2024-07-11
Winter Semester 2023/2024

University of Konstanz
Faculty of Science
(Mathematics and Statistics)

Linear Algebra

Contents

0 Präliminarien

Ansatz:
K Körper und V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum

0.1 Annulatoren

Erinnerung (s. Skript 22 LA I)

Theorem Charakterisierung von Dualbasen)

K Körper
Sei V ein n-dim. K-Vektorraum und $\mathcal{B} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ eine geordnete Basis für V. Es gibt genau eine geordnete Dualbasis für $V^\star$, $\mathcal{B}^\star = (f_1, \dots, f_n)$, sodass:

(1) $f_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$

(2) $\forall f \in V^\star : f = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) f_i$

(3) $\forall \alpha \in V : \alpha = \sum_{i=1}^n f_i(\alpha) \alpha_i$

Das heißt: $\forall f \in V^\star$ und $\forall \alpha \in V$ gilt:

$$[f]_{B^\star} = \begin{pmatrix} f(\alpha_1) \\ \vdots \\ f(\alpha_n) \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$[\alpha]_B = \begin{pmatrix} f_1(\alpha) \\ \vdots \\ f_n(\alpha) \end{pmatrix}$$

(Dualität)

Definition 0.1.1

Sei V ein n-dim. K-Vektorraum und $S \subseteq V$. Der Annihilator (Annulator) von S, was wir mit S^0 bezeichnen, ist die folgende Untermenge von $V^\star : S^0 := \{f \in V^\star : S \subseteq \ker(f)\}$

Proposition 0.1.2

Folgende Aussagen gelten:

(i) $S_1 \subseteq S_2 \implies S_2^0 \subseteq S_1^0$

(ii) $S^0 = (\operatorname{span}(S))^0$

(iii) $S^0 \subseteq V^\star$ *ist ein Unterraum*

(iv) $\operatorname{span}(S) = \{0 \iff S^0 = V^\star\}$

(v) $\operatorname{span}(S) = V \iff S^0 = \{0\}$

Proof Proposition 0.1.2

"$\implies$" trivial

"$\impliedby$" z.z. $\operatorname{span}(S) = \{0\}$ Zum Widerspruch sei $\alpha \neq 0$ und $\alpha \in \operatorname{span}(S)$, dann ist $\{\alpha\}$ l.u. Wir ergänzen zu einer Basis $\mathcal{B}$ für V. $\mathcal{B} = (\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ Sei $\mathcal{B}^\star = (f_1, \dots, f_n)$ die Dualbasis für $V^\star$. Es gilt: $f_1(\alpha_1) = 1$, also $f_1 \notin S^0$

(v)

"$\implies$" folgt aus (ii) und (iv)

"$\impliedby$" Sei $S^0 = \{0\}$ z.z. $\operatorname{span}(S) = V$.
Setze $W := \operatorname{span}(S)$. Zum Widerspruch: sei $\alpha \in V \setminus W$ und $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \subseteq W$ eine geordnete Basis für W. Dann ist $(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha)$ l.u. in V.
Ergänze zu einer geordneten Basis $(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1} = \alpha, \dots, \alpha_n)$. Sei nun $\mathcal{B}^\star := (f_1, \dots, f_k, f_{k+1}, \dots, f_n)$ die Dualbasis für $V^\star$.
Es gilt

$$\underbrace{f_{k+1}(\alpha_j) = 0 : \forall j = 1, \dots, k}_{f_{k+1} \in S^0} \text{ und } \underbrace{f_{k+1}(\alpha_{k+1}) = 1}_{f_{k+1} \neq 0}$$

■

Corollary 0.1.3 Trennung Eigenschaft

V n-dim K-VR
Sei $W \subsetneqq V$ ein Unterraum und $\alpha \in V \setminus W$. Es existiert ein $f \in V^\star$ so, dass:

$$f(W) = \{0\} \text{ und } f(\alpha) \neq 0$$

Proof Korollar 0.1.3

Wir werden aus Proposition 0.1.2 (v) herleiten.
(v) ist äquivalent zur Aussage

$$\forall S \subseteq V : \operatorname{span}(S) \subsetneqq V \iff S^0 \neq \{0\}$$

Sei nun S eine Basis für W dann ist $\operatorname{span}(S) \subsetneqq V$, es folgt $S^0 \neq \{0\}$, d.h. $\exists f \in V^\star, f \neq 0 \wedge \underbrace{f \in S^0}_{f \in W^0}$
Sei $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ eine geordnete Basis für W. $\alpha \notin \operatorname{span}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, also $(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha)$ l.u. Ergänze zur Basis

$$\mathcal{B} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1} = \alpha, \dots, \alpha_n)$$

Sei $\mathcal{B}^\star = (f_1, \dots, f_k, f_{k+1}, \dots, f_n)$ Dualbasis. Setzte $f := f_{k+1}$. ■

Theorem 0.1.4 Dimensionsformel für Annihilatoren

Sei V ein n-dim K-VR und $W \subseteq V$ ein Unterraum
Es gilt:

$$\dim W + \dim W^0 = \dim V$$

Proof Satz 0.1.4

Sei $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ eine geordnete Basis für W. Ergänze zu einer geordneten Basis

$$\mathcal{B} = (\alpha, \dots, \alpha_k, \alpha = \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)$$

für V. Sei

$$\mathcal{B}^\star = (f_1, \dots, f_k, f_{k+1}, \dots, f_n)$$

die Dualbasis für $V^\star$.
Beh. $(f_{k+1}, \dots, f_n)$ eine Basis für W^0.
Bew. der Beh. bemerke dass $\forall i = k+1, \dots, n$ ist $f_i \in W^0$, weil $f_i(\alpha_j) = 0$, wenn $i \geq k+1$ und $j \leq k$.
Beweis von Satz 0.1.4 (Fortsetzung)
Nun ist $\{f_{k+1}, \dots, f_n\} \subseteq V^\star$ l.u. (weil Teil einer Basis). Also genügt es nun z.z.:

$$\operatorname{span}\{f_{k+1}, \dots, f_n\} = W^0,$$

also sei $f \in W^0$. Es gilt (wegen (2) Charakteristik von Dualbasen), dass $f = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) f_i$. Da aber $f \in W^0$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in W$ folgt $f(\alpha_1) = \ldots = f(\alpha_k) = 0$. Also $f = \sum_{i=k+1}^n f(\alpha_i) f_i$, also $f \in \operatorname{span}(f_{k+1}, \dots, f_n)$

Corollary zum Trennungssatz

Seien $W_1, W_2 \subseteq V$ Unterräume.
Es gilt: $W_1^0 = W_2^0 \iff W_1 = W_2$

Proof Korollar 0.1

" $\Longleftarrow$ " trivial

" $\Longrightarrow$ " Zum Widerspruch
Sei $\alpha \in W_2 \setminus W_1$. Nach Trennungssatz $\exists f \in V^\star$ so dass $f(W_1) = 0$ und $f(\alpha) \neq 0$, also $f \in W_1^0$, aber $f \notin W_2^0$ ■

0.2 Berechnen von Annulatoren, Beziehung zu HGS

Example 0.2.1

$V = \mathbb{R}^5$ $S := \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \subseteq V$, wobei: $\alpha_1 = (2, -2, 3, 4, -1), \alpha_2 = (-1, 1, 2, 5, 2), \alpha_3 = (0, 0, -1, -2, 3), \alpha_4 = 1, -1, 2, 3, 0)$
Setze $W := \operatorname{span}(S)$. Finde W^0
Lösung:
Wir wollen beschreiben $f \in V^\star$ wofür gilt: $f \in S^0$, d.h. $f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = f(\alpha_3) = f(\alpha_4) = 0$
Es gilt allgemein (s. Bsp. 22.3 LA I) für $f \in V^\star$, $\exists c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in K$ s.d. $\forall (x_1, x_2, \dots, x_5) \in \mathbb{R}^5 : f(x_1, x_2, \dots, x_5) = \sum_{j=1}^5 c_j x_j$
Insbesondere $f \in W^0 \iff c_1, \dots, c_5$ erfüllen $\sum_{j=1}^5 A_{ij} cj = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq 4$, wobei A_{ij} die

Koeffizienten der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

d.h. Wir müssen HGS lösen und zwar

$$A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Gauß-Eliminations-Verfahren $\implies$ r.Z.S.F:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (c_1) & & (c_3) & & (c_5) \end{pmatrix}$$

c_1, c_3, c_5 Hauptvariablen c_2, c_4 freie Variablen
Wir bekommen

$$\begin{aligned} c_1 - c_2 - c_4 &= 0 \\ c_3 + 2c_4 &= 0 \\ c_5 &= 0 \end{aligned}$$

Lösungsraum. Sezte $c_2 := a \in \mathbb{R}, c_4 := b \in \mathbb{R}$
$c_1 = a + b, c_3 = -2b, c_5 = 0$ also einsetzen.
$W^0 = \{f : f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (a + b)x_1 + ax_2 - 2bx_3 + bx_4 : a, b \in \mathbb{R}\}$

0.2 Bi-Dualraum

Als Motivation, wollen wir die folgenden Fragen betrachten:

(1) $V \to V^\star, \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}^\star$
sie ist die Umkehrung? Genauer:
Sei $\mathbb{B}$ eine geordnete Basis für $V^\star$, gibt es eine geordnete $\mathcal{B}$ für V s.d. $\mathcal{B}^\star = \mathbb{B}$?

(2) $V \to V^\star, W \mapsto W^0$ Wie ist die Umkehrung= Genauer formuliert:
Sei U ein Unterraum von $V^\star$, gibt es ein Unterraum W von V so dass $W^0 = U$?

Schlüssel: wir arbeiten mit $(V^\star)^\star := V^{\star\star}$

Example 0.2.2

$\dim(V^{\star\star}) = \dim(V^\star) = \dim V$

Definition 0.2.3 Bi-Dualraum

$V^{\star\star}$ heißt **Bidualraum** zu V.

Proposition 0.2.4

Sei $\alpha \in V$, α induziert (kanonisch) eine lineare Funktionale $L_\alpha \in V^{\star\star}$ wie folgt

$$L_\alpha : V^\star \to K$$

definiert durch: $L_\alpha(f) \coloneqq f(\alpha) \quad \forall f \in V^\star$

Proof Proposition 0.2.4

Wir berechnen für $\forall c \in K, f, g \in V^\star$:
$L_\alpha(cf + g) = (cf + g)(\alpha) = cf(\alpha) + g(\alpha) = cL_\alpha(f) + L_\alpha(g)$. ■

Theorem 0.2.5

Die Abbildung $\chi : V \to V^{\star\star}, \alpha \mapsto L_\alpha$ definiert eine (kanonische) Isomorphie.

Proof Satz 0.2.5

λ ist linear. Zu prüfen:
$\chi(c\alpha + \beta) \stackrel{?}{=} c\lambda(\alpha)) + \lambda(\beta)$? $\forall c \in K, \alpha, \beta \in V, f \in V^\star$.
Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
[\lambda(c\alpha + \beta)](f) &= L_{c\alpha+\beta}(f) \\
&= f(c\alpha + \beta) \\
&= cf(\alpha) + f(\beta) \\
&= cL_\alpha(f) + L_\beta(f) \\
&= c\lambda(\alpha)(f) + \lambda(\beta)(f) \\
&= [c\lambda(\alpha) + \lambda(\beta)](f)
\end{aligned}$$

Wir müssen noch zeigen dass λ bijektiv ist. Da aber $\dim V = \dim V^{\star\star}$ ist (folgt aus Satz 19.10 LA I)
es genügt zu zeigen: λ ist injektiv, d.h. z.z. dass $\ker(\lambda) = \{0\}$. Zum Widerspruch nehmen wir an $\exists \alpha \in V$ s.d.:

$$\begin{aligned}
\lambda(\alpha) = 0 &\quad \text{aber} \quad \alpha \neq 0 \\
L_\alpha \equiv 0 &\quad \text{aber} \quad \alpha \neq 0
\end{aligned}$$

Aber: $\alpha \neq 0 \implies \{\alpha\}$ ist l.u. $\implies \mathcal{B} = (\alpha_1 = \alpha, \dots, \alpha_n)$ eine geordnete Basis. Sei $\mathcal{B}^\star = (f_1, \dots, f_n)$ Dualbasis. Es gilt dann: $f_1(\alpha) = f_1(\alpha_1) = 1$, d.h. $L_\alpha(f_1) = 1 \neq 0$ Wiederspruch ■

0.3 Vorlesung 3

Corollary 0.3.1

Sei $L \in V^{\star\star}$ bzw. Sei L eine lineare Funktionale auf $V^\star$.
$\exists! \alpha \in V$ s.d. $L = L_\alpha$, d.h. s.d.:

$$L(f) = f(\alpha) \quad \forall f \in V^\star. \tag{1}$$

Proof Korollar 0.3.1

Setze: $\alpha := \lambda^{-1}(L)$ ■

Corollary 0.3.2

Sei $\mathbb{B}$ eine geordnete Basis für $V^\star$. Dann gibt es eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ für V, so dass $\mathcal{B}^\star = \mathbb{B}$.

Proof Korollar 0.3.2

Setze $\mathbb{B} = (f_1, \ldots, f_n)$ und $\mathbb{B}^\star := (L_1, \ldots, L_n$ für $V^{\star\star}$ so dass $L_i(f_j) = \delta_{ij}$

Korollar 0.3.1 liefert: $\forall i : \exists! \alpha_i \in V$ mit (1) d.h. $L_i(f) = f(\alpha_i) \forall 1 \leq i \leq n, f \in V^\star$ Insbesondere $L_i(f_j) = f_j(\alpha_i) = \delta_{ij} \quad \forall 1 \leq i, j \leq n$. Setze $\mathcal{B} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. ■

Example 0.3.3

$E \subseteq V^\star$
$E^0 = \{L \in (V^\star)^\star : \forall f \in E : L(f) = 0\}$ Betrachte $\lambda : V \to V^{\star\star}, \alpha \mapsto L_\alpha$

$$\begin{aligned}
\lambda^{-1}(E^0) &= \left\{\alpha \in V : \lambda(\alpha) \in E^0\right\} \\
&= \left\{\alpha \in V : L_\alpha \in E^0\right\} \\
&= \{\alpha \in V : \forall f \in E : L_\alpha = 0\} \\
&= \{\alpha \in V : \forall f \in E : f(\alpha) = 0\}
\end{aligned}$$

Theorem 0.3.4

Sei $W \subseteq V$ Unterraum, dann gilt

$$\lambda^{-1}(W^{00}) = W$$

Proof Satz 0.3.4

Dimensionsformel für Annihilatoren (Satz 0.1.4) liefert

$$\dim W + \dim W^0 = \dim V = \dim V^\star = \dim W^0 + \dim W^{00}$$

Daraus folgt $\dim W = \dim W^{00} = \dim(\lambda^{-1}(W^{00}))$
Es genügt zu zeigen: $W \subseteq \lambda^{-1}(W^{00})$
Sei $\alpha \in W$ beliebig aber fest, dann berechne $\lambda(\alpha) = L_\alpha$. Zu zeigen: $L_\alpha \in W^{00} = (W^0)^0$, d.h. zu zeigen ist

$$L_\alpha(f) = 0 \text{ für alle } f \in W^0$$

Sei $f \in W^0$ beliebig aber fest, dann gilt $L_\alpha(f) = f(\alpha) = 0$ da $f(W^0)$ und $\alpha \in W$ ■Also wurde gezeigt, dass W ein Unterraum von $\lambda^{-1}(W^{00})$ ist und

$$\dim W = \dim \lambda^{-1}(W^{00}), \text{ also folgt } W = \lambda^{-1}(W^{00})$$ ■

Corollary 0.3.5

Sei $U \subseteq V^\star, W := \lambda^{-1}(U^0) \subseteq V$, dann gilt

$$W^0 = U$$

Proof Korollar 0.3.5 Dimensionsformel für Annihilatoren (Satz 0.1.4)

$$\dim U + \dim^0 = \dim V^\star = \dim V = \dim W + \dim W^0$$

Bemerke $\dim W = \dim \lambda^{-1}(U^0) = \dim U^0$. Es folgt $\dim U = \dim W^0$. Es genügt zu zeigen: $U \subseteq W$
Bemerke

$$\begin{aligned} W &= \lambda^{-1}(U^0) \\ &= \left\{\alpha \in V : \lambda(\alpha \in U^0\right\} \\ &= \left\{\alpha \in V : L_\alpha \in U^0\right\} \\ &= \{\alpha \in V : \forall f \in U : L_\alpha = 0\} \\ &= \{\alpha \in V : \forall f \in U : f(\alpha) = 0\}. \end{aligned}$$

Sei $f \in U$ beliebig aber fest. Zu zeigen $f \in W^0$, d.h. z.z. für alle $\alpha \in W : f(\alpha) = 0$
Sei $\alpha \in W$ beliebig aber fest, dann gilt

$$f(\alpha) = L_\alpha(f) = 0$$

Also folgt $U \subseteq W^0$ der gleichen Dimension, also $U = W^0$

Die Transponierte Abbildung

Sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung, dann induziert diese eine Abbildung $T^t : W^\star \to V^\star, g \mapsto g \circ T$
Behauptung: T^t ist linear.
Beweis: Sei $g_1, g_2 \in W^\star, c \in K$, dann gilt

$$\begin{aligned} T^t(g_1 + cg_2) &= (g_1 + cg_2) \circ T \\ &= g_1 \circ T + (cg_2) \circ T \\ &= g_1 \circ T + c(g_2 \circ T) \\ &= T^t(g_1) + cT^t(g_2) \end{aligned}$$

Definition: Die lineare Abbildung T^t wird die **transponierte Abbildung** zu T genannt

Theorem 0.3.6

Seien V, W endlich-dimensionale K-VR und T eine lineare Abbildung, dann existiert eine ein-

deutige lineare Abbildung

$$T^t : W^\star \to V^\star \text{ s.d. } \forall \alpha \in V : \forall g \in W^\star : \left(T^t(g)\right)(\alpha) = g(T(\alpha)) \qquad \blacksquare$$

Theorem 0.4.2

(1) $\ker(T^t) = (R_T)^0$

(2) $\operatorname{Rang}(T^t) = \operatorname{Rang}(T)$

(3) $R_{T^t} = (\ker(T))^0$

Proof Satz 0.4.2

(1) Es gilt

$$\begin{aligned} g \in \ker(T^t) &\iff T^t(g) = 0 \\ &\iff g \circ T = 0 \\ &\iff \forall \alpha \in V : g(T(\alpha)) = 0 \\ &\iff g \in (R_T)^0 \end{aligned}$$

(2) Setze $n := \dim V$ und $m := \dim W$ Sei ferner $r = \operatorname{Rang}(T) = \dim R_T$ Dimensionsformel für Annihilatoren (Satz 0.1.4 liefert

$$\begin{aligned} &\dim R_T + \dim(R_T)^0 = \dim W \\ \implies &r + \dim(R_T)^0 = m \\ \implies &\dim(R_T)^0 = m - r \\ \implies &\dim \ker T^t = m - r \end{aligned}$$

Nach dem Homorphiesatz (Satz 18.2) gilt für die lineare Abbildung $T^t : W^\star \to V^\star$ schon

$$\dim R_{T^t} = \dim W^\star - \dim \ker T^t$$

$$\implies \operatorname{Rang}(T^t) = \dim R_{T^t} = m - \dim \ker T^t = m - (m - r) = r = \operatorname{Rang}(T)$$

(3) Dimensionsformel für Annihilatoren (Satz 0.1.4)

$$\begin{aligned} &\dim \ker T + \dim(\ker T)^0 = \dim V \\ \implies &\dim(\ker T)^0 = \dim V - \dim \ker T = \dim R_T = \operatorname{Rang} T = \operatorname{Rang} T^t = \dim R_{T^t} \end{aligned}$$

Es genügt daher zu zeigen, dass $R_{T^t} \subseteq (\ker T)^0$
Sei daher $f \in R_{T^t}$ beliebig aber fest. Dann gilt für jedes $\alpha \in \ker T$ schon $f(\alpha) = T^t(g)(\alpha) = (g \circ T)(\alpha) = g(T(\alpha)) = g(0) = 0$ somit folgt $f \in (\ker T)^0$ ■

Theorem 0.4.3

Seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume und eine lineare Abbildung $T : V \to W$ mit transponierter Abbildung $T^t : W^\star \to V^\star$, seien ferner $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von V mit Dualbasis $\mathcal{B}^\star$ und $\mathcal{B}'$ eine geordnete Basis von W mit Dualbasis $(\mathcal{B}')^\star$. Dann gilt

$$[T^t]_{(\mathcal{B}')^\star, \mathcal{B}^\star} = [T]^t_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$$

Proof Satz 0.4.3

Setze $A := [T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ und $B := [T^t]_{(\mathcal{B}')^\star,\mathcal{B}^\star}$
$\mathcal{B} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \mathcal{B}^\star = (f_1, \dots, f_n)$
$\mathcal{B}' = (\beta_1, \dots, \beta_m), (\mathcal{B}')^\star(g_1, \dots, g_m)$
Erinnerung: $T(\alpha_j) = \sum_{i=1}^m A_{ij}\beta_i \quad$ für $j = 1, \dots, n$
$T^t(g_j) = \sum_{i=1}^n B_{ij} f_i \quad$ für $j = 1, \dots, m$
Für beliebiges $f \in V^\star$ gilt $f = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) f_i$ (Dualbasis)
Insbesondere ergibt sich damit für $f := T^t(g_j) \in V^\star$ schon

$$\sum_{i=1}^n B_{ij} f_i = T^t(g_j) = \sum_{i=1}^n (T^t(g_j))(\alpha_i) f_i = \sum_{i=1}^n A_{ji} f_i$$

Wir berechnen ferner

$$\begin{aligned}
(T^t(g_j))(\alpha_i) &= (g_j \circ T)(\alpha_i) \\
&= g_j(T(\alpha_j)) \\
&= g_j\left(\sum_{k=1}^m A_j k \beta_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^m A_{jk} g_j(\beta_k) \\
&= \sum_{k=1}^m A_{ki} \delta_{jk} \\
&= A_{ji}
\end{aligned}$$

Somit folgt, dass $A_{ji} = B_{ij}$ für alle i und j. Damit ist $B = A^t$

Erinnerung:
Sei $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$

(i) $\mathrm{Sr}(A) := \dim \operatorname{span} \text{Spalten von A}$

(ii) $\mathrm{Zr}(A) := \dim \operatorname{span} \text{Zeilen von A}$

Corollary 0.4.4

Sei $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$. *Es gilt:* $\mathrm{Zr}(A) = \mathrm{Sr}(A)$.

