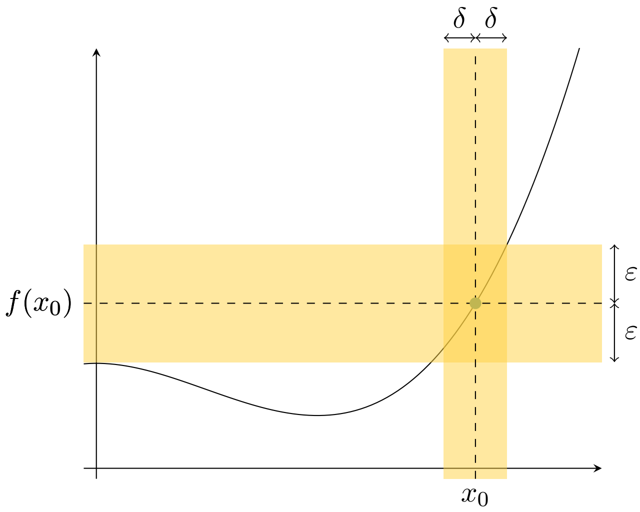


Figure 6: Test000

Example 7.2.2

- Konstante Funktion: $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto c \in \mathbb{R}$.
  Ist $\varepsilon > 0, x_0 \in \mathbb{R}$. Für alle $\delta > 0 : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| = |c - c| = 0 < \varepsilon$.
  $\implies$ Stetigkeit
- $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto x \in \mathbb{R}$ (Identität)
  Ist $\varepsilon > 0, x_0 \in \mathbb{R}$, so setze $\delta := \varepsilon$. Dann: $|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. $\implies$ Stetigkeit
- $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$.

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|x^2 - x_0^2\right| = |x + x_0|\,|x - x_0| \leq (|x| + |x_0|)|x - x_0|. \tag{11}$$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Wir setzten $\underbrace{\delta}_{\text{Hängt nun von } x_0 \text{ ab}} := \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}\right\}$.

Dann: $|x - x_0| < \delta$, so mit (11)

$|f(x) - f(x_0)| \overset{(11)}{\leq} (|x - x_0| + 2|x_0|) \cdot \delta \leq (1 + 2|x_0|) \cdot \frac{\varepsilon}{2|x_0|+1} = \varepsilon$.

Example 7.2.3

$A \subset \mathbb{R}$ nichtleer, $f : A \to \mathbb{R}$ **Lipschitz** $\iff$ $\exists L \geq 0$ (Lipschitzkonst.) $\forall x, y \in A$: $|f(x) - f(y) \leq L|x - y|$.
Sei $x_0 \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Setzte $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$, so ist $|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| \leq L \cdot |x - x_0| \leq L \cdot \delta = L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$. **Stetig!** "Lipschitzstetig"

Example 7.2.4

$$\text{Für } x \in \mathbb{R} : \operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & = x > 0 \\ 0, & = 0 \\ -1, & = x < 0 \end{cases} \quad \text{"Signumsfunktion"}$$

Sei $0 < \varepsilon < 1$. Dann gilt $\forall \delta > 0 : |\operatorname{sgn}(\frac{\delta}{2} - \operatorname{sng}(0)| = |1 - 0| = 1 > \varepsilon$, aber $|\frac{\delta}{2} - 0 = \frac{\delta}{2} < \delta$

Falls " δ nur von ε" abhängt:

Definition 7.2.5

Sei $A \subset \mathbb{R}$ nichtleer. $f : A \to \mathbb{R}$ heißt **gleichmäßig stetig** in A, falls $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x_0 \in A : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Stetigkeit von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}&\forall \varepsilon > 0 : \forall x_0 \in \mathbb{R} : \exists \delta > 0 : \forall y \in \mathbb{R} :\\ &\qquad |x_0 - y| < \delta \implies |f(x_0) - f(y)| < \varepsilon\end{aligned}$$

Gleichmäßige Stetigkeit:

$$\begin{aligned}&\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, y \in \mathbb{R} :\\ &\qquad |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon\end{aligned}$$

Example 7.2.6

Die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.

Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ können multipliziert und addiert werden.

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &:= f(x) + g(x) && x \in \mathbb{R}\\ (f \cdot g)(x) &= f(x) + g(x) && x \in \mathbb{R}\\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} && x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Theorem 7.2.7

Sei $R \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer, sowie $f, g : R \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in R$. Dann sind $f + g$, sowie $f \cdot g$ stetig in x_0. Gilt weiter $g(x_0) \neq 0$, so ist auch $\frac{f}{g}$ stetig in x_0. Snd also $f, g : R \to \mathbb{R}$ stetig in R, so sind $f + g, f \cdot g$ stetig in R, und $\frac{f}{g}$ ist stetig auf $\{x \in R : g(x) \neq 0\}$.

Proof Theorem 7.2.7.

(i) Sei $\varepsilon > 0$. Dann finden wir $\delta_1 > 0$ und $\delta_2 > 0$, sodass

$$\begin{aligned}|x - x_0| < \delta_1 &\implies |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2},\\ |x - x_0| < \delta_2 &\implies |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

Setze $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Dann gilt für alle $x \in R$ mit $|x - x_0| < \delta$, dass

$$\begin{aligned}|(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| &= |f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)\\ &\overset{\triangle-\text{Ungl.}}{\leq} |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)|\\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

$\implies (f+g)$ stetig in x_0

(ii) Sei $\varepsilon > 0, M := |g(x_0)| + 1$. Dann finden wir $\delta_1 > 0$ und $\delta_2 > 0$, sodass

$$|x - x_0| < \delta_1 \implies |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2M},$$
$$|x - x_0| < \delta_2 \implies |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2|f(x_0)|},$$

und $\delta_3 > 0$

$$\forall x \in R : |x - x_0| < \delta_3 \implies |g(x) - g(x_0)| < 1 \quad (\implies |g(x) - g(x_0)| < M)$$

Setze $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Sei $x \in R$ mit $|x - x_0 < \delta$, dann gilt

$$\begin{aligned} |(fg)(x) - (fg)(x_0)| &= |f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)| \\ &\overset{\triangle-\text{Ungl.}}{\leq} |g(x)||f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)||g(x) - g(x_0)| \\ &< M\frac{\varepsilon}{2M} + |f(x_0)|\frac{\varepsilon}{2|f(x_0)|} \qquad < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

$\implies (fg)$ stetig in x_0

(iii) Übungsaufgabe

Example 7.2.8

1. Beispiel 7.2.2 $f1 : \mathbb{R} \ni x \mapsto x \in \mathbb{R}$ stetig ist.
2. Induktiv folgt $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$ ist stetig (nach Theorem 7.2.7)
3. Da konstante Funkionen stetig sind, folgt nach Theorem 7.2.7, dassfür jedes $a \in \mathbb{R} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax$ stetig ist.
4. Jede rationale Funktion ist stetig.

Theorem 7.2.9 (Präsenzaufgabe)

Seien $R_1, R_2 \subset \mathbb{R}$ nichtleer sowie $f : R_1 - R_2$ und $g : R_2 \to \mathbb{R}$ stetig in x_0 bzw. in $f(x_0)$. Dann ist $g \circ f : R_1 \to \mathbb{R}$ stetig in x_0, wobei

$$(g \circ f)(x) := f(g(x)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

7.3 Charakterisierung der Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen

Theorem 7.3.1 Folgencharakter der Stetigkeit

Sei $A \subset \mathbb{R}$ nichtleer. Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ ist stetig in $x \in A$, genau dann wenn für jede Folge $(x_n) \subset A$ mit $x_n \to x$ gilt, dass $f(x_n) \to f(x)$.

Proof 7.3.2 Theorem 7.3.1

“ $\implies$ ” Sei $f : A \to \mathbb{R}$ stetig in $x \in A$ und $(x_n) \subset A$ mit $x_n \to x$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, sodass $\forall y \in A$ mit $|x - y| < \delta$ impliziert, dass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Da $x_n \to x$, gibt es ein

$N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| < \delta \quad \forall n \geq N$. Sei $n \geq \mathbb{N}$. Dann gilt also $|f(x_n) - f(x) < \varepsilon$. Also $f(x_n) \overset{n\to\infty}{} f(x)$.

"$\Longleftarrow$" Angenommen f ist nicht stetig in x. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in A$: $|x_n - x| < \frac{1}{n}, \delta > 0$ und $|f(x) - f(x_n)| \geq \varepsilon$. Also $x_n \to x$, aber $f(x_n)$ konvergiert nicht gegen $f(x)$. ■

Definition 7.3.3

Sei $A \subset \mathbb{R}$ nichtleer und $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Berührpunkt von A.

1. Dann definieren wir

$$\lim_{x\to\infty} f(x) := \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in A}} f(x) := c$$

falls für jede Folge x_n

2. Rechtsseitiger Limes von f in x_0 : $\lim_{x\searrow x_0} f(x) = c$, falls x_0 Berührpunkt von A und für jede Folge $(x_n) \subset (x_0, \infty)$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ gilt: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$.

Sei A nach oben ubeschränkt, dann schreibe

$$\lim_{x\to\infty} f(x) := c,$$

falls $\forall (x_n) \subset A$ mit $x_n \to \infty$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$.
Analog: $\lim_{n\nearrow\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Corollary 7.3.4

Sei $A \subset \mathbb{R}$ nichtleer. Dann ist eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ genau dann stetig, wenn $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x) \quad \forall x_0 \in A$ gilt.

Example 7.3.5

Sei $x_0 \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{x\searrow x_0} \lfloor x \rfloor = x_0$$

$$\lim_{x\nearrow x_0} \lfloor x \rfloor = x_0 - 1$$

7.4 Sätze üver stetige Funktionen

Theorem 7.4.1

Seien $-\infty < a < b < \infty$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a), f(b) < 0$. Dann $\exists x_0 \in [a, b]$: $f(x) = 0$

Proof Theorem 7.4.1

Œ$f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ (ansonsten betrachte $-f$).

Es sei $I_0 := [a, b]$. Ist $I_n = [a_n, b_n]$ für $n \in \mathbb{N}$ definiert, so sezte

$$I_{n+1} := \begin{cases} [a_n, \frac{a_n+b_n}{2}, & \text{falls } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) > 0 \\ [\frac{a_n+b_n}{2}, b_n], & \text{sonst.} \end{cases}$$

Induktiv folgt $\operatorname{diam}(I_n) = 2^{-n}(b-a)$ f.a. $n \in \mathbb{N}$. Weiter ist $I_0 > I_1 > I_2 > \cdots$ Also ist (I_n) eine Schachtelung abgeschlossener Intervalle mit $\operatorname{diam}(I_n) \to 0$. Nach Theorem 4.3.2 gibt es genau ein $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Speziell $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x$ f ist stetig, also gilt

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(x) = \lim_{n\to\infty} a_n \leq 0$$

Example 7.4.2 Eindimensionaler Brouwer

Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ stetig. Dann hat f einen Fixpunkt d.h. es gibt ein $x_0 \in [0,1]$ mit $f(x_0) = x_0$, denn die Hilfsfunktion $g(x) := f(x) - x$. Diese ist stetig und es gibt $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x, y \in K : |x - y| < \delta$ und $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.
Wähle solches $\varepsilon > 0$. Dann finden wir für alle $n \in \mathbb{N}$ $x_n, y_n \in K$ mit $|x_n - y_n| < 2^{-n}$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Da K kompakt, hat (x_n) eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit Grenzwert $x \in K$. Nun ist

$$|y_{n_k} - x| \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - k| \to 0.$$

Also konvergiert auch (y_{n_k}) gegen x.

Theorem 7.4.3

weiß nicht könnte alles sein

Theorem 7.4.4

Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f sowohl Maximum als auch Minimum in K an.

Proof Theorem 7.4.4

Wir zeigen, $f(K)$ ist kompakt. Sei $(y_n) \subset f(K)$ eine Folge. Nach Def. des Bildes gibt es also zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in K$ mit $f(x_n) = y_n$. Da K kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k}) \subset K$ mit Grenzwert $x \in K$. Da f stetig ist, folgt $f(x) = f(\lim_{n_k\to\infty} x_{n_k}) \stackrel{\text{stetig}}{=} \lim_{n_k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n_k\to\infty} y_{n_k}$

8 Funktionenfolgen und deren Konvergenz

8.1 Funktionenfolgen und deren Konvergenz

Ist $\Omega \subset \mathbb{R}$ nichtleer und für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert, so nennen wir (f_n) eine Funktionenfolge

Example 8.1.1

Sei für $n \in \mathbb{N}$ $\quad f_n : \Omega \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$. z.B.

1. $f_1 : \Omega \to \mathbb{R}, x \mapsto x$
2. $f_2 : \Omega \to \mathbb{R}, x \to x^2$
3. usw.

