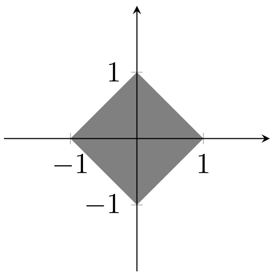
2024-05-02
Summer Semester 2023/2024
Gruppe 3, Jonathan Weihing

University of Konstanz
Faculty of Science
(Mathematics and Statistics)

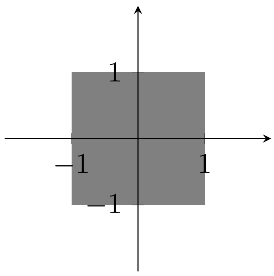
Übungsblatt 3

Elias Gestrich

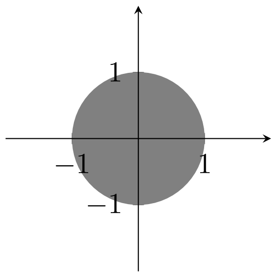
Aufgabe 1: Einheitsbälle



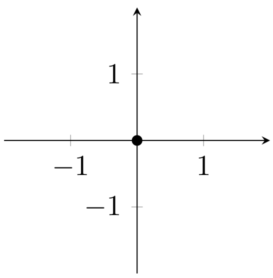
(a)



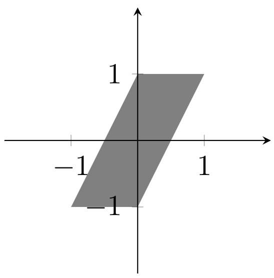
(b)



(c)



(d)



(e)

Aufgabe 2:

(a) **Norm $\implies$ konvex:** Sei $x, y \in B$ ($\|x\|, \|y\| \leq 1$), zu zeigen $\forall \lambda \in (0,1) : \|\lambda x + (1-\lambda)y\| \leq 1$.
Sei ein $\lambda \in (0,1)$ gegeben, so gilt:

$$\begin{aligned} \|\lambda x + (1-\lambda)y\| &\leq \|\lambda x\| + \|(1-\lambda)y\| \\ &= \lambda \|x\| + (1-\lambda) \|y\| \\ &\leq \lambda + (1-\lambda) \\ &= 1 \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Nicht Norm $\implies$ nicht konvex: Wenn $\|\cdot\|$ keine Norm, sondern nur eine Quasinorm ist, zu zeigen $\exists x, y \in B, \lambda \in [0,1] : \|\lambda x + (1-\lambda)y\| > 1$.
Da $\|\cdot\|$ keine Norm, aber eine Quasinorm existiert $\tilde{x}, \tilde{y} \in X : \|\tilde{x} + \tilde{y}\| > \|\tilde{x}\| + \|\tilde{y}\|$, wähle

solche $\tilde{x}, \tilde{y}$. Œ $\|\tilde{x}\| \geq \|\tilde{y}\|$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
\|\tilde{x}\| + \|\tilde{y}\| &< \|\tilde{x} + \tilde{y}\| \\
1 &< \left\| \frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\| + \|\tilde{y}\|} + \frac{\tilde{y}}{\|\tilde{x}\| + \|\tilde{y}\|} \right\| \qquad (*)
\end{aligned}$$

mit $1 \geq \left\| \frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|+\|\tilde{y}\|} \right\| \geq \left\| \frac{\tilde{y}}{\|\tilde{x}\|+\|\tilde{y}\|} \right\|$ und $\left\| \frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|+\|\tilde{y}\|} \right\| + \left\| \frac{\tilde{y}}{\|\tilde{x}\|+\|\tilde{y}\|} \right\| = \frac{\|\tilde{x}\|+\|\tilde{y}\|}{\|\tilde{x}\|+\|\tilde{y}\|} = 1$.
Wähle $x := \frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|}, y := \frac{\tilde{y}}{\|\tilde{y}\|}$ und $\lambda := \frac{\|\tilde{x}\|}{\|\tilde{x}\|+\|\tilde{y}\|}$, sodass gilt:

$$\begin{aligned}
\|\lambda x + (1-\lambda) y\| &= \left\| \frac{\|\tilde{x}\|}{\|\tilde{x}\| + \|\tilde{y}\|} \cdot \frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|} + \left(1 - \frac{\|\tilde{x}\|}{\|\tilde{x}\| + \|\tilde{y}\|}\right) \cdot \frac{\tilde{y}}{\|\tilde{y}\|} \right\| \\
&= \left\| \frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\| + \|\tilde{y}\|} + \left(\frac{\|\tilde{x}\| + \|\tilde{y}\| - \|\tilde{x}\|}{\|\tilde{x}\| + \|\tilde{y}\|} \right) \cdot \frac{\tilde{y}}{\|\tilde{y}\|} \right\| \\
&= \left\| \frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\| + \|\tilde{y}\|} + \left(\frac{\|\tilde{y}\|}{\|\tilde{x}\| + \|\tilde{y}\|} \right) \cdot \frac{\tilde{y}}{\|\tilde{y}\|} \right\| \\
&= \left\| \frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\| + \|\tilde{y}\|} + \frac{\tilde{y}}{\|\tilde{x}\| + \|\tilde{y}\|} \right\| \\
&\overset{(*)}{>} 1
\end{aligned}$$ ■