Proof Korollar 0.4.4

Sei $\mathcal{E}_n$ die Standardbasis für $K^{n \times 1}$ und $\mathcal{E}_m$ die Standardbasis für $K^{m \times 1}$
Und betrachte die lineare Abbildung

$$T_A : K^{n \times 1} \to K^{m \times 1}$$

definiert durch

$$T_A\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ xn \end{bmatrix}\right) = A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

die $[T_A]_{\mathcal{E}_n,\mathcal{E}_m} = A$
Bemerke dass $\mathrm{Sr}(A) = \mathrm{Rang}(T_A)$ weil $R_{T_A} = \mathrm{span}(\text{Spaltenvektoren von } A)$
Außerdem ist $\mathrm{Zr}\, A = \mathrm{Sr}\, A^t$, weil die Zeilen von A sind die Spaöten von A^t. Es folgt nun aus Satz 0.4.2 (1) (anwednem mit $T := T_A$)

$$\mathrm{Sr}\, A = \mathrm{Rang}\, T_A = \mathrm{Rang}\, T^t = \mathrm{Sr}\, A^t = \mathrm{Zr}\, A$$

(weil $A^t = [T_A]_{\mathcal{E}_m^\star,\mathcal{E}_n^\star}$) ■

Definition 0.4.5

Sei $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$. Definiere $\mathrm{Rang}\, A := \mathrm{r}\, A = \mathrm{Sr}\, A = \mathrm{Zr}\, A$

0.5 Skript 5

0.5.1 4 Quotientraum

Ansatz: K ist ein Körper, V ist ein K-Vektorraum. Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum

Definition 0.5.1

Seien $\alpha, \beta \in V$, wenn $\alpha - \beta \in W$
Bezeichnung: $\alpha \equiv \beta \mod W$. α **ist kongruent zu** β **modulo** W

Lemma 0.5.2

Die Reltaion "$\alpha \equiv \beta \mod W$" definiert eine Äquivalenzrelation auf V.

Proof Lemma 0.5.2

(1) $\equiv$ ist reflexiv: $\forall \alpha \in V$ gilt $\alpha \equiv \alpha \mod W$, weil $\alpha - \alpha = 0 \in W$

(2) $\equiv$ ist symmetrisch: $\forall \alpha, \beta \in V$ gilt: $\alpha \equiv \beta \mod W \implies \beta \equiv \mod W$, weil $(\alpha - \beta) \in W \implies -(\alpha - \beta) \in W \implies \beta - \alpha \in W$.

(3) Seien $\alpha \equiv \beta \mod W$ und $\alpha, \beta, \gamma \in W$
$\beta \equiv \gamma \mod W \implies (\alpha - \beta) \in W$ und $(\beta - \gamma) \in W \implies (\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) = \alpha - \gamma \in W \implies \alpha \equiv \gamma \mod W$

Also ist $\equiv$ transitiv ■

Definition 0.5.3

Sei $\alpha \in V$. Die **Restklasse** von $\alpha \mod W$, oder auch **Nebenklasse** von $\alpha \mod W$ ist die Äquivalenzklasse von α bzgl der Äquivalenzrelation "$\equiv \mod W$". Das heißt

$$[\alpha]_W := \{\beta \in V : \alpha \equiv \beta \mod W\}.$$

Bemerkung: $(\beta - \alpha \in W \implies \beta - \alpha = w \in W \implies \beta = \alpha + w$ für $w \in W)$

$$[\alpha]_W = \{\alpha + w : w \in W\}$$

Bezeichnung: Wir schreiben auch $\alpha + W$ für die $[\alpha]_W$.

Definition 0.5.4

Bezeichne mit V/W Die Menge aller Nebenklassen $\mod W$, d.h.

$$V/W = \{[\alpha]_W : \alpha \in V\}$$

V/W heißt: V modulo W

Auf diese Menge V/W wollen wir jetzt eine K-Vektorraum Struktur erklären

Definition 0.5.5

(1) Sei $[\alpha]_W$ die Nebenklasse von $\alpha \in V$. Ein Representant der Nebenklasse ist

$$\beta \in [\alpha]_W$$

(Bemerke: $[\beta]_W = [\alpha]_W$ gdw. $\alpha \in [\beta]_W$ gdw. $\beta \in [\alpha]_W$.

(2) Wir definieren Verknüpfung

$$+ : V/W \times V/W \to V/W$$

Seien $\alpha_1 + W, \alpha_2 + W \in V/W$ definiere $(\alpha_1 + W) + (\alpha_2 + W) := (\underbrace{\alpha_1 + \alpha_2}_{\in V}) + W$ Wir definieren eine Skalarmultiplikation, Verknüpfung

$$K \times (V/W) \to (V/W)$$

$\forall c \in K, \forall \alpha \in V$ definiere $c(\alpha + W) := (\underbrace{c\alpha}_{\in V}) + W$.

Lemma 0.5.6

Die Verknüpfungen (in Def 0.5.5) sind wohldefiniert unabhängig der Wahl der Repräsentanten, d.h.

(a) $\alpha \equiv \alpha' \mod W$ *und* $\beta \equiv \beta' \mod W \implies \alpha + \beta \equiv \alpha' + \beta' \mod W$

(b) $\alpha \equiv \alpha' \mod W$ *und* $c \in K$, $c\alpha \equiv c\alpha' \mod W$

Proof Lemma 0.5.6

(a) $\alpha - \alpha' \in W$ und $\beta - \beta' \in W \implies (\alpha - \alpha') + (\beta - \beta') \in W$, also $(\alpha + \beta) - (\alpha' + \beta') \in W$
$\alpha + \beta \equiv \alpha' + \beta' \mod W$.

(b) $\alpha - \alpha' \in W \implies c(\alpha - \alpha') \implies c\alpha - c\alpha' \in W \implies c\alpha \equiv c\alpha' \mod W$ ■

Theorem 0.5.7

Die Menge V/W, versehen mit Verknüpfungen ist ein K-Vektorraum.

Proof 0.5.8 Satz 0.5.7

Ü.A. Zum Beweis bemerke dass:
nehme $0_{V/W} := [0_V]_W$
Für additive Inverse: $-([\alpha]_W) = [-\alpha]_W$

Definition

$(V/W, +_{V/W}, \cdot_K)$ ist der **Quotiontenraum** von V modulo W

Bezeichnung: $\alpha + W := \overline{\alpha}$ falls W klar im Ansatz ist
Begründung: die Schreibweise der Verknüpfungen wird einfacher: $\overline{\alpha_1} + \overline{\alpha_2} = \overline{\alpha_1 + \alpha_2} \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in V$
$\forall \alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in V, \forall c \in K : c\overline{\alpha} = \overline{c\alpha}$

Theorem 0.5.9 Die kanonische Projektion

Die Abbildung

$$\pi_W : V \to V/W$$

definiert durch

$$\forall \alpha \in V : \pi_W(\alpha) := \overline{\alpha}$$

ist eine surjektive lineare Transformation mit $\ker(\pi_W) = W$

Proof Satz 0.5.9

Linearität?
Für $\alpha_1, \alpha_2 \in V, c \in K : \pi_W(c\alpha_1 + \alpha_2) = \overline{c\alpha_1 + \alpha_2} = \overline{c\alpha_1} + \overline{\alpha_2} = c\overline{\alpha_1} + \overline{\alpha_2} = c\pi_W(\alpha_1) + \pi_W(\alpha_2)$
Surjektiv: Sei $\overline{\alpha} \in V/W$, dann ist $\pi_W(\alpha) = \overline{\alpha}$. für $\alpha \in V$
$\ker(\pi_W)$? Sei $\alpha \in V, \alpha \in \ker(\pi_W) \iff \pi_W(\alpha) = 0_{V/W} \iff \underbrace{\alpha + W}_{\overline{\alpha}} = W \iff \alpha \in W$

Corollary 0.5.10

Es gilt: $\dim W + \dim(V/W) = \dim V$

Proof Korollar 0.5.10

Folgt aus LAI Satz 18.2, (Dimensionssatz), Anwenden auf $T = \pi_W$ ■

Theorem 0.5.11 Homomorphiesatz für Vektorräume

Seien V, Z K-VR und $T : V \to Z$ eine lieare Transformation. Es gilt:

$$V/\ker(T) \overset{\overline{T}}{\simeq} R_T$$

Genauer, betrachte die Abbildung $\overline{T} : V/\ker(T) \to R_T$ definiert durch $\overline{T}(\overline{\alpha}) := T(\alpha)$ ist wohldefiniert, linear, injektiv und surjektiv

Proof Satz 0.5.11

(i) Seien $\overline{\alpha} = \overline{\alpha'}$ für $\alpha, \alpha' \in V \implies T(\alpha) = T(\alpha')$?
Wir argumentieren

$$\begin{aligned} \overline{\alpha} = \overline{\alpha'} &\iff \alpha - \alpha' \in \ker(T) \\ &\iff T(\alpha - \alpha') = 0 \\ &\iff T(\alpha) - T(\alpha') = 0 \\ &\iff T(\alpha = T(\alpha') \end{aligned}$$

(ii) $\overline{T}(c\overline{\alpha_1}+\overline{\alpha_2}) = c\overline{T}(\overline{\alpha_1})+\overline{T}(\overline{\alpha_2})$ (ÜB)

(iii) Sei $T(\alpha) \in R_T$ für ein geegnetes $\alpha \in V$. Es ist $\overline{T}(\overline{\alpha}) = T(\alpha)$ Also $\overline{T}$ ist surjektiv.

(iv) $\overline{\alpha} \in \ker(\overline{T}) \iff \overline{T}(\overline{\alpha}) = 0 \iff T(\alpha) = 0 \iff \alpha \in \ker(T)$

Erinnerung: Seien $W, W' \subseteq V$ so dass

(i) $V = W + W'$ und

(ii) $W \cap W' = \{0\}$.

Dann ist V die **direkte Summe** von W und W', wir schreiben

$$V = W \oplus W'$$

$\forall v \in V \exists! w \in W, w' in W' : v = w + w'$

Corollary 0.5.12

Seien W, W' Unterräume, s. d. $V = W \oplus W'$ Es gilt:

$$\frac{W \oplus W'}{W} \simeq W'$$

Proof Korollar 0.5.12

Definiere eine Abbildung $P_W : V \to W'$ folgendermaßen: für $v \in V$ schreibe $v = w + w'$ für geeignete $w \in W, w' \in W'$, definiere

$$P_{W'}(v) := w'$$

Beh. $P_{W'}$ ist surjektiv. Sei $w' \in W'$, dann ist $P_{W'}(0 + w') = w'$
Beh. $\ker(P_{W'}) = W$ weil $v \in \ker(P_{W'}) \iff v = w + 0 \iff v \in W$
Satz 0.5.11 anwenden

$$\frac{W \oplus W'}{W} \simeq W' \qquad \blacksquare$$

Corollary 0.5.13

Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum. Es gilt:

$$(V/W)^* \simeq W^0$$

Proof 0.5.14 Korollar 0.5.13

Setze $T := \pi_W$ die kanonische Projektion $T : V \to V/W$ Betrachte $T^t : (V/W)^* \to V^*$
Wir wollen Satz 0.4.2 anwenden, und bekommen

$$R_{T^t} = (\ker T)^0 = W^0$$

und

$$\ker T^t = (R_T)^0 = (V/W)^0 = \{0\}$$

Also ist $T^t : (V/W)^* \xrightarrow{\sim} W^0$ linear, injektiv und surjektiv $\blacksquare$

Corollary 0.5.15

Sei $W \subseteq V$ *Es gilt*

$$W^* \simeq V^*/W^0$$

Proof 0.5.16 Korollar 0.5.14

Betrachte $\mathrm{Id} : W \to V$ und dazu $\mathrm{Id}^t : V^* \to W^*$
Satz 0.4.2 anwenden: $\ker(\mathrm{Id}^t) = (R_{\mathrm{Id}})^0 = W^0$ und $R_{\mathrm{Id}^t} = (\ker(\mathrm{Id}))^0 = (\{0\})^0 = W^*$ ■

1 Polynomalgebren

1.6 Skript 6

1.6.1 Algebren

Erinnerung: Sei K ein Körper Eine K-Algebra $\mathcal{A}$ ist ein K-Vektorraum, versehen mit Verknüpfung "Multiplikation von Vektoren"

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}, (\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta$$

$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$ und $c \in K$

(a) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$

(b) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ und $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$

(c) $c(\alpha\beta) = (c\alpha)\beta = \alpha(c\beta)$

Wenn es ein $1 \in \mathcal{A}$ so dass $1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}$ gilt, dann heißt $\mathcal{A}$ eine Algebra mit Einheit. Wenn $\alpha\beta = \beta\alpha \quad \alpha, \beta \in \mathcal{A}$, dann ist $\mathcal{A}$ eine kommutative Algebra

Example 1.6.1

$\mathcal{A} := M_{n\times n}(K)$ mit Matrixprodukt, nicht kommutativ, Einheit I_n

Example 1.6.2

$\mathcal{A} := L(V, V)$ versehen mit $T_1, T_2 \implies T_1 \cdot T_2 = T_1 \circ T_2$ nicht kommutative Einheit Id

Example 1.6.3 Potenzreihen Algebra

Sei $K^{\mathbb{N}_0} : \{f, f : \mathbb{N}_0 \to K, f \text{Abbildung}\}$ Für ein $f \in K^{\mathbb{N}_0}$ werden wir auch als Folge in K schreiben, $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots)$ wobei $f_n := f(n)$

- Summe: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : (f + g)_n := f_n + g_n$
- Skalarmultiplikation: $\forall C \in K, f \in K^{\mathbb{N}_0}(cf)_n := c(f_n)$

Damit ist $V := \left(K^{\mathbb{N}_0}, +, \cdot_c\right)$ ist ein K-Vektorraum, $\dim V = \infty$.
Wir definieren nun eine weiter Verknüpfung
Produkt: $\forall f, g \in K^{\mathbb{N}_0}$ definiere

$$(fg)_n := \sum_{i=0}^{n} f_i g_{n-i} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Proposition 1.6.4

Setze $\mathcal{A} := \left(K^{\mathbb{N}_0}, +, \cdot_c, \cdot\right)$ *ist eine kommutative Algebra mit Einheit.*

Proof Proposition 1.6.4

Wir prüfen hier Kommutativität, die Einheit (andere Axiome werden im ÜB vorkommen)

- Seien $f, g \in \mathcal{A}$ zu zeigen $fg = gf$
- Sei $n \in \mathbb{N}_0$ berechne:

$$\begin{aligned}(gf)_n &= \sum_{i=0}^{n} g_i f_{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n} g_{n-i} f_i \\ &= \sum_{i=0}^{n} f_i g_{n-i} \\ &= (fg)_n\end{aligned}$$

- Einheit: Zu prüfen: $x^0 = 1 \coloneqq (1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ ÜA ■
  - Ca.: Zu zeigen $(1 \cdot g)_n = g_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned}(1 \cdot g)_n &= \sum_{i=0}^{n} 1_i g_{n-i} \\ &= 1 \cdot g_n \\ &= g_n\end{aligned}$$

Bemerke die Folgen der Gestalt: $(1, 0, \dots, 0, \dots) = 1, (0, 1, 0, \dots, 0, \dots), (0, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots), \dots$ unendlich viele linear unabhängige Elemente aus $\mathcal{A}$, deshalb ist $\dim \mathcal{A} = \infty$.

Bezeichnung: $x = x^1 \coloneqq (0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$
Notation: $n \in \mathbb{N}, x \in \mathcal{A}, x^n \coloneqq \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{\mathbb{N} \ni n\text{-mal}}$

Proposition 1.6.5

Es ist für alle $k \in \mathbb{N}$

(1) $x^k = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{k\text{-te Stelle}}, 0, \dots, 0, \dots)$

(2) $X \coloneqq \{x^k, k \in \mathbb{N}_0\}$ *ist linear unabhängig*

- *ÜB: ist X erzeugend? ist $\operatorname{span}(X) = \mathcal{A}$?*
- *Was ist $\operatorname{span} X$?*

Definition 1.6.6 und Bezeichnung

$\mathcal{A} = (K^{\mathbb{N}_0}, +, \cdot_c, \cdot)$ heißt die Algebra der Potenzreihen über K.
Warum Potenzreihen: $f \in \mathcal{A}$ schreibe

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$$

Bezeichnung: $K[\![x]\!]$

1.6.2 Polynomalgebra

Definition und Notation $\operatorname{span}(X) := K[x]$, ist die Algebra der Polynome über K

- $f \in K[x]$ ist ein Polynom über K
- $f \in K[\![x]\!], f \neq 0$. Es gilt $f \in K[x]$ gedau dann wenn es genau ein $n \in \mathbb{N}_0$ gibt wofür $f_n \neq 0$, aber $f_k = 0$ für $k > 0$ Wir setzen $\deg f := n$ Grad von f. d.h. wenn $f \neq 0$ $\deg f = n$ ist $f = f_0x^0 + f_1x^1 + f_2x^2 + \cdots + f_nx^n, f \neq 0$
- Sei $f \in K[\![x]\!]$, definiere

  $$\operatorname{support} f := \{n \in \mathbb{N}_0 : f_n \neq 0\}$$

  (i) $\operatorname{support} f = \emptyset \iff f = 0$

  (ii) $\operatorname{support} f$ ist endlich $\iff f \in K[x]$

  (iii) Sei $f \neq 0, f \in K[x]$, dann ist

  $$\max \operatorname{support} f = \deg f.$$

1.7 Skript 7

Theorem 1.7.1

Seien $f, g \in K[x], f, g \neq 0$ Es gilt:

(i) $fg \neq 0$

(ii) $\deg(fg) = \deg f + \deg g$

(iii) fg ist normiert wenn f und g normiert sind

(iv) fg ist Skalarpolynom $\iff$ f, g sind Skalarpolynom

(v) Falls $fg \neq 0$, gilt $\deg(f + g) \leq \max(\deg f, \deg g)$

Corollary 1.7.2

$K[x]$ ist eine kommutative Algebra mit Einheit.

Corollary 1.7.3

$K[x]$ ist ein Integer Ring. Es gilt $\forall f, g, h \in K[x]$. Aus $fg = fh$ folgt $g = h$
Beweis: $fg - fh = 0 \implies f(g - h) = 0 \implies (g - h) = 0 \implies g = h$ ■

Definition 1.7.4

Sei $f : K \to K, y \mapsto f(y)$ eine Abbildung. f ist polynomiale Funktion, falls wir zu f endlich viele Skalare aus K finden können, so dass $f(y) = c_0 + c_1y + \cdots + c_ny^n \quad \forall y \in K$.

Satz über Existenz von Basis eines Vektorraumes gilt für alle Vektorräume, auch unendlich-dimensional, dafür benötigt man aber das Auswahlaxiom, bzw. den Satz von Zorn (Zorn's Lemma).

Definition 1.7.5 und Notation

Sei $\mathcal{A}$ eine K-Algebra mit Einheit. Sei $f \in K[x]$, und $\alpha \in \mathcal{A}$. Definiere

$$f(\alpha) := \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \underbrace{f_i \alpha^i}_{\in \mathcal{A}}}_{\in \mathcal{A}}$$

wobei $f = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i$ und $\alpha^0 := 1$

Theorem 1.7.6

Seien $\mathcal{A}$ eine K-Algebra, $f, g \in K[x]$ und $\alpha \in \mathcal{A}$ und $c \in K$. Es gelten:

(i) $(cf + g)(\alpha) \overset{1.7.5}{=} cf(\alpha) + g(\alpha)$

(ii) $(fg)(\alpha) \overset{1.7.5}{=} f(\alpha)g(\alpha)$. *Beweis ÜA*

Example 1.7.7

Sei $\mathcal{A} = K$ ist eine K-Algebra mit Einheit. Sei $f \in K[x]$, dann definiert 1.7.5 eine Polynomfunktion $\tilde{f} : K \to K, a \mapsto f(a)$

$$f = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i \qquad \tilde{f} \text{ ist bestimmt durch } f_0, \ldots, f_n \in K.$$

Example 1.7.8

Sei $\mathcal{A} = M_{2\times 2}(K)$. Sei $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}, f \in K[x], f = 2x^0 + x^2$

$$f(B) = 2B^0 + B^2 = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir wollen die Eigenschaften von Polynomfunktionen zusammenfassen.

Theorem 1.7.10

Sei V der K-Vektorraum Polynomfunktionen. Wir versehen V mit punktweise Multiplikation: $h_1, h_2 \in V$ und $t \in K$

$$(h_1 h_2)(t) = h_1(t)h_2(t)$$

Dann ist damit die K-Algebra der Polynomfunktionen erklärt. Diese ist eine kommutative Algebra mit Einheit (die Einheit ist die Polynomfunktion $K \to K, a \mapsto 1$)

Example 1.7.11

$K = \mathbb{F}_p$ für eine Primzahl p. Betrachte $f = (x^p - x) \in K[x] = \mathbb{F}_p[x]$ $f \neq 0$. Aber $\tilde{f} : \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$ die zugehörige Polynomfunktion ist die Nullabbildung.
z.B. $p = 3$, $f = x^3 - x = x^3 + 2x \in \mathbb{F}_3$ $f \neq 0$.
Berechnen $\tilde{f} : \mathbb{F}_3 \to \mathbb{F}_3$
$\tilde{f}(0) = 0 = \tilde{f}(1) = 0 = \tilde{f}(2) = 0$

1.8 Skript 8

Definition 1.8.0 Bezeichnung

Sei $K[x]^\sim := \{h | h : K \to K \text{ ist eine Polynomfunktion}\}$ Also ist $(K[x]^\sim, +, \cdot_c, \cdot)$ ist eine kommutative K-Algebra mit Einheit.