Definition 8.1.2 Punktweise Konvergenz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ nichtleer und $f, f_1, f_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$.
Wir sagen (f_n) **konvergiert punktweise gegen** f, falls $\forall x \in R$ die Folge $(f_n(x))$ gegen $f(x)$ konvergiert.
Gibt es ein $f : \Omega \to \mathbb{R}$, so dass (f_n) punktweise gegen f konvergiert, so nennen wir (f_n) **punktweise konvergent**.
Wir nennen dann f **Grenzfunktion** von (f_n).
Das bedeutet:

$$\forall x \in \Omega : \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Beachte: Bei punktweiser Konvergenz sehen wir uns also für jedes $x \in \Omega$ an, gegen welchen Wert $f_n(x)$ konvergiert. Definieren wir dann $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, so ist $f : \Omega \ni x \to f(x)$ der punktweise Limes der Funktionenfolge (f_n)

Example 8.1.3

Sei $\Omega = [0, 1]$. Wir betrachten $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = x^n, x \in [0, 1]$.
Ist $x \in [0, 1)$, so $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Hingegen $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ für $x = 1$. Also konvergiert (f_n) punktweise gegen

$$f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

Definition 8.1.4 Gleichmäßige Konvergenz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ nichtleer und $f, f_1, f_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$. Wir sagen (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen f, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ f.a. $x \in \Omega$ und alle $n \geq N$ gilt.
Das bedeutet:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : \forall x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Lemma 8.1.5

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ nichtleer und $f, f_1, f_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$ so, dass (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann konvergiert (f_n) auch punktweise gegen f.

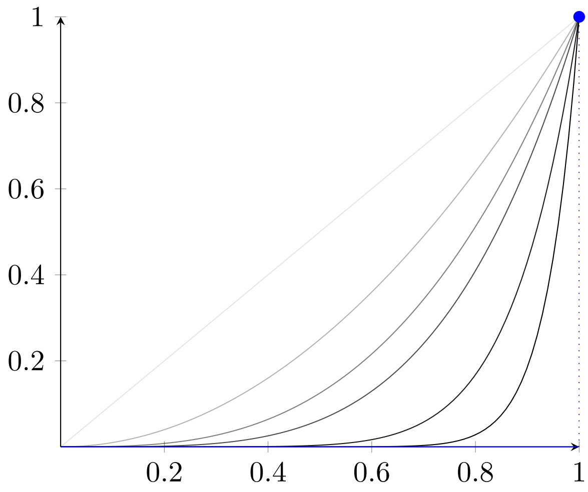


Figure 7: Definition 8.1.2

Example 8.1.6

Die Folge aus Beispiel 8.1.3 konvergiert nicht gleichmäßig.
Sei $1 > \varepsilon > 0, N \in \mathbb{N}$ beliebig. Setzte $x := \sqrt[n]{\varepsilon}$. Dann ist $x_0 \in (0,1)$ und $f_n(x_0) = \varepsilon$, d.h. $|f_n(x_0) - f(x_0)| = |f_n(x_0)| = \varepsilon \geq \varepsilon$

Theorem 8.1.7

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ nichtleer und $f_1, f_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen $f : \Omega \to \mathbb{R}$, so ist f stetig.

Proof Theorem 8.1.7

Sei $x_0 \in \Omega$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann finden wir wegen glm. Konv. ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x \in \Omega$. Nun ist f_N stetig, und daher gibt es ein $\delta > 0$ so, dass $|x_0 - x| < \delta$ die Ungleichung $|f_N(x_0) - f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ nach sich zieht. Damit folgt

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeit, dass f stetig ist.

$(f_n), f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ Funktion.
können wir Konzepte der Folgen auch auf Funktionenfolgen anwenden?
$(a_n) \subset \mathbb{R} \mapsto (f_n : \Omega \ni x \mapsto a_n)$ $f, f_1, f_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}, f_n \to f$ punktweise Konvergent $\iff \forall x \in \Omega : f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$
Sind alle f_n's stetig, so nicht unbedingt f!
Verschärfung: $f_n \to f$ **gleichmäßig**, falls $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \forall x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
Punktweise Konvergenz: $\forall x \in \Omega : \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| \varepsilon$

- Bei gleichmäßiger Konvergenz $f_n \to f$: Alle f_n's stetig $\implies f$ stetig.

8.2 Normierte Vektorräume stetiger Funktionen

In Vektorräumen:

- Addition möglich
- Multiplikation mit Skalaren möglich
- Nullvektor ($\hat{=}$ neutrales Element der Addition)

$\Omega \in \mathbb{R}$ nichtleer, dann bilden die stetigen Funktionen auf $f : \Omega \to \mathbb{R}$ einen **Vektorraum** (über $\mathbb{R}$), den wir $\boxed{C(\Omega)}$ nennen. Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, f, g \in C(\Omega) : \lambda f + \mu g : \Omega \ni x \mapsto \lambda f(x) + \mu g(x) \in \mathbb{R}$.
Der Nullvektor ist hier die Nullfunktion, $\mathbf{0} : \Omega \ni x \mapsto 0 \in \mathbb{R}$.

Wir wollen an dieser Stelle einen systematischeren Blick auf die im letzten Abschnitt eingeführte gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen entwickeln. Hierzu sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ nichtleer. Setzen wir $\mathbf{0} : \Omega \ni x \to 0$ sowie für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$

$$(\lambda f + \mu g) : \Omega \ni x \to \lambda f(x) + \mu g(x) \in \mathbb{R},$$

so erhalten die stetigen Funktionen eine **Vektorraumstruktur**. Dies ist erst einmal eine rein algebraische Struktur. Nun ist eine naheliegende Frage, wie wir **Längen** von Vektoren messen können. Dies soll den folgenden vier Prinzipien genügen:

(P1) Längen von Vektoren sind stets nichtnegativ und endlich. *Dies ist sonnvoll:* Wir würden zum Beispiel niemals sagen, ein Stab sei $-3\,\mathrm{m}$ lang.

(P2) Hat ein Objekt die Länge Null, so ist dies notwendigerweise der Nullvektor. *Dies ist sinnvoll:* Hat ein Objekt Länge Null, so hat es keine Ausdehnung und ist damit der Nullvektor.

(P3) Strecken wir ein Objekt um den Faktor $\lambda \geq 0$, so hat das gestreckte Objekt die λ-fache Länge des urspprünclichen Objekts. Eine Streckung mit einem Faktor $\lambda < 0$ bedeutet, dass wir die Ausrichtung des ursprünclichen Objekts umkehren und dann mit dem Faktor $|\lambda|$ strecken. Damit sollte $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ gelten.

(P4) Die Dreiecksungleichung besagt, dass wir einen Umweg machen, wenn wir nicht direkt von einem Punkt x_1 zu einem anderen Punkt x_3 laufen, sondern erst von x_1 zu x_2 und dann von x_2 zu x_3 laufen

Ziel: Ordne Funktionen eine "Länge" zu.

Definition 8.2.1

Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\| :\to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt **Norm** (Längenfunktion), falls:

(i) $\|x\| = 0 \iff x = \mathbf{0}$ (also x der Nullvektor in X ist).

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \forall x \in X : \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$

(iii) $\forall x, y \in X : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. (Dreiecksungleichung)

Das Tupel $(X, \|\cdot\|)$ heißt dann **normierter Vektorraum**.

Definition 8.2.2

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum sowie $x, x_1, x_2, \ldots \in X$. Wir sagen, dass (x_n) (bezüglich $\|\cdot\|$) gegen x **konvergiert**, falls

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0,$$

d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\|x_n - x\| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt.

Das für uns wichtigste Besipiel ist die **Supremumsnorm:**

Example 8.2.3 Supremumsnorm

$C_b(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{stetig und beschränkt}\}$. ($f$ beschränkt $\iff \exists M \geq 0 \forall x \in \Omega :$ $|f(x)| \leq M$). Dies ist auch ein Vektorraum, und es definiert

$$\|f\|_{\infty,\Omega} := \sup_{x\in\Omega} |f(x)|, f \in C_b(\Omega)$$

eine **Norm darauf**. (Auf $C(\Omega)$ **nicht:** z.B. $\Omega = (0,1), f(x) := \frac{1}{x}$, dann $\|f\|_{\infty,\Omega} \not< \infty$)

$\|\cdot\|_{\infty,\Omega}$ “Supremumsnorm” ($\widehat{=}$ Länge/Größe von Funktion)

(0) $\|\cdot\|_{\infty,\Omega} : C_b(\Omega) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. (Hier geht ein: $f \in C_b(\Omega)$ beschränkt)

(i) $f \in C_b(\Omega) \wedge \underbrace{\|f\|}_{\infty,\Omega} = 0$, zu zeigen $\boxed{f = 0}$

$$\sup_{x\in\Omega} |f(x)| = 0 \implies (\forall x \in \Omega : f(x) = 0) \implies f = 0.$$

und $\|\mathbf{0}\|_{\infty,\Omega} = \sup_{x\in\Omega} 0 = 0$.

(ii) $\lambda \in \mathbb{R}, f \in C_b(\Omega)$, so ist $\forall x \in \Omega : |\lambda f(x)| =$

$$\begin{aligned}
&= |\lambda||f(x)| \implies \|\lambda f\|_{\infty,\Omega} \\
&= \sup_{x\in\Omega} |\lambda f(x)| \\
&= \sup_{x\in\Omega} |\lambda||f(x)| \\
&= |\lambda| \sup_{x\in\Omega} |f(x)| \\
&= |\lambda| \, \|f\|_{\infty,\Omega} \,.
\end{aligned}$$

(iii) $f, g \in C_b(\mathbb{R})$. Dann

$$\forall x \in \Omega : |f(x) + g(x)| \leq \underbrace{|f(x)|}_{\leq \|f\|_{\infty,\Omega}} + \underbrace{g(x)}_{\leq \|g\|_{\infty,\Omega}} \leq \|f\|_{\infty,\Omega} + \|g\|_{\infty,\Omega} \,.$$

Supremum in x

- Beachte: $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ ist auch normierter Raum.

Konvergenz: $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \|x_n - x\| < \varepsilon$

Definition 8.2.4

Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Vektorraum, sowie $x, x_1, x_2, \ldots \in X$. Wir sagen, (x_n) **konvergiert** bezüglich $\|\cdot\|$ gegen x, falls $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \|x_n - x\| < \varepsilon$

Proposition 8.2.5

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ nichtleer, $f, f_1, \ldots \in C_b(\Omega)$. Dann konvergiert (f_n) genau dann gleichmäßig gegen f, wenn (f_n) bezüglich $\|\cdot\|_{\infty,\Omega}$ gegen f konvergiert. $\iff \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\infty,\Omega} = 0$

" $\implies$ "

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : (\forall x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$
$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \left(\sup_{x\in\Omega} : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\right)$$
$$(\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : ||f_n(x) - f(x)||_{\infty,\Omega} \leq \varepsilon) \implies f_n \to f, \|\cdot\|_{\infty,\Omega}$$

■

Example 8.2.6

$f_n : \mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{1}{n(1+x^2)} \in \mathbb{R}$.

Punktweise Konvergenz $f_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{1+x^2}\right) \to 0$. Also $f_n \to 0$ punktweise konvergent.
Gleichmäßig Konvergent bedeutet nach Proposition 8.2.4:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - \underbrace{f(x)}_{0}| = \left(\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\infty,\omega}\right)$$
$$= 0$$

Hier:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - \underbrace{f(x)}_{=0} = \frac{1}{n} \underbrace{\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}}_{=1} = \frac{1}{n},$$

also

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\infty,\Omega} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

gleichmäßige Konvergenz

Example 8.2.7

$$f_n : [0,1] \ni x \mapsto x^n \in \mathbb{R},$$

so $f_n \to f$ punktweise konvergent mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1), \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

Haben

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1)} |x^n| \overset{n\to\infty}{\not\to} 0$$

8.3 Potenzreihen

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_N x^N = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$$

Definition 8.3.1

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R} \wedge x_0 \in \mathbb{R}$. Dann heißt der **formale Ausdruck**

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

formale Potenzreihe mit **Entwicklungspunkt** x_0.
Die **Konvergenzmenge** von f ist

$$D_f \coloneqq \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \text{ konv.} \right\}$$

Wir nennen dann $f : D_f \to \mathbb{R}$ die durch die Potenzreihe **dargestellte Funktion** (kurz auch **Potenzreihe**)

Example 8.3.2

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Dies konvergiert genau dann wenn $|x| < 1$.
Geometrische Reihe: $f(x) = \frac{1}{1-x} = \underbrace{\underbrace{1 + x} + x^2 + \ldots}$

Theorem 8.3.3 Weierstraßsches Konvergenzkriterium

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $(f_n) \subseteq C(A)$, sodass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\infty,A} < \infty.$$

Dann konvergiert die Funktionenreihe

$$f \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

absolut und gleichmäßig auf A. Speziell ist f auf A Wohldefiniert und stetig.

Proof Theorem 8.3.3

Zuerst: Sei $x \in A$. Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{infty,A} =: c < \infty,$$

also ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

absolut konvergent. Weiter gilt

$$\begin{aligned}\left|f(x) - \sum_{n=0}^{N} f_n(x)\right| &= \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)\right| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(x)| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty,A} \to 0\end{aligned}$$

also

$$\left|f(x) - \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right| \to 0,$$

unabhängig von x. Nach Satz 8.1.7 ist also f stetig (da $\sum_{n=0}^{N} f_n$ stetig ist) ■

Theorem 8.3.4

Sei $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$.
Konvergiert die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

für ein $x_1 \neq x_0$, so konvergiert dann die Potenzreihe absolut und gleichmäßig auf einem Ball $B_r(x_0)$, wobei $0 < r < |x_1 - x_0|$.

