2024-05-20
Summer Semester 2024
Gruppe 3, Briefkasten 11, Baiz

University of Konstanz
Faculty of Science
(Mathematics and Statistics)

Übungsblatt 05

Elias Gestrich

Aufgabe 5.1:

(a) **Beh.:** $\ker(D) = \{0\} \cap K[x]_{=0}$ und $R_D = K[x]$ für $\mathrm{Char}(K) = 0$

Bew.:

$\ker(D) = \{0\} \cap K[x]_{=0}$**:**

"$\subset$": Sei $f \in K[x]$, mit $\deg f = n \geq 1$, sodass

$$f = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i$$

mit insbesondere $f_i \neq 0$ gilt. Daraus folgt:

$$D(f) = \sum_{i=0}^{n} i f_i x^{i-1} = \left(\sum_{i=1}^{n-1} i f_i x^{i-1} \right) + \underbrace{n f_n}_{\neq 0} x^{n-1}$$

Also $\deg D(f) = n - 1 \geq 0 \implies D(f) \neq 0$. Was zu zeigen war.

"$\supset$": Sei $f = 0$, dann folgt aus Linearität von D, dass $D(f) = D(0) = 0$.
Sei $f \in K[x]_{=0}$, sodass $f(x) = c$, dann gilt $D(f) = 0$.

$R_D = K[x]$**:**

"$\subset$": trivial

"$\supset$": Sei $f \in K[x]$, zu zeigen $\exists g \in K[x]$ mit $D(g) = f$. Da $f \in K[x] : \exists f_0, \ldots, f_n \in K$: $f = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i$.
Setze

$$g \coloneqq \sum_{i=0}^{n} \frac{f_i}{i+1} x^{i+1}.$$

So, dass gilt:

$$D(g) = \sum_{i=0}^{n} (i+1) \cdot \frac{f_i}{i+1} \cdot x^{i+1-1} = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i = f \qquad \blacksquare$$

(b)

Beh.: $\ker(D) = \operatorname{span}\{1, x^p, x^{2p}, \dots\}$ und $R_D = \operatorname{span}\left(\{1, x, x^2, \dots\} \setminus \{x^{p-1}, x^{2p-1}, \dots\}\right) =: X$

$\ker(D) = \operatorname{span}\{1, x^p, x^{2p}, \dots\}$**:**

"$\subset$": Sei $f \in K[x]$, so dass $f = \sum_{i=0}^n f_i x^i$, wobei ein $i_0 \leq n$ existiert mit $f_{i_0} \neq 0$ und $\overline{i_0} \neq 0$. Daraus folgt:

$$D(f) = \sum_{i=1}^n i f_i x^{i-1} = \underbrace{i_0}_{\neq 0} \underbrace{f_{i_0}}_{\neq 0} x^{i_0 - 1} + \sum_{i=1}^{i_0-1} i f_i x^{i-1} + \sum_{i=i_0+1}^{n} i f_i x^{i-1} \neq 0$$

"$\supset$": Sei $f \in K[x]$, sodass $f_0, \dots, f_n \in K$ existieren mit

$$f = \sum_{i=0}^n f_i x^{ip}$$

so, dass

$$D(f) = \sum_{i=1}^n i \underbrace{p}_{=0?} f_i x^{ip-1} = 0$$

was zu zeigen war

$R_D = X$**:**

"$\subset$": Sei $f \in K[x]$ gegeben, mit $\exists f_0, \dots, f_n \in K : f = \sum_{i=0}^n f_i x^i$. Sei $g := D(f)$ mit $g = \sum_{i=0}^{n-1} g_i x^i$ zu zeigen $D(f) = g \in X$, also $g_{ap-1} = 0$ für $a \in \mathbb{N}$

$$D(f) = \sum_{i=1}^n i f_i x^{i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) f_{i+1} x^i = \sum_{i=0}^{n-1} g_i x^i$$

Also $g_i = (i+1) f_{i+1}$. Sei $a \in \mathbb{N}$, zu zeigen $g_{ap-1} = 0$:

$$g_{ap-1} = ((ap-1)+1) f_{(ap-1)+1} = \underbrace{ap}_{=0} f_{ap} = 0$$

was zu zeigen war.