Definition 1.8.1 Homomorphismus und Isomorphismus

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ K-Algebren.

(i) Eine lineare Abbildung

$$\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$$

Ist eine K-Algebren **Homomorphismus**, wenn darüber hinuas gilt $\forall a, b \in \mathcal{A}$:

$$\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$$

(ii) Φ heißt K-Algebren **Isomorphismus**, wenn $\ker \Phi = \{0\}$

Theorem 1.8.2

(i) Die Abbildung

$$\Phi : K[x] \to K[x]^\sim, f \mapsto \tilde{f}$$

ist ein surjektiver K-Algebren Homomorphismus

(ii) Wenn K unendlich ist, ist Φ ein K-Algebren Isomorphismus (d.h. K unendlich $\implies$ $\ker \Phi = \{0\}$)

Proof Satz 1.8.2

Φ lineare Abbildung

(i) $\widetilde{cf + g} = c\tilde{f} + \tilde{g} \quad \forall f, g \in K[x], c \in K$. Es gilt außerdem, dass: $\widetilde{fg} = \tilde{f}\tilde{g}$. Also ist Φ ein K-Algebren Homomorphismus. Sei $h \in K[x]^\sim$, dann ist h eine Polynomialfunktion, d.h. $\exists n \in \mathbb{N}_0 : \exists c_0, \dots, c_n \in K$ so dass $h(a) = c_0 a^0 + \dots + c_n a^n \quad \forall a \in K$.
Setze $f(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i \in K[x]$ Wir berechnen $\Phi(f) = \tilde{f} \overset{!}{=} h$ ist Φ surjektiv!

(ii) Zum Beweis brauchen wir Lagrange Interpolationssatz

Erinnerung LA I:
Sei $n \in N$ und $V := K[x]_{\leq n}$ der K-Vektorraum der Polynome f von $\deg f \leq n$ oder $f = 0$. Wir haben $\dim V = n + 1$, weil z.B. $\{x^0, \ldots, x^n\}$ eine Basis bildet.

Theorem Lagrange Interpolationssatz

Sei $n \in N$, $t_0, \ldots, t_n$ $n+1$ verschiedene Elemente aus K. Für jedes $0 \leq i \leq n$, $L_i \in V^*$ definiere durch $\forall f \in V$:

$$L_i(f) := f(t_i)$$

Dann ist $\mathcal{L} := (L_0, L \ldots, L_n)$ eine Basis für V^*

Proof Lagrange Interpolationssatz

Es genügt dafür eine Dualbasis zu $\mathcal{L}$ zu finden, d.h. eine geordnete Basis

$$\mathcal{B} = (P_0, \ldots, P_n) \text{ von } V,$$

s.d. $L_j(P_i) = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 0, \ldots, n$
Definiere Insbesondere (Satz 22.9 LA I) $f = \sum_{i=0}^{n} f(t_i) P_i$

$$P_i := \prod_{j \neq i} \left(\frac{x - t_j}{t_i - t_j} \right)$$

Prüfe dass $L_j(P_i) = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 0, \ldots, n$ erfüllt ist

$$L_j(P_i) = \delta_{ij}$$ ■

Seien $(P_0, \ldots, P_n)$ LIF und $f = \sum_{i=0}^{n} f(t_i) P_i$, wenn $\tilde{f} = 0$ dann ist $f(t_i) = 0 \quad \forall i = 0, \ldots, n$. Aus $f = \sum_{i=0}^{n} f(t_i) P_i$ folgt $f = 0$ ■

1.8.1 Divisionsalgorithmus

Lemma 1.8.3

Seien $f, d \neq 0, \quad f, d \in K[x]$ mit $\deg d \leq \deg f$. Es gibt $g \in K[x]$, so dass entweder ist $f - dg = 0$ oder $\deg (f - dg) < \deg f$.

Proof Lemma 1.8.3

Schreibe $\deg f := m \geq \deg d := n$.
Schreibe $f = a_m x^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i$, $a = b_n x^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$, für $a_m \in K^x, a_i \in K, b_n \in K^x, b_i \in K$
Betrachte $\frac{a_m}{b_n} x^{m-n} d = \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} \left(b_n x^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i \right) = a_m x^m + \cdots$
Also entweder $\left(f - \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} d \right) = 0$ oder $\deg \left(f - \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} d \right) < \deg f$.
Also setze $g := \frac{a_m}{b_n} x^{m-n}$ ■

Theorem 1.8.4 Divisionsalgorithmus in $K[x]$

Seien $f, d \in K[x], f, d \neq 0$, so dass $\deg d \leq \deg f$. Dann gibt es $q, r \in K[x]$, so dass

(i) $f = dq + r$, wobei

(ii) $r = 0$, *oder* $\deg r < \deg d$

Ferner sind q, r *eindeutig durch (i) und (ii) bestimmt.*

Proof Satz 1.8.4

$f \neq 0$ und $\deg d \leq f$. Lemma 1.8.3 ergibt, dass es $g \in K[x]$ gibt, so dass $f - dg = 0$, oder $\deg(f - dg) < \deg f$
Wenn $f - dg \neq 0$ und $\deg(f - dg) \geq \deg d$, dann ergibt Lemma 1.8.3 $h \in K[x]$, so dass $(f - dg) - dh = 0$, oder $\deg(f - d(g + h)) < \deg(f - dg)$
Der deg Abstieg ist aber endlich, das heißt, nach er endlich vielen Schritten anhalten muss.
die Prozedur ergibt $q \in K[x]$ und ein $r = 0$, oder $\deg r < d$, und $f = dq + r$

Eindeutigkeit: Sei $f = dq_1 + r_1 = dq + r$ (wobei r und r_1 (ii) erfüllen)
Es folgt daraus: $d(q - q_1) = r_1 - r$. Zum Widerspruch nehmen wir an, dass $q - q_1 \neq 0$, dann haben wir $\deg(r_1 - r) = \deg(d(q - q_1)) = \deg d + \deg(q - q_1) \geq \deg d$. Jedoch ist $\deg(r_1 - r) \leq \max(\deg r_1, \deg r) < \deg d \bot$
Also ist $q - q_1 = 0$, daraus folgt $(r_1 - r) = 0$, also $q_1 = q$ und $r_1 = r$ ■

Definition 1.8.5

Seien $f, d \neq 0$, $f, d \in K[x]$

(i) Wir sagen d **teilt** f **in** $K[x]$, oder f **ist durch** d **teilbar in** $K[x]$, oder f **ist ein Vielfaches von** d **in** $K[x]$, wenn $r = 0$ in Divisionsalgorithmus (DA), d.h.

$$f = dq + 0$$

(ii) In diesem Fall ist q der Quotient

1.9 Skript 9

Corollary 1.9.1

Seien $f \in K[x]$, *und* $c \in K$. *Es gilt:* $(x - c)$ *teilt* f *in* $K[x]$ *genau dann, wenn* $f(c) = 0$.

Proof Korollar 1.9.1

Divisionsalgorithmus $\implies \exists! q, r \in K[x]$, so dass $f = (x - c)q + r$, wobei $r = 0$ oder $r < 1$, i.e. $\deg r = 0$. Also ist r ein Skalarpolynom und $f(c) = r$. Insbesondere ist $r = 0 \iff f(c) = 0$ ■

Definition 1.9.2

Sei $f \in K[x], c \in K$, dann ist c eine **Nullstelle von** f **in** K, wenn $f(c) = 0$ Abkürzung: "c ist NS von f in K"

Corollary 1.9.3

Sei $f \in K[x], \deg f =: n$, *dann hat* f *höchstens* n *Nullstellen in* K

Proof Korollar 1.9.3

Wir beweisen per Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$.

I.A.: $n = 0$: $f = c \neq 0$, gar keine NS,
wenn $n = 1$: dann ist $f = ax + c$ für $a \neq 0, ac \in K$ Klar gilt: $ax + c = 0 \iff x = \frac{-c}{a}$. Also ist $\frac{-a}{c}$ die einzige NS.

I.Annahme: Die Aussage gilt für $\forall h \in K[x] : \deg h \leq n - 1$

I.S.: $\deg f = n$, sei a eine NS von f in K. Dann $\exists q \in K[x]$, so dass $f = (x - a)q$. Also $\deg f = \deg(x - a) + \deg q \implies \deg q = \deg f - \deg(x - a) = n - 1$. Sei $b \in K$, dann ist $f(b) = 0 \iff (b - a) = 0$ oder $q(b) = 0$. I.Annahme $\implies$ q hat höchstens $n - 1$ NS in K. Daraus folgt: f hat höchstens $1 + n - 1 = n$ NS in K

1.9.1 Formale Ableitung

Notation (Erinnerung): Sei $f = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$ $c_i \in K$
Setze: $f^{(0)} = f = D^0 f$ (Konvention), dann $f^{(1)} := f' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \cdots + nc_nx^{n-1} = D^1 f$
$f^{(2)} := f'' = D^2 f := D^1\left(D^1(f)\right)$

Note 1.9.4

Für $f, g \in K[x]$ und $c \in K$ gilt $D^1(f + cg) = D^1(f) + cD^1(g)$, d.h. $D^1 : K[x] \to K[x]$ ist ein linearer Operator. In der Tat gilt $\forall k \in \mathbb{N} : D^k := \underbrace{D \circ \cdots \circ D}_{k\text{-mal}}$ ist D^k ein linearer Operator (s. ÜB 10, LA I)

Theorem 1.9.5 Taylor's Formel

Seien $\mathrm{Char}(K) = 0$. $n \in \mathbb{N}_0, a \in K$, $p \in K[x]$ *und* $\deg p \leq n$.
Es gilt:

$$p = \sum_{i=0}^{n} p^{(i)}(a)\frac{(x - a)^i}{i!} \tag{2}$$

Darüber hinaus sind die Koeffizienten $\frac{p^{(i)}(a)}{i!}$ *eindeutig*

Proof Satz 1.9.5

Sei $V = K[x] \leq n$. Für $i = 0, \ldots, n$ definiere

$$l_i : V \to K, l_i \in V^*$$

durch

$$l_i(p) := p^{(i)}(a)(\in K)$$

setzte $p_i := \frac{1}{i!}(x - a)^i \in V$
Beh.
Es gilt $\forall i, j = 0, \ldots, n$.

$$l_j(p_i) = S_{ij} \quad \text{(ÜB 5)}$$

Also sind

$(l_0, \dots, l_n)$ und

$(p_0, \dots, p_n)$

Dualbasen von V, V^*.
Es folgt nun aus Satz 22.8 LA I, dass

$$\forall p \in V : p = \sum_{i=0}^{n} l_i(p)p_i \qquad \blacksquare$$

Note 1.9.6

(1) $1, (x-a), \dots, (x-a)^n$ sind linear unabhängig, deshalb sind die Koeffizienten in (2) eindeutig

(2) $\mathrm{Char}(K) = 0$ wird vorausgesetzt, damit $i! \neq 0 \quad \forall i = 0, \dots, n$.
Wir wollen nun Taylor's Formel ausnutzen um die Nullstellen von Polynomen weiter zu untersuchen!

Definition 1.9.7

Seien $f \in K[x], f \neq 0, c \in K$ eine Nullstelle von f.
Die **Vielfachheit von** c ist die größte $\mu \in \mathbb{N}$ wofür gilt: $(x-c)^\mu$ teilt f.
Bemerke: $1 \leq \mu \leq \deg f$ (u.a. Korollar 1.9.3), weil: $f = (x-c)^\mu g$ für geignetes $g \in K[x]$. $\deg f = \mu + \deg g$.

Theorem 1.9.8 Ableitungstest zur Berechnung der Vielfachheit einer Nullstelle

Seien $\mathrm{Char}(K) = 0$ $f \neq 0$, $\deg f \leq n$, *und* $c \in K$ *eine Nullstelle von* f.
Es gilt: *c hat die Vielfachheit μ genau dann wenn*

$$\begin{cases} f^{(k)}(c) = 0 & \text{für } 0 \leq k \leq \mu - 1 \text{ und} \\ f^{(\mu)} \neq 0 & \end{cases}$$

Proof Satz 1.9.8

„ $\Longrightarrow$ " $(x-c)^\mu$ teilt f, aber $(x-c)^{\mu+1}$ teilt f nicht.
Es gibt also $g \neq 0$, so dass $f = (x-c)^\mu g$. Bemerke $\deg g \leq n - \mu$ und $g(c) \neq 0$. Die Taylorformel liefert für g

$$f = (x-c)^\mu \left(\sum_{m=0}^{n-\mu} g^{(m)}(c) \frac{(x-c)^m}{m!} \right)$$

Also:

$$f = \sum_{m=0}^{n-\mu} g^{(m)}(c) \frac{(x-c)^{\mu+m}}{m!}$$

Da die Koeffizienten von f als l. K. von $(x-c)^k$ $(0 \leq k \leq n)$ eindeutig sind, ergibt der

Vergleich:

$$
\begin{aligned}
f &= \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(c)\frac{(x-c)^k}{k!} \\
\sum_{m=0}^{n-\mu} g^{(m)}(c)\frac{(x-c)^{\mu+m}}{m!} &= \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(c)\frac{(x-c)^k}{k!} \\
g^{(0)}(c)\frac{(x-c)^{\mu}}{0!} + \cdots + g^{(n-\mu)}(c)\frac{(x-c)^n}{(n-\mu)!} &= \underbrace{\frac{f^{(0)}(c)}{0!} + \cdots + \frac{f^{(\mu-1)}(c)}{(\mu-1)!}}_{=0} + \cdots
\end{aligned}
$$

Also

$$\frac{f^{(k)}(c)}{k!} = 0$$

für $0 \leq k \leq \mu - 1$ und

$$\frac{f^{(k)}(c)}{k!} = \frac{g^{(k-\mu)}(c)}{(k-\mu)!}$$

für $\mu \leq k \leq n$ Insbesondere für $k = \mu$ erhalten wir $f^{(\mu)}(c) = g(c) \neq 0$

" $\Longleftarrow$ " Wir haben

$$f = \sum_{k=\mu}^{n} f^{(k)}(c)\frac{(x-c)^k}{k!}$$

Also

$$f = (x-c)^{\mu} \underbrace{\left[\frac{f^{(\mu)}(c)}{\mu!} + \frac{f^{(\mu+1)}(c)}{(\mu+1)!}(x-c) + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^{n-\mu}\right]}_{:=g}$$

Also $g(c) = \frac{f^{(\mu)}(c)}{\mu!} \neq 0$
Also gilt

$$f = (x-c)^{\mu} g$$

mit $g(c) \neq 0$, also $(x-c)^{\mu}$ teilt f. Wir müssen noch zeigen $(x-c)^{\mu+1}$ teilt f nicht!
Zum Widerspruch:
$\exists h \in K[x] : h \neq 0$ so dass $f = (x-c)^{\mu+1}h$, also

$$f = (x-c)^{\mu+1}h(x-c)^{\mu}(x-c)h = (x-c)^{\mu}g$$

$K[x]$ Integer $\implies g = (x-c)h$, also $g(c) = 0 \perp$ ■

1.10 Skript 10

Definition 1.10.1

Ein K-Unterraum $M \subseteq K[x]$ ist ein **Ideal** wenn gilt: $\forall f \in K[x]$ und $g \in M$ ist $fg \in M$.

Example 1.10.2

Sei $d \in K[x]$, setzte $M := dK[x] = \{df : f \in K[x]\}$. Es gilt $dK[x]$ ist ein Ideal.

- $df \in M, dg \in M, c \in K$ $c(df) + dg = d(\underbrace{cf + g}_{\in K[x]})$
- $f \in K[x], dg \in M = f(dg) = d(\underbrace{fg}_{\in K[x]}) \in M$.

Definition 1.10.3

$\langle d \rangle := dK[x]$ heißt Hauptideal mit Erzeuger d

Example 1.10.4

$\langle 1 \rangle = K[x]$, und $\langle 0 \rangle = \{0\}$

Example 1.10.5

Seien $d_1, \ldots, d_l \in K[x]$, setze

$$M := d_1K[x] + \cdots + d_lK[x]$$

ist ein Ideal:

- M ist ein Unterraum
- Sei $p \in M, f \in K[x], p = d_1f_1 + \cdots + d_lf_l \implies pf = d_1(\underbrace{f_1f}_{\in K[x]}) + \cdots + d_l(\underbrace{f_lf}_{\in K[x]})$

Definition 1.10.6

Das Ideal $d_1K[x] + \cdots + d_lK[x] := \langle d_1, \ldots, d_l \rangle$ ist ein **endlich erzeugtes Ideal** mit Erzeugern $d_1, \ldots, d_l$.

Definition 1.10.7

Seien $p_1, \ldots, p_l \in K[x]$. Ein Polynom $d \in K[x]$ ist der **größte gemeinsame Teiler** von $p_1, \ldots, p_l$, bezeichnet mit $\mathrm{ggT}(p_1, \ldots, p_l)$ wenn gelten

(1) $\forall i : 1 \leq i \leq l : d | p_i$

(2) wenn auch $d_0 \in K[x]$ (1) erfüllt, dann $d_0 | d$

Definition 1.10.8

die Polynome $p_1, \ldots, p_l$ sind relativprim wenn $\mathrm{ggT}(p_1, \ldots, p_l) = 1$

Theorem 1.10.9

Sei $0 \neq M \subseteq K[x]$ ein Ideal. Dann $\exists! d \in K[x]$ normiert, so dass $M = \langle d \rangle$. Das heißt $K[x]$ ist ein Hauptidealring.

Proof Satz 1.10.9

Existenz: Wähle $d \in M$ so, dass: $d \neq 0, \deg d$ ist minimal und Œ d ist normiert.

Beh.: d erzeugt M

Begründung: Sei $f \in M$, DA ergibt: $f = dq + r$, wobei $q, r \in K[x]$ und entweder $r = 0$ oder $\deg r < \deg d$. Aber

$$r = \underbrace{\underbrace{f}_{\in M} - \underbrace{dq}_{\in M}}_{\in M}$$

also muss $r = 0$ (sonst würe $r \neq 0, r \in M, \deg r < \deg d \perp$). Also ist $f = dq$. Also ist $f \in \langle d \rangle$, also $M = \langle d \rangle$.

Eindeutigkeit: Sei $g \in K[x], g \neq 0$ g normiert so, dass $M = gK[x]$. Aber $d, g \in M$, also $\exists 0 \neq p, q \in K[x]$ so, dass

$$d = gp \text{ und}$$
$$g = dq,$$

es folgt, $d = eqp$. Daraus folgt $\deg d = \deg d + \deg q + \deg p$. Also sind $\deg p = \deg q = 0, pq$ sind Skalarppolynome. Da g, d beide normiert sind, folgt $p = q = 1$. Also gilt $d = g$ ■

Corollary 1.10.10

Sei $0 \neq M = \langle p_1, \dots, p_l \rangle$ endlich erzeugtes Ideal von $K[x]$ ist

(1) Der normierte Erzeuger d von M ist

$$d = \text{ggT} \langle p_1, \dots, p_l \rangle$$

(2) Insbesondere wenn $p_1, \dots, p_l$ relativprim sind, dann ist $\langle p_1, \dots, p_l \rangle = K[x]$

Proof Korollar 1.10.10

(1) Da $\langle d \rangle = dK[x] = \langle p_1, \dots, p_l \rangle$ und $p_i \in \langle d \rangle \quad \forall i = 1, \dots, l$ folgt $d | p_i \quad \forall i = 1, \dots, l$. Also d ist gT.

Sei $d_0 \in K[x]$ so dass $d_0 | p_i \quad i = 1, \dots, l$. Es folgt $\exists g_i \in K[x], \forall i = 1, \dots, l$ so, dass

$$p_i = d_0 g_i$$

Nun ist $d \in \langle p_1, \dots, p_l \rangle$, also $d = p_1 q_1 + \dots + p_l q_l$ für geeignete $q_i \in K[x]$. Also $d = d_0 g_1 q_1 + \dots + d_0 g_l q_l = d_0 \underbrace{[g_1 q_1 + \dots + g_l q_l]}_{\in K[x].}$ Also $d_0 | d$. Also $d = \text{ggT}(p_1, \dots, p_l)$ ■

(2) folgt unmittelbar aus (1)

1.10.5 Primzerlegung (Faktorisierung)

Definition 1.10.11

Sei $f \in K[x]$ ist **reduzibel über** K (oder **reduzibel in** $K[x]$) wenn es $g, h \in K[x]$ gibt mit $\deg g \geq 1$, $\deg h \geq 1$ und $f = gh$. Sonst ist f **irreduzibel** über K. Wenn irredzibel und $\deg f \geq 1$, nennen wir f **Primpolynom**

Note

f reduzibel $\implies \deg f \geq 2$

Example 1.10.12

$f = x^2 + 1$, f ist irreduzibel über $\mathbb{R}$ (über $\mathbb{Q}$) (weil f keine reele Nullstellen hat), aber reduzibel über $\mathbb{C}$. Weil $\sqrt{-1}, -\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ bzw. $i, -i \in \mathbb{C}$ sind komplexe Nullstellen.

Theorem 1.10.13

Seien $p, f, g \in K[x]$ und p ist Primpolynom. Aus $p|fg \implies p|f \vee p|g$.

Proof Satz 1.10.13

Setze $d := \mathrm{ggT}(f, p)$. Œ ist p normiert. Außerdem ist p irreduzibel. Es folgt die einzigen normierten Teiler von p sind 1 oder p. Insbesondere $d = 1$ oder $d = p$ Aus Korollar 1.10.10 folgt außerdem, dass $\exists p_0, f_0 \in K[x]$ so, dass $d = p_0 p + f_0 f$.

$d = p$: dann $d|f$, da $d = \mathrm{ggT}(f, p)$

$d = 1$: dann ist $1 = p_0 p + f_0 f$, also $g = p(p_0 g) + f_0(fg)$ Es gilt: $p|p(p_0 g)$ und $p|fg$ (per Def.). Also $p|g$. ■

Corollary 1.10.14

Seien $f_1, \ldots, f_l \in K[x]$ sei p Primpolynom. Wenn $p|f_1 \cdots f_l \implies \exists i \in \{1, \ldots, l\}$ so, dass $p|f_i$.