Proof Theorem 8.3.4

Wir **wissen**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_1 - x_0)^n$$

konvergiert. Also ist

$$(a_n(x_1 - x_0)^n)$$

eine Nullfolge und somit beschränkt durch ein $M \geq 0$. Ist $x \in B_r(x_0)$, folgt

$$|a_n(x - x_0)^n| = |a_n(x_1 - x_0)^n| \left|\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right|^n \leq M\Theta^n,$$

wobei $\Theta := \left|\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right| \in (0,1)$ für $x \neq x_0$.
Sei $f_n(x) := a_n(x - x_0)^n$. Wir erhalten mit $\Theta = \frac{r}{|x_1-x_0|}$, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\infty,B_r(x_0)} \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \Theta^n = M \cdot \frac{1}{1-\Theta} < \infty.$$

Die Aussage folgt nach Weierstraßschem Konvergenzkriterium (Theorem 8.3.3)

Corollary 8.3.5

In der Situation von Theorem 8.3.4 gibt es genau ein $0 \leq R \leq \infty$ mit folgender Eigenschaft: Die Potenzreihe

- konvergiert für alle $x \in B_R(x_0)$ und
- divergiert für alle $x \in \mathbb{R}_{\setminus \overline{B_R(x_0)}}$.

Es gilt speziell

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

mit der Konvention: $\frac{1}{\infty} := 0, \frac{1}{0} := \infty$. Wir nennen R **Konvergenzradius** der Potenzreihe. Die Formel für R wie oben nennen wir **Hadamardsche Formel**.

Proof Korollar 8.3.5

Aus Satz 8.3.4 folgt, dass die Konvergenzmenge ein um x_0 zentriertes Intervall ist. Wir setzen

$$R' := \sup \{R \geq 0 : \text{die Potenzreihe konvergiert für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - x_0| < \mathbb{R}\}.$$

Sind $x, x_0 \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < R$ mit $R := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$, so folgt nach Wurzelkriterium

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x - x_0| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt{|a_n|}} \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

Sind $x, x_0 \in \mathbb{R}$ mit $\|x - x_0\| > R$, so folgt ähnlich

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} > 1,$$

nach Wurzelkriterium also $R > R'$. ■

Corollary 8.3.6

Ist f eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ und $R \geq 0$ der Konvergenzradius der Potenzreihe, so ist f auf $(x_0 - R, x_0 + R)$ stetig.

Example 8.3.7

Seien

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n!(x-1)^n$$

f hat Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und es gilt

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{2}.$$

Da f für $x \in \left\{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right\}$ nicht konvergiert, folgt $D_f = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.
g hat Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ und wir beobachten

$$\frac{a_n + 1}{a_n} = n + 1 \to \infty$$

für $n \to \infty$.
Ist $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, dann ist $\sqrt[n]{a_n} \to a$ für $n \to \infty$ (Ü).
Damit nach Hadamard $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \infty$, also $R = 0$.
Damit $D_f = 1$.

9 Die Exponentialfunktion

9.1 Die Exponentialfunktion

In diesem Abschnitt führen wir die für die gesamte Mathematik zentrale **Exponentialfunktion** ein. Diese ist als Potenzreihe definiert:

Definition 9.1.1 Exponentialreihe und -funktion

Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir die **Exponentialreihe** durch

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

und nennen $\exp(x) : \mathbb{R} \ni x \mapsto \exp(x) \in \mathbb{R}$ die **Exponentialfunktion**.

Der Ausdruck $\exp(x)$ ist in der Tat wohldefiniert, denn nach Quotientenkriterium ist die Exponentialreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent: Setzen wir $q_n := \frac{x^n}{n!}$, so erhalten wir

$$\left| \frac{q_{n+1}}{q_n} \right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0, \quad n \to \infty,$$

und daraus folt die absolute Konvergenz. Damit ist der **Konvergenzradius** der Exponentialreihe $R = \infty$.

Im Folgenden wollen wir nun die zentralen Eigenschaften der Exponentialfunktion herausarbeiten. Hierzu benötigen wir als wichtiges Hilfmittel die nachfolgende Aussage von unabhängigem Interesse:

Theorem 9.1.2 Satz vom Cauchy-Produkt

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei abolut konvergente Reihen. Dann gilt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} =: \sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$

wobei auch letztere Reihe absolut konvergent ist.

Proof Theorem 9.1.2

Wir setzen für $N \in \mathbb{N}$

$$A_N := \sum_{n=0}^{N} a_n, A_N^* := \sum_{n=0}^{N} |a_n|, B_N := \sum_{n=0}^{N} b_n, B_N^* := \sum_{n=0}^{N} |b_n|.$$

Wir definieren

$$\mathcal{Q}_N := \left\{(k,l) \in \mathbb{N}_0^2 : k, l \leq N\right\}, \Delta_N := \left\{(k,l) \in \mathbb{N}_0^2 : k + l \leq N\right\}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}|A_N B_N - C_N| &\leq \sum_{(k,l)\in \mathcal{Q}_N \setminus \Delta_N} |a_k b_l| \\ &\leq \sum_{(k,l)\in \mathcal{Q}_N \setminus \mathcal{Q}_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}} |a_k b_l| \\ &\leq A_N^* B_N^* - A^*_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} B^*_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}.\end{aligned}$$

Nun sind wegen der absoluten Konvergenz $(A_N^*), (B_N^*)$ konvergent. Also konvergiert auch die Produktfolge $(A_N^* B_N^*)$ und ist damit Cauchy. Sei also $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $N_0 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|A_N^* B_N^* - A_M^* B_M^*| < \varepsilon \quad \text{für alle } M, N \geq N_0$$

gilt. Speziell ist also $A_N^* B_N^* - A^*_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} B_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} < \varepsilon$ für alle hinreichend großen $N \in \mathbb{N}$, und damit folgt $\lim_{N\to\infty} |A_N B_N - C_N| = 0$, und damit folgt die Behauptung hinsichtlich Konvergenz. Für die absolute Konvergenz argumentieren wir analog. ■

Task 9.1

Machen Sie sich klar, dass die Aussage des vorherigen Satzes *nicht wahr bleibt*, wenn wir die absolute Konvergenz fallen lassen. Betrachten Sie hierzu

$$a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

und wiederholen Sie hierzudas Leibnizkriterium sowie die Divergenz der harmonischen Reihe.

Als wichtige Anwendung von Satz 9.1.2 zeigen wir nun fundamentale Aussagen für die Exponentialfunktion. Hierzu ist es zweckmäßig, eine Funktioni $f : A \to \mathbb{R}$

- **monoton wachsend** zu nennen, falls $x, y \in A$ mit $x < y$ impliziert, dass $f(x) \leq f(y)$,
- **streng monoton wachsend** zu nennen, falls $x, y \in A$ mit $x < y$ impliziert, dass $f(x) < f(y)$,
- **monoton fallend** zu nennen, falls $x, y \in A$ mit $x < y$ impliziert, dass $f(x) \geq f(y)$,
- **streng monoton fallend** zu nennen, falls $x, y \in A$ mit $x < y$ impliziert, dass $f(x) > f(y)$,

Theorem 9.1.3 Zentrale Eigenschaften der Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion exp erfüllt die folgenden Eigenschaften:

(i) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ sowie $\exp(0) = 1$. Diese Eigenschaft heißt Funktionalgleichung der Exponentialfunktion.

(ii) Es ist $\exp : \mathbb{R} \to R_{>0}$ und $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(iii) exp ist stetig.

(iv) exp ist streng monoton wachsend mit $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$.

Proof Theorem 9.1.3

Für (i) bemerken wir, dass $\exp(x)$ und $\exp(y)$ durch absolut konvergente Reihen definiert sind. Daher dürfen wir den Satz vom Cauchy-Produkt anwenden. Damit folt nach Satz 9.1.2, dass

$$\begin{aligned}\exp(x)\exp(y) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}x^k y^{n-k}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k y^{n-k}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x+y)^n\\ &= \exp(x+y)\end{aligned}$$

Wobei wir den binomischen Lehrsatz (Kapitel 1) verwendet haben. Da $\exp(0) = 1$ direkt aus der Definition folgt, erhalten wir also (i).

Für (ii) stellen wir zuerst fest, dass nach (i) $1 = \exp(0) = \exp(x-x) = \exp(x)\exp(-x)$ gilt. Direkt aus der Definition schließen wir, dass $\exp(x) > 0$ für $x > 0$ gilt, und diese Identität gibt uns dann $\exp(-x) > 0$. Damit ist $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, und weiter $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Eigenschaft (iii) folgt sofort aus Korollar 8.3.6, da der Konvergenzradius der Exponentialreihe nach Definition $R = \infty$ beträgt.

Für (iv) seien $x < y$. Aus der Definition folgt sofort, dass $\exp(z) \geq 1$ für alle $z \geq 0$ und $\exp(z) > 0$ für alle $z > 0$ gilt. Also ist

$$1 < \exp(y-x) = \exp(y)\exp(-x) = \frac{\exp(y)}{\exp(x)},$$

woraus sofort die strenge Monotonie folgt. Für die Limiten beachten wir, dass für alle $x > 0$ die Ungleichung $1 + x \leq \exp(x)$ gilt. Hiermit ergibt sich direkt $\lim_{x\to\infty}\exp(x) = \infty$. Aber

$$\lim_{x\to-\infty}\exp(x) = \lim_{x\to\infty}(-x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\exp(x)} = 0,$$

und damit folgt der Satz. ∎

Theorem 9.1.4

Die Exponentialfunktion ist eine stetige Bijektin $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$.

Proof Theorem 9.1.4

Die Stetigkeit von exp wurde bereits in Theorem ref9.1.3 festgehalten.Die Injektivität folgt sofort aus der strengen Monotonie von exp, sie Theorem 9.1.3 (iv). Für die Surjektivität sei $y_0 > 0$. Nach Theorem 9.1.3 (iv) gilt $\lim_{x\to-\infty}\exp(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty}\exp(x) = \infty$, womit es $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ gibt mit $0 < \exp(z_1) < y_0 < \exp(z_2)$. Wir betrachten nun die Funktion $g : x \mapsto \exp(x) - y_0$. Dann gilt $g(z_1) < 0$ und $g(z_2) > 0$, und da exp stetig ist, gibt es nach dem Zwischenwertsatz, Theorem 7.4.1, ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $\exp(x) = y_0$. Damit ist $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ eine bijektive Abbildung. ∎

9.2 Bijektivität, Monotonie und der Logarithmus

Basierend auf Theorem 9.1.3 ist $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0} bijektiv$. Damit existiert die Umkehrfunktion von exp als Abbildung $\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$. Aufgrund ihrer Wichtigkeit geben wir ihr einen eigenen Namen:

Definition 9.2.1 Logarithmus

Die nach Satz 9.1.4 wohldefinierte Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ wir der **(natürliche) Logarithmus** genannt. Wir notieren die natürliche Logarithmusfunktion mit $\log : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$.

Wir studieren nun elementare Eigenschaften der Logarithmusfunktion:

Theorem 9.2.2

Die Logarithmusfunktion $\log : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ ist stetig mit

$$\lim_{x \searrow 0} \log(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} \log(x) = +\infty.$$

Weiter erfüllt sie $\log(1) = 0$ und für alle $x, y > 0$ die **Funktionalgleichung**

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y).$$

Proof Theorem 9.2.2

Basierend auf Satz 9.1.3 und 9.1.4 müssen wir nur die Stetigkeit zeigen. Sei hierzu $y_0 = \exp(x_0) \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir setzen $y_1 < y_0 < y_2$. Weiter impliziert die Stetigkeit von exp, dass exp das Intervall $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ bijektiv auf das Intervall $[y_1, y_2]$ abbildet. Setzen wir $\delta := \min\{y_0 - y_1, y_2 - y_0\}$, so folgt $\exp^{-1}((y_0 - \delta, y_0 + \delta)) \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, und damit folgt die Stetigkeit von log in x_0. Die restlichen Eigenschaften ergeben sich direkt hieraus und den entsprechenden Eigenschaften der Exponentialfunktion - beispielsweise ist für $x, y > 0$:

$$\exp(\log(xy)) = xy \quad \text{und} \quad \exp(\log(x) + \log(y)) = \exp(\log(x))\exp(\log(y)) = xy,$$

womit nach Injektivität der Exponentialfunktion $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ gelten muss. ■

9.3 Allgemeine Potenzen und Exponentialfunktionen

Im vorliegenden Abschnitt wollen wir nun **Potenzen** zu allgemeinen nicht-negativen Basen einführen. Antizipieren wir die aus der Schule bekannte Rechnung $\log(a^x) = x\log(a)$ (die nun *per Definition* gelten soll) und erinnern uns an $\exp(\log(z)) = z$, so íst die Definition $a^x := \exp(x\log(a))$ naheliegend:

Definition 9.3.1 Allgemeine Potenzen

Sei $a > 0$. Wir definieren die **x-te Potenz zu Basis** a durch

$$a^x := \exp(x\log(a)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Wir schreiben dann auch $\exp_a : \mathbb{R} \ni x \mapsto a^x \in \mathbb{R}$ für die entsprechende Funktion.

Lemma 9.3.2

Sei $a > 0$ und $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie in Definition 9.3.1 Dann ist $\exp_a$ stetig mit

$$\exp_a\left(\frac{p}{q}\right) = a^{\frac{p}{q}} \quad \text{für alle } p \in \mathbb{Z} \text{ und alle } q \in \mathbb{N}\ . \tag{12}$$

Damit ist $\exp_a$ die eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung der Funktion $\mathbb{Q} \ni x \mapsto a^x \in \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Das bedeuted: $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig und erfüllt (12).