(b) Für eine Quasinorm ist zu zeigen:

(i) $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p = 0 \iff x = 0$:

$\Longrightarrow$**:** Gegeben $\|x\|_p = 0$, also

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p = 0 \implies x_j = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

Was zu zeigen war

$\Longleftarrow$**:** trivial.

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda x\|_p = |\lambda| \cdot \|x\|_p$:

$$\begin{aligned}
\|\lambda x\|_p &= \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda|^p \cdot |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(|\lambda|^p \sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= (|\lambda|^p)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\lambda| \cdot \|x\|_p
\end{aligned}$$

(iii) $\exists c \in \mathbb{R} : \forall x, y \in R^n : \|x+y\|_p \leq c\left(\|x\|_p + \|y\|_p\right)$:
Für $1 \leq p < \infty$, ist $\|\cdot\|_p$ laut Vorlesung eine Norm, für $0 < p < 1$:
Sei $0 < p < 1$ gegeben, setze $p' := \frac{1}{p}$, so dass $1 < p' < \infty$. Es gilt also $(x^{p'})'' = p'(p'-1)x^{p'} > 0$, also $x^{p'}$ konvex, daher gilt, für $a, b > 0$:
$(a+b)^{p'} \geq a^{p'}$ und $(a+b)^{p'} \geq b^{p'}$, daraus folgt $(a+b)^{p'} \geq \frac{1}{2}\left(a^{p'} + b^{p'}\right)$, also:

$$\begin{aligned}
\frac{a+b}{(a^p+b^p)^{p'}} &\leq \frac{a+b}{\frac{1}{2}\left(a^{pp'}+b^{pp'}\right)} \\
&= 2\frac{a+b}{a+b} \\
&= 2
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
(a+b)^{p'} &= (0.5(2a) + 0.5(2b))^{p'} \\
&\leq 0.5(2a)^{p'} + 0.5(2b)^{p'} \\
&\leq 2^{p'-1}\left(a^{p'} + b^{p'}\right)
\end{aligned}$$

Wähle $c := 2^{\frac{1}{p^2}}$, sei $x, y \in \mathbb{R}^n$ gegeben

$$\begin{aligned}
\|x-y\|_p &= \left(\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^n (|x_j| + |y_j|)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^n 2(|x_j|^p + |y_j|^p)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^n 2^{p'}|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^n 2^{p'}|y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq 2^{\frac{1}{p^2}}\left(\|x\| + \|y\|\right)
\end{aligned}$$

Für $0 < p < 1$ ist der Einheitsball B nicht konvex, da für $x := (1, 0, \ldots, 0)$, und $y := (0, 1, 0, \ldots, 0)$. $\|x\|_p = 1 = \|y\|_p \leq 1$, also $x, y \in B$, aber für $\lambda := 0.5 \in [0,1]$ gilt:

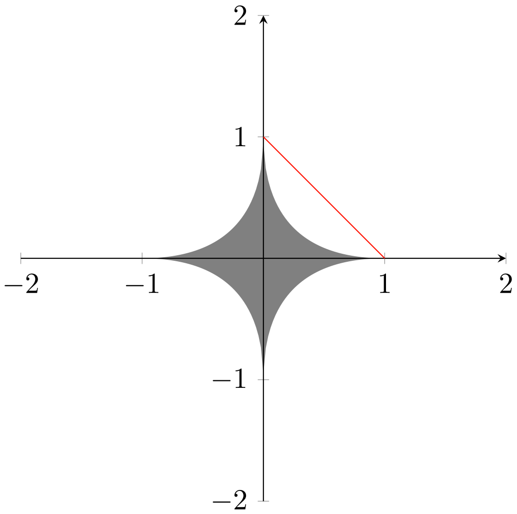
$$\begin{aligned}
\|\lambda x + (1-\lambda)y\|_p &= \left\|\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right\|_p \\
&= \left\|\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0\right)\right\|_p \\
&= \left(2\left(\frac{1}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= 2^{\frac{1}{p}} \cdot \frac{1}{2} \\
&> 2 \cdot \frac{1}{2} \\
&> 1
\end{aligned}$$