Proof Korollar 1.10.14

Induktion nach l. $l = 2$ folgt aus Satz 1.10.13. Induktionsannahme für $l - 1$. Induktionsschritt: $p|(f_1 \cdots f_{l-1})f_l \implies p|(f_1 \cdots f_{l-1}$ oder $p|f_l \implies \ldots$ ■

Theorem 1.10.15

Sei $f \in K[x]$, f normiert, $\deg f \geq 1$. Dann ist f ein Produkt von normierten Primpolynomen. Die Darstellung ist eindeutig (bis auf Umnummerierung).

Proof Satz 1.10.15

Existenz: Sei $\deg f = n$, Induktion nach n

I.A.: $\deg f = 1 \implies f$ irreduzibel. Es ist nichts weiter zu zeigen.

I.S.: $n > 1$, ist f irreduzibel, dann ist nichts weiter zu zeigen. Ist f reduzibel, $f = gh$ $\deg g \geq 1, \deg h \geq 1$, also $\deg g < n$ und $\deg h < n$. Induktionsannahme gilt für g und

h

$$f = \underbrace{g}_{\text{Prod. v. Prim.}} \underbrace{h}_{\text{Prod. v. Prim.}}$$

Eindeutigkeit: Sei $f = p_1 \cdots p_l = q_1 \cdots q_s$, p_i, q_i alle normierte Primpolynome. Außerdem $p_l | q_1 \cdots q_s$. Es folgt aus Kor. 1.10.14 $\exists j \in \{1, \ldots, s\}$ so dass $P_l | q_j$. Aber p_l, q_j sind beide numerierte Primpolynome, es folgt $p_l = q_j$. Œ nach Umnommerierung $p_l = q_s$ Betrachte

$$P \coloneqq p_1 \cdots p_{l-1} = q_1 \cdots q_{s-1}$$

Aber $\deg(P) < n$
I.A. $\implies$ $p_1, \ldots, p_{l-1}$ sind eine Umnummerierung der $q_1, \ldots, q_{s-1}$ (insbesondere $l = s$). ■

2 Multilinearformen und Determinanten

2.11 Skript 11

2.11.6 Die symmetrischen Gruppen S_n

Definition 2.11.0 Notation

für $n \in \mathbb{N}$, setze $\mathbb{N}_n := \{1, \dots, n\}$

Definition 2.11.1

Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine **Permutation** auf $\mathbb{N}_n$ ist eine Bijektion $\alpha : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$. Wir setzen $S_n := \{\alpha : \alpha \text{ ist eine Permutation auf } \mathbb{N}_n\}$. Wir versehen S_n mit Verknüpfung:

$$\circ : S_n \times S_n \to S_n, (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \circ \beta$$

(s. ÜB LAI (wohldefiniert))
Bezeichnungen:

(i) $\alpha\beta = \alpha \circ \beta$

(ii) $\alpha \in S_n$ schreibe

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \alpha(1) & \dots & \alpha(n) \end{pmatrix}$$

"Zwei Zeilen Darstellung" einer Permutation

(iii) $(S_n, \circ)$ heißt die Symmetrische Gruppe auf n Elemente
Warum ist $(S_n, \circ)$ eine Gruppe?

- Die Identitätsabbildung $\varepsilon\mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$ definiert durch $\varepsilon(i) = i$. $\varepsilon \in S_n$ ist das neutrale Element für $(S_n, \circ)$.
- $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$, also $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ $\forall \alpha, \beta, \gamma \in S_n$.
- Bijektive Abbildungen sind invertierbar, d.h. $\forall \alpha \in S_n \exists \beta = \alpha^{-1}$ so, dass $\alpha\beta = \beta\alpha = \varepsilon$.

Example 2.11.2

Die Permutatio $\alpha \in S_n$ mit $\alpha(1) = 3, \alpha(2) = 5, \alpha(3) = 4, \alpha(4) = 1, \alpha(5) = 2$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Definition 2.11.3

(i) Sei $\alpha \in S_5$. Wenn es $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{N}_n$ (verschiedene Elemente) gibt so, dass

  (i) $\alpha(a_i) = a_{i+1}$ $\forall 1 \leq i \leq m-1$

  (ii) $\alpha(a_m) = a_1$ und

(iii) $\alpha(x) = x \ \forall x \notin \{a_1, \dots, a_m\}, x \in \mathbb{N}_n$

dann heißt α ein m-Zyklus
Notation: In diesem Fall schreiben wir $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \end{pmatrix}$ Zyklus Notation "Ein-zeilige Bezeichnung"

(ii) Sonderbezeichung: $\varepsilon = (1)$

(iii) Ein 2− Zyklus heißt eine Transposition.

Example 2.11.4

(i)

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Zwei Zeilen Notation $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

(ii) $\alpha \in S_{10}$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Für $i = \{3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ gilt $\alpha(i) = i$

Definition 2.11.5

(i) Sei $i \in \mathbb{N}_n, \alpha \in S_n$ so, dass

$$\alpha(i) = i.$$

Dann heißt i ein **Fixpunkt** für α

(ii) Sei $\alpha, \beta \in S_n$ sind disjunkt, wenn

$$\{x : x \in \mathbb{N}_n : \alpha(x) \neq x\} \cap \{x : x \in \mathbb{N}_n : \beta(x) \neq x\} = \emptyset$$

Example 2.11.6

$\sigma, \tau, \gamma \in S_4$

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

eine Transposition

$$\tau := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$$

eine Transposition

$$\gamma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$$

eine Transposition.
σ, τ disjunkt
σ, γ nicht disjunkt
τ, γ nicht disjunkt

Lemma 2.11.7

Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in S_n$ paarweise disjunkt, und $\tau \in S_n$. Dann sind die Permutationen $(\alpha_1 \cdots \alpha_k)$ und τ disjunkt genau dann, wenn $\forall i = 1, \dots, k$ ist α_i und τ disjunkt

Theorem 2.11.8

Jede Permutation $\sigma \in S_n$ hat eine Darstellung als Produkt $\sigma = \alpha_1 \cdots \alpha_m$, wobei $\alpha_1 \cdots \alpha_m \in S_n$ sind paarweise disjunkte Zyklen

Proof

Wir werden die Aussage per Induktion nach $\Gamma(\sigma) := |\{a \in \mathbb{N}_n : \sigma(a) \neq a\}|$ $(\Gamma(\sigma) \in \mathbb{N}_0)$

I.A. $\Gamma(\sigma) = 0$, dann ist $\sigma = \big(1\big)$. passt

I.V. die Aussage gelte für alle Permutationen $\beta \in S_n$ wofür $\Gamma(\beta) < k$

I.S. Setze $k := \Gamma(\sigma) > 0$. Sei $i_0 \in \mathbb{N}_n$ so, dass $\sigma(i_0) \neq i_0$
Erinnerung an Notation: Für $s \in \mathbb{N}$, $\sigma \in S_n$, schreibe $\sigma^s = \underbrace{\sigma \cdots \sigma}_{s\text{-mal}} = \underbrace{\sigma \circ \cdots \circ \sigma}_{s\text{-mal}}$

Für $s \in \mathbb{N}$ setze

$$i_s := \sigma^s(i_0)$$

Da $\{i_s : s \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}_n$ ist die Menge endlich. Folglich gibt es $p < q \in \mathbb{N}$ so, dass $i_p = i_q$, insbesondere gilt

$$\sigma^{q-p}(i_0) = i_0$$

(da $\sigma^p(i_0) = \sigma^q(i_0) \implies \sigma^0(i_0) = \sigma^{q-p}(i_0)$)
Also ist $\big\{l \in \mathbb{N}, \sigma^l(i_0) = i_0\big\} \neq \emptyset$. Sei $\rho \geq 2$ das kleinste Element davon. Setze $\boxed{r := \rho - 1}$. Die Minimalität von ρ impliziert, dass $|i_0, \dots, i_r| = \rho$ (weil $i_j = i_l$ für $0 \leq j < l \leq r$ dann wäre $\sigma^{l-j}(i_0) = i_0$ also $l - j < p$ – Widerpruch). Analog gilt:

$$\forall a \in \{i_0, \dots, i_r\} \text{ gilt } \sigma(a) \neq a. \tag{3}$$

Betrachte den Zyklus $\tau := \big(i_0 \quad \dots \quad i_r\big)$. d.h.

$$\tau(i_l) = \sigma(i_l) \text{ für } 0 \leq l \leq r. \tag{4}$$

Außerdem

$$\forall a \in \mathbb{N}_a \text{ gilt} : \tau(a) = a \iff a \notin \{i_0, \dots, i_r\}\,. \tag{5}$$

Aus (3) folgt

$$\forall a \in \mathbb{N}_n : \sigma(a) = a \implies a \notin \{i_0, \dots, i_r\} \tag{6}$$

Aus (4), (5), (6) folgt

$$\big\{a \in \mathbb{N}_n, \tau^{-1}\sigma(a) = a\big\} = \{a \in \mathbb{N}_n : \sigma(a) = a\} \cup \{i_0, \dots, i_r\} \tag{7}$$

Also $\Gamma(\tau^{-1}\sigma) < \Gamma(\sigma)$.
I.V. anwenden auf $\tau^{-1}\sigma$.

$$\tau^{-1}\sigma = \alpha_1 \cdots \alpha_m \implies \sigma = \tau \cdot \alpha_1 \cdots \alpha_m$$

$\forall i = 1, \dots, m$ α_i Zyklus ■

2.12 Skript 12

Example 2.12.0

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$\sigma \in S_5$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Theorem 2.12.1

Jede Permutation $\sigma \in S_n, n \geq 2$ ist Produkt von Transpositionen.
Bemerke: $n = 1$ $S_1 = \{(1)\}$.

Proof Satz 2.12.1

Das neutrale Element $(1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Sei nun $\sigma \neq (1), \sigma \in S_n$ wegen Satz 2.11.8 genügt es zu zeigen dass ein Zyklus ein Produkt von Transpositionen, also Œ $\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_r \end{pmatrix}$ mit $r \geq 2$.
Wenn $r = 2$, passt.
Jetzt $r > 2$.

Beh.: $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & i_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 & i_{r-1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} i_1 & i_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \end{pmatrix}$.

Bew.: Wir berechnen

$$\left(\begin{pmatrix} i_1 & i_r \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} i_1 & i_{r-1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} i_1 & i_3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \end{pmatrix} \right) (i_r)}_{=i_r}}_{=i_r} = \begin{pmatrix} i_1 & i_r \end{pmatrix} (i_r)$$

Für i_s mit $1 \leq s < r$ gilt:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} i_1 & i_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 & i_{r-1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} i_1 & i_s \end{pmatrix} (i_s) \\ &= \begin{pmatrix} i_1 & i_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 & i_{r-1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} i_1 & i_{s+1} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} i_1 & i_s \end{pmatrix} (i_s)}_{=i_1} \\ &= \begin{pmatrix} i_1 & i_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 & i_{r-1} \end{pmatrix} \cdots \underbrace{\begin{pmatrix} i_1 & i_{s+1} \end{pmatrix} (i_1)}_{=i_{s+1}} \\ &= \begin{pmatrix} i_1 & i_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 & i_{r-1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} i_1 & i_{s+2} \end{pmatrix} i_{s+1} \\ &= i_{s+1} \end{aligned}$$

Example 2.12.2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in S_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

aber auch gilt

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ Parität eindeutig.

Wir werden zeigen, dass die Parität der Darstellung eindeutig ist! Dafür brauchen wir

Definition 2.12.3

Sei $b \in S_n$ und $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ eine Abbildung. Wir definieren $\sigma f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ folgend:

$$(\sigma f)(x_1, \dots, x_n) \coloneqq f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

Example 2.12.4

$f : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}$ definiert durch

$$f(x_1, x_2, x_3) \coloneqq x_1 x_2 + x_3, \sigma \in S_3 \quad \sigma \coloneqq \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

$$\sigma f : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}, \sigma f(x_1, x_2, x_3) = f(x_2, x_3, x_1) = x_2 x_3 + x_1$$

Lemma 2.12.5

Sei $\sigma, \tau \in S_n, f, g : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ (f, g Abbildungen).
Es gelten:

(i) $\sigma(\tau f) = (\sigma\tau) f$

(ii) $\sigma(fg) = (\sigma f)(\sigma g)$.

Bew.: *ÜA.*

Theorem 2.12.6 Eindeutigkeit der Parität

Es gibt eine wohldefinierte Abbildung

$$\operatorname{sign} : S_n \to \{1, -1\}$$

so, dass:

(a) Für jede Transposition $\tau \in S_n$ gilt $\operatorname{sign}(\tau) = -1$

(b) Für alle $\sigma, \tau \in S_n$ gilt

$$\operatorname{sign}(\sigma\tau) = \operatorname{sign}(\sigma) \operatorname{sign}(\tau)$$

Diese Abbildung ist eindeutig. Darüber hinaus gilt $\forall \sigma \in S_n : \operatorname{sign}(\sigma) = 1$ genau dann, wenn σ ist Produkt von m Transpositionen mit m gerade, und

$$\operatorname{sign}(\sigma) = -1$$

genau dann, wenn σ ist Produkt von m Transpositionen mit m ungerade.

Proof Satz 2.12.6

Sei $\Delta : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ die Abbildung

$$\Delta(x_1, \dots, x_n) := \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \tag{8}$$

Beh.: Für eine Transposition $\tau \in S_n$ gilt

$$\tau\Delta = -\Delta$$

Bew.: In der Tat, sei $\tau = (rs)$ $r < s$. Aus Lemma 2.12.5 (ii) folgt

$$\tau\Delta(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} \tau(x_j - x_i) \tag{9}$$

- Offensichtlich, wenn $i, j \notin \{r, s\}$ ist

  $$\tau(x_j - x_i) = (x_{\tau(j)} - x_{\tau(i)}) = (x_j - x_i)$$

- Für den Faktor $(x_s - x_r)$ gilt

  $$\tau(x_s - x_r) = (x_r - x_s) = -(x_s - x_r)$$

- Die anderen Faktoren können wir paaren wie folgt:

  $$\begin{array}{ll} (x_k - x_s)(x_k - x_r) & \text{wenn } k > s \\ (x_s - x_k)(x_k - x_r) & \text{wenn } r < k < s \\ (x_s - x_k)(x_r - x_k) & \text{wenn } k < r \end{array}$$

  Jedes Produkt ist von τ unberührt. Alles zusammen ein Vergleich der Faktoren in (8) bzw. (9) ergibt

  $$\tau\Delta = -\Delta$$ ■

Sei $\sigma \in S_n$ wegen Satz 2.12.1 schreibe $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_m$ als Produkt von Transpositionen. Aus Lemma 2.12.5 (i) folgt

$$\sigma\Delta = (\tau_1 \cdots \tau_m)\Delta = \tau_1\left(\tau_2\left(\cdots\left(\tau_m\Delta\right)\right)\right)$$

Ferner folgt aus der Behauptung, dass

$$\tau_1\left(\tau_2\left(\cdots\left(\tau_m\Delta\right)\right)\right) = (-1)^m\Delta$$

Wir sehen also: entweder

$$\begin{array}{rl} \sigma\Delta = \Delta & \text{genau dann, wenn } m \text{ gerade} \\ \sigma\Delta = -\Delta & \text{genau dann, wenn } m \text{ ungerade} \end{array}$$

Für $\sigma \in S_n$ setze

$$\operatorname{sign}(\sigma) = 1$$

wenn $\sigma\Delta = \Delta$.
$\sigma \in S_n$ setze

$$\operatorname{sign}(\sigma) = -1$$

wenn $\sigma\Delta = -\Delta$ ■

Definition 2.12.7

Wir nennen σ genau dann gerade, wenn $\operatorname{sign}(\sigma) = 1$, bzw, wir nennen σ genau dann ungerade, wenn $\operatorname{sign}(\sigma) = -1$

Betrachte folgende Untermenge von S_n.

$$A_n := \{\sigma : \sigma \text{ ist eine gerade Permutation}\}$$

Corollary 2.12.9

A_n ist eine Untergruppe und

$$|A_n| = \frac{|S_n|}{2} = \frac{n!}{2}$$

Proof Korollar 2.12.9

$(1) \in A_n$.

- Seien $\sigma, \tau \in A_n$ zu zeigen $\sigma\tau \in A_n$:
  Wir berechnen:
  $$\operatorname{sign}(\sigma\tau) \overset{\text{Satz 2.12.6 b)}}{=} \operatorname{sign}(\sigma)\operatorname{sign}(\tau) = 1 \cdot 1 = 1$$
- Sei $\sigma \in A_n$
  $$\sigma = \tau_1 \cdots \tau_m$$
  wobei m gerade ist.
  Wir berechnen:
  $$\sigma^{-1} = \tau_m^{-1} \cdots \tau_1^{-1}$$
  Nun ist die Inverse von einer Transposition wieder eine Transposition (weil $\tau = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \end{pmatrix} \implies \tau^{-1} \begin{pmatrix} i_2 & i_1 \end{pmatrix}, i_1, i_2 \in \mathbb{N}_n$
  2. Beweis
  $$\sigma = \tau_1 \cdots \tau_m$$
  m gerade.
  $$1 = \operatorname{sign}\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} = \operatorname{sign}(\sigma\sigma^{-1}) = \operatorname{sign}(\sigma)\operatorname{sign}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sign}(\sigma^{-1})$$

Wir wissen

$$S_n = A_n \uplus U \quad (X \uplus Y = X \cup Y, X \uplus Y \implies |X \cap Y| = 0)$$

wobei $U = \{\sigma : \sigma \text{ ist ungerade}\}$

$$|S_n| = |A_n| + |U|$$

Wir zeigen $|A_n| = |U|$: Betrachte die Abbildung

$$A_n \to U, \sigma \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \sigma}_{\operatorname{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = -1}$$

Diese Abbildung ist bijektiv, also

$$|A_n| = |U|. \qquad \blacksquare$$

Definition 2.12.10

Wir nennen A_n die alternierende Gruppe.

2.13 Skript 13

2.13.7 Multilinear Formen

Sei K ein Körper und U und V K-Vektorräume

$$\beta : U \times V \to K, (x, y) \mapsto \beta(x, y)$$

Die Abbildung β ist eine bilineare Funktionale (Form) falls gelten.
$\forall x, x_1, x_2 \in U, \forall y, y_1, y_2 \in V, \forall c_1, c_2, d_1, d_2 \in K$

(1) $\beta(c_1 x_1 + c_2 x_2, y) = c_1 \beta(x_1, y) + c_2 \beta(x_2, y)$

(2) $\beta(x, d_1 y_2 + d_2 y_2) = d_1 \beta(x, y_1) + d_2 \beta(x, y_2)$

Example 2.13.2

Betrachte

$$V \times V^* \to K, (x, f) \mapsto [x, f] := f(x)$$

ist bilineare

Definition Notation

$L^{(2)}(U \times V, K) =$ der K-Vektorraum der bilinearen Formen auf $U \times V$ versehen mit den Verknüpfungen

$$\underbrace{(c_1\beta_1 + c_2\beta_2)}_{\in L^{(2)}} \underbrace{(x, y)}_{\in U \times V} := c_1\beta_1(x, y) + c_2\beta_2(x, y)$$

wie üblich ■

Definition 2.13.3

Seien $m \in \mathbb{N}$, $V_1, \ldots, V_m$ K-VR. Eine Abbildung

$$\mu : V_1 \times \cdots \times V_m \to K$$

ist eine m-**lineare Funktionale** (m-**lineare Form** oder **multilineare Funktionale vom Grad** m) Wenn $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$ gilt $\forall \alpha_i, \gamma_i \in V_i, c \in K$

$$\mu(\alpha_1, \ldots, c\alpha_i + \gamma_i, \ldots, \alpha_m) = c\mu(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_m) + \mu(\alpha_1, \ldots, \gamma_i, \ldots, \alpha_m)$$

Definition Notation

$L^{(m)}(V_1 \times \cdots \times V_m, K) = K$-VR der m-linearen Formen.

Note 2.13.4

Ansatz wie oben, wenn μ multilinear ist, dann gilt

$$\mu(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_m) = 0$$

falls $\alpha_i = 0$

2.13.8 Alternierende Multilineare Formen auf K^n

Definition 2.13.5

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $V = K^n$ Eine n-lineare Form auf

$$\delta : \underbrace{K^n \times \cdots \times K^n}_{n\text{-mal}} \to K$$

ist **alternierend**, wenn: $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$ existieren mit $Z_i = Z_j$, dann $\delta(z_1, \ldots, z_n) = 0$ (für $z_1, \ldots, z_n \in K^n$)

Definition Konvention

: δ wird auch als Abbildung auf $K^{n\times n} = \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ $\delta(A) = \delta(z_1, \ldots, z_n)$
$A \in M_{n\times n}(K)$ wobei

$$A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

Lemma 2.13.6

Sei δ alternierend. Es gilt

(i) $z_1, \ldots, z_n$ *sind linear abhängig* $\implies \delta(z_1, \ldots, z_n) = 0$

(ii) $\delta(z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_j, \ldots, z_n) = -\delta(z_1, \ldots, z_j, \ldots, z_i, \ldots, z_n)$

(iii) Allgemeiner gilt

$$\delta\left(z_{\pi(1)}, \ldots, z_{\pi(n)}\right) = \mathrm{sign}(\pi)\delta(z_1, \ldots, z_n)$$

mit $\pi \in S_n$

Proof Lemma 2.13.6

(i) Œ nehmen wir an lineare Abhängigkeit

$$\implies z_n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i z_i$$

für $c_1, \ldots, c_{n-1} \in K$. Wir berechnen

$$\delta\left(z_1, \ldots, z_{n-1}, \sum_{i=1}^{n-1} c_i z_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \delta(z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n) = 0$$

(ii) wir berechnen

$$\begin{aligned}0 &= \delta(z_1,\ldots,z_i+z_j,\ldots,z_j+z_i,\ldots,z_n)\\ &= \delta(z_1,\ldots,z_i,\ldots,z_j+z_i,\ldots,z_n)+\delta(z_1,\ldots,z_j,\ldots,z_j+z_i,\ldots,z_n)\\ &= \delta(z_1,\ldots,z_i,\ldots,z_j,\ldots,z_n)+\underbrace{\delta(z_1,\ldots,z_i,\ldots,z_i,\ldots,z_n)}_{=0}\\ &\quad+\underbrace{\delta(z_1,\ldots,z_j,\ldots,z_j,\ldots,z_n)}_{=0}+\delta(z_1,\ldots,z_j,\ldots,z_i,\ldots,z_n)\\ &= \delta(z_1,\ldots,z_i,\ldots,z_j,\ldots,z_n)+\delta(z_1,\ldots,z_j,\ldots,z_i,\ldots,z_n)\end{aligned}$$ ■

Note 2.13.7

(1) $\mathrm{Char}(K) \neq 2$ dann gilt: Sei δ eine m-lineare Form auf K^n so, dass Lemma 2.13.6 (ii) gilt, dann ist δ alternierend.

