2024-06-03
Summer Semester 2024
Gruppe 3, Briefkasten 11, Baiz

University of Konstanz
Faculty of Science
(Mathematics and Statistics)

Übungsblatt 06

Elias Gestrich

Aufgabe 6.1:

(a)

$$\sigma = \begin{pmatrix}1 & 3 & 6 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 7\end{pmatrix}$$

Also

$$\operatorname{sign}(\sigma) = -1$$

(b) Zu zeigen $(\sigma\tau)(\alpha) = (\tau\sigma)(\alpha)$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_n$:
Für $\sigma(\alpha) \neq \alpha$, gilt $\tau(\alpha) = \alpha$ und $\sigma(\sigma(\alpha)) \neq \sigma(\alpha)$, also $\tau(\sigma(\alpha)) = \sigma(\alpha)$, daraus folgt:

$$\sigma(\tau(\alpha)) = \sigma(\alpha) = \tau(\sigma(\alpha))$$

Sei $\sigma(\alpha) = \alpha$, zum Widerspruch

$$\sigma(\tau(\alpha)) \neq \tau(\sigma(\alpha)) = \tau(\alpha)$$

Daraus folgt aber $\tau(\tau(\alpha)) = \tau(\alpha)$, also auch $\tau(\alpha) = \alpha$, also $\alpha = \sigma(\alpha) = \sigma(\tau(\alpha)) \neq \tau(\alpha) = \alpha$ was ein Widerspuch ist, also muss $\sigma(\tau(\alpha)) = \tau(\sigma(\alpha))$ was zu beweisen war.

(c) Mithilfe vollständiger Induktion:

I.A. Für $m = 1$ gilt τ und α_1 sind genau dann disjunkt, wenn τ und α_1 disjunkt sind.

I.V. $\tau, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in S_n$ mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ paarweise disjunkt so, dass $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ und τ genau dann disjunkt, wenn für alle $1 \leq i \leq m$ die Permutationenen τ und α_i disjunkt sind.

I.S. Zu zeigen, wenn $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1}$ paarweise disjunkt, dann ist $\alpha_1 \cdots \alpha_{m+1}$ und τ genau dann disjunkt, wenn für alle $1 \leq i \leq m+1$ die Permutationen τ und α_i disjunkt sind.
Beh. τ und $\alpha_1 \cdots \alpha_{m+1}$ genau dann disjunkt, wenn τ und $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ disjunkt und τ und α_{m+1} disjunkt.
Aus der I.V. folgt, dass $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ und α_{m+1} disjunkt.
Sei $\alpha_1 \cdots \alpha_{m+1}$ und τ disjunkt, zu zeigen für all $1 \leq i \leq m+1$ sind τ und α_I disjunkt. Zum Widerspruch: $\exists \alpha \in \mathbb{N}_n, 1 \leq i \leq m+1 : \tau(\alpha) \neq \alpha \neq \alpha_i$. Also

$$\prod_{j \neq i} \alpha_j$$

disjunkt zu α_i aus I.V., also $\alpha_1 \cdots \alpha_{m+1} = \alpha_i \prod_{j \neq i} \alpha_j$, also $\alpha_1 \cdots \alpha_{m+1}(\alpha) = \alpha_i(\alpha) \neq \alpha$, also sind $\alpha_1 \cdots \alpha_{m+1}$ und τ nicht disjunkt, was ein Widerspruch ist.

Seien für alle $1 \leq i \leq m+1$ die Permutationen τ und α_i disjunkt, zu zeigen $\alpha_1 \cdots \alpha_{m+1}$ und τ sind disjunkt.
Zum Widerspruch: τ nicht disjunkt $\alpha_1 \cdots \alpha_{m+1}$, also existiert ein $\alpha \in \mathbb{N}_n$ so, dass $\tau(\alpha) \neq \alpha \neq \alpha_1 \cdots \alpha_{m+1}(\alpha)$, also existiert ein $1 \leq i \leq m+1$ mit $\alpha_i(\alpha) \neq \alpha \neq \tau$, was im Widerspruch zur Annahme steht.

Aufgabe 6.2:

(a) Beweis durch vollständige Induktion:

I.A. $|S_1| = \left|\left\{\left(1\right)\right\}\right| = 1 = 1!$

I.V. $|S_n| = n!$

I.S. Beh. $|S_{n+1}| = (n+1)!$.
Beh. $S_{n+1} = \left\{\sigma\left(i \quad n+1\right) : \sigma \in S_n \text{ und } i \in \mathbb{N}_{n+1}\right\}$, wobei $\left(n+1 \quad n+1\right) := \left(1\right)$ sein soll.