Proof 9.3.3 9.3.2

Die Stetigkeit von $\exp_a$ folgt direkt aus den Stetigkeitseigenschaften von exp und log sowie Sätzen 7.2.7 und 7.2.9. Um (12) zu zeigen, gehen wir schrittweise vor. Wir behaupten zuerst, dass

$$\exp_a(n) = a^n \quad \text{für allen} \in \mathbb{N}_0 \tag{13}$$

gilt. Dies folgt aus nach der Funktionalgleichung $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ für $x, y \in \mathbb{R}$ und somit

$$\exp_a(n) \overset{\text{Def}}{=} \exp(n\log(a)) = \exp\big(\underbrace{\log(a) + \cdots + \log(a)}_{n\text{-mal}}\big) = (\exp(\log(a)))^n = a^n,$$

wobei wir im letzen Schritt die Identität $\exp(\log(a)) = a$ ausgenutzt haben. In einem zweiten Schritt zeigen wir nun, dass sich die Identität für (13) auf alle ganzen Zahlen $n \in \mathbb{Z}$ veralgemeinern lässt. Hierzu sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist mit der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

$$1 = \exp(0) = \exp(n\log(a) + (-n)\log(a)) = \exp(n\log(a))\exp(-n\log(a)),$$

und damit folgt nach dem bereits Bewiesenen, dass

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\exp(n\log(a))} = \exp(-n\log(a)),$$

und wir erhalten die Identität (13) für alle ganzen Zahlen. Sei nun $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$a^p = \exp(p\log(a)) = \exp\left(1\left(\frac{p}{q}\log(a)\right)\right) = \left(\exp\left(\frac{p}{q}\log(a)\right)\right)^q.$$

Also ist $\exp\left(\frac{p}{q}\log(a)\right)$ die eindeutig bestimmte positive Lösung der Gleichung $x^q = a^p$, und dies bedeutet gerade (12). Nun reicht es zu realisieren, dass $\exp_a$ stetig ist und $\mathbb{Q}$ gemäß Satz 9.3.2 dicht in $\mathbb{R}$ liegt. ■

Wir notiern an dieser Stelle die Rechenregeln für allgemeine Potenzen, die bereits aus der Schule bekannt sind, nun aber rigoros bewiesen werden können - siehe Übung 9.2 unten.

Task 9.2

Beweisen Sie die Rechenregeln aus Bemerkung (13).

9.4 Grenzwerte

Ziel: Grenzverhalten der Exp.-& Log.-Funktion verstehen

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : \lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x^k} = +\infty. \tag{14}$$

$$\frac{1}{x^k}\exp(x) = \frac{1}{x^k}\left(\underbrace{1+\ldots+\frac{x^k}{k!}}_{>0} + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + \sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{x^j}{j!}\right) \geq \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{1}{x^k} = \frac{x}{(k+1)!} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

somit 14

- $$\forall k \in \mathbb{N}_0 : \lim_{x\to\infty} x^k \exp(-x) = 0 \tag{15}$$

$$x^k\exp(-x) = \frac{x^k}{\exp(x)} = \left(\frac{\exp(x)}{x^k}\right)^{-1} \to 0$$

- $$\forall a > 0 : \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1. \tag{16}$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\log(a)\right) \to \exp(0) = 1$$

- $$\forall s > 0 : \lim_{x\to\infty, x>0} x^s = 0$$

$$\lim_{x\to\infty, x>0} x^{-s} = +\infty$$

$$x^s = \exp(s\log(x)).(x_n) \subset \mathbb{R}_{>0} \& x_n \to 0$$
$$\implies s\log(x_n) \to -\infty.$$
$$\implies x_n^s = \exp(s\log x_n) \to 0, n \to \infty.$$

Weiter $\forall n \in \mathbb{N} : x_n^s > 0$. Damit

$$x_n^{-s} = \frac{1}{x_n^s} \to +\infty$$

da $x_n^s \to 0, x_n^s > 0$.
$\forall s > 0 : \lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^s} = 0$. Sei $(x_n) \subset \mathbb{R}_{>0}$ mit $x_n \to \infty, n \to \infty$. Schreibe $\forall n \in \mathbb{N} : x_n = \exp(y_n)$. Dann $y_n \to \infty, n \to \infty$.

$$\implies \frac{\log(x_n)}{x_n^s} = \frac{y_n}{(\exp(y_n))^s} = \frac{1}{s}\cdot\frac{sy_n}{\exp(sy_n)} \overset{z_n := sy_n}{=} \frac{1}{s}\underbrace{\left(\frac{z_n}{\exp(z_n)}\right)}_{\overset{n\to\infty}{\to}} \to 0, n \to \infty$$

9.5 Landausymbolik

Zwei Symbole, um das Verhalten von Funktionen qualitativ zu fassen: $\beta \in \mathbb{R}, f, g : (\beta, \infty) \to \mathbb{R}$

- $f(x) = \mathcal{O}(g(x)), x \to \infty :\iff \exists C > 0 \exists R > \beta \forall x > R : |f(x)| \leq C|g(x)|$. ("$f$ Groß-Oh-von $g, \to \infty$")
- $f(x) = o(g(x)), x \to \infty :\iff \forall \varepsilon > 0 \exists R > \beta \forall x > R : |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$.
- $\forall p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Polynom: $p(x) = \mathcal{O}(\exp(x)), x \to \infty$
  $p(x) = o(\exp(x)), x \to \infty$
- $\forall s > 0 : \log(x) = o(x^s), x \to \infty$

$\sqrt[n]{n} \overset{n\to\infty}{\to} 1$
$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\log n\right) \to \exp 0 = 1.$ $f(n)^{\frac{1}{n}} \overset{?}{\to} 1$

10 $\mathbb{C}$ und trigonometrische Funktionen

10.1 Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

Definition 10.1.1

Wir definieren den **Körper** $\mathbb{C}$ der **komplexen Zahlen** als Menge aller Tupel (a, b) mit $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass:

- $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$
- $(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$, für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Das **Nullelement** ist gegeben durch $(0, 0)$, und die Eins in $\mathbb{C}$ durch $(1, 0)$. Wir nennen $i := (0, 1)$ die **imaginäre Einheit**. Letztlich nennen wir für $z = (a, b) \in \mathbb{C}$
$\mathrm{Re}(z) := a$ den **Realteil** von z und $\mathrm{Im}(z) := b$ den **Imaginärteil** von z. $(a, b) = a\underbrace{(1, 0)}_{1} + b\underbrace{(0, 1)}_{i} = a + bi$
"Gaußebene"

- $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1 \cdot (1, 0) = -1$
- $\mathbb{R} \ni x \mapsto (x, 0)(= x + i \cdot 0) \in \mathbb{C}$
  "$\mathbb{R} \to \mathbb{C}$" **kanonische Einbettung**

Längenfunktion/Betrag auf $\mathbb{C}$

Definition 10.1.2

Der Betrag von $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ ist gegeben durch $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$.

Lemma 10.1.3

Der Betrag ist eine Norm auf $\mathbb{C}$

(i) $|\cdot| \to [0, \infty)$

(ii) $\forall x \in \mathbb{C} : |x| = 0 \iff x = 0$

(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{C} \forall x \in \mathbb{C} : |\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$

(iv) $\forall x, y \in \mathbb{C} : |x + y| \leq |x| + |y|$.

Definition 10.1.4

Für $z = a + bi \in \mathbb{C}$ nennen wir $\overline{z} := a - bi$ die z **komplex konjugierte Zahl**.

Lemma 10.1.5

$\forall z \in \mathbb{C} : z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}, \frac{1}{z} := \frac{\overline{z}}{|z|^2} (z \neq 0)$
Beweis: ausrechnen

10.2 Konvergenz in $\mathbb{C}$

Eine komplexwertige Folge (z_n) (geschrieben $(z_n) \subset \mathbb{C}$) ist wie im Reellen eine Abbildung $z : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Der Begriff der Konvergenz komplexer folgen ist wie im Reelen erklärt: Nämlich sagen wir, dass $(z_n) \subset \mathbb{C}$ gegen ein $z \in \mathbb{C}$ (in $\mathbb{C}$) **konvergiert**, falls

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |z - z_n| < \varepsilon.$$

Dies ist natürlich in Übereinstimmung mit Definition 8.2.2. Analog sagen wir, dass (z_n) eine **Cauchyfolge** in $\mathbb{C}$ ist, falls

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N : |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

Wir studieren nun, wie wir diese Eigenschaften auf die entsprechende Eigenschaften der Real- und Imaginärteile uzrückführen können. Da Real- und Imaginärteile reelle Zahlen sind, führen wir damit die Konvergenz bzw. Cauchyeigenschaft komplexer Folgen auf die entsprechenden Begriffe für reelle Folfen zurück.

Lemma 10.2.1

Seien $z, z_1, z_2, \ldots \in \mathbb{C}$. Dann ist die Folge (z_n)

(i) genau dann gegen z in $\mathbb{C}$ konvergent, falls $\mathrm{Re}(z_n) \to \mathrm{Re}(z)$ und $\mathrm{Im}(z_n) \to \mathrm{Im}(z)$ in $\mathbb{R}$ konvergieren,

(ii) genau dann Cauchyfolge in $\mathbb{C}$, fall sowohl $(\mathrm{Re}(z_n))$ als auch $(\mathrm{Im}(z_n))$ Cauchyfolgen in $\mathbb{R}$ sind,

(iii) genau dann gegen z konvergent, falls $(\overline{z_n})$ gegen $\overline{z}$ konvergiert.

Proof Lemma 10.2.1

Sei $\xi \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\max\{|\mathrm{Re}(\xi)|, |\mathrm{Im}(\xi)|\} \leq |\xi| \leq \sqrt{2} \max\{|\mathrm{Re}(\xi)|, |\mathrm{Im}(\xi)|\}.$$

Wenden wir diese Ungleichung auf $\xi = z_n - z$ an, so folgt die Behauptung. ■

Da $\mathbb{R}$ mit dem Betrag auf den reellen Zahlen vollständig ist, erhalten wir damit sofort:

Corollary 10.2.2

$(\mathbb{C}, |\cdot|)$ ist **vollständing**: Jede Cauchyfolge in $\mathbb{C}$ konvergiert in $\mathbb{C}$.

Wie im Reellen nennen wir für eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n$$

konvergent in $\mathbb{C}$, falls die Folge $\left(\sum_{n=0}^{N} z_n\right)_{N \in \mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{C}$ konvergiert. Wir nennen wie weiter **absolut konvergent**, falls

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$$

in $\mathbb{R}$ konvergiert. Mittels Lemma 10.2.1 sehen wir dann, dass

- jede in $\mathbb{C}$ absolut konvergente Reihe in $\mathbb{C}$ konvergiert,
- und dass sowohl das Quotienten- als auch das Wurzelkriterium mit den offensichtlichen Änderungen auch in diesem neuen Kontex Gültigkeit behalten.

Hiermit können wir wie im Reellen die **komplexe Exponentialfunktion** $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definieren. Wir setzen für $z \in \mathbb{C}$

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{n!},$$

und definieren direkte $e^z := \exp(z)$. Wie aus dem Beweis der entsprechenden Eigenschaften für ide reelle Exponentialfunktion ersichtlich ist, aben wir auch hier die **Funktinalgleichung** der Exponentialfunktion, nämlich

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2) \quad \text{für alle } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Für das nachfolgende Kapitel notieren wir noch, dass

$$\overline{e^z} = \overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z}) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \tag{17}$$

gilt. Damit gilt speziell

$$\overline{e^{ix}} = e^{-ix} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

Task 10.1

Zeigen Sie (18). Beachten Sie hierbei, dass für alle $z_1, \cdots, z_N \in \mathbb{C}$ die Gleichheit $\overline{z_1 + \cdots + z_N} = \overline{z_1} + \cdots + \overline{z_N}$ gilt, und verwenden Sie Lemma 10.2.1. ■

10.3 Trigonometrische Funktionen

In diesem Abschnitt führen wir die trigonometrischen Funktionen ein, und damit speziell Sinus und Cosinus. Wir beginntn direkt mir der Definition:

Definition 10.3.1 Sinus, Cosinus

Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir den **Sinus** und den **Cosinus** von x durch

$$\begin{aligned} \sin(x) &:= \operatorname{Im}(e^{ix}), \\ \cos(x) &:= \operatorname{Re}(e^{ix}). \end{aligned}$$

Damit gilt per Definition die **Eulersche Formel**

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Wir wollen nun auch für Sinus und Cosinus eine Reihendarstellung herleiten. Hierzu bemerken wir die folgende 4**-er-Periodizität** der Potenzen i^n für $n \in \mathbb{N}$:

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 4k, k \in \mathbb{N}_0, \\ i & \text{falls } n = 4k+1, k \in \mathbb{N}_0, \\ -1 & \text{falls } n = 4k+2, k \in \mathbb{N}_0, \\ -i & \text{falls } n = 4k+3, k \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Basierend auf Definition 10.3.1 erhalten wir dann die Potenzreihendarstellung

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{19}$$

und

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{20}$$

Beide Potenzreihen haben den Konvergenzradius $R = \infty$, und damit sind sin und cos stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$. Wir beginnen nun mit einer elementaren Feststellung:

Lemma 10.3.2

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\left|e^{ix}\right| = 1$ und speziell $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

Proof Lemma 10.3.2

Es ist für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\left|e^{ix}\right|^2 = e^{ix}\overline{e^{ix}} = e^{ix}e^{-ix} = e^0 = 1.$$

Also folgt $\left|e^{ix}\right| = 1$. Nun ist nach Definition

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = \mathrm{Im}(e^{ix})^2 + \mathrm{Re}(e^{ix})^2 = \left|e^{ix}\right|^2 = 1.$$

Damit ist der Beweis vollständig. ■

Task 10.2

Geben Sie einen Beweis der vorausgegangenen Lemmata, der ausschließlich auf der Cauchyschen Produktformel beruht.

