2024-06-22
Summer Semester 2024

University of Konstanz
Faculty of Science
(Physics)

Übungsblatt 10

Davina Schmidt, Elias Gestrich

Aufgabe 1: Spiralbahn

a)

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= m_e \cdot \ddot{\vec{r}} \\
&= m_e \cdot \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2, \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}, \ddot{z}\right) \\
&= -e\vec{v} \times B\vec{e}_z \\
&= -eB\left(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z\right) \times \vec{e}_z \\
&= -eB\left(-\dot{\rho}\vec{e}_\varphi + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\rho\right) \\
&= -eB\left(\rho\dot{\varphi}, -\dot{\rho}, 0\right)
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
m_e \cdot \begin{pmatrix} \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 \\ \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} &= -eB \begin{pmatrix} \rho\dot{\varphi} \\ -\dot{\rho} \\ 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 \\ \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} &= -\frac{eB}{m_e} \begin{pmatrix} \rho\dot{\varphi} \\ -\dot{\rho} \\ 0 \end{pmatrix} \\
0 &= \begin{pmatrix} \ddot{\rho} + \left(\frac{eB}{m_e} - \dot{\varphi}\right)\rho\dot{\varphi} \\ \rho\ddot{\varphi} + \left(2\dot{\varphi} - \frac{eB}{m_e}\right)\dot{\rho} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

b) für z-Komponente gilt:

$$\ddot{z} = 0$$

also $\dot{z} = v_z$ ist Konstant

c) Für $\rho = \text{konst.}$ gilt $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$, also

$$\begin{aligned}
0 &= \ddot{\rho} + \left(\frac{eB}{m_e} - \dot{\varphi}\right)\rho\dot{\varphi} \\
&= \left(\frac{eB}{m_e} - \dot{\varphi}\right)\rho\dot{\varphi}
\end{aligned}$$

Also $\rho = 0$ oder $\dot\varphi = 0$ oder $\dot\varphi = \frac{eB}{m_e}$. Und

$$\begin{aligned} 0 &= \rho\ddot\varphi + \left(2\dot\varphi - \frac{eB}{m_e}\right)\dot\rho \\ &= \rho\ddot\varphi \end{aligned}$$

Also $\rho = 0$ oder $\ddot\varphi = 0$. Für $\rho = 0$ ist die Bewegungsgleichung trivial und $\vec r(t) = (0, 0, v_z t)$. Für $\dot\varphi = 0$ ist die Bewegungsgleichung ebenfalls trivial mit $\vec r(t) = (\rho_0, \varphi_0, v_z t)$. Für $\dot\varphi = \frac{eB}{m_e} = \omega_c$ gilt $\varphi = \omega_c t$, $\rho = \rho_0$ also

$$\vec r(t) = (\rho_0, \omega_c t, v_z t)$$

also

$$\dot{\vec r}(t) = (0, \rho_0\omega_c, v_z)\,, \dot{\vec r}_r(t) = (0, \rho_0\omega_c)$$

mit

$$|\vec v_r| = \rho_0\omega_c = const. = v_{0,r}$$

also $\rho_0 = \frac{v_{0,r}}{\omega_c}$

Aufgabe 2: Kraft auf eine Leiterschleife

Das B Feld:

$$\vec B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_2}{\rho}\vec e_\varphi$$

Dann ist die resultierende Kraft auf die rechteckige Leiterschleife, die Kraft, die auf alle Seiten der Leiterschleife einwirkt. Für die Seite, die a von dem geraden Leiter, durch den der Strom I_2 fließt entfernt ist gilt also

$$\begin{aligned} \vec F_a &= \int_0^L I_1 \,\mathrm{d}\vec r \times \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_2}{a}\vec e_\varphi \\ &= \int_0^L I_1 \,\mathrm{d}z\vec e_z \times \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_2}{a}\vec e_\varphi \\ &= \int_0^L I_1\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_2}{a}\vec e_z \times \vec e_\varphi \,\mathrm{d}z \\ &= -\int_0^L \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{a}\vec e_\rho \,\mathrm{d}z \\ &= -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2 L}{a}\vec e_\rho \end{aligned}$$

Und dann für die Seite die b von dem geraden Leiter entfernt ist:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_b &= \int_0^L -I_1 \,\mathrm{d}\vec{r} \times \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_2}{b}\vec{e}_\varphi \\
&= \int_0^L -I_1 \,\mathrm{d}z\vec{e}_z \times \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_2}{b}\vec{e}_\varphi \\
&= \int_0^L -I_1\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_2}{b}\vec{e}_z \times \vec{e}_\varphi \,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^L \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{b}\vec{e}_\rho \,\mathrm{d}z \\
&= \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2 L}{b}\vec{e}_\rho
\end{aligned}$$

Und jeweils für die Seiten: (+ für die rechte, − für die linke Seite)

$$\begin{aligned}
F_s &= \pm\int_a^b I_1 \,\mathrm{d}\vec{r} \times \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_2}{\rho}\vec{e}_\varphi \\
&= \pm\int_a^b \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{\rho}\vec{e}_\rho \times \,\mathrm{d}\rho \\
&= \pm\int_a^b \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{\rho}\vec{e}_z \,\mathrm{d}\rho \\
&= \pm\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\left[\ln\rho\right]_a^b \vec{e}_z \\
&= \pm\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\frac{b}{a}\vec{e}_z
\end{aligned}$$

Also für die rechte und linke Seite betragsmäßig gleich, aber mit unterschiedlichen Vorzeichen, also gleichen sich die Kräfte aus.

Resultierende Kraft:

$$F_a + F_b = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2 L}{a}\vec{e}_\rho \quad + \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2 L}{b}\vec{e}_\rho \quad = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)\frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi}\vec{e}_\rho \quad = -\left(\frac{b-a}{ab}\right)\frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi}\vec{e}_\rho$$

Also wird die rechteckige Leiterschleife von dem geraden Leiter angezogen.