"$\supset$": Sei $f \in X$, zu zeigen $\exists g \in K[x] : D(g) = f$. Da $f \in X$ gibt es $f_0, \dots, f_n \in K$ so, dass

$$f = \sum_{i=0}^n f_i x^i$$

wobei $f_{ap-1} = 0$ für $a \in \mathbb{N}$. Setze für $p \nmid i$, so dass $i \not\equiv 0$

$$g_i = \frac{f_{i-1}}{i}$$

und $g_i = 0$ sonst, sodass $i \cdot g_i = f_{i-1}$ für alle $i = 1, \dots, n+1$ so, dass

$$D(g) = \sum_{i=1}^{n+1} i g_i x^{i-1} = \sum_{i=1}^{n+1} f_{i-1} x^{i-1} = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i = f \qquad \blacksquare$$

Aufgabe 5.2:

(a) es gilt für $f = x^3 - 2x^2 + x - 4$:

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= 3x^2 - 4x + 1 \\ f^{(2)} &= 6x - 4 \\ f^{(3)} &= 6 \\ f^{(4)} &= 0 \end{aligned}$$

Also $f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 - 4 = 8 - 8 + 2 - 4 = -2$, $f^{(1)}(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 12 - 8 + 1 = 5$, $f^{(2)}(2) = 6 \cdot 2 - 4 = 12 - 4 = 8$ und $f^{(3)}(2) = 6$ so, dass die Taylorentwicklung von f in 2 wie folgt aussieht:

$$f = \sum_{i=0}^{3} \frac{f^{(i)}(2)}{i!}(x-2)^i = -2+5(x-2)+\frac{8}{2}(x-2)^2+\frac{6}{2 \cdot 3}(x-2)^3 = -2+5(x-2)+4(x-2)^2+(x-2)^3$$

(b)

Vor.: Seien $f_0, \ldots, f_n \in K[x]_{\leq n}$ mit $\deg(f) = i$ für alle $i = 0, \ldots, n$.

Beh.: $\{f_0, \ldots, f_n\}$ ist eine Basis von $K[x]_{\leq n}$, also

- $f_0, \ldots, f_n$ l.u,
- $f_0, \ldots, f_n \in K[x]_{\leq n}$ und
- erzeugend, bzw. es reicht zu zeigen, dass $|\{f_0, \ldots, f_n\}| = \dim K[x]_{\leq n}$

Bew.:

"Lineare Unabhängigketi": Zum Widerspruch, sei

$$\sum_{i=0}^{n} a_i f_i = 0$$

mit $a_i \in K$ für $i = 0, \ldots, n$ und es existerit ein $i_0 \in \{0, \ldots, n\}$ mit $a_{i_0} \neq 0$. Da $\{0, \ldots, n\}$ endlich, existiert ein größtes i_0 so, dass $a_{i_0} \neq 0$ Das bedeutet aber

$$\deg\left(\sum_{i=0}^{n} a_i f_i\right) = \underbrace{\deg\left(\sum_{i=0}^{i_0-1} a_i f_i\right)}_{<i_0} + \underbrace{\deg(a_{i_0} f_{i_0})}_{=i_0} \overset{Aufgabe 3.4(d)}{=} i_0$$

"$f_0, \ldots, f_n \in K[x]_{\leq n}$": gilt nach Voraussetzung

"$|\{f_0, \ldots, f_n\}| = \dim K[x]_{\leq n}$": $|\{f_0, \ldots, f_n\}| = n + 1 = \dim K[x]_{\leq n}$ ■

(c) Für die Basiswechselmatrix P von $\mathcal{B}'$ nach $\mathcal{B}$ gilt:

$$\big([1]_{\mathcal{B}} \quad [x-1]_{\mathcal{B}} \quad [(x-1)^2]_{\mathcal{B}} \quad \ldots \quad [(x-1)^n]_{\mathcal{B}}\big)$$

Es gilt $(x-1)^i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} x^j \cdot (-1)^{i-j}$ nach Ana I. Also

$$[(x-1)^i]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} (-1)^i \\ (-1)^{i-1} i \\ \vdots \\ (-1)^{i-j}\binom{i}{j} \\ \vdots \\ -i \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{ij} = \begin{cases} (-1)^{j-i}\binom{j}{i} & \text{für } i \leq j \\ 0 & \text{für } i > j \end{cases}$$