Theorem 10.3.3 Additionstheoreme

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$,

(ii) $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$,

(iii) $\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

(iv) $\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Proof Theorem 10.3.3

Es ist für $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \mathrm{Im}\left(e^{i(x+y)}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(e^{ix}e^{iy}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left((\cos(x) + i\sin(x))(\cos(y) + i\sin(y))\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) + i(\sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)\right) \\
&= \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x).
\end{aligned}$$

Die anderen aussagen (ii)-(iv) zeigen wir analog. ■

Wir wollen uns nun der annalytischen Definition der Kreiszahl π zuwenden. Diese wird gewöhnlich als das Doppete der kleinsten positiven Nullstelle des Cosinus eingeführt, und hierfür benötigen wir das nachfolgende Lemma:

Lemma 10.3.4

Die Cosinusfunktion besitzt eine kleinste Nullstelle in $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Proof Lemma 10.3.4

Wir haben oben bereits gesehen, dass $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist. Nun ist $\cos(0) = 1$ nach (20). Andererseits ist

$$\cos(2) = \left(1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!}\right) + \left(-\frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!}\right) + \cdots$$

Die erste Klammer hat den Wert $-\frac{1}{3}$, und alle darauffolgende Klammern sind negativ. Also folgt $\cos(2) < -\frac{1}{3} < 0$. Damit erhalten wir nach dem Zwischenwertsatz (Satz 7.4.1), dass es ein $x_0 \in (0, 2)$ mit $\cos(x_0) = 0$ gibt. Dies zeigt, dass cos eine Nullstelle in $(0, 2)$ besitzt. Wir zeigen nun, dass es genau eine Nullstelle in $(0, 2)$gibt und weisen hierfür nach, dass *cos* auf $(0, 2)$ monoton fallend ist. Seien also, $x, y \in (0, 2)$ mit $x < y$. Dann gilt nach Satz 10.3.3 (iv):

$$\cos(x) - \cos(y) = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Für $\xi \in (0, 2)$ ist

$$\begin{aligned}\sin(\xi) &= \xi - \frac{\xi^3}{3!} + \frac{\xi^5}{5!} - \frac{\xi^7}{7!} + \cdots \\ &= \xi\left(1 - \frac{\xi^2}{3 \cdot 2}\right) + \frac{\xi^5}{5!}\left(1 - \frac{\xi^2}{7 \cdot 6}\right) + \cdots \\ &,\end{aligned}$$

womit alle Klammern positiv sind. Also folgt $\sin(\xi) > 0$ und damit $\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) > 0$. Andererseits ist $\sin(\xi) = -\sin(-\xi)$, womit $\cos(x) - \cos(y) > 0$ folgt. Damit ist cos auf $(0, 2)$ streng monoton fallend. Damit ist die Aussage bewiesen. ■

Lemma 10.3.4 erlaubt uns jetzt, die Kreiszahl π wie folgt zu definieren:

Definition 10.3.5 Kreiszahl *pi*

Die **Kreiszahl** π ist definiert durch die Doppelte der kleinsten Nullstelle der Cosinusfunktion auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Theorem 10.3.6

Es gilt $\exp i\frac{\pi}{2} = 1$ und somit $\exp i\pi = -1, \ldots$

Proof 10.3.7 Satz 10.3.6

z.z. $\exp i\frac{\pi}{2} = i$. Hierzu: $\cos(\frac{\pi}{2} = 0$. Aber $1 = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \implies \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \in \{-1, 1\}$
Aber auch $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$, also $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Nach Euler:
$\exp i\frac{\pi}{2} = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = i$.
Damit folgt der Rest.

Corollary 10.3.8 Periodizität

$\forall x \in \mathbb{R}$:

(i) $\cos x + 2\pi = \cos x, \sin x = \sin x + 2\pi$

(ii) $\cos x + \pi = -\cos x, \sin x + \pi = -\sin x$

(iii) $\cos x = \sin \frac{\pi}{2} - x, \sin x = \cos \frac{\pi}{2} - x.$

Proof Korollar 10.3.7

$\exp i(x + 2\pi) = \exp(ix) \cdot \exp(i \cdot 2\pi) = \exp ix, \ldots$

Corollary 10.3.9

$\sin^{-1}(\{0\}) = \pi\mathbb{Z} = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$
$\cos^{-1}(\{0\}) = \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$

Proof Korollar 10.3.8

$\sin(k\pi) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ (direkte Rechnung/Theorem 10.3.6)
Beh.: $\sin x > 0$ für $x \in (0, \pi)$. Hierzu:
Nach Korollar 10.3.7 (iii): $\sin((0, \pi) = \cos\left((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\right)$.
Nun $\cos 0 = 1$ und $\cos : (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ SMF., $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.
$\implies \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}) : \cos x > 0. \overset{\cos\text{ gerade}}{\implies} \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} : \cos x > 0 \implies \forall x \in (0, \pi) : \sin x > 0 \overset{\sin\text{ ung}}{\implies}$
$\forall x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi) : \sin x \neq 0$. Aber nach Korollar 10.3.2 ist sin 2π-periodisch $\implies$ Beh. für Sinus. Für cos verwende Korollar 10.3.7 (iii).

Definition 10.3.10

Für $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ definiere

$$\tan(x) := \frac{\sin x}{\cos x}$$

("Tangens"). Für $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ definiere

$$\cot(x) := \frac{\cos x}{\sin x}$$

("Cotangens")

10.4 Arcusfunktionen

Ziel: Umkehrbarkeit trigonometrischer Funktionen wegen Periodizität schwiereig.

Lemma 10.4.1

Die Funktionen

(i) $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$,

(ii) $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ und

(iii) $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$

sind stetige Bijektionen.

Proof Lemma 10.4.1

cos ist auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ streng mon. fallend, also $-\sin$ auf $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Aber $-\sin$ ungerade, also $-\sin$ auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ streng monoton fallend, also folgt, dass cos nach Korollar 10.3.7 auf $[0, \pi]$ streng monoton fallend ist. Aber cos stetig, $\cos 0 = 1$ und $\cos \pi = -1$ nach Theorem 10.3.6, also (i) nach Zwischenwertsatz.

Für sin (ii) und tan (iii) analog (streng monoton wachsend). Weiter:
$\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) : \tan -x = \frac{\sin -x}{\cos -x} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$.
Aber tan stetig, also $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, also injektiv.
Beh.: $\tan 0 = 0$ und $\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$.

$$\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} = +\infty$$

- sin stetig und $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ (Satz 10.3.6) $\implies \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$.
- cos stetig, pos auf $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, cos neg auf $\left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$, also $\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} = +0$

Definition 10.4.2

Die Umkehrfunktionen der in Lemma 10.4.1 defiierten Einschränkungen von $\sin, \cos, \tan$ heißen **Arcussinus, Arcuscosinus, Arcustangens**. $[\arcsin, \arccos, \arctan]$

10.5 Polardarstellung komplexer Zahlen

Theorem 10.5.1 Polardarstellung

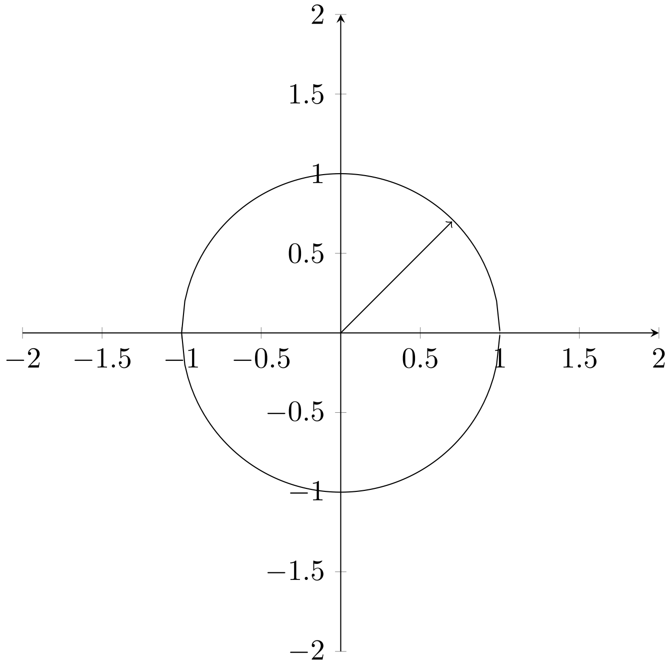


Figure 8: Polardarstellung 1

Zu jeder komplexen Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es eindeutig bestimmte $r > 0, \varphi \in [0, 2\pi)$ mit

$$z = r \exp i\varphi.$$

φ heißt **Winkel/Argument** von z.

Proof Satz 10.5.1

Œ$|z| = 1$. Dann $z = \exp i\varphi$, und falls $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ allgemein, so ist $\xi = |\xi| \cdot \frac{\xi}{|\xi|}$ und damit reicht es aus, $|z| = 1$ zu betrachten. Weiter Œ$|z| = 1$ und $\operatorname{Im} z > 0$. Schreibe $z = a + bi$, damit $a^2 + b^2 = 1$, also $a \in [-1, 1]$. Nach Lemma 10.3.1 (i) $\exists! \varphi \in [0, \pi] : \cos\varphi = a \implies \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 = \cos^2\varphi + b^2 \implies b^2 = \sin^2\varphi \implies b = \sin\varphi$.
Damit $z = a + ib = \cos\varphi + i\sin\varphi = \exp i\varphi$. Für $b \leq 0$ analog. ■

- $z_1 = \exp i\varphi_1, z_2 = \exp i\varphi_2$
  $z_1 z_2 = \exp i(\varphi_1 + \varphi_2)$

- $z_1 = r_1 \exp i\varphi_1, z_2 = r_2 \exp i\varphi_2$
  $z_1 z_2 = \underbrace{r_1 r_2}_{\text{Streckung}} \underbrace{\exp i(\varphi_1 + \varphi_2)}_{\text{Drehung}}$

Part III. Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit

11 Differenzierbarkeit

- $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \rightsquigarrow$ bei affin-linearen Funktionen konstant, “Steigung”

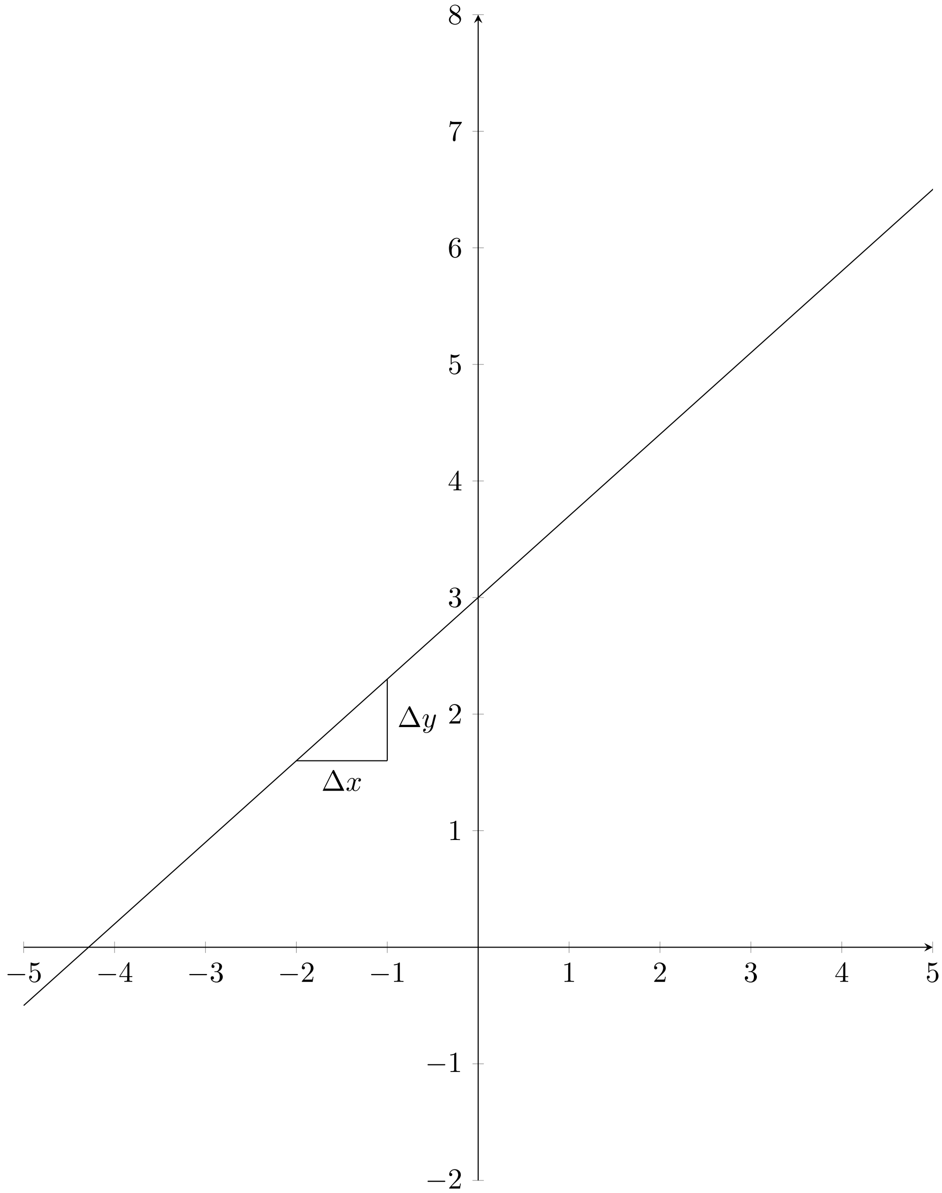


Figure 9: somthing

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0)$$

11.1 Differenzierbarkeit

Steigung:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

und wenn $\lim_{x\to x_0}$ dann ist das die infinitesimale Steigung in x_0.
Früher gab es die Annahme jede stetige Funktion müsse (außer Außnahmepunkte) vollständig Differenzierbar sein. (Stimmt nicht)

Definition 11.1.1

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ nichtleer. $f:\Omega\to\mathbb{R}$ heißt **differenzierbar** in $x_0\in\Omega$, falls $x_0\in\Omega$ Häufungspunkt von Ω ist und der Limes ("Ableitung von f in x_0")

$$f' := \frac{df}{dx}(x_0) := \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega\setminus\{x_0\}}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

existiert.
Ist f in jedem $x_0\in\Omega$ differenzierbar, so heißt f differenzierbar in Ω.