(2) $\mathrm{Char}(K) = 2$ $\delta : \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2, \delta((a,b),(c,d)) := ac + bd$ ist ein Gegenbeispiel!

2.14 Skript 14

Sei δ eine alternierende lineare Form auf K^n (laut Def 2.13.5 auch als $\delta : M_{n\times n}(K) \to K$ auffassen). Sei $A \in M_{n\times n}(K)$

$$A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

Lemma 2.14.1

Sei e eine elementare Zeilenumformung Es gelten

(i) $\delta(e(A)) = -\delta(A)$, wenn e von Typ 1 ist.

(ii) $\delta(e(A)) = c\delta(A)$, wenn e von Typ 2 ist.

(iii) $\delta(e(A)) = \delta(A)$, wenn e von Typ 3 ist.

(iv) Allgemeiner gilt: $\forall c \in K : \delta(cA) = c^n\delta(A)$

Proof Lemma 2.14.1

Wir berechnen $\delta(e(A))$:

(i) $\delta(z_1 + cz_2, z_2, \ldots, z_n) = \delta(z_1, z_2, \ldots, z_n) + c\delta(z_2, z_2, z_3, z_4, \ldots, z_n) = \delta(z_1, \ldots, z_n)$

(ii) Folgt aus Lemma 2.13.6

(iii) Folgt aus n-Linearität

(iv) $\delta(cz_1, \ldots, cz_n) = c\delta(z_1, cz_2, \ldots, cz_n) = c^2\delta(z_1, z_2, cz_3, \ldots, cz_n) = \cdots = c^n\delta(z_1, \ldots, z_n)$

Lemma 2.14.2

Für jede Matrix $A \in M_{n\times n}(K)$ gibt es $\triangle_A \in K^x$, $\triangle_A$ hngt nur von A ab, so dass

$$\delta(A) = \triangle_A \delta(\text{r. z. s. F.}(A))$$

Proof Lemma 2.14.2

$\triangle_A$ ergibt sich durch wiederholte Anwendung von Lemma 2.14.1. Wir bekommen $\triangle_A$ ist ein Produkt der Gestalt

$$(-1)^l c_1 \cdots c_k$$

für geeignete $l, k \in \mathbb{N}_0$ und $c_1, \ldots, c_k \in K^x$ ∎

Note 2.14.3

(Erinnerung: Skript 7 LA I Bemerkng 7.3)
Für $A \in M_{n\times n}(K)$ Dann gilt: Entweder

Fall 1: r. Z. S. F.(A) hat eine Null Zeile, oder

Fall 2: r. Z. S. F.$(A) = I_n$.

Also erhalten wir auch iher eine Dichotomie:
Entweder

Fall 1: $\delta(A) = \triangle_A \cdot 0 = 0$, oder

Fall 2: $\delta(A) = \triangle_A \delta(I_n)$

Corollary 2.14.4

$\delta \neq 0$ genau dann, wenn $\delta(I_n) \neq 0$

Proof Korollar 2.14.4

“ $\Longleftarrow$ ”: klar

“ $\Longrightarrow$ ”: $\delta(I_n) = 0 \implies \delta(A) = 0$ in **Fall 1 und Fall 2** in Bemerkung 2.14.3

Corollary 2.14.5

Wir nehmen an, dass $\delta \neq 0$. Sei $A \in M_{n\times n}(K)$
Es gilt: $\delta(A) \neq 0$ genau dann, wenn A invertierbar ist.

Proof Korollar 2.14.5

Folgt aus Lemma 2.14.2 und Korollar 2.14.4: weil A invertierbar $\iff$ r. Z. S. F.$(A) = I_n$ (Skript 9 LA I, Satz 9.8) ∎

Definition 2.14.6 Definition und Notation

$\mathbb{A} :=$ alt$^{(n)}(K^n) :=$ der Unterraum von $L^{(n)}(K^n \times \cdots \times K^n, K)$ von **n-linear** alternierenden Formen auf K^n

$$\mathbb{A} = \{\delta : \delta n\text{-linear alt. auf } K^n\} \subseteq L^{(n)}(K^n \times \cdots \times K^n, K)$$

Corollary 2.14.8

Seien $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{A}$. Es gilt: $\delta_1 = \delta_2$ genau dann, wenn

$$\delta_1(I_n) = \delta_2(I_n)$$

(ooder $\delta_1(e_1, \ldots, e_n) = \delta_2(e_1, \ldots, e_n)$)

Proof Korollar 2.14.8

Sei $\delta_1(I_n) = \delta_2(I_n)$, so dass

$$(\delta_1 - \delta_2)(I_n) = \delta_1(I_n) - \delta_2(I_n) = 0$$

Es folgt nun aus Kor. 2.14.4, dass

$$\delta_1 - \delta_2 = 0$$

also

$$\delta_1 = \delta_2$$ ■

Corollary 2.14.9

$\dim(\mathbb{A}) \leq 1$

Proof Korollar 2.14.9

$\dim(\mathbb{A}) = 0$, passt
Ansonsten $\delta_1 \neq 0, \delta_1 \in \mathbb{A}$, wir nehmen δ_1 fest.
Sei $\delta_2 \in \mathbb{A}$, Sei $A \in M_{n\times n}(K)$ wie im Fall 2 von Bemerkung 2.14.3. Wir berechnen

$$\delta(A) = \triangle_A \delta_2(I_n) = \triangle_A \frac{\delta_2(I_n)}{\delta_1(I_n)} \delta_1(I_n) \tag{$*$}$$

Setze $d := \frac{\delta_2(I_n)}{\delta_1(I_n)} \in K$
Es folgt:

$$\delta_2(A) = d\left(\triangle_A \delta_1(I_n)\right) = d\delta_1(A), d \in K$$ ■

Wir werden nun zeigen, dass es $\delta \in \mathbb{A}$ gibt mit $\delta(I_n) = 1$ wegen Korollar 2.14.8 ist dann diese δ notwendig eindeutig. Sobald wir δ gefunden haben, wissen wir

$$\dim(\mathbb{A}) = 1$$

Ziel: zu zeigen $\exists \delta \in \mathbb{A}$ so, dass $\delta(I_n) = 1$.
Formelberechnung:
Sei $\boxed{\delta \in \mathbb{A}}$ und $A \in M_{n\times n}(K)$ schreiben

$$A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$$

$$a_{ij} \in K \forall i, j$$

$$A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

wobei, $\forall i : 1 \leq i \leq n$, z_i die i-te Zeile der Matrix A.

Sei $e_1, \ldots, e_n$ die Standard Basis von K^n. Sir schreiben $\forall i : 1 \leq i \leq n$

$$z_i \coloneqq \sum_{j_i=1}^{n} a_{ij_i} e_{j_i}$$

(die eindeutige Darstellung von z_i in der Standardbasis). Wir berechnen:

$$\delta(A) = \delta\left(\sum_{j_1=1}^{n} a_{ij_1} e_{j_1}, \ldots, \sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n} e_{j_n}\right) = \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{n} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n} \tag{$**$}$$

Prüfen!!

Für jeden Summand in $(**)$ betrachte die Abbildung

$$\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}, i \mapsto j_i$$

- Wenn solch eine Abbliidung **nicht** injektiv ist, dann gibt es eine Widerholung in $(j_1, \ldots, j_n)$ und entsprechend ist der Summand $= 0$ (weil δ alternierend ist!)

- Die abbildung (für einen gegebenen Summand in $(**)$) ist injektiv, dann ist sie eine Permutation $\pi \in S_n$ und damit im Summand in $(**)$ erhalten wir:

  $$\delta(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}) = \delta\left(e_{\pi(1)}, \ldots, e_{\pi(n)}\right) \overset{Lem. 2.13.6}{=} \operatorname{sign}(\pi)\, \delta\left(e_1, \ldots, 1_n\right).$$

  Also können wir nun $(**)$ umschreiben:

  $$\begin{aligned}(**) &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)} \delta(I_n) \\ &= \delta(I_n) \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}\end{aligned}$$

  Wir sehen also dass wenn wir $\delta(I_n) = 1$ setzen, dann bekommen wir

  $$\boxed{\delta(A) = \operatorname{sign}(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)} \text{det}}$$

  Wir müssen nur noch prüfen, dass det eine n-lineare alternierende Form definiert!

Definition **Notation**

$$A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

$\delta : K^n \times \cdots \times K^n$

$\delta(z_1, \ldots, z_n)$
$\delta\left(z_1 + dz_1', z_2, \ldots, z_n\right)$ $d \in K$

$$A' = \begin{pmatrix} z_1' \\ \vdots \\ z_n' \end{pmatrix}$$

Theorem 2.14.10

Die Formel (det) *definiert eine n-lineare alternierende Form δ mit $\delta(I_n) = 1$.*

Proof Satz 2.14.10

Œ $n \geq 2$.

- n-linear?
  $z_1 + dz_1' = [a_{11} + da_{11}' \cdots a_{1n} + da_{1n}'$. Also müssen wir berechnen

  $$\begin{aligned} &\operatorname{sign}(\pi)\left(\left(a_{1\pi(1)} + da'_{1\pi(1)}\right) a_{2\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}\right) \\ =&\operatorname{sign}(\pi)\left(\left(a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}\right) + d\left(a'_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}\right)\right) \end{aligned}$$

  usw. ÜB

- alternierend? Sei $z_1 = z_2$, zu zeigen $\delta(A) = 0$ $z_1 = z_2$ i.e. $a_{1j} = a_{2j}$ $\forall i \leq j \leq n$, i.e. $a_{i\pi(j)} = a_{2\pi(j)}$ $\forall \pi \in S_n$. Wir berechnen $\delta(A)$ (Wie in der Formel (det)) (mithilfe der Angambe $S_n = A_n \uplus A_n \left(1 \quad 2\right)$) $\left(1 \quad 2\right) \in S_n$

  $$\begin{aligned} \delta(A) &= \underbrace{\sum_{\pi \in A_n} \operatorname{sign}(\pi)\left(a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}\right)}_{I} \\ &\quad + \underbrace{\sum_{\pi \in A_n} \underbrace{\operatorname{sign}\left(\pi\left(1 \quad 2\right)\right)}_{=-1} \left(a_{1\pi\left(1 \quad 2\right)(1)}a_{2\pi\left(1 \quad 2\right)(2)} \cdots a_{n\pi\left(1 \quad 2\right)(n)}\right)}_{II} \\ &= I + II \\ &= 0 \end{aligned}$$

- zu zeigen $\delta(I_n) = 1$. Sei A diagonal, also $i \neq j \implies a_{ij} = 0$. Die $\forall i, j = 1, \ldots, n$ einzige $\pi \in S_n$, wofür der Summand in der (det) Formel $\neq 0$, ist $\pi(i) = i$ $\forall i = 1, \ldots, n$ also $\pi = \left(1\right) \in S_n$ also $\delta(A) = a_{11} \cdots a_{nn}$ Insbesondere $\delta(I_n)$

Definition Bezeichung

$\delta(A)$ die δ (det) erfüllt werden wird $\det(A)$ genannt

Corollary 2.14.11

$\dim(\mathbb{A}) = 1$. *Insbesondere gilt:* $\forall \delta \in \operatorname{alt}^{(n)}(K^n)$ *und* $AinM_{n\times n}(K)$ *gilt* $\delta(A) = \det(A)\delta(I_n)$

Proof Korollar 2.14.11

$\det \in \mathbb{A}$, $\det \neq 0$ $\forall \delta \in \mathbb{A} : \exists d \in K$ so teilt $\delta = d \det$ i.e. $\forall A \in M_{n\times n}(K)$

$$\delta(A) = d \det(A),$$

Insbesondere $A = I_n$, i.e.

$$\delta(I_n) = d \det(I_n)$$
$$\delta(I_n) = d$$

i.e. $\delta(A) = \delta(I_n)\det(A)$

2.15 Skript 15

Corollary 2.15.1

Für alle $\delta \in A, \delta \neq 0$ $\forall A \in M_{n\times n}(K)$ *gilt:* $\delta(A) = \det(A)\delta(I_n)$

Note 2.15.2

Sei R kommutativer Ring 1, $\delta \in \operatorname{alt}^{(n)}(R^n)$ können analog definieren! Der Hauptsatz 2.14.10 gilt: $A \in M_{n\times n}(R), A = (a_{ij})_{i,j}$, definiere

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign} \pi a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)} \underbrace{\det(I_n)}_{=1}$$

Example 2.15.3

Setze $R := K[x]$ und

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & -x \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x^3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = x^4 + x^2$$

■

Theorem 2.15.4

Sei $A \in M_{n\times n}(R)$. *Es gilt:*

$$\det(A) = \det\left(A^t\right)$$

Proof Satz 2.15.4

Betrachte:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i\pi(i) = \prod_{i=1, j=\pi(i)}^{n} a_{ij} = \prod_{j=1, i=\pi^{-1}(j)}^{\infty} a_{ij} = \prod_{j=1}^{n} a_{\pi^{-1}(j)j} = \prod_{j=1}^{n} a^t_{j\pi^{-1}(j)}$$

Daraus folgt:

$$\det(A) = \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sign}\pi \prod_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)} = \sum_{\pi^{-1}S_n} \operatorname{sign}\left(\pi^{-1}\right) \prod_{j=1}^{n} a^t_{j\pi^{-1}(j)} = \det\left(A^t\right)$$ ■

Theorem 2.15.5

$\forall A, B \in M_{n\times n}(R)$ gilt:

$$\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$$

Proof Satz 2.15.5

Sei B fest und $A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$. Definiere

$$\delta_B(A) := \det(AB) = \delta_B\left(z_1,\ldots,z_n\right) = \det\left(z_1B,\ldots,z_nB\right)$$

(Bmk 7.6 L.A.I)
Beh.: δ_B ist n-linear und alternierend (ÜB).
Also

$$\delta_B \in \operatorname{alt}^{(n)}\left(R^n\right)$$

Korollar 2.15.1 $\implies \delta_B(A) = \det(A)\delta_B(I_n) = \det(A)\det(B)$ ■

Corollary 2.15.6

Sei A invertierbar. Es gilt

$$\det\left(A^{-1}\right) = (\det(A))^{-1}$$

Definition Notation (Erinnerung)

Sei $A \in M_{n\times n}(R), i, j \in \{1,\ldots,n\}$. Wir $A[i|j]$ (entfernen von A die i-te Zeile und j-te Spalte).

$$D_{ij}(A) := \det\left(A[i|j]\right)$$

Theorem 2.15.7

Sei $j, 1 \le j \le n$ fest. Setze

$$\delta(A) := \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}D_{ij}(A)$$

Dann ist $\delta \in \operatorname{alt}^{(n)}\left(R^n\right)$ und $\delta(I_n) = 1$

Proof Satz 2.15.7

Siehe Skript 15 S.2, S.3
Details und gegebenenfalls die Plenumsübung ■

Corollary 2.15.8

Sei $A \in M_{n\times n}(R)$. Für jedes $1 \leq j \leq n$ gilt:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}(A)$$

2.16 Skript 16

$A \in M_{n\times n}(R)$

Note 2.16.1 Erinnerung

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

der ij-te Kofaktor von A.

Lemma 2.16.2 Hilfslemma

$\forall k, j = 1, \ldots, n$

$$k \neq j \implies \sum_{i=1}^{n} A_{ik} C_{ij} = 0$$

Proof Hilfslemma 2.16.2

Ersetze die j-te Spalte von A durch ihre k-te Spalte, nenne die so erhaltene Matrix B, weil B zwei Wiederholte Spalten hat, ist $\det B = 0$. Nun ist

$$B[i|j] = A[i|j]$$

Also berechnen wir

$$\begin{aligned} 0 &= \det B \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} B_{ij} \det B[i|j] \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ik} \det A[i|j] \\ &= \sum_{i=1}^{n} A_{ik} C_{ij} \end{aligned}$$

∎

Wir fassen zusammen:

Corollary 2.16.3

(a)

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} A_{ij} C_{ij}$$

(b)

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ik} C_{ij} = \begin{cases} \det A & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases} \tag{$*$}$$

■

Definition 2.16.4 Notation (Erinnerung)

Sei $A \in M_{n \times n}(R), i, j \in \{1, \dots, n\}$. Wir $A[i|j]$ (entfernen von A die i-te Zeile und j-te Spalte)..

$$D_{ij}(A) := \det\left(A[i|j]\right)$$

Note Erinnerung

$$(\text{adj } A)_{ij} := C_{ji} = (-1)^{-1} \det A[j|i]$$

Corollary 2.16.5

$$(\text{adj } A)\,(A) = \det(A) I_n \tag{$**$}$$

Proof Korollar 2.16.5

Matrixprodukt + ($*$) ■

Wir zeigen jetzt umgekehrt:

Lemma 2.16.6

$A\,(\text{adj } A) = \det\,(A)\, I_n$

Proof Lemma 2.16.6

gleich

Proof Lemma 2.16.6

Es gilt

$$A^t[i|j] = A[j|i]^t$$

$\forall i, j = 1, \dots, n$ Satz 2.15.4 $\implies$ ij-te Kofaktor von A^t = ji-te Kofaktor. Also

$$\text{adj}\left(A^t\right) = \text{adj}\,(A)^t \tag{$***$}$$

Nun impliziert ($**$) für A^t:

$$\left(\text{adj } A^t\right) A^t = \left(\det A^t\right) I_n = (\det A)\, I_n$$

zusammen mit ($***$) erhalten wir

$$(\text{adj } A)^t A^t = \left[A\,(\text{adj } A)\right]^t = (\det A)\, I_n = A\,(\text{adj } A)\,.$$

■

Corollary 2.16.7

$$A\,(\operatorname{adj} A) = \det(A) I_n$$

und

$$(\operatorname{adj} A)\, A = \det(A) I_n \qquad (\dagger)$$

Insbesondere wenn A, $\det A \neq 0$, folgt $A^{-1} = \det(A)^{-1} \operatorname{adj}(A)$ ■

Theorem 2.16.8

$A \in M_{n\times n}(R)$ ist über R invertierbar genau dann, wenn $\det(A) \in R^x$ (eine Einheit in R). Insbesondere wenn $R = K$ ein Körper ist, dann ist A invertierbar genau dann wenn $\det(A) \neq 0$. Wenn $R = K[x]$, dann ist A invertierbar geau dann wenn $\det(A) \in K^x$. Ist A invertierbar, so ist

$$A^{-1} = (\det A)^{-1} \operatorname{adj}(A)$$

Proof Satz 2.16.8

aus $(\dagger)$ sehen wir: $\det A$ invertierbar $\implies A$ invertierbar mit

$$A^{-1} = (\det A)^{-1} \operatorname{adj}(A)$$

umgekert: A invertierbar über

$$\begin{aligned} R &\implies AA^{-1} = I_n \\ &\implies \det\left(AA^{-1}\right) = 1 \\ &\implies \det(A) \det\left(A^{-1}\right) = 1 \\ &\implies \det(A) \in R^x \end{aligned}$$

Wir berechnen $(K[x])^\times$ seien $f, g \in K[x]$

$$fg = 1 \implies \deg f + \deg g = 0 \implies \deg f = \deg g = 0$$

Also die Einheiten von $K[x]$ sind die Skalarpolynome $\neq 0$, i.e K^x ■

Example 2.16.9

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$$

$$\det(A) = -1 \notin \mathbb{Z}^x,$$

A ist nicht invertierbar über $\mathbb{Z}$. $-2 \in \mathbb{Q}^{-1}$, $A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

Example 2.16.10

$R = \mathbb{R}[x]$

$$A = \begin{pmatrix} x^2 + x & x+1 \\ x-1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} x^2 - 1 & x+2 \\ x^2 - 2x + 3 & x \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = x + 1,$$

A ist **nicht** invertierbar

$$\det(B) = -6$$

B invertierbar

Lemma 2.16.11

Ähnliche Matrizen haben gleiche Determinanten.

Proof Lemma 2.16.11

Seien $A, B \in M_{n\times n}(K)$ ähnlich, d.h. $\exists P$ invertierbar so, dass

$$B = P^{-1}AP$$

Berechne:

$$\begin{aligned} \det B = \det\left(P^{-1}AP\right) \\ &= \det\left(P^{-1}\right)\det\left(A\right)\det\left(P\right) \\ &= \det\left(P\right)^{-1}\det(A)\det(P) \\ &= \det A \end{aligned}$$

■

Definition 2.16.12

Sei K ein Körper V ein K-Vektorraum, $\dim V = n$, und

$$T : V \to V$$

ein linearer Operator iwr definieren

$$\det(T) := \det\left([T]_{\mathcal{B}}\right)$$

wobei $\mathcal{B}$ eine beliebe geordnete Basis für V ist.