Also ist die Basiswechselmatrix P

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \dots & (-1)^j & \dots & (-1)^{n-1} & (-1)^n \\ 0 & 1 & -2 & \dots & (-1)^{j-1} j & \dots & (-1)^{n-1}(n-1) & (-1)^{n-1} n \\ 0 & 0 & 1 & \dots & (-1)^{j-2}\binom{j}{2} & \dots & (-1)^{n-2}\binom{n-1}{2} & (-1)^{n-2}\binom{n}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (-1)^{j-i}\binom{j}{i} & \dots & (-1)^{n-1-i}\binom{n-1}{i} & (-1)^{n-i}\binom{n}{i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(d)

Vor.: Sei $a \in K$, so ist $l_i(p) = p^{(i)}(a)$ und $p_j := \frac{1}{j!}(x-a)^j$ für alle $i, j = 0, \dots, n$

Beh.: $l_i(p_j) = \delta_{ij}$ für alle $i, j = 0, \dots, n$

Bew.:

"$i < j$": Es gilt:

$$\begin{aligned} l_i(p_j) &= p_j^{(i)}(a) \\ &= \left(\frac{j \cdot (j-1) \dots (i+1)}{j!} (x-a)^{j-i} \right)(a) \\ &= \frac{1}{i!}(a-a)^{j-i} \\ &= 0 \end{aligned}$$

"$i = j$": Es gilt:

$$\begin{aligned} l_i(p_j) &= p_j^{(i)}(a) \\ &= \left(\frac{j!}{j!}(x-a)^{j-j}\right)(a) \\ &= 1(a-a)^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

"$i > j$": Es gilt:

$$\begin{aligned} l_i(p_j) &= p_j^{(i)}(a) \\ &= \left(\frac{j!}{j!}(x-a)^{j-j}\right)^{(i-j)}(a) \\ &= (1)^{(i-j)}(a) \\ &= 0(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 5.3:

Die Basiswechselmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$ ist

$$\begin{pmatrix} [1]_{\mathcal{B}'} & [x]_{\mathcal{B}'} & \dots & [x^n]_{\mathcal{B}'} \end{pmatrix}$$

Dabei ist nach Skript 22 LA I

$$[x^j]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} L_0(x^j) \\ L_1(x^j) \\ \vdots \\ L_i(x^j) \\ \vdots \\ L_n(x^j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0^j \\ t_1^j \\ \vdots \\ t_i^j \\ \vdots \\ t_n^j \end{pmatrix}$$

Also ist die Basiswechselmatrix

$$\begin{pmatrix} t_0^0 & t_0^1 & t_0^2 & \dots & t_0^n \\ t_1^0 & t_1^1 & t_1^2 & \dots & t_1^n \\ t_2^0 & t_2^1 & t_2^2 & \dots & t_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_n^0 & t_n^1 & t_n^2 & \dots & t_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t_0^1 & t_0^2 & \dots & t_0^n \\ 1 & t_1^1 & t_1^2 & \dots & t_1^n \\ 1 & t_2^1 & t_2^2 & \dots & t_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n^1 & t_n^2 & \dots & t_n^n \end{pmatrix}$$

■

Aufgabe 5.4:

(a) Nach Korollar 10.10 reicht es zu zeigen, dass $2x^2 + 4x - 10$ und $x + 2$ relativprim zueinander sind. Da $\deg(x + 2) = 1$ ist $x + 2$ ein Primpolynom. Also reicht es zu zeigen, dass $\forall f \in K[x] : (x + 2) \cdot f \neq 2x^2 + 4x - 10$. Betrachte dafür:

$$((x+2)\cdot f)(-2) \overset{Thm.7.5}{=} (x+2)(-2)\cdot f(-2) = 0\cdot f(-2) = 0 \neq -10 = 8-8-10 = 2\cdot(-2)^2+4\cdot(-4)-10$$

Also $x + 2$ und $2x^2 + 4x - 10$ relativprim, was zu zeigen war.