Example 11.1.2

Für $n\in\mathbb{N}_0 : f_n(x) := x^n$.
Beh.: $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x_0)=nx_0^{n-1} \quad \forall x_0\in\mathbb{R}$.

$$f_n'(x_0)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\frac{f_n(x_0+h)-f_n(x_0)}{h}.$$

Für $h\neq 0$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\left(f_n(x_0+h)-f(x_0)\right) &= \frac{1}{h}\left(\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x_0^k h^{n-k}\right)-x_0^n\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x_0^k h^{n-k-1}\\ &\quad \mid n-k-1=0 \text{ für } k=n-1 \text{ sonst ist Exponent pos. also } =0\\ &= \binom{n}{n-1}x_0^{n-1}\cdot 1\\ &= nx_0^{n-1}\end{aligned}$$

Example 11.1.3

$\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ differenzierbar mit $\exp' = \exp$.

- $x_0 = 0$. Für $h \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{h}\left(\exp(h) - \exp(0)\right) - \exp(0)\right| &= \left|\frac{\exp(h) - \exp(0) - \exp(0)h}{h}\right| \\
&= \frac{1}{h}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{h^n}{n!} \\
&= |h|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|h|^{n-2}}{n!} \\
&\overset{|h|\leq 1}{\leq} |h|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \\
&\leq |h|\exp(1) \overset{|h|\to 0}{\to} 0.
\end{aligned}$$

$\implies \exp'(0) = 1.$

- $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. $\exp'(x_0) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\exp(x_0+h)-\exp(x_0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \exp(x_0) \underbrace{\frac{\exp(h)-1}{h}}_{\to 1} =$ $\exp(x_0)$.

- Lesen wir Definition 11.1.1 mit den offensichtlichen Mod. für $\mathbb{C}$-wertige Funktionen, dass $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \exp(\lambda x) \in \mathbb{C}$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ die Ableitung $f'(x) = \lambda \exp(\lambda x)$ hat.

Example 11.1.4

$f(x) := \exp(ix)$. Dann $f'(x) = ie^{ix}$,

$$f'(x) = (\cos(x) + i\sin(x))' = \cos'(x) + i\sin'(x) = i\exp(ix) = -\sin(x) + i\cos(x).$$

$\implies \sin' = \cos, \cos' = -\sin.$

Example 11.1.5

$|\cdot| : \mathbb{R} \ni x \mapsto |x|$ ist stetig, aber in $x_0 = 0$ nicht differnezierbar

$$x_n \searrow 0 : \frac{|x_n| - 0}{x_n - 0} = 1,$$

$$x_n \nearrow 0 : \frac{|x_n| - 0}{x_n - 0} = -1.$$

Also $|\cdot|$ nicht differenzierbar in $x_0 = 0$.

Theorem 11.1.6

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ nichtleer, $x_0 \in \Omega$ Häufungspunkt von Ω. Dann ist $f : \Omega \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar genau dann wenn:
$\exists c > 0 : \exists \varphi : \Omega \to \mathbb{R} : \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{\varphi(x)}{x-x_0} = 0$ und $\forall x \in \Omega : f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + \varphi(x)$. In diesem Fall $c = f'(x_0)$

Proof Theorem 11.1.6

Angenommen, Darstellung gilt. Dann $\forall x \in \Omega \setminus x_0 \implies \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - c\right| \leq \left|\frac{\varphi(x)}{x-x_0}\right| \overset{x\to x_0}{\to} 0$ $\implies f$ differenzierbar in x_0 und $f'(x_0) = c$.
Andere Richtung: Definiere

$$\varphi(x) \coloneqq f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0),$$

$$x \neq x_0 : \left|\frac{\varphi(x)}{x - x_0}\right| = \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right| \to 0,$$

da f differenzierbar in x_0.qed

Corollary 11.1.7

Ist $\Omega \subset \mathbb{R}$ nichtleer, $x_0 \in \Omega$ Häufungspunkt von Ω und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0, so ist f stetig in x_0.

Proof Corollar 11.1.7

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &= |c(x - x_0) + \varphi(x)| \\ &\leq c\overset{\to 0}{|x - x_0|} + |x - x_0| \overset{\to 0}{\left|\frac{\varphi(x)}{|x - x_0|}\right|} \overset{x\neq 0}{\underset{x\to x_0}{\to}} 0\end{aligned}$$ ■

Example 11.1.8

sgn ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar [Da sgn in 0 unstetig]

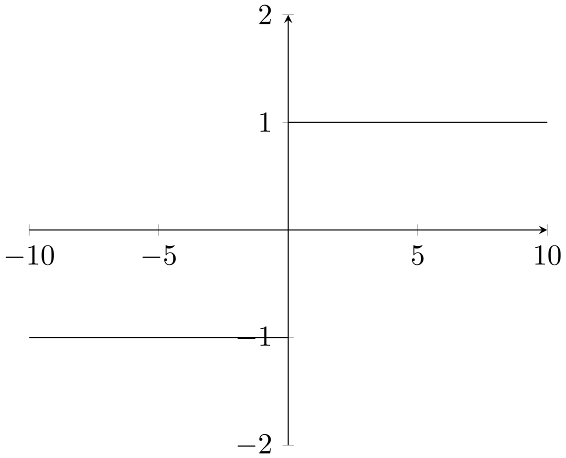


Figure 10: signum

Diffbar $\overset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ Stetig

11.2 Differenziationsregeln

Theorem 11.2.1

Seien $f, g : \underbrace{\Omega}_{\neq 0} \to \mathbb{R}$ diffbar in $x_0 \in \Omega$. Dann

(i) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \lambda f + \mu g$ differenzierbar in x_0 mit

$$(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0).$$

[Linearität der Ableitung]

(ii) f, g differenzierbar in x_0 mit $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$. (Produkt-/Leibnizregel)

(iii) Ist $g(x_0) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ differenzbar in x_0 mit $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$ (Quotientenregel)

$$\left(\frac{Z}{N}\right)' = \frac{NAZ - ZAN}{N^2}$$

Proof Theorem 11.2.1

(i) Limiten linear.

(ii) Schreibe

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \underbrace{f(x)}_{\to f(x_0)} \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\to g'(x_0)} + g(x_0) \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)}$$

$$\overset{x \overset{\neq}{\to} x_0}{\to} f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0).$$

(iii)

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0} \to -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Beachte: g differenzierbar in $x_0 \implies$ stetig in x_0. Aber $g(x_0) \neq 0 \implies \exists \varepsilon > 0 : \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) : g(x) \neq 0$. Damit $\frac{1}{g} : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ stetig. Für (iii): Schreibe $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$, und verwende (ii) und oben genannte Formel. ■

Example 11.2.2

$f_n(x) := x^n, f_n'(x) = nx^{n-1}$. $(n \in \mathbb{N})$
$n = 1 : f_1(x) = x \implies f_1'(x) = 1.$
$n \curvearrowright n + 1$:
$f_{n+1}'(x) = \left(x^{n+1}\right)' = (x \cdot x^n)'$ Nach IV: $= 1 \cdot x^n + x \cdot n \cdot x^{n-1} = (n+1)x^n$. Analog: $g_n(x) := x^{-n}$, so gilt $g_n'(x) = (-n)x^{-n-1}$, $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Theorem 11.2.3 Kettenregel

Seien $f : \Omega \to \mathbb{R}, g : f(\Omega) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in \Omega$ beziehungsweise in $f(x_0)$. Dann ist $g \circ f : \Omega \in \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 mit $(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)g'(f(x_0))$.

Proof Theorem 11.2.3

...

Theorem 11.2.4

Sei $I \subset \mathbb{R}$ nichtleeres Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, streng monoton mit Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$. Ist f in $x_0 \in I$ differenzierbar und $f'(x_0) \neq 0$ so ist f^{-1} in $f(x_0)$ differenzierbar mit $\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Example 11.2.5

$\log'(x) = \frac{1}{x}$. $\exp' = \exp$.
$\implies \log'(x) = \frac{1}{\exp(\log(x))} = \frac{1}{x}$.

Example 11.2.6

Erinnerung: $e := \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$
$\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. $\log(e) = \lim_{n\to\infty} \log\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) \ldots$

Example 11.2.7

$\tan\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$

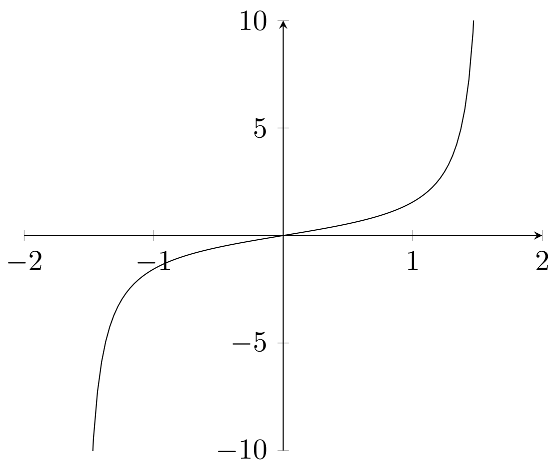


Figure 11: tan

Frage: $\arctan'$?
$f(f^{-1}(x)) = x, f = \tan$
$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
$f'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) \implies \arctan'(x) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$.

11.3 Höhere Ableitungen

Definition 11.3.1

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ nichtleer und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Existiert für $x \in \Omega$ ein $\varepsilon > 0$, so dass f in $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ differenzierbar ist, so nennen wir f **in** x **zweimal** differenzierbar, falls f' in x differenzierbar ist. Notation $f'' := (f')'$. Analog für k-te Ableitung (induktiv).

12 Konsequenzen aus der Differenzierbarkeit

12.1 Lokale Extrema und Mittelwertsatz

Definition 12.1.1

Seien $-\infty \leq a < b < \infty$ und sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f hat in $x_0 \in (a, b)$

- ein lokales Maximum $\iff \exists \varepsilon > 0 \forall y \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) : f(y) \leq f(x_0)$
- ein lokales Minimum $\iff \exists \varepsilon > 0 \forall y \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) : f(x_0) \leq f(y)$

Theorem 12.1.2

Es habe $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Extremum (i.e., lokales Maximum oder lokales Minimum). Ist f in x_0 differenzierbar, so $\boxed{f'(x_0) = 0}$

Proof Theorem 12.1.2

Œlokales Maximum. Dann $\exists \varepsilon > 0 : \forall y \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) : f(y) \leq f(x_0)$
$x_0 + \varepsilon > y > x_0 \implies 0 \geq \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} \to f'(x_0 \implies f'(x_0) \leq 0.$
$x_0 - \varepsilon < y < x_0 \implies 0 \leq \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} \to f'(x_0 \implies f'(x_0) \geq 0.$
$f'(x) = 0.$ ■

Example 12.1.3

Ist $f'(x_0) = 0$, so folgt nicht, dass x_0 lokales Extremum von f! Betrachte $f(x) = x^3$ in $x_0 = 0$.

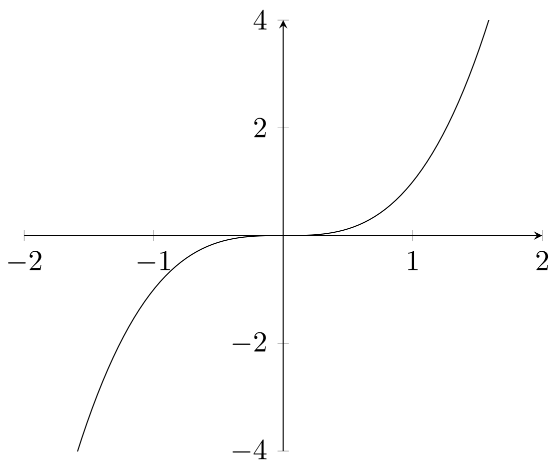


Figure 12: kubisch

Theorem 12.1.4 Rolle

Seien $-\infty < a < b < \infty$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf (a, b) differenzierbar. Gilt $f(a) = f(b)$, so $\exists x_0 \in (a, b) : \boxed{f'(x_0) = 0}$

Proof Theorem 12.1.4

Œf nicht konstant. f nimmt als stetige Funktion auf $[a, b]$ sein Maximum und Minimum an. Da f nicht konstant, können nicht beide in $\{a, b\}$ angenommen werden (da $f(a) = f(b)$).