Theorem 2.16.13 Cramer's Regel

Sei $A \in M_{n\times n}(K)$ *mit* $\det(A) \neq 0$ *und*

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^{n\times 1}$$

Betrachte das LGS:

$$(S) AX = Y$$

wobei

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Dann können wir die eindeutige Lösung von (S)

$$X = A^{-1}Y$$

so beischreiben: $\forall j = 1, \ldots, n$ $x_j = \det(B_j)(\det(A))^{-1}$ *wobei* B_j *die* $n \times n$ *Matrix ist, die man erhält, wenn man die* j*-te Spalte von* A *durch* Y *ersetzt.*

Proof Satz 2.16.13

Multiplizieren mit $\operatorname{adj}(A)$ ergibt

$$\underbrace{(\operatorname{adj}(A)A)}_{\det(A)I_n} X = \operatorname{adj}(A)Y$$

$$\overset{\text{Kor. 2.16.7}}{\Longrightarrow} \det(A)X = \operatorname{adj}(A)Y$$

Also

$$\det(A)x_j = \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{adj} A)_{ji}\, y_i$$

Also gilt $\forall j = 1, \ldots, n$ (laut Definition 2.16.4

$$\begin{aligned}
\det(A)x_j &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j} \det(A[i|j])y_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j} y_i \det A[i|j] \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j} y_j \det B_j[i|j] \\
&\overset{\text{Kor 2.15.8}}{=} \det B_j
\end{aligned}$$

3 Normalformen

3.17 Skript 17

3.17.9 Eigenwerte und Eigenvektoren

Sei V ein n-dim K-VR über

Definition 3.17.1

Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ und $c \in K$.

(a) c ist ein Eigenwert für T, falls $\exists \alpha \in V$, $\alpha \neq 0$ so, dass

$$T(\alpha) = c\alpha$$

(b) sei $\alpha \in V$ so, dass

$$T(\alpha) = c\alpha$$

Dann ist α **ein Eigenvektor**

(c) $W_c := \{\alpha \in V, T(\alpha)\}$ der **Eigenraum** zu c

Note 3.17.2

$$W_c = \ker(cI - T)$$

weil

$$W_c = \{\alpha : c\alpha - T(\alpha) = 0\}$$

Theorem 3.17.3

Wir folgern aus Satz 2.16.8 und Bem. 3.17.2 und Def. 3.17.1:
Sei $T \in \mathcal{L}(V, V)$, $c \in K$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) *c ist ein Eigenwert von T*

(ii) *$(cI - T)$ ist **nicht** invertierbar*

(iii) $\det(cI - T) = 0$

Proof Satz 3.17.3

"(i) $\Longrightarrow$ (ii)": wenn c Eigenwert von T, dann existiert ein $\alpha \in V$ mit $\alpha \neq 0$, so dass $(cI - T)(\alpha) = 0$, somit Kern nicht trivial, also $(cI - T)$ nicht invertierbar

"(ii) $\Longrightarrow$ (iii)": ...

"(iii) $\Longrightarrow$ (i)": $\det(cI - T) = 0$ bedeutet $(cI - T)$ nicht invertierbar, also Kern trivial, also existiert kein $\alpha \in V$, ... vllt. auch einfacher mit Widerspruch ∎

Theorem 3.17.4

$\det(cI - T)$ *ist ein normiertes Polynom von Grad* n*. Die Eigenwerte von* T *sind also seine NS in* K*. Insbesondere hat* T ***höchstens*** n *Eigenwerte in* K

Proof Satz 3.17.4

Sei $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis für V, $A := [T]_{\mathcal{B}}$. Es ist $xI_n - A = [xI - T]_{\mathcal{B}}$

$$\begin{aligned} B &:= xI_n - A \\ &= \begin{pmatrix} x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x \end{pmatrix} - A \\ &= \begin{pmatrix} x - a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & x - a_{nn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

wobei $A_{ij} = a_{ij}$ Also $b_{ii} = (x - a_{ii})$, $\deg b_{ii} = 1$. Die Einträge von B sind 0 Polynome, Polynome von Grad 0 oder 1. Berechne

$$\det B = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sign} \tau b_{1\tau(1)} \cdots b_{n\tau(n)}$$

$$\deg\left(b_{1\tau(1)} \cdots b_{n\tau(n)}\right) = |\{i \in \{1, \dots, n\} : \tau(i) = i\}|$$

Also ist

$$\prod_{i=1}^{n} (x - a_{ii})$$

der **einzige** Term von Grad n, und somit ist der **Hauptterm**! Also

$$\deg(\det B) = n$$

und ist normiert ■

Definition 3.17.5

Sei $A \in M_{n\times n}(K)$ und $c \in K$, c ist c ist ein **Eigenwert von** A falls $\det(cI - A) = 0$.

Definition 3.17.6

$f(x) := \det(xI_n - A)$ für $A \in M_{n\times n}(K)$ heißt das **Charakteristische** Polynom von A

Lemma 3.17.7

Ähnliche Matrizen haben das gleiche charakteristische Polynom

Proof Lemma 3.17.7

$$B = P^{-1}AP$$

$$\begin{aligned}\det(xI - B) &= \det\left(xI - P^{-1}AP\right)\\ &= \det\left(P^{-1}(xI - A)^{P}\right)\\ &= \det P^{-1}\det(xI - A)\det(P)\\ &= \det(xI - A)\end{aligned}$$

■

Definition 3.17.8

Sei V endlich dimensional, $T \in \mathcal{L}(V, V)$

$$\mathrm{CharPol}(T) = \mathrm{CharPol}\left([T]_{\mathcal{B}}\right)$$

für irgendeine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V

Example 3.17.9

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}), \det(xI - A) = x^2 + 1$$

hat keine reelle NS, also hat A keine reelle Eigenwerte

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

$$|xI - A| = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x-2)^2$$

Eigenwerte $c = 1, c = 2$
Berechne Eigenvektoren

- $c = 1$ $\ker(A - I) := W_1$

  $$(A - I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

  $\implies \mathrm{Rang}(A) = 2, \dim W_1 = 1$ Wir wollen eine Basis für W_1 finden, löse

  $$(A - 1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Hier $\alpha_1 = (1, 0, 2) \neq 0$ ist eine Lösung, und $\{\alpha_1\}$ ist eine Basis für W_1
- $c = 2$ W_2?

  $$(A - 2I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

  hat $\mathrm{Rang}(A) = 2 \implies \dim W_2 = 1$ Lösung wie oben $\alpha_2 = (1, 1, 2) \neq 0$ und $\{\alpha_2\}$ eine Basis

Lemma 3.17.10

Sei $T \in \mathcal{L}(V,V)$ seien c_i für $i = 1, \ldots, k$ Eigenwerte von T (in K) und $\forall i \neq j,\ i,j \in \{1,\ldots,k\}$: $c_i \neq c_j$ Sei $v_i \neq 0$, $v_i \in V$ Eigenvektor zum Eigenwert c_i. Dann ist $\{v_1,\ldots,v_k\}$ linear Unabhängig

Proof Lemma 3.17.10

Wir führen Induktion nach k

I.A. $k = 2$: wenn $v_2 = cv_1$ dann ist $v_2 \in W_{c_1}$, dann ist v_2 Eigenvektor zu c_1 $\perp$

I.V. Für $k-1$

I.S. Seien $v_1,\ldots,v_k$ linear abhängig

Bem.: Sei $v \in V$, $v \neq 0$ kann v **nicht** Eigenvektor sein zu verschiedenen Eigenwerten!

Œ

$$v_k = \sum_{i=1}^{k-1} v_i$$

Wir berechnen

$$T(v_k) = c_k v_k = c_k \sum_{i=1}^{k-1} v_i$$

$$= T(v_k) = \sum_{i=1}^{k-1} T(v_i) = \sum_{i=1}^{k-1} c_i v_i$$

$$\implies c_k \sum_{i=1}^{k-1} v_i = \sum_{i=1}^{k-1} c_i v_i$$

$$\implies \sum_{i=1}^{k-1} (c_k - c_i)\, v_i = 0.$$

Aus I.V. folgt $c_k - ci = 0$ $\forall i = 1,\ldots,k-1$

Corollary 3.17.11

Sei $\dim V = n$, *$T \in \mathcal{L}(V,V)$. Wir nehmen an, dass T n verschiedene Eigenwerte $d_1,\ldots,d_n \in K$ hat. Dann hat V eine Basis $\mathcal{D}$ bestehend aus Eigenvektoren für T.* ■

Definition 3.17.12

Sei $\dim V = n$, $T \in \mathcal{L}(V,V)$. T ist **diagonalisierbar** über K, falls V eine Basis, bestehend aus Eigenvektoren von T hat.

Note 3.17.13

$d_1,\ldots,d_n \in K$ n-verschiedene Eigenwerte von T, $\mathcal{D}$ die geordnete Basis wie im Korollar 3.17.11, dann ist

$$[T]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

3.18 Skript 18

Corollary 3.18.1 Verallgemeinerung Lemma 3.17.10

$\dim V = n$, $T \in \mathcal{L}(V,V)$, $d_1, \ldots, d_k \in K$ *verschiedene Eigenwerte von* T *für* $i \in \{1, \ldots, k\}$ *Sei*

$$\mathcal{B}_i \subseteq W_{d_i}$$

linear unabhängig. Dann ist $\mathcal{B} = \dot{\bigcup}_{i \in I} B_i$

Proof Korollar 3.18.1

$$L := \{v_1, \ldots, v_l\} \subseteq \mathcal{B}$$

Betrachte

$$\sum_{j=1}^{l} c_j v_j$$

Setze

$$L_i := L \cap \mathcal{B}_i$$

und setze

$$\alpha_i := \sum_{v_j \in L_i} c_j v_j \in W_{d_i} \tag{$*$}$$

(Konvention falls $L_i = \emptyset$, setzte $\alpha_i = 0$). Also wenn

$$0 = \sum_{j=1}^{l} c_j v_j \implies \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0$$

Beh.: Wenn

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0$$

dann ist $\alpha_i = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, k$
Bew. der Beh. sonst

$$\alpha_i \neq 0,$$

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten und linear abhängig. Widerspruch zu 3.17.10 zurück in $(*)$ $\alpha_1 = 0 \implies$

$$\sum_{v_j \in L_i} c_j v_j = 0$$

aber v_j sind per Annahme linear unabhängig. Also $c_j = 0$ $\forall j = 1, \ldots, k$ ■

Theorem 3.18.2 Verallgemeinerung von Korollar 3.17.11

Sei $\dim V = n$, $T \in \mathcal{L}(V, V)$, $d_1, \ldots, d_k \in K$ *die verschiedenen Eigenwerte von* T *in* K.
Es gilt: T *ist diagonalisierbar über* K *genau dann, wenn*

$$\sum_{j=1}^{k} \dim W_{d_j} = n$$

Proof Satz 3.18.2

"$\Longleftarrow$": Sei $\mathcal{B}_j$ eine Basis für W_{d_j} für jedes $j = 1, \ldots, k$ setze

$$B = \dot{\bigcup_{j=1}^{k}} \mathcal{B}_j$$

Korollar 3.18.1 $\Longrightarrow$ $\mathcal{B}$ linear unabängig

"$\Longrightarrow$": Sei $\mathcal{B}$ eine Basis für V von Eigenvektoren von T. Setze $\mathcal{B}_j = \mathcal{B} \cap W_{d_j}$ Also ist

$$\mathcal{B} = \dot{\bigcup_{j=1}^{k}} B_j$$

$$|\mathcal{B}| = n$$

Setze

$$l_j = |\mathcal{B}_j|$$

also

$$n = \sum_{j=1}^{k} l_j$$

Beh.: $l_j = \dim W_{d_j}$ Es ist klar, dass

$$l_j \le \dim W_{d_j}$$

Wenn $l_i < \dim W_{d_i}$, dann $\exists \beta \in W_{d_i}$ so, dass

$$\mathcal{B}_i' = \mathcal{B}_i \cup \{\beta\}$$

linear unabhängig ist. Aber dann

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \{\beta\}$$

linear unabhängig! Aber $|\mathcal{B}'| = n + 1$ $\perp$ ■

Sei $\mathcal{D}$ die Basis

$$[T]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & d_1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Wobei $\forall i = 1, \ldots, k$, d_i erscheint $l_i := \dim W_{d_i}$ mal

Mit diesem Ansatz

$$\mathrm{CharPol}(T) = \mathrm{CharPol}\left([T]_{\mathcal{D}}\right) = \prod_{i=1}^{k} (x - d_i)^{l_i} \tag{$\dagger$}$$

Umgekehrt, sei $T \in \mathcal{L}(V, V)$, $\mathrm{CharPol}(T)$ genau so, wie in ($\dagger$) ist, dann ist T diagonalisierbar (wegen Satz 3.18.2) wir haben bewiesen

Theorem 3.18.3

Sei $\dim V = n, T \in \mathcal{L}(V, V)$. *Es gilt: T ist diagonalisierbar genau dann wenn* $\mathrm{CharPol}(T) = \prod_{i=1}^{k}(x - d_i)^{l_i}$.
Terminologie: $\dim W_d$ *wird auch als $d \in K$ Eigenwert* ***geometrische Vielfachheit*** *der Eigenwerte d genannt*
T ist diagonalisierbar (über K) genau dann wenn $\mathrm{CharPol}(T)$ *als Produkt von lin. Faktoren über K erfüllt* ***und*** *die algebraische Vielfachheit jeder Nullstelle ist gleich geometrischer Vielfachheit jeder Eigenwerte*

Theorem 3.18.4

Sei $\dim V = n$, $T \in \mathcal{L}(V, V)$, $d \in K$. *Eigenwerte von T mit Vielfachheit μ. Es gilt:* $l := \dim(W_d) \leq \mu$

Proof Satz 3.18.4

Sei $(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ eine Basis für W_d, ergänze $\mathcal{B} = (\alpha_1, \dots, \alpha_l, \alpha_{l+1}, \dots, \alpha_n)$ zur Basis von V. Berechne

$$A := [T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} d & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d \end{matrix} & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

$$\det(xI - A) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} x-d & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x-d \end{matrix} & -B \\ 0 & xI - C \end{pmatrix} \overset{\text{ÜB}}{=} (x-d)^l \det(xI - c)$$

Dies impliziert $l \leq \mu$ ■

Example 3.18.5

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ $\mathrm{CharPol} = (x-1)(x-2)^2$

$$d_1 = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

Rang $(A - I) = 2$

$$d_2 = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

Rang$(A - 2I) = 1$ Also $\dim W_{d_1} = 1$, $\dim W_{d_2} = 2$, also $\dim W_{d_1} + \dim W_{d_2} = 3$, also T diagonal und

$$[T]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

■

3.19 Skript 19

3.19.10 Annihilator Ideal

$\dim V = n, T \in \mathcal{L}(V, V), V$ K-Vektorraum

Proposition 3.19.1

Es gelten

(1) $\mathcal{A}(T) := \{p \in K[x]; p(T) = 0\}$ *ist ein Ideal*

(2) $\mathcal{A}(T) \neq \{0\}$

Proof Proposition 3.19.1

(1) $(p + q)(T) = p(T) + q(T)$ und $\forall p, q \in K[x]$ $(pq)(T) = p(T)q(T)$ (1) folgt.

(2) Betrachte die $n^2 + 1$ Elemente in $\mathcal{L}(V, V)$.

$$I, T, T^2, \ldots, T^{n^2} \in \mathcal{L}(V, V)$$

Aber $\dim \mathcal{L}(V, V) = n^2$ Also sind die linear abhängig
i.e. $\exists c_0, \ldots, c_{n^2} \in K$.

$$c_0 I + c_1 T + \cdots + c_{n^2} T^{n^2} = 0$$

und die c_i sind **nicht**alle gleich 0. Also das Polynom

$$c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n^2} x^{n^2} = g(x) \neq 0$$

$g(x) \in \mathcal{A}(T)$ ■

Definition 3.19.2

$\mathcal{A}(T)$ ist **annihilator Ideal**. Der (eindeutig bestimmte normierte Erzeuger von $\mathcal{A}(T)$ ist das **minimal Polynom von** T und wird mit $\operatorname{MinPol} T$ bezeichnet.

Note 3.19.3

(1) $\deg(\operatorname{MinPol}(T)) \leq n^2$

(2) $p = \operatorname{MinPol}(T)$ ist Charakterisiert durch

(a) $p \in K[x]$

(b) $p(T) = 0$

(c) $\forall q \in K[x] : \deg q < \deg p \implies q(T) \neq 0$

Definition 3.19.4

für ein $A \in Mat_{n \times n}(K)$ sind $\mathcal{A}(A)$ und $\operatorname{MinPol}(A)$ analog definiert

Note 3.19.5

(1) Sei $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von V und $f \in K[x]$. Es gilt $[f(T)]_{\mathcal{B}} = f([T]_{\mathcal{B}})$ Insbesondere für $A = [T]_{\mathcal{B}}$ gilt

$$f(T) = 0 \iff f(A) = 0$$

(2) Es folgt: ähnliche Matrizen haben das gleiche minimale Polynom!

Theorem 3.19.6

Sei $T \in \mathcal{L}(V, V)$ (oder $A \in Mat_{n \times n}(K)$. Es gilt: $\operatorname{CharPol}(T)$ und $\operatorname{MinPol}(T)$ haben, bis auf Vielfachheit, dieselben Nullstellen in K

Proof Satz 3.19.6

Sei $p := \operatorname{MinPol}(T)$ und $c \in K$. Zu zeigen $p(c) = 0 \iff c$ ist Eigenwert von T

"$\implies$": $p(c) = 0 \implies p = (x - c)q$.

$$\deg q < \deg p$$

Also ist $q(T) \neq 0$. Also wähle $\beta \in V$ so, dass $\alpha := q(T)(\beta) \neq 0$ Es gilt $0 = p(T)(\beta) = (T - cI)(qT)(\beta) = (T - cI)(\alpha)$ Also ist α Eigenvektor und c Eigenwert

"$\impliedby$": Sei $T(\alpha) = c\alpha$, $\alpha \neq 0, \alpha \in V, c \in K$ Nun gilt: $p(T)(\alpha) \overset{\text{ÜB}}{=} p(c)\alpha = 0$. Da aber $p(T) = 0$ und $\alpha \neq 0$, folgt $p(c) = 0$ ■

Proposition 3.19.7

Sei T diagonalisierbar. Dann zerfällt das $\operatorname{MinPol}(T)$ (über K) in verschiedene lineare Faktoren

Proof Proposition 3.19.7

Sei T diagonalisierbar und $c_1, \ldots, c_k \in K$ die verschiedenen Eigenwerte. Setze $p := \operatorname{MinPol} T$. Wegen Satz 3.19.6 ist $\deg p \geq k$. Betrachte $q(x) := (x - c_1) \cdots (x - c_k)$. Wir berechnen:

$$(T - c_1 I) \cdots (T - c_k I)\,(\alpha) = 0$$

für α Eigenvektor $\in V$ (weil α Eigenvektor zum Eigenwert c_i, für geeignetes i). Da es eine Basis gibt bestehend aus Eigenvektoren für T. Also $q(T)$ verschwindet auf dieser Basis der Eiegnvektoren. Das impliziert

$$q(T) = 0$$

Also $q(x) \in \operatorname{Annihilator}(T)$ Es folgt nun aus Bemerkung 3.19.3 $\deg q = k \leq \deg p$ und q ist normiert, folgt $q(x) = p(x)$

Example 3.19.8

Wir berechnen $\operatorname{MinPol} A := p$ für A im Beispiel 3.17.9 (ii)

$$\operatorname{CharPol}(A) = (x-1)(x-2)^2$$

A ist **nicht** diagonalisierbar. Also hier können wir **nicht** Proposition 3.19.7 anwenden. Aber wir können Satz 3.17.6 anwenden. Also p die Nullstellen 1 und 2 hat. Wir probieren Polynome der Form

$$(x-1)^k\,(x-2)^l$$

mit $k \geq 1, l \geq 1, 2 \leq k + l \leq 3^2 = 9$ Wir probieren $k = l = 1$

$$(A - I)\,(A - 2I) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Also ist $\deg(p) \geq 3$. Nun probieren wir:

$$(x-1)^2\,(x-2) \text{ oder}$$

$$(x-1)\,(x-2)^2$$

Wir berechnen:

$$(A - I)\,(A - 2I)^2 = 0$$

Also ist $p(x) = (x-1)\,(x-2)^2 \implies \operatorname{MinPol} A = \operatorname{CharPol} A$. ■

3.20 Skript 20

Theorem 3.20.1 von Cayley Hamilton

Sei $\dim V = n, L \in \mathcal{L}(V,V)$

$$f := \text{CharPol}(L).$$

Es gilt $f(L) = 0$. *Insbesondere teilt* $\text{MinPol}(L)$ *das* $\text{CharPol}(L)$

Proof Satz von Cayley Hamilton 3.20.1

Sei $\mathcal{K}$ die Algebra der Polynome in L und $\mathcal{B} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ für V. Setze

$$A := [L]_{\mathcal{B}}$$

d.h.

$$L(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{n} A_{ji}\alpha_j$$

$\forall i \leq i \leq n$

- Wir schreiben diese um, als

  $$\sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij}L - A_{ji}I)(\alpha_j) = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n \tag{1}$$

  Sei B die $n \times n$ Matrix mit den Koeffizienten in $\mathcal{K}$ definiert durch

  $$B_{ij} = S_{ij}L - A_{ji}I$$

  Beh.:

  $$\det B = f(L) \text{ und}$$

  $$\det B = 0$$

- Wir haben $f(x) = \det(xI - A) = \det(xI - A)^t$. Wir berechnen

  $$(xI - A)^t_{ij} = \delta_{ij}x - A_{ji}$$

  Also gilt:

  $$(xI - A)^t_{ij}(L) = \delta_{ij}L - A_{ji}I = B_{ij}$$

  Außerdem gilt:

  $$\begin{aligned} f(L) &= [\det(xI - A)](L) \\ &= \left[\det(xI - A)^t\right](L) \\ &= \det\left((xI - A)^t(L)\right) \\ &= \det B. \end{aligned}$$

- Wir zeigen $\det B = 0$. Dafür genügt es zu zeigen, dass

$$(\det B)(\alpha_k) = 0 \quad k = 1, \ldots, n$$

Wegen (1) gelten B_{ij} und α_j:

$$\sum_{j=1}^{n} B_{ij}(\alpha_j) = 0 \quad \forall 1 \le i \le n \tag{2}$$

- Setze $\tilde{B} = \operatorname{adj} B$ Aus (2) folgt, für alle k und i

$$\tilde{B}_{ki}\left(\sum_{j=1}^{n} B_{ij}\alpha_j\right) = 0 = \sum_{j=1}^{n} \tilde{B}_{ki} B_{ij}\alpha_j$$

Wir summieren über i und bekommen

$$0 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \tilde{B}_{ki} B_{ij}\alpha_j = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{B}_{ki} B_{ij}\right)}_{kj\text{-te Koef von } \tilde{B}B} (\alpha_j)$$

3.20.1 Trigonalisierbarkeit

Sei V endlich dimensional K-VR

Definition 3.20.2

$T \in \mathcal{L}(V, V)$ ist trigonalisierbar falls es eine Basis $\mathcal{B}$ für V gibt so dass $[T]_{\mathcal{B}}$ eine obere $\triangle$-Matrix ist (d.h. $a_{ij} = 0$ für $i > j$)

Theorem 3.20.3

Es gilt: T ist trigonalisierbar $\iff$ $\operatorname{CharPol}(T)$ zerfällt in linear-Faktoren über K, (d.h. $\operatorname{CharPol}(T) = (x - c_1)^{n_1} \cdots (x - c_k)^{n_k}$ mit $c_i \in K$)

Proof Satz 3.20.3

" $\Longrightarrow$ " $[T]_{\mathcal{B}} = A$ $\triangle$-Matrix $\Longrightarrow$ $\det(xI - A) = \prod_{i=1}^{n}(x - a_{ii})$.

