2024-06-21
Summer Semester 2024
Gruppe 3, Briefkasten 11, Baiz

University of Konstanz
Faculty of Science
(Mathematics and Statistics)

Übungsblatt 09

Elias Gestrich

Aufgabe 9.1:

Beh.: Sei V_n die $n \times n$ Vandermonde-Matrix. Dann gilt $\det V_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n}(x_j - x_i)$. **Bew.:**

I.A. $n = 2$. Dann gilt $\det V_n = x_2 - x_1 = \prod_{1 \leq i < j \leq n}(x_j - x_i)$

I.V. $\det V_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n}(x_j - x_i)$.

I.S. $n \curvearrowright n + 1$. Zu zeigen $\det V_{n+1} = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1}(x_j - x_i)$.

$$\det V_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+n+1}x_k^n \det V_{n,k} = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+n+1}x_k^n \prod_{1 \leq i < j \leq n+1, i,j \neq k}(x_j - x_i)$$

Aufgabe 9.2:

(a) Entwicklung nach der $(m + n)$-ten Zeile, dann $(m + n - 1)$-ten Zeile, usw.

$$\det \begin{pmatrix} A & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & I_n \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} A & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & I_{n-1} \end{pmatrix} = \cdots = \det(A)$$

bzw. der 1-ten, 2-ten, usw. Zeile:

$$\det \begin{pmatrix} I_n & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & A \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} I_{n-1} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & A \end{pmatrix} = \cdots = \det(A)$$

(b) Wenn C invertierbar, dann $\det(C) \neq 0$ und $\exists e_1, \ldots, e_k \in Mat_{n \times n}$ so, dass $C = e_k \cdots e_1 \cdot I_n$, Sei dann $E_i \coloneqq \begin{pmatrix} I_n & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & e_i \end{pmatrix}$ so, dass

$$\begin{pmatrix} A & B \\ \mathcal{O} & C \end{pmatrix} = E_k \cdots E_1 \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ \mathcal{O} & I_n \end{pmatrix}$$

(Ich weiß, ich weiß muss man noch beweisen, aber jaaa)
Also

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ \mathcal{O} & C \end{pmatrix} = \det \left(E_k \cdots E_1 \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ \mathcal{O} & I_n \end{pmatrix} \right) = \det (E_k \cdots E_1) \left(\begin{pmatrix} A & B \\ \mathcal{O} & I_n \end{pmatrix} \right) = \det (C) \left(\begin{pmatrix} A & B \\ \mathcal{O} & I_n \end{pmatrix} \right)$$

Wenn C nicht invertierbar, dann gibt es Elementarumformungen, so, dass eine Nullzeile bei Zeile n entsteht, sodass bei der Entwicklung nach der n-ten Zeile 0 raus kommt. Also $\det(C) = 0 = \det(C) \begin{pmatrix} A & B \\ \mathcal{O} & I_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & B \\ \mathcal{O} & C \end{pmatrix}$

(c) Analog zur (a) Sei B_i Die $n \times i$-Matrix, die man erhält, wenn man die $i+1$ bis n-te Zeilen streicht. Betrachte

$$\det \begin{pmatrix} A & B_n \\ \mathcal{O} & I_n \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} A & B_{n-1} \\ \mathcal{O} & I_{n-1} \end{pmatrix} = \cdots = \det(A)$$

(d) Betrachte:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ \mathcal{O} & C \end{pmatrix} \overset{\text{(b)}}{=} \det \begin{pmatrix} A & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & C \end{pmatrix} \overset{\text{(c)}}{=} \det(C) \cdot \det \begin{pmatrix} A & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & I_n \end{pmatrix} (= \det(A)\det(C))$$

Aufgabe 9.3:

(a) Betrachte

$$\begin{aligned} \operatorname{adj}(AB) &= B^{-1}A^{-1}AB\operatorname{adj}(AB) \\ &\overset{\text{Kor. 16.7}}{=} B^{-1}A^{-1}\det(AB)\,I_n \\ &= B^{-1}A^{-1}\det(A)\det(B)I_n \\ &= B^{-1}\det(B)I_nA^{-1}\det(A)I_n \\ &= \operatorname{adj}(B)\operatorname{adj}(A) \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

(b) Betrachte

$$\begin{aligned} \det(\operatorname{adj}(A)) &= \det\left(A^{-1}A\operatorname{adj}(A)\right) \\ &\overset{\text{Kor. 16.7}}{=} \det(A^{-1})\det(\det(A)I_n) \\ &= \det(A)^{-1}\det(A)^n \\ &= \det(A)^{n-1} \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

(c) Betrachte

$$\begin{aligned} \operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A)) &\overset{\text{Kor. 16.7}}{=} \operatorname{adj}(A)^{-1}\operatorname{adj}(A)\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A)) \\ &= \operatorname{adj}(A)^{-1}\det(\operatorname{adj}(A)) \\ &\overset{\text{(b)}}{=} \left(A^{-1}A\operatorname{adj}(A)\right)^{-1}\det(A)^{n-1} \\ &\overset{\text{Kor. 16.7}}{=} \left(A^{-1}\det(A)\right)^{-1}\det(A)^{n-1} \\ &= A\det(A)^{-1}\det(A)^{n-1} \\ &= \det(A)^{n-2}A \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

Aufgabe 9.4:

Löse das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nach Cramers Regel:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 2 & 1\\ 5 & 6 & 3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

Finde

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 2 & 1\\ 5 & 6 & 3\end{pmatrix}^{-1}$$

(Entschuldigung, ich schreibe nicht auf, was ich gemacht habe, das war mir in LaTeX zu aufwendig)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 5 & 6 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -7 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -4 & -17 & -5 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -7 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -3 & -1 & -2 & 1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1\\ 0 & -2 & 0 & -2+7\cdot 3^{-1} & 1+7\cdot 2\cdot 3^{-1} & -7\cdot 3^{-1}\\ 0 & 0 & -3 & -1 & -2 & 1\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1-7\cdot 6^{-1} & -3\cdot 6^{-1}-14\cdot 6^{-1} & 7\cdot 6^{-1}\\ 0 & 0 & 1 & 3^{-1} & 2\cdot 3^{-1} & -3^{-1}\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1\cdot 6^{-1} & -17\cdot 6^{-1} & 7\cdot 6^{-1}\\ 0 & 0 & 1 & 3^{-1} & 2\cdot 3^{-1} & -3^{-1}\end{array}\right)$$

Sodass

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 2 & 1\\ 5 & 6 & 3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0 & 3 & -1\\ -1\cdot 6^{-1} & -17\cdot 6^{-1} & 7\cdot 6^{-1}\\ 3^{-1} & 2\cdot 3^{-1} & -3^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0+3-2\\ -1\cdot 6^{-1}-17\cdot 6^{-1}+14\cdot 6^{-1}\\ 3^{-1}+2\cdot 3^{-1}-2\cdot 3^{-1}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1\\ -4\cdot 6^{-1}\\ 3^{-1}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1\\ -2\cdot 3^{-1}\\ 3^{-1}\end{pmatrix}\end{aligned}$$