Also hat f in einem $x_0 \in (a,b)$ ein lokales Extremum. Damit nach Theorem 12.1.2: $f'(x_0) = 0$ ■

Theorem 12.1.5 Mittelwertsatz

Seien $-\infty < a < b < \infty$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann

$$\exists x_0 \in (a,b) : f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Proof 12.1.6 Theorem 12.1.5

Definiere

$$F(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

F ist auf $[a,b]$ stetig und auf (a,b) differenzierbar.

$$\left.\begin{aligned} F(a) &= f(a), \\ F(b) &= f(a). \end{aligned}\right\} \overset{\text{Rolle}}{\Longrightarrow} F'(x_0) = 0 \implies f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

- f differenzierbar in $(a,b) \implies f$ stetig
- Lipschitz $\iff \exists L \geq 0 : \forall x, y : |f(x) - f(y)| \leq L\,|x-y|$.

Theorem 12.1.7

In der Situation von Theorem 12.1.5 gebe es ein $L \geq 0$ mit $\forall x \in (a,b) : |f'(x_0)| \leq L$.

(i) Dann ist f Lipschitz mit Lipschitzkonstante L.

(ii) $L = 0 \implies f$ konstanz. (Kriterium für Konstanz)

Proof

(i) Œ$a < x < y < b$. Dann, nach Mittelwertsatz,

$$\exists \xi \in (x,y) : \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| = \left|f'(\xi)\right| \leq L \implies |f(y)-f(x)| \leq L\,|x-y|\,.$$

(ii) $L = 0$ in (i) $\implies \forall x, y \in [a,b] : f(x) = f(y)$. ■

Example 12.1.8

Der Mittelwertsatz gilt nur auf Intervallen (siehe dies via Theorem 12.1.6. Betrachte $f : [0,1] \cup [2,3] \to x \ni \begin{cases} 1, & x \in [0,1], \\ 2, & x \in [2,3]. \end{cases}$
Dann f stetig und auf $(0,1) \cup (2,3)$ differenzierbar mit $f'(x) = 0\ \forall x \in (0,1) \cup (2,3)$. Aber f ist nicht konstant.

12.2 Monotonie

Ziel: Charakterisiere Monotonie via Ableitungen.

Theorem 12.2.1

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar.

(i)

$$\forall x \in (a,b) : \left.\begin{array}{ll} f'(x) & \geq 0 \\ f'(x) & > 0 \\ f'(x) & \leq 0 \\ f'(x) & < 0 \end{array}\right\} \implies f \begin{cases} & \text{monoton wachsend} \\ \text{streng} & \text{monoton wachsend} \\ & \text{monoton fallend} \\ \text{streng} & \text{monoton fallend} \end{cases}.$$

(ii)

$$f \quad \left.\begin{array}{c} \text{monoton wachsend} \\ \text{monoton fallend} \end{array}\right\} \implies \forall x \in (a,b) : \begin{cases} f' \geq 0 \\ f' \geq 0 \end{cases}.$$

Example 12.2.2

$f : x \mapsto x^3$ streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$, aber $f'(0) = 0$. ("(ii) scharf")

Proof Theorem 12.2.1

(i) Seien $x, y \in (a,b), x < y$. Nach Mittelwertsatz existiert $\xi \in (x,y) : 0 \leq f'(\xi) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \implies f(x) \leq f(y)$. Andere Fälle analog.

(ii) f differenzierbar und MW

$$\implies (x < y \implies f(x) \leq f(y)) \implies 0 \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \to f'(x). \qquad \blacksquare$$

Theorem 12.2.3

Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und in $x \in (a,b)$ zweimal differenzierbar mit $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$ (bzw. $f'' < 0$
Dann hat f in x ein lokales Minimum (bzw. lokales Maximum).
Kurzum: $f'' \implies$ Linkskrümmung
$f'' \implies$ Rechtskrümmung.

Proof Theorem 12.2.3

Nach Vor.:

$$\lim_{y \to x} \frac{f'(y) - f'(x)}{y - x} = f'' > 0.$$

$$\implies \exists 0 < \varepsilon < 1 : \forall \xi : |\xi - x| < \varepsilon \implies \frac{f'}{\xi - x} = \frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x} > 0.$$

$$\implies \left.\begin{cases} \xi > x \implies f'(\xi) > 0. \\ \xi < x \implies f'(\xi) < 0. \end{cases}\right\} \implies \text{Monotonie???}$$

Definition 12.2.4

Sei $-\infty < a < b < \infty$, wir nennen $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ **konvex**, falls

$$\forall x, y \in (a,b) : \forall \lambda \in (0,1) : f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Theorem 12.2.5

Seien $-\infty < a < b < \infty$ und $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion, dann ist f genau dann konvex, wenn $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

13 Integrierbarkeit

Ziel: Berechnung von Flächeninhalten von Flächen unter Graphen
Vorgehensweise:

(i) Erkläre für Funktionen, für die das anschaulich klar ist, einen Integralbegriff. Diese Funktionen $\widehat{=}$ Treppenfunktion

(ii) Lässt sich eine Funktion **geeignet** durch Treppenfunktionen approximieren, so können wir durch Grenzübergang (+ Reduktion auf Treppenfunktion) für derartige **Regelfunktionen** einen Integralbegriff einführen

13.1 Das Regelintegral

Definition 13.1.1

Seien $-\infty < a < b\infty$. Wir nennen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

(i) eine **Treppenfunktion**, falls es Punkte $a =: x_0 < x_1 < \ldots < x_N := b$ so, dass f auf jedem Teilintervall $(x_j, x_{j+1}), j = 0, \ldots, N-1$, konstanz gleich $f_j \in \mathbb{R}$ ist. Die Treppenfunktion auf $[a, b]$ bilden einen reellen Vektorraum $\mathcal{T}([a, b])$.

(ii) **Regelfunktion**, falls es eine Folge $(\varphi_n) \subset \mathcal{T}([a, b])$ gibt mit

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \varphi_n\|_{\infty,[a,b]} = 0$$

(gleichmäßig Konvergent) Schreibweise: $\mathcal{R}([a, b])$

Example 13.1.2

...

Definition 13.1.3

Seien $-\infty < a < b < \infty$ und $f \in \mathcal{R}([a, b])$. wir setzen

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx,$$

wobei $(\varphi_n) \subset \mathcal{T}([a, b])$ mit $\underbrace{\varphi_n \to f}_{\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n - f\|_{\infty,[a,b]}=0}$ gleichmäßig auf $[a, b]$.

Dies ist wegen folgendem REsultat **zulässig/wohldefiniert**.

Lemma 13.1.4

Sei $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Sind $(\varphi_n), (\psi_n) \subset \mathcal{T}([a, b])$ so, dass $\|\varphi_n - f\|_{\infty,[a,b]} \to 0, \|\psi_n - f\|_{\infty,[a,b]} \to 0$, so folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n(x)dx.$$

Proof Lemma 13.1.4

Sei $\varepsilon > 0$, dann $\exists N \in \mathbb{N} : n \geq N : \|f - \varphi_n\|_{\infty,[a,b]}, \|f - \psi_n\|_{\infty,[a,b]} < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.
Sei nun $a = x_0 < \ldots < x_k = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$, bezüglich der sowohl ϕ_n als auch ψ_n Treppenfunktionen sind. Sei $\varphi_n^{(j)}$ beziehungsweise $\psi_n^{(j)}$ die Werte von ϕ_n bzw. ψ_n auf $(x_j, x_{j+1}$. Damit

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b \varphi_n(x)dx - \int_a^b \psi_n(x)dx\right| &\overset{\text{Def}}{=} \left|\sum_{j=0}^{k-1} \left(\phi_n^{(j)} - \psi_n^{(j)}\right)(x_{j+1} - x_j)\right| \\
&\leq \sum_{j=0}^{k-1} \underbrace{\left|\varphi_n^{(j)} - \psi_n^{(j)}\right|}_{\leq \|\varphi_n - \psi_n\|_{\infty,[a,b]}} (x_{j+1} - x_j) \\
&\leq \|\varphi_n - \psi_n\|_{\infty,[a,b]} \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1}(x_{j+1} - x_j)}_{(b-a)} \\
&\leq \left(\|\varphi_n - f + f - \psi_n\|_{\infty,[a,b]}\right)(b-a) \\
&\leq \left(\underbrace{\|\varphi_n - f\|_{\infty,[a,b]}}_{<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}} + \underbrace{\|\psi_n - f\|_{\infty,[a,b]}}_{<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}}\right) \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

■

$f_j \in \mathbb{R}, f_j \cdot (x_{j+1} - x_j)$

Theorem 13.1.5

$-\infty < a < b < \infty$. Das **Regelintegral**

(i) ist **linear**: $\forall f, g \in \mathcal{R}([a, b]) : \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$.

(ii) ist **monoton**: $\forall f, g \in \mathcal{R}([a, b]) : f \leq g \implies \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

(iii) erfüllt die **Standardabschätzung**: $\forall f \in \mathcal{R}([a, b]) : \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx \leq \left(\sup_{x\in[a,b]} |f(x)|\right)(b-a)$.

Proof Theorem 13.1.5

$f, g \in \mathcal{R}([a, b]), (\varphi_n), (\psi_n) \subset \mathcal{T}([a, b]) : \|\varphi_n - f\|_{\infty,[a,b]} \to 0, \|\psi_n - g\|_{\infty,[a,b]} \to 0$. Dann: $(\lambda\varphi_n + \mu\psi_n) \subset \mathcal{T}([a, b])$ und $\|(\lambda f(x) + \mu g(x)) - (\lambda\varphi_n(x) + \mu\psi_n(x))\|_{\infty,[a,b]} \to 0, n \to \infty$. Nach Lemma 13.1.4:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)dx &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b \lambda\varphi_n(x) + \mu\psi_n(x) \\
&= \lambda \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx + \mu \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n(x)dx \\
&= \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.
\end{aligned}$$

■

Theorem 13.1.6

Seien $-\infty < a < b < \infty$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists f_\varepsilon, f^\varepsilon \in \mathcal{T}([a, b]) : f_\varepsilon \leq f \leq f^\varepsilon \& \|f^\varepsilon - f_\varepsilon\|_{\infty,[a,b]} < \varepsilon$$

Proof Theorem 13.1.6

f gleichmäßig stetig, da f, stetig auf Kompaktum. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so $\exists \delta > 0 : |x- <| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Sei $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\frac{b-a}{N} < \delta$. Setze

$$s_k^+ := \sup\left\{f(x) : x \in [a + \frac{k}{N}(b-a), a + \frac{k+1}{N}(b-a)\right\}, k \in \{0, \ldots, N-1\},$$

$$s_k^- := \inf\left\{f(x) : x \in [a + \frac{k}{N}(b-a), a + \frac{k+1}{N}(b-a)\right\}, k \in \{0, \ldots, N-1\}.$$

Sei f^ε: Auf k-tem Teilintervall $\hat{=} s_k^+$, f_ε: Auf k-tem Teilintervall $\hat{=} s_k^-$
$\implies \|f^\varepsilon - f_\varepsilon\|_{\infty,[a,b]} < 2\varepsilon$.
Nuun beachte $f_\varepsilon \leq f \leq f^\varepsilon$.

13.2 Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechung

Ziel: Integration und Differentiation verhatlen sich in gewissem Sinne invers zueinander

Theorem 13.2.1 MWS der Integralrechung

Seien $-\infty < a < b < \infty$ und sei $\omega \in \mathcal{R}([a, b])$ mit $\omega \geq 0$. Dann existieren für jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ein $x_0 \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\omega(x)dx = f(x_0) \int_a^b \omega(x_0)dx.$$

Setzen wir $\omega = 1$, so existiert also ein $x_0 \in [a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = f(x_0)(b-a).$$

Proof Theorem 13.2.1

f stetig auf Kompaktum $[a, b] \implies f$ nimmt auf $[a, b]$ Minumum m und Maximum M an
$\implies \forall x \in [a, b] : m \leq f(x) \leq M$.
$\overset{\omega\geq 0}{\implies} \forall x \in [a, b] : m\omega(x) \leq f(x)\omega(x) \leq M\omega(x)$.
$\overset{13.1.5}{\implies} m \int_a^b \omega(x)dx \leq \int_a^b f(x)\omega(x)dx \leq M \int_a^b \omega(x)dx$
$\overset{\text{ZWS}}{\implies} \exists t \in [m, M] \int_a^b f(x)\omega(x)dx = t \int_a^b \omega(x)$ Zwischenwertsatz auf $t \mapsto t \int_a^b \omega(x)dx$
$\overset{\text{ZWS}}{\implies}$ schreibe $t = f(x_0) : \int_a^b f(x)\omega(x)dx = f(x_0) \int_a^b \omega(x)dx$

Theorem 13.2.2 Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Sei $-\infty < a < b < \infty$. Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist die Funktion

$$F : [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

auf $[a, b]$ differenzierbar mit $F' = f$.