" $\Longleftarrow$ " Wir beweisen per Induktion über $\dim V = n$ eine Basis $\mathcal{B} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ aufbauen wofür $[T]_{\mathcal{B}}$ eine $\triangle$-Matrix ist. Da T mindestens ein Eigenwert $c_1 \in K$ hat, sei $\alpha \neq 0$ ein Eigenvektor $\{\alpha\}$ linear unabhängig $\overset{\text{Basis Ergänzung}}{\Longrightarrow}$ $(\alpha, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ für V, Matrixdarstellung von T in dieser Basis

$$\left(\begin{array}{c|c} c_1 & a_{12} \quad \ldots a_{1n} \\ \hline 0 & a_{22} \quad \ldots a_{2n} \\ \vdots & \\ 0 & a_{n2} \quad \ldots a_{nn} \end{array}\right) \tag{$*$}$$

$$\Gamma \in M_{(n-1)\times(n-1)}(K)$$

Setze $W = \text{span}\{\beta_2, \dots, \beta_n\}$ definiere $G \in \mathcal{L}(W, W)$

$$Gw = \Gamma w \text{ für alle } w \in W$$

Wir sehen aus $(*)$ $\text{CharPol}(T) = (x - c_1)\,\text{CharPol}(G)$
Eindeutigkeit der Faktoren in $K[x]$, folgt $\text{CharPol}(G)$ Produkt von linearen Faktoren. I.A. liefert nun eine geordnete Basis $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ so, dass die Matrixdarstellung von G eine obere $\triangle$-Matrix ist ■

3.21 Skript 21

3.21.12 Invariante Unterräume

Definition 3.21.1

Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum und $T \in \mathcal{L}(V, V)$. Dann ist W **T-invariant** falls $T(W) \subseteq W$

Example 3.21.2

(0) $\{0\}$, und V sind T-invariant für aale $T \in \mathcal{L}(V, V)$.

(1) Sei D der Ableitung Operator auf $V := K[x]$ und $W = K[x] \leq d$. Dann ist W T-invariant

(2) Sei $U \subset \mathcal{L}(V, V)$ so, dass $TU = UT$, setze

  (a) $W = \text{Bild}(U)$

  (b) $N = \ker(U)$

Dann sind W und N T-invariant

Proof

(a) Sei $\alpha \in \text{Bild}(U)$, $\exists \beta$ so, dass $\alpha = U(\beta)$.

$$T(\alpha) = T(U(\beta)) = U(T(\beta)) \in \text{Bild}\, U$$

(b) Sei $\alpha \in N$, berechne $U(T(\alpha)) = t(U(\alpha)) = T(0) = 0 \implies T(\alpha) \in N$ ■

(3) $W \subseteq V$ ist T-invariant $\implies$ W ist $g(T)$-invariant für alle $g(x) \in K[x]$ ÜB

(4) Für alle $g \in K[x]$ gilt

$$g(T)T = Tg(T)(\textbf{ÜA})$$

Insbesondere gilt $g(T) = cI - T$. Daraus folgt wegen (2) $\ker(T - cI)$ T-invariant, d.h. der Eigenraum zum Eigenwert $c \in K$ ist T-invariant.

- **Der Operator** T_w: sei $T \in \mathcal{L}(V, V)$, $W \subseteq V$ ist T-invariant. setze

$$T|_W := T_W$$

$$T_W : W \to W,$$

also ist

$$T_W \in \mathcal{L}(W, W)$$

† Matrix Darstellung für T_W: Sei $W \subseteq V$ T-invariant mit $\dim W = r$. Sei $\mathcal{B}' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ eine geordnete Basis für W. Ergänze $\mathcal{B}'$ zu einer Basis $\mathcal{B} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n)$ für V. Betrachte $A = [T]_{\mathcal{B}}$ Wir haben die Gleichungen

$$T(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{n} A_{ij}\alpha_i$$

Da W T-invariant ist, sind $T(\alpha_j) \in W$ für $j \leq r$ Also

$$T(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{r} A_{ij}\alpha_i$$

Das heißt $A_{ij} = 0$ für $j \leq r$ und $i > r$ Also sieht A so aus

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

wobei $B : r \times r$, $C : r \times (n-r)$, $D : (n-r) \times (n-r)$ und $B = [T_W]_{\mathcal{B}'}$.

Lemma 3.21.3

Sei $T \in \mathcal{L}(V, V)$ $W \subseteq V$, T-invariant. Es gelten:

(a) $\operatorname{CharPol} T_W$ *teilt* $\operatorname{CharPol} T$

(b) $\operatorname{MinPol} T_W$ *teilt* $\operatorname{MinPol} T$

Proof Lemma 3.21.3

Seien $\mathcal{B}'$ und $\mathcal{B}$ so gewählt wie in (†), in A und B wie in (†) ÜB $\implies$

(i)

$$\underbrace{\det(xI - A)}_{\operatorname{CharPol} T} = \underbrace{\det(xI - B)}_{\operatorname{CharPol} T} \det(xI - D) \qquad \blacksquare$$

(ii)

$$A^k = \begin{pmatrix} B^k & C_k \\ 0 & D^k \end{pmatrix}$$

wobei C_k eine $r \times (n-r)$-Matrix für $k \in \mathbb{N}_0$.

Es folgt daraus, dass ein Polynom $q \in \operatorname{Annihilator}(A)$ ist q auch $\in \operatorname{Annihilator}(B)$. Also teilt $\operatorname{MinPol} B$ das $\operatorname{MinPol} A$. $\blacksquare$

3.22 Skript 22

Lemma 3.22.1

Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum, sei $\mathcal{B}'$ eine geordnete Basis für W, und

$$\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$$

eine ergänzende Basis für V. Dann gelten

(i) $\overline{\mathcal{B}''}$ *ist eine Basis für V/W*

(ii) *Umgekehrt, wenn $\left(\overline{\beta_{r+1}}, \ldots, \overline{\beta_n}\right)$ eine geordnete Basis für V/W ist, dann ist*

$$\mathcal{B}' \cup \{\beta_{r+1}, \ldots, \beta_n\}$$

ist eine Basis für V. ■

Note

Sei $W \subseteq V$ T-invariant. Dann ist die Abbildung

$$\overline{T} : V/W \to V/W$$

so definiert

$$\overline{T}\left(\overline{\alpha}\right) := \overline{T(\alpha)}$$

ist wohldefiniert und ist linear. Also ist $\overline{T} \in \mathcal{L}\left(V/W, V/W\right)$.

Proof

"wohldefiniert": Zu zeigen $\overline{\alpha_1} = \overline{\alpha_2} \implies \overline{T(\alpha_1)} = \overline{T\left(\alpha_2\right)}$
Bew.: $\alpha_1 - \alpha_2 \in W \implies T(\alpha_1 - \alpha_2) \in W \implies T(\alpha_1) - T(\alpha_2) \in W \implies \overline{T(\alpha_1)} = \overline{T(\alpha_2)}$ ■

Theorem 3.22.2

Sei $W \subseteq V$ T-invariant $\mathcal{B}'$ geordnete Basis für W, ergänzt

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$$

von V. Es gilt

$$A = [T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

wobei $D = \left[\overline{T}\right]_{\overline{\mathcal{B}''}}$ und $\mathcal{B} = [T_W]_{\mathcal{B}'}$.

Proof 3.22.3 Satz 3.22.2

$$T(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{n} A_{ji}\alpha_j \quad \text{für } 1 \leq i \leq n \tag{$*$}$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} B & A_{1,r+1} & & \\ \cline{1-1} & \vdots & & \\ & A_{r,r+1} & & \\ & \vdots & & \\ & A_{n,r+1} & & \end{array}\right)$$

$$T(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{r} A_{ji}\alpha_j \quad \text{für } 1 \le i \le n \sum_{j=r+1}^{n} A_{ji}\alpha_j \quad \text{für } 1 \le i \le n \tag{$**$}$$

Also ist

$$\overline{T(\alpha_i)} = \sum_{j=r+1}^{n} A_{ji}\overline{\alpha_j} = \overline{T}\left(\overline{\alpha_j}\right)$$

für $r+1 \le i \le n$ ■

Corollary 3.22.4

$\operatorname{CharPol} T = (\operatorname{CharPol} T_W)\left(\operatorname{CharPol} \overline{T}\right)$

Ziel ist es Korollar 3.22.6 zu beweisen
Hintergrund: in Satz 3.20.3 hatten wir bewiesen V end. dim. VR, $T \in \mathcal{L}(V, V)$.
T ist **trigonalisierbar** genau dann, wenn $\operatorname{CharPol} T$ im Produkt von linearen Faktoren über K zerfällt.
Kor. 3.22.6 gibt uns dieselbe Charakterisierung mithilfe von

$$\operatorname{MinPol} T$$

anstatt

$$\operatorname{CharPol} T$$

Corollary 3.22.6

Sei K Körper, $T \in \mathcal{L}(V, V)$, V endlich dimensionaler Vektorraum. Dann ist T trigonalisierbar genau dann, wenn $\operatorname{MinPol} T$ im Produkt von linearen Faktoren über K zerfällt.

Proposition

Sei K Körper, V endl. K-VR, $T \in \mathcal{L}(V, V)$
Es gilt: *$\operatorname{CharPol} T$ zerfällt im Produkt von linearen Faktoren über K genau dann, wenn $\operatorname{MinPol} T$ zerfällt im Produkt von linearen Faktoren über K.*

Für den Beweis der Proposition brauchen wir ein Konzept und Aussage, die wir erst in der Vorlesung Algebra I im Wintersemester 2024 beweisen werden.

Definition 3.22.7

Sei K ein Körper und $p \in K[x]$, $\deg p = n$, $n \in \mathbb{N}$. Eine Körpererweiterung

$$Z|K$$

ist ein **Zerfällungskörper für** p, wenn $p(x)$ zerfällt im Produkt von linearen Faktoren über Z.

Das heißt $\exists l_i \in \mathbb{N}$, $c_i \in \mathbb{Z}$ und $l \in \mathbb{N}$ so, dass

$$p(x) = \prod_{i=1}^{l} (x - c_i)^{l_i} \tag{$*$}$$

Das heißt, $c_1, \dots, c_l$ sind Nullstellen von p und

$$\sum_{i=1}^{l} l_i = n$$

Theorem

Sei K ein Körper, $p \in K[x], \deg p \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein Zerfällungskörper $Z|K$ für p.

Proof

VL Algebra I

Proof Proposition

Sei $Z|K$ ein Zerfällungskörper von

$$\operatorname{CharPol}_K T.$$

Dann sind die NS von $\operatorname{CharPol}_Z T$ die $c_1, \dots, c_l$ wie in der Faktorisierung $(*)$. Wir haben aber bewiesen, dass $\operatorname{MinPol}_Z T$ und $\operatorname{CharPol}_Z T$ dieselbe Nullstelle in Z haben. Insbesondere ist Z auch ein Zerfällungskörper für $\operatorname{MinPol}_Z T$. Das heißt wiederum, das $\operatorname{MinPol}_Z T$ im Produkt von linearen Faktoren und umgekehrt zerfällt: wenn $\operatorname{MinPol}_Z T$ in Produkt von linearen Faktoren in Z zerfällt, dann ist Z Zerfällungskörper für $\operatorname{CharPol}_Z T$, also zerfällt $\operatorname{CharPol}_Z T$ in Produkt von linearen Faktoren wie in $(*)$.
Aber

$$\begin{aligned} \operatorname{CharPol}_Z T &= \operatorname{CharPol}_K T \\ \operatorname{MinPol}_Z T &= \operatorname{MinPol}_K T \end{aligned}$$

Corollary 3.22.8 Charakterisierung von Trigonalisierbarkeit

Sei K ein Körper, V ednl dim. K-VR, und $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Es gilt: T ist trigonalisierbar über K genau dann, wenn $\operatorname{CharPol} T$ zerfällt über K genau dann wenn $\operatorname{MinPol} T$ zerfällt über K

3.23 Skript 23

3.23.13 Direkte Summe und Primzerlegung

Lemma 3.23.1

Sei V K-VR, $W_1, \dots, W_k$ Unterräume von V. Die folgende Aussagen sind äquivalent.

(i) $W_1, \dots, W_k$ *sind unabhängig, d.h. sei* $\alpha_i \in W_i$ *für* $1 \leq i \leq k$ *so, dass*

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0,$$

dann ist $\alpha_i = 0 \ \forall i = 1, \dots, k$.

(ii)

$$W_j \cap (W_1, \dots, W_j) = \{0\} \text{ für } 2 \leq j \leq k$$

(iii) Ist $\mathcal{B}_i$ *eine Basis für* W_i*, dann ist*

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_I$$

eine Basis für $W_1 + \cdots + W_k$ ■

Definition Notation und Terminologie

Wir schreiben $V = W_1 + \cdots + W_k$, wenn V, die **Summe** von Unterräumen W_i ist, und wir schreiben

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$$

wenn die Unterräume $W_1, \dots, W_k$ die Bedingungen von Lemma 3.23.1 erfüllen und sagen V ist die **direkte Summe**.

T

Theorem 3.23.2 Primzerlegung von V bezüglich Primfaktorisierung MinPol T

Sei V endl dim über K, $T \in \mathcal{L}(V, V)$. Setze $\operatorname{MinPol} T = p = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ die Primfaktorisierung in $K[x]$ (wobei p_i verschiedene normierte irreduzible Polynome in $K[x]$ sind und $r_i \in \mathbb{N}$) Setze $W_i = \ker p_i(T)^{r_i}$ für $1 \leq i \leq k$. Dann sind W_i, für $1 \leq i \leq k$, T-invariante Unterräume, und darüber hinaus gelten

(i) $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$

(ii) $\operatorname{MinPol} T_{W_i} = p_i^{r_i}$ *für* $1 \leq i \leq k$.

Proposition 3.23.3

Sei V endl dim K-VR $T \in \mathcal{L}(V, V)$. $\operatorname{MinPol} T = m = m_1 m_2$ mit $\operatorname{ggT}(m_1, m_2) = 1$ Setze $V_1 = \ker m_i(T)$ für $i = 1, 2$. Es gelten: V_1, V_2 sind T-invariant und $V = V_1 \oplus V_2$ und $\operatorname{MinPol} T_{V_i} = m_i$

für $i = 1, 2$

Proof Proposition 3.23.3

Da m_1, m_2 relativprim sind $\exists q_1, \ldots, q_2 \in K[x]$ so, dass

$$1 = m_1 q_1 + m_2 q_2$$

oder

$$I = m_1(T) q_1(T) + m_2(T) q_2(T) \tag{$*$}$$

Beh 1: $V_1 = I_m m_2(T)$ und $V_2 = I_m m_1(T)$
Bew.: $0 = m(T) = m_1(T) m_2(T)$, also $I_m m_2(T) \subseteq \ker m_1(T)$ umgekehrt $v \in \ker m_1(T)$, gilt wegen $(*)$

$$v = \underbrace{q_1(T) m_1(T)(v)}_{=0} + \underbrace{m_2(T)\,(q_2(t))\,(v)}_{\in I_m m_2(v)}$$

Beh. 2 $V = V_1 \oplus V_2$
Bew.:

(1) Summe:
Sei $v \in V$, wegen $(*)$ schreibe

$$v = \underbrace{m_1(T) q_1(T)(v)}_{\in I_m m_1} + \underbrace{m_2(T) q_2(T)(v)}_{\in I_m m_2(T)}$$

(2) direkt:
Sei $v \in V_1 \cap V_2$, wegen $(*)$ gilt $v = \underbrace{q_1(T) m_1(T)(v)}_{=0} + \underbrace{q_2(T) m_2(T)(v)}_{=0}$. Sei nun …

Da $V_i = \ker m_i(T)$ für $i = 1, 2$ ist es klar, dass $m_i\left(T_{V_i}\right) = 0$, d.h.

$$\tilde{m}_1 | m_1 \text{ und } \tilde{m}_2 | m_2 \tag{$**$}$$

Beh. 3: $\tilde{m}_1 \tilde{m}_2$ annihiliert T **Bew.:** Seien $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$, $v = v_1 + v_2 \in V$, rechne

$$\begin{aligned}
\tilde{m}_1(T) \tilde{m}_2(T)(v_1 + v_2 &= \tilde{m}_1(T) \left[\tilde{m}_2(T)(v_2) + \tilde{m}_2(T)(v_1)\right] \\
&= \tilde{m}_1(T) \left[0 + \underbrace{\tilde{m}_2(T)(v_1)}_{\in V_1 \text{ weil Bsp 3.20.2 (4)}} \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Da $\tilde{m}_2 \tilde{m}_1$ annihiliert $T \implies m_1 m_2 | \tilde{m}_1 \tilde{m}_2$. Aber m_1, m_2 sind normiert folgt nun aus $(**)$, dass $\tilde{m}_1 = m_1$ und $\tilde{m}_2 = m_2$ ■

Theorem 3.23.4 Diag. Kriterium für $\operatorname{MinPol} T$

(Umkerhung von Prop. 3.19.7) T *ist diagonalisierbar* $\iff$ $\operatorname{MinPol} T$ *zerfällt in verschiedene lineare Faktoren in* $K[x]$.

Proof Satz 3.23.4

" $\Longrightarrow$ " siehe Prop 3.19.7

" $\Longleftarrow$ " folgt von **Satz 3.23.2**: Seien p_i alle linear für alle i, also ist $p_i = \operatorname{MinPol} T = (x-c_1)\cdots(x-c_k)$ wobei $c_i \neq c_j$ für $1 \leq i \neq j \leq k$. In diesem Fall nach Satz 3.23.2 $W_i = \ker(T - c_i I) =$ der Eigenraum zum Eigenwert c_i. Satz 3.23.2 liefert $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$, also hat V (wegen Lemma 3.23.1) eine Basis von Eigenvektoren. ■

3.23.14 Jordanketten, Jordan Zelldn und die Jordan Normalform.

Definition 3.23.5

Sei $c \in K$ Eigenwert für T, $0 \neq v_1 \in V$ Eigenvektor zum c. Sei $l \in \mathbb{N}$ und $v_2, \ldots, v_l \in V$. Der Vektoren-Tupel $(v_1, \ldots, v_l)$ ist eine Jordankette der Länge l zum Eigenwert c, falls

$$(T - cI)\, v_i = v_{i-1} \text{ für } i = 2, \ldots, l$$

$$(T - cI)\, v_i = 0 \text{ für } i = 1$$

Lemma 3.23.6

Sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_l)$ eine Jordankette. Dann ist $\{v_1, \ldots, v_l\}$ linear unabhängig und

$$W := \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_l\}$$

*ist T-invariant. Die Matrixdarstellung $[T_W]_{\mathcal{B}}$ ist **die Jordan Zelle***

$$J_l(c)$$

***der Dimension** l **zum Eigenwert** c. Es gilt:*

$$[T_W]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} c & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & c & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ldots & c & 1 \\ 0 & & \ldots & & c \end{pmatrix}$$

3.24 Skript 24

Note 3.24.0 Erinnerung

Sei $W \subseteq V$ und $W' \subseteq V$ so, dass $V = W \oplus W'$, dann heißt W' **Komplement von W in V**.

Note 3.24.1 Bemerkung

Sei $W \subseteq V$ und $v_1, \ldots, v_s \in V$ linear unabhängig so, dass $\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_s\} \cap W = \{0\}$. Dann kann man $\{v_1, \ldots, v_s\}$ zu einer Basis von einem Komplement von W fortsetzen.

Proof Bemerkung 3.24.1

ÜA

Theorem 3.24.2 Jordan Normalform

Sei $\operatorname{MinPol} T = (x-c)^r$*, mit* $c \in K$*. Dann hat* V *eine Basis aus Jordanketten zum Eigenwert* c *(eine Jordanbasis) Die längsten Ketten haben die Länge* r*, die Anzahl der Ketten in jeder Länge ist eindeutig bestimmt.*

Proof Satz 3.24.2 Jordan Normalform

Beobachte $\ker(T-cI) \subseteq \cdots \subseteq \ker(T-cI)^r = V$.
Behauptung: Seien $j \geq 2$ und $v^1, \ldots, v^s \in \ker(T-cI)^j$ linear unabhängig und $\operatorname{span}\left\{v^1, \ldots, v^s\right\} \cap \ker(T-cI)^{j-1} = \{0\}$. **Dann gelten**:

1. $w^1 := (T-cI)\, v^1, \ldots, w^s := (T-cI)v^s \in \ker(T-cI)^{j-1}$ sind linear unabhängig und
2. $\operatorname{span}\left\{w^1, \ldots, w^s\right\} \cap \ker(T-cI)^{j-1} = \{0\}$

Bew. der Beh.:

1. $0 = (T-cI)^j v^i = (T-cI)^{j-1} \underbrace{(T-cI)\, v^i}_{w^i}$.

