2024-05-03
Summer Semester 2024
Gruppe 3, Briefkasten 11, Beiz

University of Konstanz
Faculty of Science
(Mathematics and Statistics)

Übungsblatt 03

Elias Gestrich

Aufgabe 3.1:

(a) $U_1, U_2 \subset V_1 = V_2$, und $U_1 + U_2 = V$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, also $V_1/U_1 \cong U_2$ und $V_2/U_2 \cong U_1$. Außerdem sind U_1 und U_2 Isomorph zueinander, da

$$T : U_1 \to U_2, (x,0)^t \mapsto (0,x)^t,$$

injektiv: $\forall (x,0)^t : T((x,0)^t) = (0,0) \implies x = 0 \implies (x,0)^t = 0$ und surjektiv: $\dim U_1 = 1 = \dim U_2$. (Also weil $\left\{(1,0)^t\right\}$ Basis von U_1, usw.)
D.h. $V_1/U_1 \cong U_2 \cong U_1 \cong V_2/U_1$?

(b) $\left\{u_{11} \coloneqq (1,-1,0,2)^t, u_{12} \coloneqq (0,1,1,1)^t\right\}$ ist eine Basis von U_1, da

$$\forall u \in U_1 : \exists a,b \in \mathbb{Q} : u = (a, -a+b, b, 2a+b)^t = au_{11} + bu_{12} \text{ und}$$

$$\forall u \in \operatorname{span}\{u_{11}, u_{12}\} : \exists a,b \in Q : u = au_{11} + bu_{12} = (a, -a+b, b, 2a+b)^t \in U_1.$$

Außerdem ist $\left\{u_{11}, u_{12}, u_{13} \coloneqq (0,0,1,0)^t, u_{14} \coloneqq (0,0,0,1)^t\right\}$ eine Basis von $\mathbb{Q}^4$, da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also invertierbar, also linear unabhängig und erzeugend.
Sei

$$T : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^2, \begin{cases} u_{11} \mapsto 0, \\ u_{12} \mapsto 0, \\ u_{13} \mapsto (1,0)^t \text{ und} \\ u_{14} \mapsto (0,1)^t. \end{cases}$$

Dann ist $\ker T = \operatorname{span}\{u_{11}, u_{12}\} = U_1$ und $R_T = \operatorname{span}\left\{(1,0)^t, (0,1)^t\right\} = \mathbb{Q}^2$ Also ist $V_1/U_1 = V_1/\ker T \cong R_T = \mathbb{Q}^2$.

$V_1/\{0\} = \mathbb{Q}^2/\ker \mathrm{Id} \cong R_{\mathrm{Id}} = \mathbb{Q}^2$. Also ist $V_1/U_1 \cong V_2/U_2$

(c) —

Aufgabe 3.2:

Sei $\{w_1, \dots, w_m\}$ geordnete Basis von W und $\{w_1, \dots, w_m, w_{m+1}, \dots, w_n\}$ eine geordnete Basis von V. Sodass $\{f_1, \dots, f_m\}$ Dualbasis von W^* und $\{f_1, \dots, f_m, f_{m+1}, \dots, f_n\}$ Dualbasis von V^*.

(a) Zu zeigen, $\forall f, g \in V^*, c \in K : \rho(f + cg) = \rho(f) + c\rho(g)$, dafür:
$\forall x \in W$:

$$\begin{aligned}\rho(f + cg)(x) &= (f + cg)|_W(x) \\ &= (f + cg)(x) \\ &\overset{\text{L. von } V^*}{=} f(x) + cg(x)\end{aligned}$$

■

(b) Beh.: $\ker \rho = \operatorname{span}(\{f_{m+1}, \dots, f_n\}), R_\rho = W^*$
Bew.:
Zu zeigen $\forall f \in V^* : \rho(f) = 0 \iff f \in \operatorname{span}(\{f_{m+1}, \dots, f_n\})$: Sei $f \in V^*$ gegeben mit $\rho(f) = 0$, zu zeigen $f \in \operatorname{span}(\{f_{m+1}, \dots, f_n\})$.
$\rho(f) \implies f|_W = 0 \implies \forall w \in W : f|_W = 0$. Beweis durch Widerspruch, sei $f \notin \operatorname{span}(\{f_{m+1}, \dots, f_n\})$, also $f := \sum_{i=1}^n a_i f_i$ mit $a_i \in K$ und $\exists i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq m : a_i \neq 0$, D.h. aber, dass für ein solches i gilt $f|_W(w_i) = a_i \neq 0$. Also war die Annahme falsch und $f|_W$ muss in $\operatorname{span}(\{f_{m+1}, \dots, f_n\})$ liegen.
Sei $f \in \operatorname{span}(\{f_{m+1}, \dots, f_n\})$ gegeben, sodass $\exists a_{m+1}, \dots, a_n : f = \sum_{i=m+1}^n a_i f_i$, dann folgt bereits für alle $w \in W$, für die $b_1, \dots, b_m$ existieren mit $w = \sum_{i=1}^m b_i w_i$:

$$\begin{aligned}\rho(f)(w) &= f|_W(w) \\ &= \left(\sum_{i=m+1}^n a_i f_i\right)(w) \\ &\overset{\text{Linearität}}{=} \sum_{i=m+1}^n a_i f_i(w) \\ &= \sum_{i=m+1}^n a_i f_i \left(\sum_{j=1}^m b_j w_j\right) \\ &= \sum_{i=m+1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \underbrace{f_i(w_j)}_{j<i} \\ &= 0\end{aligned}$$

Also $f \in \ker \rho$

Für $R_\rho = W^*$: $R_\rho \subset W^*$ trivial.
$W^* \subset R_\rho$: Sei $f|_W \in W^*$ gegeben, zu zeigen $f|_W \in R_\rho$, also zu zeigen, $\exists g \in V^* : \rho(g) = f|_W$, Wähle $g := f$, dann gilt: $\rho(g) = \rho(f) = f|_W$ ■

(c) Beh.: $\mathcal{B} := \{f_1 + \ker \rho, \dots, f_m + \ker \rho\}$ ist eine Basis für $V^*/\ker \rho$, dafür $\operatorname{span}(\mathcal{B}) \subset V^*/\ker \rho$ trivial und $\dim \operatorname{span}(\mathcal{B}) = m = n - (n - m) = \dim V^* - \dim \ker \rho$.
Nach (b) ist $R_\rho = W^*$.
Definiere

$$T : V^*/\ker \rho \to R_\rho$$

Wobei für $\alpha \in V^*/\ker\rho$, mit $\exists a_1,\dots,a_m \in K : \alpha = \sum_{i=1}^m a_i f_i + \ker\rho$ gilt, $T(\alpha) = \sum_{i=1}^m a_i f_i$.
Zu zeigen: $\forall \alpha \in V^*/\ker\rho = 0 \implies \alpha = 0$ und $\dim R_T = \dim R_\rho$.
Sei $\alpha \in V^*/\ker\rho$ gegeben mit $T(\alpha) = 0$, dann existieren $a_1,\dots,a_m \in K : \alpha = \sum_{i=1}^m a_i f_i + \ker\rho$ sodass gilt:

$$\begin{aligned} & T(\alpha) = 0 \\ \iff & \sum_{i=1}^m a_i f_i = 0 \quad \mid \text{Da } f_i \text{ l.u.} \\ \iff & a_1,\dots,a_m = 0 \\ \iff & \sum_{i=1}^m 0 \cdot f_i + \ker\rho = \alpha \\ \iff & \alpha = 0 \end{aligned}$$

Zu den Dimensionen: $\dim R_T \overset{\text{L.A.I Dimensionssatz}}{=} \dim V^*/\ker\rho - \dim\ker T = |\mathcal{B}| - 0 = m = \dim W = \dim W^* = R_\rho$
Also ist T ein Isomorphismus von $V^*/\ker\rho$ nach R_ρ.

Aufgabe 3.3:

$\dim U - \dim(U \cap W) = \dim U - (\dim U + \dim W - \dim U + W) = \dim(U + W) - \dim W$.
Sei $\mathcal{B}_1 := \{\alpha_1,\dots,\alpha_l\}$ eine Basis für $U \cap W$, $\mathcal{B}_U := \{\alpha_1,\dots,\alpha_l,\beta_1,\dots,\beta m\}$ eine geordnete Basis für U und $\mathcal{B}_W := \{\alpha_1,\dots,\alpha_l,\gamma_1,\dots,\gamma_n\}$ eine Basis für W.
Sei

$$T_1 : U \to U \setminus W$$

Wobei $T_1(\alpha_i) = 0$ für $1 \le i \le l$ und $T_1(\beta_i) = \beta_i \quad \forall 1 \le i \le m$.
dann $\ker T_1 = \{\alpha_1,\dots,\alpha_l\} = U \cap W$, und da $\beta_i \in U \setminus W$ für alle $1 \le i \le m$ und $\dim R_{T_1} = \dim U - \dim\ker T_1 = l + m - l = m = \dim U \setminus W$, also T_1 ein Isomorphismus und $R_{T_1} = U \setminus W$
also $U/(U \cap W) = U/\ker T_1 \simeq R_{T_1} = U \setminus W$.
Sei

$$T_2 : U + W \to U \setminus W,$$

wobei $T_2(\beta_i) \to \beta_i$ mit $1 \le i \le m$ und $T_2(\alpha_i) = 0 = T_2(\gamma_j)$ für $1 \le i \le l, 1 \le j \le n$.
Dann gilt $\ker T_2 = \{\alpha_1,\dots,\alpha_l,\gamma_1,\dots,\gamma_n\} = W$ und $R_{T_2} = \{\beta_1,\dots,\beta_m\} = U \setminus W$, also

$$(U + W)/W = (U + W)/\ker T_2 \simeq R_{T_2} = W = R_{T_1} \simeq U/\ker T_1 = U/(U \cap W)$$

Aufgabe 3.4:

(a) Beweis durch Vollständige Induktion:

I.A.: $k = 0$: $x^k = x^0 = (\underbrace{1}_{\text{0-te Stelle}}, 0, \dots)$. Wie gewünscht.