Für $p = 1$ gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}\|x - y\|_1 &= \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| + \sum_{j=1}^{n} |y_j| \\ &\leq \|x\|_1 + \|y\|_1\end{aligned}$$

Und zuletzt für $p > 1$ ist $\|\cdot\|_p$ eine Norm, Beweis in dem Skript

(c) An der Linie kann man erkennen, dass der Ball der p-Quasinorm mit $p = \frac{1}{2}$ nicht konvex ist, also ist die Quasinorm keine Norm, was nach (b) auch so passt c: (zur Aufgabe 1: Meine Skizzen sind nicht so grob schlecht, dass sie nicht konvex sind, also sind die gezeichneten Skizzen Metriken)



Aufgabe 3: Banachscher Fixpunktsatz

(a) Um zu zeigen, dass $f(x) = x$ genau eine Lösung in $[1, \infty]$ besitzt reicht zu zeigen, dass f von $[1, \infty)$ auf $[1, \infty]$ abbildet und $\exists 0 \leq L < 1 : \forall x, y \in [1, \infty) : d(f(x), f(y)) \leq L d(x, y)$ mit $d(x, y) := |x - y|$:

Wertebereich: Für $1 \leq x < 2 : f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) \geq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{2}\right) = 1$ und für $2 \leq x : f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) \geq \frac{1}{2}(2 + 0) = 1$ ■

Kontraktion: Sei $L := \frac{1}{2}$, sei $x, y \in [1, \infty)$ beliebig zu zeigen $|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|$:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= \left|\frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(y + \frac{2}{y}\right)\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|x - y - \left(\frac{2}{y} + \frac{2}{x}\right)\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|(x - y) - 2\left(\frac{x - y}{xy}\right)\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\frac{(xy)(x - y) - 2(x - y)}{xy}\right| \\
&= \left|\frac{xy - 2}{xy}\right| \cdot \frac{1}{2} \cdot |x - y| \\
&= \left|1 - \frac{2}{xy}\right| \cdot \frac{1}{2} \cdot |x - y| \\
&\leq \frac{1}{2}\,|x - y|
\end{aligned}$$

(b) Es gilt $f\left(\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$. Zu beweis siehe (c) (für $\varepsilon > 0$ wähle N, so dass $-\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2} < N$, der Rest ergibt sich dann)

(c) Beweis durch vollständige Induktion:

I.A.: $n = 0$**:** $\left|x_n - \sqrt{2}\right| = \left|x_0 - \sqrt{2}\right| = \left|1 - \sqrt{2}\right| < |-0.5| = \frac{1}{2} = 2^{-1}$

I.S.: $n \curvearrowright n + 1$**: I.V.:** $\left|x_n - \sqrt{2}\right| \leq 2^{-n}$.

Zu zeigen $\left|x_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq 2^{-(n+1)}$

$$\begin{aligned}
\left|x_{n+1} - \sqrt{2}\right| &= \left|f(x_n) - f(\sqrt{2})\right| \\
&\overset{(a),\,(b)}{\leq} \frac{1}{2}\left|x_n - \sqrt{2}\right| \\
&\overset{\text{I.V.}}{\leq} \frac{1}{2}2^{-n} \\
&\leq 2^{-(n+1)}
\end{aligned}$$

■

Aufgabe 4: Vollständigkeit

(a) $c_{00}(\mathbb{N}) \subsetneq \bigcap_{i \leq q \leq \infty} l^q(\mathbb{N})$**:** Für $c_{00}(\mathbb{N}) \subseteq \bigcap_{i \leq q \leq \infty} l^q(\mathbb{N})$: Sei $(x_j) \subset \mathbb{R} : \exists N \in \mathbb{N} : \forall j \geq N : x_j = 0$, zu zeigen $\left\|(x_j)\right\|_p < \infty$:

$$\begin{aligned}
\left\|(x_j)\right\|_p &= \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)\frac{1}{p} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{N} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Da $\sum_{j=1}^{N} |x_j| < \infty$ ist auch $\|x_j\| < \infty$, was zu zeigen war, für $c_{00}(\mathbb{N}) \neq \bigcap_{i\leq q\leq\infty} l^q(\mathbb{N})$:

$$\begin{aligned}\left\| \left(\frac{1}{2}\right)^j \right\|_p &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\frac{1}{2}\right|^{jp}\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \Bigg(\underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j}_{=\frac{1}{1-2}-1=1}\Bigg)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 1 < \infty\end{aligned}$$

$\bigcap_{i\leq q\leq\infty} l^q(\mathbb{N}) \subset l^p(\mathbb{N})$**:** trivial