(b) Durch Ausprobieren: $f(-1) = 0$, aber $f^{(1)}(-1) = 18 - 24 \cdot (-1) - 6 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1)^3 = 18 + 24 - 6 - 4 = 32 \neq 0$. Also (-1) einfache Nullstelle von f. Es existiert also ein g so dass $f = (x+1)g$. Setze $g := x^3 - 3x^2 - 9x + 27$ so dass $(x+1) \cdot g = f$ gilt. Es gilt $g(-3) = (-3)^3 - 3 \cdot (-3)^2 - 9 \cdot (-3) + 27 = -27 - 27 + 27 + 27 = 0$, also ist -3 Nullstelle von g. $g^{(1)}(-3) = 3 \cdot (-3)^2 - 6 \cdot (-3) - 9 = 27 + 18 - 9 = 36 \neq 0$. Also ist -3 eine einfache Nullstelle von g und es existiert ein h so, dass $g = (x+3)h$. Sezte hierfür $h = x^2 - 6x + 9$ so, dass $(x+3)h = g$. Betrachte $h = x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \cdot 3x + 9 = (x-3)^2$. Also ist $f = (x+3)(x+1)(x-3)(x-3)$.

Trivialer Weise ist -3 eine Nullstelle von f. Betrachte

$$f^{(1)}(-3) = 18 - 24 \cdot (-3) - 6 \cdot (-3)^2 + 4 \cdot (-3)^3 = 18 + 72 - 3 \cdot 27 - 4 \cdot 27$$

$$= 90 - 7 \cdot 27 = 10 \cdot 9 - 21 \cdot 9 = -11 \cdot 9 \neq 0$$

Also ist -3 einfache Nullstelle nach Satz 9.8

Trivialer Weise ist 3 eine Nullstelle von f. Betrachte

$$f^{(1)}(3) = 18 - 24 \cdot (3) - 6 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 = 2 \cdot 9 - 8 \cdot 9 - 6 \cdot 9 + 12 \cdot 9 = (2 - 8 - 6 + 12) \cdot 9 = 0$$

und

$$f^{(2)}(3) = -24 - 12 \cdot (3) + 12 \cdot (3) = -24 \neq 0$$

also ist 3 eine doppelte Nullstelle nach Satz 9.8

(c) Für $a = 0$ ist 0 eine Nullstelle mit Vielfachheit ≥ 2, da $0^p = 0$ und $p \cdot 0^{p-1} = 0$.
Für $a \geq 1$ Sei $b = a^{-p}$ so, dass $b^p - a = 0$. Zu zeigen b ist auch Nullstelle von der ersten Ableitung. Dafür gilt $p \cdot b^{p-1} = 0$. ■

Zusatzafugabe für Interessierte:

(a) (i) Sei $f, g \in \{h \in \mathbb{Q}[x] : h(0) = 0\} =: M$, zu zeigen $fg \in M$, also zu zeigen $fg \in \mathbb{Q}[x]$ und $(fg)(0) = 0$.
$fg \in \mathbb{Q}[x]$ trivial, und $(fg)(0) = f(0)g(0) = 0$

(ii) $x^3 \in \{f \in \mathbb{Q}[x] : f = 0 \text{ oder } \deg(f) \leq 4\} =: M$, aber $x^3 \cdot x^3 = x^6 \notin M$, da $\deg x^6 = 6 > 4$

(iii) Sei $f, g \in \{h \in \mathbb{Q}[x] : D(h)(2) = 0\}$. Also

$$f = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(2)}{i!}(x-2)^i$$

und

$$g = \sum_{i=0}^{m} \frac{g^{(i)}(2)}{i!}(x-2)^i$$

Also ist

$$
\begin{aligned}
D(fg)(2) &= D\left(\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(2)}{i!}(x-2)^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m}\frac{g^{(j)}(2)}{j!}(x-2)^j\right)\right)(2)\\
&= D\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{f^{(i)}(2)g^{(j)}(2)}{i!j!}(x-2)^{i+j}\right)(2)\\
&= \left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{f^{(i)}(2)g^{(j)}(2)(i+j)}{i!j!}(x-2)^{i+j-1}\right)(2)\\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{f^{(i)}(2)g^{(j)}(2)(i+j)}{i!j!}\underbrace{0^{i+j-1}}_{=0 \text{ für } i+j>1}\\
&= \frac{f^{(0)}(2)g^{(1)}(2)(0+1)}{0!1!}0^{0+1-1}+\frac{f^{(1)}(2)g^{(0)}(2)(1+0)}{1!0!}0^{1+0-1}\\
&= f^{(0)}(2)\cdot 0+0\cdot g^{(0)}(2)\\
&= 0
\end{aligned}
$$