I.S.: **I.V.:** $x^k = (0,\dots,0, \underbrace{1}_{k\text{-te Stelle}}, 0, \dots)$.

$k \curvearrowright k + 1$,

zu zeigen $x^{k+1} = (0, \ldots, 0, \underbrace{0}_{k\text{-te Stelle}}, \underbrace{1}_{(k+1)\text{-te Stelle}}, 0, \ldots),$

Also zu zeigen $(x^{k+1})_{i\text{-te Stelle}} = (x^{k+1})_i = \begin{cases} 1, & i = k+1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = \delta_{i,k+1},$

während $(x)_i = \delta_{i,1}, (x^k)_i = \delta_{i,k}$ gilt

$$\begin{aligned}
(x^{k+1})_i &= (x \cdot x^k)_i \\
&= \left(\sum_{j=0}^{i} (x)_j (x^k)_{i-j}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{i} \delta_{j,1} \delta_{i-j,k} \\
&= \delta_{i-1,k} \\
&= \delta_{i,k+1}
\end{aligned}$$

■

(b) Zu zeigen: $\forall f, g, h \in K^{\mathbb{N}_0} : f \cdot (g+h) = f \cdot g + f \cdot h$: Sei $f, g, h \in K^{\mathbb{N}_0}$, mit $f = (f_0, f_1, \ldots), g = (g_0, \ldots), h = (h_0, \ldots)$. Zu zeigen $(f \cdot (g+h))_i = (f \cdot g + f \cdot h)_i \quad \forall i \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
(f \cdot (g+h))_i &= \sum_{j=0}^{i} f_j \cdot (g+h)_{i-j} \\
&= \sum_{j=0}^{i} f_j \cdot (g_{i-j} + h_{i-j}) \\
&= \sum_{j=0}^{i} f_j \cdot g_{i-j} + f_j \cdot h_{i-j} \\
&= \sum_{j=0}^{i} f_j \cdot g_{i-j} + \sum_{j=0}^{i} f_j \cdot h_{i-j} \\
&= (f \cdot g)_i + (f \cdot h)_i \\
&= (f \cdot g + f \cdot h)_i
\end{aligned}$$

Sei $c \in K$, zu zeigen: $c(fg) = (cf)g$:

$$\begin{aligned}
(c(fg))_i &= c(fg)_i \\
&= c \sum_{j=0}^{i} f_j g_{i-j} \\
&= \sum_{j=0}^{i} c f_j g_{i-j} \\
&= \sum_{j=0}^{i} (cf)_j g_{i-j} \\
&= ((cf)g)_i
\end{aligned}$$

(c) Sei $f, g \in K[x]$ mit $f + g \neq 0$, und $f = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j, g = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$.
Zu zeigen $\deg(f + g) \leq \max\{\deg f, \deg g\}$: Œ $n \geq m$, sei $b_{m+1}, \dots, b_n = 0$

$$\begin{aligned} f + g &= \sum_{j=0}^{n} a_j x^j + \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \\ &= \sum_{j=0}^{n} (a_j + b_j) x^j \end{aligned}$$

Also ist $\deg(f+g) < n = \max\{n, m\} = \{\deg f, \deg g\}$, für $m = n$ und $a_j + b_j = 0 \iff a_j = -b_j$, aber existiert, da $f + g \neq 0 \iff \deg(f + g) \geq 0$ und sonst $\deg(f + g) = n = \max\{n, m\} = \max\{\deg f, \deg g\}$.

(d) Sei $f, g \in K[x]$ mit $f = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j, g = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$, und $\deg f \neq \deg g \iff n \neq m$
Zu zeigen $\deg(f + g) = \max\{\deg f, \deg g\}$: Œ $n > m$, sei $b_{m+1}, \dots, b_n = 0$

$$\begin{aligned} f + g &= \sum_{j=0}^{n} a_j x^j + \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \\ &= \sum_{j=0}^{m} (a_j + b_j) x^j + \sum_{j=m+1}^{n} a_j x^j \end{aligned}$$

Also ist $\deg(f + g) = n = \max\{n, m\} = \max\{\deg f, \deg g\}$.

Sorry, war ein bisschen frustriert, deswegen ist es leider nicht so schön strukturiert :c