2024-01-29
Winter Semester 2023/2024

University of Konstanz
Faculty of Science
(Mathematics and Statistics)

BMA

(a) Wir nehmen die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und lassen

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Beh.: $f(\mathbb{R}^3) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\right\}$

(b) **Vor.:** Seien

$$rot := \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$gruen := v_1,$$

$$blau := v_2,$$

$$bunt := \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

Beh.: $\{rot, gruen, blau, bunt\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$ und für

$$farbe : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, rot \mapsto e_1, gruen \mapsto 0, blau \mapsto 0, bunt \mapsto e_2$$

gilt $\ker(farbe) = \operatorname{span}\{gruen, blau\}$

Proof

(a) **"$\subseteq$":** Sei $gadse \in \mathbb{R}^3$, zu zeigen $gadse \in \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$: Da $gadse \in \mathbb{R}^3$ gilt $\exists hut, stock, regenschirm \in \mathbb{R} : gadse = hut \cdot e_1 + stock \cdot e_2 + regenschirm \cdot e_3$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(gadse) &= f(hut \cdot e_1 + stock \cdot e_2 + regenschirm \cdot e_3 \\ &= hut \cdot f(e_1) + stock \cdot f(e_2) + regenschirm \cdot f(e_3) \\ &= hut \cdot v_1 + stock \cdot v_2 \in \operatorname{span}\{v_1, v_2\} \end{aligned}$$

"$\supseteq$": Sei $gadse \in \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$, zu zeigen $\exists urgadse \in \mathbb{R}^3 : f(urgadse) = gadse$: Da $gadse \in \operatorname{span}\{v_1, v_2\} : \exists hut, stock \in \mathbb{R}^3 : gadse = hut \cdot v_1 + stock \cdot v_2$. Setze

$urgadse := hut \cdot e_1 + stock \cdot e_2$, sodass

$$\begin{aligned} f(urgadse) &= f(hut \cdot e_1 + stock \cdot e_2) \\ &= hut \cdot f(e_1) + stock \cdot f(e_2) \\ &= hut \cdot v_1 + stock \cdot v_2 \\ &= gadse \end{aligned}$$

■

(b) Um zu zeigen, dass $\{rot, gruen, blau, bunt\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$ reicht zu zeigen, dass $|\{rot, gruen, blau, bunt\}| = \dim \mathbb{R}^4$ und $e_1, e_2, e_3, e_4 \in \operatorname{span}\{rot, gruen, blau, bunt\}$. $|\{rot, gruen, blau, bunt\}| = 4 = \dim \mathbb{R}^4$ trivialer Weise. Und

$$e_1 = rot$$

$$e_2 = gruen - rot - blau - 2 \cdot bunt$$

$$e_3 = gruen - rot - 2 \cdot blau - bunt$$

$$e_4 = bunt$$

"$\subseteq$" Sei $gadse \in \ker(farbe)$, sodass $farbe(gadse) = 0$, es gilt zu zeigen $gadse \in \operatorname{span}(gruen, blau)$.
Angenommen $gadse \notin \operatorname{span}\{gruen, blau\}$, dann gilt

$$\exists staerke_{rot}, staerke_{gruen}, staerke_{blau}, staerke_{bunt} \in \mathbb{R}, \text{ für die gilt}$$

$$staerke_{rot} \neq 0 \vee staerke_{bunt} \neq 0 \text{ und}$$

$$gadse = staerke_{rot} \cdot rot + staerke_{gruen} \cdot gruen + staerke_{blau} \cdot blau + staerke_{bunt} \cdot bunt, \text{ dann gilt}$$

$$\begin{aligned} farbe(gadse) &= farbe(staerke_{rot} \cdot rot + staerke_{gruen} \cdot gruen \\ &\quad + staerke_{blau} \cdot blau + staerke_{bunt} \cdot bunt) \\ &= staerke_{rot} \cdot farbe(rot) + staerke_{gruen} \cdot farbe(gruen) \\ &\quad + staerke_{blau} \cdot farbe(blau) + staerke_{bunt} \cdot farbe(bunt) \\ &= staerke_{rot} \cdot e_1 + staerke_{bunt} \cdot e_2 \end{aligned}$$

und da e_1, e_2 linear unabhängig und $staerke_{rot} \neq 0 \vee staerke_{bunt} \neq 0$ gilt

$$farbe(gadse) \neq 0,$$

was im Wiederspruch zur Annahme steht, also muss $gadse \in \operatorname{span}\{gruen, blau\}$ sein.

"$\supseteq$" Sei $gadse \in \operatorname{span}\{gruen, blau\}$, zu zeigen $gadse \in \ker(farbe)$.
Für $gadse \in \operatorname{span}\{gruen, blau\}$ gilt $\exists staerke_{gruen}, staerke_{blau} \in \mathbb{R}$ mit $gadse = staerke_{gruen} \cdot gruen + staerke_{blau} \cdot blau$, dann gilt

$$\begin{aligned} farbe(gadse) &= farbe(staerke_{gruen} \cdot gruen + staerke_{blau} \cdot blau) \\ &= staerke_{gruen} \cdot farbe(gruen) + staerke_{blau} farbe(blau) \\ &= 0 \end{aligned}$$

somit ist $gadse \in \ker(farbe)$ ■

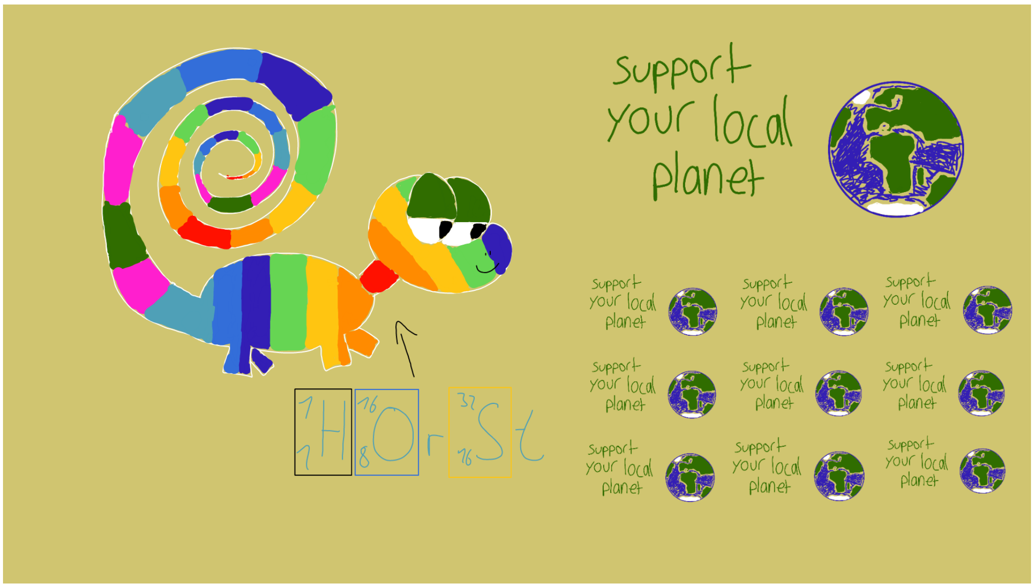

Figure 1: OG gadse