Proof Theorem 13.2.2

Sei Œ$x \in (a, b)$. Seien $h_1, h_2 > 0$ mit $a \leq x - h_2 \leq x \leq x + h_1 \leq b$. Dann existieren nach Mittelwertsatz der Integralrechnung $\xi_{h_1} \in [x, x + h_1]$ und $\xi_{h_2} \in [x - h_2, x]$, sodass

$$F(x + h_1) - F(x) = \int_x^{x+h_1} f(t)dt \overset{\text{MWS der Int.}}{=} h_1 f(\xi_{h_1}),$$

also

$$\frac{F(x + h_1) - F(x)}{h_1} = f(\xi_{h_2})$$

$$F(x - h_2) - F(x) = \int_{x-h_2}^{x} f(t)dt = h_2 f(\xi_{h_2},$$

also

$$\frac{F(x - h_2) - F(x)}{h_2} = f(\xi_{h_2})$$

Nun ist

$$\lim_{h_1 \to 0} \xi_{h_1} = \lim_{h_2 \to 0} \xi_{h_2} = x.$$

Da f stetig ist, folgt

$$\lim_{h_1 \to 0} f(\xi_{h_1}) = \lim_{h_2 \to 0} f(\xi_{h_2}) = f(x).$$

Daraus folgt

$$\frac{F(x + h_1) - F(x)}{h_1} = f(\xi_{h_1}) \overset{h_1 \searrow 0}{\to} f(x)$$

und

$$\frac{F(x - h_2) - F(x)}{h_2} = f(\xi_{h_2}) \overset{h_2 \searrow 0}{\to} f(x)$$

Also $F' = f$.

Definition 13.2.3 Stammfunktion

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Wir nennen eine differenezierbare Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine **Stammfunktion** von f, falls $F' = f$ gilt. Die Menge aller Stammfunktionen von f nennen wir **unbestimmtes Integral** und schreiben dafür

$$\int f(x)dx.$$

Beobachtung: Sind $F_1, F_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei Stammfunktionen, dann folgt $\forall x \in [a, b]$:

$$\left|F_1'(x) F_2'(x)\right| = |f(x) - f(x)| = 0.$$

Also folgt $F_1(x) = F_2(x) + C$ mit $C \in \mathbb{R}$.
$\boxed{\text{Zwei Stammfunktionen unterscheiden sich höchstens um eine additive Konstante}}$

Wir schreiben salopp

$$\int f(x) = F(x) + c,$$

wobei F eine Stammfunktion von f ist.

Corollary 13.2.4

Seien $-\infty < a < b < \infty$ und $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_{x=a}^{x=b} := F(b) - F(a).$$

Proof Korollar 13.2.4

Nach Theorem 13.2.2 ist die Funktion

$$G(x) := \int_a^x f(t)dt \quad \text{für } x \in [a, b]$$

eine Stammfunktoin von f. Es existiert also ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = G(x) + c \quad \forall x \in [a, b]$$

Also gilt

$$\int_a^b f(t) = G(b) - G(a) = (G(b) + c) - (G(a) + c) = F(b) - F(a). \qquad \blacksquare$$

Example Eine Sammlung an Stammfunktionen

$$\begin{aligned}
\int x^n dx &= \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \\
\int \frac{1}{x}dx &= \log(x) + c \\
\int \exp(x)dx &= \exp(x) + c \\
\int \sin(x)dx &= -\cos(x) + c \\
\int \cos(x)dx &= \sin(x) + c
\end{aligned}$$

Example

Sind F_1, F_2 Stammfunktionen von f_1, f_2, dann ist $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x)$ eine Stammfunktion von $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$.

Example 13.2.5

Seien $0 \leq a < b < \infty$. Wir berechnen von Hand

$$\int_a^b x dx$$

$f : x \mapsto x$ ist stetig, also Regelfunktion. Wir basteln Folge $(\varphi_n)_n$ von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen f konvergiert.

Für $n \in \mathbb{N}$ und $j \in \{0, \dots, n-1\}$ definieren wir

$$I_j := \left(a + j\frac{b-a}{n}, a + (j+1)\frac{b-a}{n}\right]$$

und setzen

$$\varphi_n(x) := \sum_{j=0}^{n-1} \left(a + (j+1)\frac{b-a}{n}\right) \mathbf{1}_{I_j}(x)$$

mit

$$\mathbf{1}_{I_j}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in I_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt $\|f - \varphi\|_{\infty, I_j} \leq \frac{b-a}{n}$
also $U_j \to f$ gleichmäßig in $[a, b]$. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi_n(x) dx &= \sum_{j=0}^{n} \left(a + (j+1)\frac{b-a}{n}\right) \frac{b-a}{n} \\ &= a \cdot \frac{b-a}{n} \cdot n + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \sum_{j=1}^{n} j \\ &= a(b-a) + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= ab - a^2 + \frac{1}{2}(b-a)^2 + \frac{(b-a)^2}{2n} \\ &\overset{n\to\infty}{\to} ab - a^2 + \frac{1}{2}b^2 - ab + \frac{a}{2}a^2 = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \end{aligned}$$

Mit Hauptsatz gilt auch

$$\int_a^b f(x) dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{x=a}^{x=b} = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

13.3 Integrationstechniken

Theorem 13.3.1 Partielle Integration und Substitutionsregel

(i) **Partielle Integration:** Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen, so gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

(ii) **Substitutinsregel:** Ist $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi : [a, b] \to [c, d]$ stetig differenzierbar, dann gilt

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

Example

Typ 1: Phönix Wollen

$$\int \sin^2(x)dx$$

berechnen.

$$\begin{aligned}
\int \sin^2(x)dx &= \int \sin(x) \cdot \sin(x)dx \\
&= -\int \sin(x)\cos'(x)dx \\
&= -\sin(x)\cos(x) + \int \cos(x)\cos(x)dx
\end{aligned}$$

Holzweg: Letztes Integral mit partieller Integration:

$$\begin{aligned}
&= -\sin(x)\cos(x) + \sin(x)\cos(x) + \int \sin(x)\sin(x)dx \\
&= \int \sin^2(x)dx
\end{aligned}$$

Stattdessen:

$$\begin{aligned}
&= -\sin(x)\cos(x) + \int 1 - \sin^2(x)dx \\
&= -\sin(x)\cos(x) + x - \int \sin^2(x)dx
\end{aligned}$$

Also

$$\int \sin^2(x)dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x)) + c$$

Typ 2:

$$\int \log(x)dx = \int 1 \cdot \log(x)dx = x\log(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = x\log(x) - x + c.$$

Example **Vertauschen der Integrationsgrenzen**

mit $\varphi(t) = b - (t - a)$:

$$\int_b^a f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi' dt = -\int_a^b f(b + a - t)dt$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx = -\int_\pi^0 \sqrt{1-\cos^2(y)}\sin(y)dy = -\int_\pi^0 \sin^2(y)dy = \int_0^\pi \sin^2(y)dy = \frac{\pi}{2}$$

- $$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1-x^2} \quad & \| \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1 \\
& x = \cos^2(t) \\
& \frac{dx}{dt} = -\sin(t) \\
= \int \frac{-\sin(t)dt}{\sqrt{1-\cos^2(t)}} & \\
= -\int \frac{\sin(t)}{\sin(t)}dt & \\
= -\int 1dt & \\
= -t & \\
= -\arccos(x) &
\end{aligned}$$

  Vorzeichen hängt vom Intervall ab

13.4 Uneigentliche Integrale & die Γ-Funktion

Ziel: Ausdehneun des Integrals/Regelintegrals auf nichtkompakte Intervalle z.B.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ def. auf $(0, 1]$

(A) Eine Integrationsgrenze ist unendlich. Form

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

z.B. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Definition 13.4.1

Sei $a \in \mathbb{R} \& f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf jedem Intervall $[a, b]$ mit $a < b < \infty$

regelintegrierbar ist. Falls

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

existiert, so heißt

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

konvergent, und wir setzen

$$\int_a^\infty f(x) = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

Example 13.4.2

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} \text{ – für welche } s \text{ konvergent?}$$

Hierzu sei $b > 1$. Setze $f(x) = x^{-s}$. Diese Funktion hat Stammfunktion

$$\int x^{-s}dx = \frac{1}{-s+1}x^{-s+1}$$

falls $s \neq 1$, und sonst

$$\int x^{-1}dx = \log(x).$$

Zuerst $s \neq 1$. Dann

$$\begin{aligned}\int_1^b x^{-1}dx &= \left[\frac{1}{-s+1}x^{-s+1}\right]_{x=1}^{x=b}\\ &= \frac{1}{-s+1}\left[b^{-s+1}-1\right]\\ &(\text{ Für Konvergenz } -s+1 \leq 0 \implies 1 \leq s \implies 1 < s\ )\\ &\overset{b\to\infty}{\to} \frac{1}{1-s}(-1) = \frac{1}{s-1}\end{aligned}$$

$\overset{s>1}{\Longrightarrow} \int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1}$
Ist $s = 1$, so gilt $\forall b > 1$:

$$\int_1^b \frac{dx}{x} = \log(b) \overset{b\to\infty}{\to} \infty,\ \text{keine Konvergenz}$$

(B) Integrand ist an einer Intervallgrenze undefiniert. z.B.:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

Definition 13.4.3

Sei $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ eine auf jedem Intervall $[a+\varepsilon,b]$ regelintegriebar ist. Falls $\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ existiert, so heißt

$$\int_a^b f(x)dx$$

konvergent, und wir setzen

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

Example 13.4.4

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^s}$$

- $s\neq 1$. Dann

$$\int \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{-s+1}x^{-s+1}$$

$$\begin{aligned}\int_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^s} &= \frac{1}{-s+1}\left[x^{-s+1}\right]_{x=\varepsilon}^{x=1}\\ &= \frac{1}{-s+1}\left[1-\varepsilon^{-s+1}\right]\\ &\to \frac{1}{1-s}\end{aligned}$$

(C) Beide Integraionsgrenzen kritisch

Definition 13.4.5

Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}, a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}\,\&b\in\mathbb{R}\cup+\infty$, auf jedem Kompaktum $[c,d]\subset(a,b)$ regelintegrierbar und $x_0\in(a,b)$ beliebig. Falls

$$\int_a^{x_0} f(x)dx \quad \& \quad \int_{x_0}^b f(x)dx$$

beide konvergieren, so heißt $\int_a^b f(x)dx$ konvergent, und wir setzen

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^b f(x)dx.$$

Example 13.4.6

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = I + II$$

$$\begin{aligned} II &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \lim_{b\to\infty} [\arctan(x)]_{x=0}^{x=b} \\ &= \lim_{b\to\infty} \arctan(b) \\ &= \frac{\pi}{2}. \\ \implies & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi. \end{aligned}$$

Ziel nun: Nutze uneigentliche Integrale, um die Fakultät zu interpolieren. $(n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot(n-1)\cdot n$
Frage: Fakultäten von rationalen Zahlen?

Definition 13.4.7 Eulersche Γ-Funktion

Für $x > 0$ definieren wir die Eulersche Γ-Funktion durch

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Diese Funktion ist wohldifiniert:

$$\int_0^1 t^{x-1} \underbrace{e^{-t}}_{} \leq 1 \leq \int_0^1 t^{x-1}dt$$

existiert nach erstem Teil der Vorlesung

$$\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt : \lim_{t\to\infty} t^{x-1}e^{-t} = 0$$

$$\implies \exists C > 0 : \forall t \geq 1 : t^{x-1}e^{-t} \leq Ct^{-2}.$$

Damit

$$\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \leq C\int_1^\infty t^{-2}dt < \infty$$

nach erstem Teil der Vorlesung

Theorem 13.4.8

$\forall n \in \mathbb{N} : \Gamma(n+1) = n!$ und
$\forall x > 0 : \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Proof Theorem 13.4.8

Sei $x > 0$. Damit

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &\overset{\text{Def.}}{=} \int_0^\infty t^x e^{-t} dt \\ &= \lim_{b\to\infty,\varepsilon\searrow 0} \int_\varepsilon^b \underbrace{t^x}_{u} \underbrace{e^{-t}}_{v'} dt \\ &= \lim_{b\to\infty,\varepsilon\searrow 0} \left(\underbrace{\left[\underbrace{t^x}_{u} \underbrace{(-e^{-t})}_{v} \right]}_{\to 0, b\to\infty, \varepsilon\searrow 0} - \int_\varepsilon^b \underbrace{xt^{x-1}}_{u'} \underbrace{(-e^{-t})}_{v} \right) \\ &= \lim_{b\to\infty,\varepsilon\searrow 0} x \int_\varepsilon^b \end{aligned}$$

13.5 Differentiation, Integration & Limesbildung

Theorem 13.5.1

Seien $-\infty < a < b < \infty$ sowie $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f_n \to r$ gleichmäßig für ein $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

- Bei gleichmäßiger Konvergenz dürfen Limiten und Integrale vertauscht werden.

Proof Thorem 13.5.1

Da alle f_n's stetig und gleichmäßig konvergieren $\implies$ f stetig, also regelintegrierbar. Nun gilt $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx \right| = \left| \int_a^b f(x) - f_n(x)dx \right| \leq \int_a^b \underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{\leq \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|} dx \leq \underbrace{(b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - f_n(x)|}_{\to 0}$$

Example 13.5.2

Aussage bleibt nicht wahr bei punktweiser Konvergenz
Fläache $= \frac{1}{2}$

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2}$$

$f_n \to 0$ punktweise auf $(0,1)$, f äquivalent 0.

$$\int_0^1 f(x)dx = 0,$$

aber $lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2}$.