$l^p(\mathbb{N}) \subsetneq c_0(\mathbb{N})$**:** $\subset$**:** Sei $(x_j) \in l^p(\mathbb{N})$, zu zeigen $x \in c_0(\mathbb{N})$. Beweis durch Widerspruch, wir nehmen an, $x \notin c_0(\mathbb{N})$, also (x_j) keineNullfolge. Also $\exists\varepsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N} : \exists n > N : |x_j| > \varepsilon$, sei (x_{a_j}), eine Teilfolge von (x_j) mit $a_j < a_{j+1}$ und $\forall j \in \mathbb{N} : |x_{a_j}| > \varepsilon$, diese existiert, da $\forall a_j \in \mathbb{N} : n > a_j : |x_n| > \varepsilon$, also $\sum_{j=1}^{\infty} \left|x_{a_j}\right| = \infty$, also auch $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j| = \infty \implies \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p = \infty \implies \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \infty$

$\neq$ Sei $(x_j) = (\frac{1}{j})^{\frac{1}{p}}$, sodass gilt:

$$\begin{aligned}\|x_j\|_p &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\left(\frac{1}{j}\right)^{\frac{1}{p}}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \infty^{\frac{1}{p}} \\ &= \infty\end{aligned}$$

Also (x_j) nicht in $l^p(\mathbb{N})$, aber $\left(\frac{1}{j}\right)^{\frac{1}{p}}$ geht gegen Null.

$c_0(\mathbb{N}) \subsetneq l^\infty(\mathbb{N})$**:** Alle Nullfolgen sind trivialer weise beschränkt, zu zeigen $\exists (x_j) \in l^\infty(\mathbb{N}) : (x_j) \notin c_0(\mathbb{N})$. Wähle die konstante Folge $(x_j) = 1 \forall j \in \mathbb{N}$, sodass (x_j) durch 1 nach unten und oben beschränkt ist, aber (x_j) konvergiert trivialer weiße nicht gegen 0 ■

(b) Da ich nicht weiß, wie man Folgen von Folgen aufschreibt, habe ich mit $((x_j)_n)$ eine Folge einer Folge gemeint, mit den Folgengliedern $(x_j)_n$, welche selbst Folgen sind und die Folgenglieder $x_{j,n}$ haben.
$c_{00}(\mathbb{N})$ ist nicht in d_p vollständig, da $c_{00}(\mathbb{N})$ in d_p nicht abgeschlossen ist, da die Folge $((x_j)_n)$ mit

$$x_{j,n} := \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^j, & \text{wenn } j < n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

d_p-Cauchy ist, sei $\varepsilon > 0$ gegeben, setze, setze $N > \frac{\ln \varepsilon}{\ln \frac{1}{2}} \cdot p + 1$, sodass $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{N-1}{p}} < \varepsilon$, sodass für alle

$l, k \in \mathbb{N}$ Œ $l < k$, und gilt:

$$\begin{aligned}
d_p((x_j)_l, (x_j)_k) &= \left(\sum_{j=l}^{k} \left| \left(\frac{1}{2}\right)^j \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{j=N}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{pj} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\frac{1}{2^{N-1}} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{pj} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\frac{1}{2^{N-1}} 1 \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{1}{2^{\frac{N-1}{p}}} \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

die Folge ist auch d_∞-Cauchy, da $\sup(|x_{j,l}|) = \sup(|x_{j,k}|) = \frac{1}{2}$, also $d_\infty((x_j)_l, (x_j)_k) = 0$. Aber für $n \to \infty$ geht $((x_j)_n)$ gegen $\left(\frac{1}{2^j}\right)$ und $\left|\left(\frac{1}{2^j}\right)\right| > 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$, somit $\lim_{n\to\infty}(x_j)_n \notin c_{00}(\mathbb{N})$

(c) **Nicht vollständig bezüglich d_∞:** Sei $(x_{j,n}) := ((x_j)_n)$ mit

$$x_{j,n} = \begin{cases} 1, & \text{für } j < n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann für alle $l, k \in \mathbb{N} : d_\infty((x_{l,n}), (x_{j,k})) = d_\infty(1, 1) = 0$ Also d_∞-Cauchy, aber da (x_j) mit $x_j = 1$ die Grenzfolge für $((x_j)_n)$ ist und:

$$\begin{aligned}
\|(x_j)\|_p &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} 1^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \infty^{\frac{1}{p}} \\
&\not< \infty
\end{aligned}$$

Vollständigkeit bezüglich d_p: Sei $((x_j)_n)$ d_p-Cauchy, zu zeigen $\lim_{n\to\infty}((x_j)_n) \in l^p(\mathbb{N})$, also $\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_{j,n}|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$.
Da $((x_j)_n)$ d_p-Cauchy