   - Sei
     $$\sum_{i=1}^{s} w^i = 0,$$
     so
     $$\sum_{i=1}^{s} c_i (T-cI) v^i = 0$$
     Also
     $$(T-cI) \sum_{i=1}^{s} c_i v^i = 0.$$
     Also
     $$\sum_{i=1}^{s} c_i v^i \in \ker(T-cI)^{j-1}$$
     (weil $(T-cI)^{j-1} \left(\sum c_i v^i\right) (T-cI)^{j-2} \underbrace{(T-cI) \left(\sum c_i v^i\right)}_{0} = 0)$ Also ist
     $$\sum_{i=1}^{s} c_i v^i \in \operatorname{span}\left\{v^1, \ldots, v^s\right\} \cap \ker{(T-cI)}^{j-1}.$$
     Also
     $$\sum_{i=1}^{s} c_i v^i = 0 \bot$$

■

2. Betrachte $\sum c_i w^i$ so, dass $(T-cI)^{j-2}\left(\sum c_i w^i\right)=0$. Dann ist $(T-cI)^{j-1}\left(\sum c_i v^i\right)=0$, so $\sum c_i v^i = 0$, so $(T-cI)v^i = 0 = \sum c_i w^i$ ■

Wir bauen nun eine Basis aus Jordanketten folgendermaßen:

- $n_r = \dim\ker(T-cI)^r - \dim\ker(T-cI)^{r-1}$ und schreibe

  $$\ker(T-cI)^r = V = V_r \oplus \ker(T-cI)^{r-1}.$$

  Sei $\left\{v_r^1,\dots,v_r^{n_r}\right\}$ eine Basis für V_r. Setze

  $$v_{r-1}^1 := (T-cI)v_r^1,\dots,v_{r-1}^{n_r} \in \ker(T-cI)^{r-1}$$

  und ergänze zu einer Basis von einem Komplement V_{r-1} von $\ker(T-cI)^{r-2}$ in $\ker(T-cI)^{r-1}$.

  $$\left\{v_{r-1}^1,\dots,v_{r-1}^{n_r},v_{r-1}^{n_r+1},\dots,v_{r-1}^{n_r+n_{r-1}}\right\}$$

  Also ist $n_{r-1} = \dim\ker(T-cI)^{r-1} - \dim\ker(T-cI)^{r-2} - n_r$ und $\ker(T-cI)^{r-1} = V_{r-1}\oplus\ker(T-cI)^{r-2}$. Wir verfahren so weiter für $i = r-2,\dots,1$. Dabei berechnen wir immer:

  $$n_i := \dim\ker(T-cI)^i - \dim\ker(T-cI)^{i-1} - n_r - \dots - n_{i+1}.$$

  Im letztem Schrirtt bekommen wir

  $$v_1 = (T-cI)v_2^1,\dots,v_1^{n_r+\dots+n_2} = (T-cI)\,v_2^{n_r+\dots+n_2},\dots$$

  welches wir zu einer Baiss von $\ker(T-cI)$ ergänzen

  $$v_1^1,\dots,v_1^{n_r+\dots+n_2},v_1^{n_r+\dots n_2+1},\dots,v_1^{n_r+\dots+n_2+n_1}$$

  Insbesondere

  $$n_1 = \dim\ker(I-cI)^1 - \dim\ker(T-cI)^0 - n_r - \dots - n_2 = \dim\ker(T-cI) - \sum_{i=2}^r n_i$$

  Dies ist die Gestalt der Jordanbasis für V, die wir so erhalten (wobei jede "Spalte" hierunter ist eine Jordankette):

  $$\mathcal{B} = \begin{array}{ccc|ccc|c|ccc}
v_r^1, & \dots, & v_r^{n_r} & & & & & & & \\
v_{r-1}^1, & \dots, & v_{r-1}^{n_r}, & v_{r-1}^{n_r+1}, & \dots, & v_{r-1}^{n_r+n_{r-1}} & & & & \\
 & \vdots & & & \vdots & & & & & \\
v_1^1, & \dots, & v_1^{n_r}, & v_1^{n_r+1}, & \dots, & v_1^{n_r+n_{r-1}}, & \dots & v_1^{n_r+\dots+n_2+1}, & \dots, & v_1^{n_r+\dots+n_2+n_1}
\end{array}$$

  (Also n_r Jordanketten der Länge r, n_{r-1} Jordanketten der Länge $r-1$, …, n_1 Jordanketten der Länge 1) ■

Note 3.24.3

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} J_r(c) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & J_r(c) & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & J_1(c) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & J_1(c) \end{pmatrix}$$

wobei die Jordanzelle $J_i(c)$ n_i-mal erscheint

Corollary 3.24.4

Falls $\operatorname{MinPol} T$ *(oder* $\operatorname{CharPol} T$ *zerfällt über* K*, dann hat* V *eine Basis von Jordanketten zu den verschiedenen Eigenwert.*

Proof Korollar 3.24.4

$\operatorname{MinPol} T = (x - c_1)^{r_1} \cdots (x - c_k)^{r_k}$ Primzerlegung Satz 3.23.2 liefert

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$$

mit W_i T-inv- und $\operatorname{MinPol} T_{W_i} = (x - \subset c_i)^{r_i}$ $\forall i = 1, \ldots, k$. Die Jordan nOrmalform lierfert Basen $\mathcal{B}_{c_i}$ con Jordanketten für T_{W_i} für jeden Eigenwert c_i. Setze

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_{c_i}. \qquad \blacksquare$$

4 Euklidische und Unitäre Räume

4.25 Skript 25

4.25.15 Innere Produkte:

Definition 4.25.0

Eine **inneres Produkt** (auch **Skalar**produkt) auf V ist eine Abbildung

$$V \times V \to K, (x, y) \mapsto (x|y)$$

so, dass

(1) $(x|y) = \overline{(y|y)}$ $\leftarrow$ Da $(x|x) = \overline{(x|x)}$, also $(x|x) \in \mathbb{R}$.

(2) $(c_1 x_1 + c_2 x_2 | y) = c_1(x_1|y) + c_2(x_2|y)$

(3) $(x|x) \geq 0$ und $(x|x) = 0 \iff x = 0$

Note 4.25.1 Bemerkung

Wir folgern: $(x|c_1 y_1 + c_2 y_2) = \overline{(c_1 y_1 + c_2 y_2 | x)} = \overline{c_1(y_1|x) + c_2(y_2|x)} = \overline{c_1}\overline{(y_1|x)} + \overline{c_2}\overline{(y_2|y)} = \overline{c_1}(x|y_1) + \overline{c_2}(x|y_2)$.

Wir setzen $(x|x) = \|x\|^2$ und $\|x\| := \sqrt{(x|x)}$ nennen wir die **Norm von** x.

Note 4.25.2 Bemerkung

Es gilt $\|cx\| = |c|\,\|x\|$. ■

Definition Terminologie

- $K = \mathbb{R}, (V, (\cdot|\cdot))$ ist **euklidischer Raum** und $(\cdot|\cdot)$ heißt **symmetrisch bilineare positiv definite** Form.
- $K = \mathbb{C}, (V, (\cdot|\cdot))$ heißt **hermitescher** oder **unitärer** Raum und $(\cdot|\cdot)$ ist **hermitesch symmetrisch**, oder **konjugiert bilieare positiv definite** Form

Example 4.25.3

Auf $V = K^n$ so definiert: **standard Skalarprodukt**

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \overline{\eta_i}$$

wobei $x = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in V, y = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in V$.

Definition 4.25.4

Ansatz $(V, (\cdot|\cdot))$

(i) $x, y \in V$ sind **orthogonal** falls $(x|y) = 0$ (oder $(y|x) = 0$)

(ii) $W_1, W_2 \subseteq V$ Unterräume von V
W_1, W_2 sind **orthogonal** wenn $(x|y) = 0 \; \forall x \in W_1$ und $y \in W_2$

(iii) $S \subseteq V$ ist **orthonormal** falls $(x|y) = 0$ für $x \neq y$ und $(x|y) = 1$ für $x = y \neq 0$. Also $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ ist orthonormal falls $(x_i|x_j) = \delta_{ij} \; \forall i, j = 1, \dots, n$

Note 4.25.5

(i) S ist orthonormal $\implies$ S ist linear unabhängig

Proof

Sei

$$\sum c_i x_i = 0 \implies 0 = \left(\sum c_i x_i | x_j\right) = \sum c_i (x_i|x_j) = c_j \quad \forall j$$

(ii) $\dim V = n \implies |S| \leq n$ wenn S orthonormal

Note 4.25.6

orthogonale $\dim V := \max\{|S|\,; S \text{orthonormal}\}$

Note 4.25.7

orthonormale $\dim V \leq \dim V$

Definition Notation

Für $S \subseteq V$ setze $S^\perp := \{x \in V | (x|s) = 0\} \forall s \in S$

Note 4.25.8

(i) $S^\perp$ ist ein Unterraum

(ii) $S \subseteq \left(S^\perp\right)^\perp = S^{\perp\perp}$

(iii) $\operatorname{span}(S) \subseteq S^{\perp\perp}$

Proof Bemerkung 4.25.8

Wir beweisen

(i) $0 = (0|y) \implies \{0\} \subseteq S^\perp$ Für $x_1, x_2 \in S^\perp, c \in K : (x_1 + cx_2|s) = (x_1|s) + c(x_2|s) = 0$ $\forall s \in S$

(ii) und (iii) folgen aus (i) ■

Definition 4.25.9

Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum, $W^\perp$ heißt das **orthogonale Kompement von W in V**

Theorem 4.25.10 Bessel's Ungleichung

Sei $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ orthonormal, $x \in V$. Setze $c_i := (x|x_i)$ für $i = 1, \dots, n$. Es gelten:

(i)

$$\sum_i |c_i|^2 \leq \|x\|^2$$

(ii)

$$x' := x - \sum_i c_i x_i$$

ist orthogonal zu x_j $\forall j = 1, \dots, n$

Proof Satz 4.25.10 Bessel's Ungleichung

(i) Wir berechnen

$$\begin{aligned} 0 \leq (x'|x') &= (x - \sum c_i x_i | x - \sum c_i x_i) \\ &= (x|x) - \sum_i c_i (x_i|x) - \sum_i \overline{c_i}(x|x_i) + \sum_{ij} c_i \overline{c_j}(x_i|x_j) \\ &= \|x\| - \sum_i c_i \overline{c_i} - \sum_i \overline{c_i} c_i + \sum_i c_i \overline{c_i} \\ &= \|x\| - \sum_i |c_i|^2 \end{aligned}$$

damit ist die (i) bewiesen

(ii)

$$(x'|x_j) = (x|x_j) - \sum_i c_i (x_i|x_j) = c_j - c_i = 0$$

■

4.26 Skript 26

Theorem 4.26.1 Ungleichung von Schwarz

Für alle $x, y \in V$ *gilt:*

$$|(x|y)| \leq \|x\| \, \|y\| \,.$$

Proof Satz 4.26.1 Ungleichung von Schwarz

wenn $y = 0$ passt.
Sei $y \neq 0$ setze

$$y_1 := \frac{y}{\|y\|}$$

so, dass $|y_1|$ ist orthonormal. Bessel $\Longrightarrow$ $|(x|y_1)| \leq \|x\|^2$, d.h.

$$\frac{1}{\|y\|} |(x|y)|^2 \leq \|x\|^2 \implies |(x|y)|^2 \leq \|x\|^2 \left\|y^2\right\|$$

Definition 4.26.2

$$\delta(x,y) = \|x-y\|$$

ist **Distanz** zwischen x und y.

Proposition 4.26.3

$\forall x,y,z \in V$

(i) $\delta(x,y) = \delta(y,x)$

(ii) $\delta(x,y) \geq 0,\ \delta(x,y) = 0 \iff x = y$

(iii) $\delta(x,y) \leq \delta(x,z) + \delta(z,y)$

Proof Proposition 4.26.3

(iii)

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= (x+y|x+y)\\ &= \|x\|^2 + (x|y) + (y|x) + \|y\|^2\\ &= \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(x|y) + \|y\|^2\\ &\leq \|x\|^2 + 2\,|(x|y)| + \|y\|^2\\ &\leq \|x\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2\\ &= (\|x\| + \|y\|)^2\end{aligned}$$

■

Theorem 4.26.4 Gram-Schmidt Verfahren

Sei $(V,(\cdot|\cdot))$ *inneres Produkt* $\dim V = n$. *Dann hat* V *eine orthonormale Basis.*

Proof Satz 4.26.4 Gram-Schmidt Verfahren

Sei $\mathcal{X} = \{x_1,\dots,x_n\}$ eine Basis für V. Wir werden eine orthonormale Basis

$$\mathcal{J} = \{y_1,\dots,y_n\}$$

per Induktion aufbauen

I.A.: $x_1 \neq 0$. Setze $y_1 := \frac{x_1}{\|x_1\|}$

I.Annahme: Seien $y_1,\dots,y_r$ schon definiert so, dass $\{y_1,\dots,y_r\}$ orthonormal und $y_j \in \operatorname{span}\{x_1,\dots,x_j\}\,\forall j = 1,\dots,r$.

I.S.: Setze

$$c_j := (x_{r+1}|y_j)\forall j = 1,\dots,r$$

Betrachte $z := x_{r+1} - \sum_i^r c_i y_i$ Berechne

$$(z|y_j) = (x_{r+1}|y_j) - c_j = c_j - c_j = 0 \quad \forall j = 1,\dots,r$$

$$z \in \operatorname{span}\{x_{r+1},y_1,\dots,y_r\}$$

Setze $y_{r+1} := \frac{z}{\|z\|}$.

Bew.: $\{y_1,\dots,y_{r+1}\}$ orthonormal, l.u., $\operatorname{span}\{x_1,\dots,x_n\} = \operatorname{span}\{y_1,\dots,y_n\}$ ■

$(V, (\cdot|\cdot)$ K-VR, $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$: $\dim V < \infty$

Theorem 4.26.7

Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum. Es gelten

(1) $V = W \oplus W^{\perp}$

(2) $W^{\perp\perp} = W$

Proof Satz 4.26.7

(1) Sei $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ eine orthonormale Basis für W (Existenz folgt aus Gram-Schmidt). Sei $z \in V$. setze

$$x := \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

wobei $c_i := (z|x_i)$. Es ist $x \in W$. Bessel liefert $y := z - x$ ist orthogonal zu x_i $\forall i = 1, \dots, n$, und somit $y \in W^{\perp}$. Also $z = x + y$, wobei $x \in W, y \in W^{\perp}$. Es gilt $W \cap W^{\perp} = \{0\}$ (weil $(x|x) = 0 \iff x = 0$ ■

(2) Sei $z \in V$, $z = x+y$ wie in (1). Berechne $(z|x) = \|x\|^2 + (y|x) = \|x\|^2$. Analog $(z|y) = \|y\|^2$. Sei nun $z \in W^{\perp\perp}$, dann ist $(z|y) = 0 = \|y\|^2$. Also $z = x \in W$ ■

4.26.16 Beziehung zu linearen Funktionalen

Theorem 4.26.8 Riesz Darstellung

Sei $f \in V^*$, dann $\exists! y \in V$ so, dass

$$\forall x \in V : f(x) = (x|) \qquad (\dagger)$$

Proof Satz 4.26.8 Riesz Darstellung

$\exists z$

- Sei $f = 0$ setze $y = 0$, dann sind Forderungen erfüllt
- Sei $f \neq 0$, betrachte

  $W := \ker(f) \subsetneq V$ oder

  $W^{\perp} \neq \{0\}$

- sei $y_0 \neq 0$, $y_0 \in W^{\perp}$ Œ $\|y_0\| = 1$. Setze $y := \overline{f(y_0)} y_0$. Beobachte

  $(y_0|y) = (y_0|\overline{f(y_0)y_0} = f(y_0)(y_0|y_0) = f(y_0)$

  somit gilt $(\dagger)$ für y_0

- Für $x = \lambda y_0$ berechnen wir allgemein.

  $f(x) = f(\lambda y_0) = \lambda f(y_0) = \lambda(y_0|y) = (\lambda y_0|y) = (x|y).$

  Also $(\dagger)$

- Für $x \in W$ berechne:

$$(x|y) = (x|\overline{f(y_0)}y_0) = f(y_0)(x|y_0) = 0 = f(x).$$

Also (†) erfüllt. Sei nun $x \in V$ beliebig und schreibe $x = x_0 + \lambda y_0$ wobei $\lambda := \frac{f(x)}{f(y_0)}$ und $x_0 := x - \lambda y_0$ Berechne

$$f(x_0) = f(x) - \frac{f(x)}{f(y_0)} f(y_0) = 0$$

also ist $x_0 \in W$ und

$$f(x) = f(x_0) + f(\lambda y_0) \overset{(\dagger)}{=} (x_0|y) + (\lambda y_0|y) = (x_0 + \lambda y_0|y) = (x|y)$$

Damit (†) erfüllt.

Eindeutigkeit: Seien $y_1, y_2 \in V$ mit $(x|y_1) = (x|y_2)\ \forall x \in V$. Dann ist $(x|(y - y_2)) = 0\ \forall x \in V$. Insbesondere gilt es auch für $x = y_1 - y_2$. Also $y_1 - y_2 = 0 \implies y_1 = y_2$ ■

Theorem 4.26.9

Die Abbildung

$$\rho : V^* \to V, f \mapsto y$$

(wobei $y = \rho(f)$ eindeutig definiert ist (RDS) durch $f(x) = (x|\rho(f))\ \forall x \in V$ erfüllt:

(i) $\rho(f_1 + f_2) = \rho(f_1) + \rho(f_2)$

(ii) ρ *surjektiv*

(iii) ρ *injektiv und Achtung*

(iv) $\rho(cf) = \bar{c}\rho(f)\ \forall c \in K$

ρ ist ein konjugierter Isomorphismus

Proof Satz 4.26.9

(i) ÜA

(ii) Sei $y \in V$, setze $\forall x \in V : f(x) := (x|y)$. Dann ist $f \in V^*$ und $\rho(f) = y$

(iii) $f(x) = (x|y) = 0 \implies f = 0$

(iv) setze $z := \rho(cf)$, $y := \rho(f)$. Zu zeigen: $z = \bar{c}y$, d.h. zu zeigen:

$$\forall x \in V : (cf)(x) = (x|\bar{c}y)$$

Tatsächlich berechne:

$$(cf)(x) = cf(x) = c(x|y) = (x|\bar{c}y)$$ ■

Corollary 4.26.10

Übertragung

I. $\forall f_1, f_2 \in V^*$ *setze*

$$(f_1|f_2) := (\rho(f_1)|\rho(f_2))$$

definiert ein inneres Produkt auf V^*.

II. Sei $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ *und eine Basis für* V, $\exists$ *eine Basis* $\mathcal{Y} = \{y_1, \dots, y_n\}$ *eine Basis für* V *so, dass*

$$(x_i|y_j) = \delta_{ij} \ \forall i, j = 1, \dots, n$$

III. Für $W \subseteq V$ *Unterräume gilt*

$$\rho(W^\circ) = W^\perp$$

IV. Sei $T \in \mathcal{L}(V, V)$ *Definiere* T^* *durch* $(Tx|y) := (x|T^*y)$ $\forall x \in V$, *also d.h.* $\forall y, z \in V$: $T^*(y) = z$ *genau dann wenn* $\forall x \in V : (x|z) = (Tx|y)$ $T^* \in \mathcal{L}(V, V)$
Def: T^* *ist die* ***transponierte konjugierte zu*** T

Eigenschaften von T^*

(1) $(cT)^* = \overline{c}T^*$, $c \in K$

(2) Seien $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ die δ-Basen wie in II. Sei $[T]_{\mathcal{X}} := A$ und Es gilt: $[T^*]_{\mathcal{Y}} = \overline{A^t} := A^*$ d.h. die ij-te Koeffizient von A^* ist $\overline{a_{ji}}$

(3) $\det A^* = \overline{\det A}$

(4) die Eigenwerte von A^* sind die Konjugierten der Eigenwerte von A ■

4.27 Skript 27

4.27.17 Hermite'sche Operatoren

$$T^* : (Tx|y) = (x|T^*y) \text{ oder } (x|Ty) = (T^*x|y)$$

Definition 4.27.1

(i) Sei $T \in \mathcal{L}(V, V)$. T ist **Hermite'sch** (oder **selbstadjungiert**) falls $T^* = T$, d.h. T ist Hermite'sch falls gilt

(ii) $K = \mathbb{R}$, $T = T^*$. T ist **reell symmetrisch**

(iii) $K = \mathbb{C}$, $T = T^*$ T heißt komplex Hermite'sch

Theorem 4.27.2

Sei $T \in \mathcal{L}(V, V)$ Hermite'sch. Es gelten $(Tx|x) \in \mathbb{R}\ \forall x \in V$ und alle Eigenwerte von T sind reell.

Proof Satz 4.27.2

Wir berechnen für $x \in V$ $(Tx|x) = (x|T(x) = (Tx|x)$. Sei nun $Tx = cx$ mit $x \in V, x \neq 0$ dann ist

$$\underbrace{(Tx|x)}_{\in\mathbb{R}} = (cx|x) = c \underbrace{\|x\|}_{\in\mathbb{R}^x}{}^2$$

$\implies c \in \mathbb{R}$. ■

Note 4.27.3 Matrixdarstellung

Sei $\mathcal{X}$ eine orthonormale Basis (Gram-Schmidt). In diesem Fall ist $\mathcal{Y}$ von II gleich $\mathcal{X}$. (d.h. $\mathcal{X}$ ist selbstdual). Sei T Hermite'sch, $T = T^*$, dann bekommen wir

$$A = [T]_{\mathcal{X}} \overset{(2)}{=} \overline{A^t} = A^*$$

Das heißt
$a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ (A ist komplex Hermite'sch). ($\mathbb{C}$)
$a_{ij} = a_{ji}$ (A ist symmetrisch) ($\mathbb{R}$)