"⊂": Sei $\tau \in S_{n+1}$ zu zeigen, es gibt ein $\sigma \in S_n$ und ein $i \in \mathbb{N}_{n+1}$ mit $\tau = \sigma\left(i \quad n+1\right)$. Wähle σ mit $\sigma(\alpha) := \tau(\alpha)$ für $\alpha \in \mathbb{N}_{n+1}$ mit $\alpha \neq \tau^{-1}(n+1)$ und $\alpha \neq n+1$. Sei $\sigma(\tau^{-1}(n+1)) := \tau(n+1)$ und $\sigma(n+1) = n+1$, und wähle $i := \tau^{-1}(\alpha)$ so, dass $\sigma \in S_n$ ist und $\tau(\alpha) = \sigma(\alpha) = \sigma(\alpha)\left(i \quad n+1\right)(\alpha)$ für $i \neq \alpha \neq n+1$ und $\tau(n+1) = \sigma(i) = \sigma\left(i \quad n+1\right)(n+1)$ und $\tau(i) = n+1 = \sigma(n+1) = \sigma\left(i \quad n+1\right)(i)$, also $\tau = \sigma\left(i \quad n+1\right)$.

"⊃": Sei $\sigma \in S_n$ und $1 \leq i \leq n+1$, also $\left(i \quad n+1\right) \in S_{n+1}$, also $\sigma\left(i \quad n+1\right) \in S_{n+1}$ was zu zeigen war.

Beh. $\forall \sigma, \tau \in S_n, i, j \in \mathbb{N}_{n+1} : \sigma\left(i \quad n+1\right) = \tau\left(j \quad n+1\right) \implies \sigma = \tau \wedge i = j$
Bew. durch Kontraposition ($\sigma \neq \tau \vee i \neq j \implies \sigma\left(i \quad n+1\right) \neq \tau\left(j \quad n+1\right)$):

"$\sigma \neq \tau$": "$i = j$": Es existiert $\alpha \in \mathbb{N}_n$ so, dass $\sigma(\alpha) \neq \tau(\alpha)$ für $\alpha \neq i$ gilt $\sigma\left(i \quad n+1\right)(\alpha) = \sigma(\alpha) \neq \tau(\alpha) = \tau\left(j \quad n+1\right)$, für $\alpha = i$ gilt $\sigma\left(i \quad n+1\right)(n+1) = \sigma(i) = \sigma(\alpha) \neq \tau(\alpha) = \tau(i) = \tau\left(j \quad n+1\right)(n+1)$, was zu zeigen war

"$i \neq j$ und $i \neq n+1$": Es existiert $\alpha \in \mathbb{N}_n$ mit $\sigma(\alpha) \neq \tau(\alpha)$, für $i \neq \alpha \neq j$ gilt $\sigma\left(i \quad n+1\right)(\alpha) =\neq \tau(\alpha) = \tau\left(j \quad n+1\right)(i)$ für $i = \alpha$ gilt: $\sigma\left(i \quad n+1\right)(\alpha) = \sigma(n+1) = n+1 = \tau(n+1) \neq \tau(j) = \tau\left(j \quad n+1\right)(n+1) \neq \tau\left(j \quad n+1\right)(\alpha)$

"$\sigma = \tau$": Damit $\sigma \neq \tau \vee i \neq j$ gilt, muss also $i \neq j$ gelten: $\sigma\left(i \quad n+1\right)(n+1) = \sigma(i) \neq \sigma(j) = \tau(j) = \tau\left(j \quad n+1\right)(n+1)$ was zu zeigen war

Somit gilt $|S_{n+1}| = |S_n| \cdot (n+1)$.

(b) Zu zeigen $\left(i_1 \quad i_2 \quad \ldots \quad i_m\right)\left(i_m \quad i_{m-1} \quad \ldots \quad i_1\right) = \left(1\right)$. Sei hierfür $\alpha \in \mathbb{N}_n$ gegeben mit $\alpha \neq i_j$ für alle $1 \leq j \leq m$, sodass gilt: $\left(i_1 \quad i_2 \quad \ldots \quad i_m\right)\left(i_m \quad i_{m-1} \quad \ldots \quad i_1\right)(\alpha) = \alpha$. Sei nun $\alpha \in \mathbb{N}_n$ mit $\alpha = i_j$ für ein $1 \leq j \leq m$, so dass $\left(i_1, i_2, \ldots, i_m\right)\left(i_m, i_{m-1}, \ldots, i_1\right)(\alpha) = \left(i_1, i_2, \ldots, i_m\right)(i_{j-1}) = i_j$, was zu zeigen war.

Aufgabe 6.3:

Sei $\sigma \in S_n$ gegeben, und seien $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in S_n$ paarweise disjunkte Zyklen mit $\sigma = \alpha_1 \cdots \alpha_k$ und $\beta_1, \dots, \beta_l \in S_n$ paarweise disjunkte Zyklen mit $\sigma = \beta_1 \cdots \beta_l$, Œ $k \leq l$ Da α_1 ein Zyklus gilt es existieren $a_1, \dots, a_m \in S_n$, die paarweise verschieden sind, für die gilt $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \end{pmatrix} = \alpha_1$ da $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ paarweise disjunkt gilt für $1 < i \leq k, 1 \leq j \leq m$, dass $\alpha_i(a_j) = a_j$, also auch $\sigma(\alpha) = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_k(a_j) = \alpha_1(a_j) \neq a_j$, da $\beta_1, \dots, \beta_l$ paarweise disjunkt, sind sie nach 6.1 (b) kommutativ, also Œ gilt $\beta_1(a_j) \neq a_j$, also für $1 < i \leq k$ gilt $\beta_i(a_j) = a_j$, also

$$\alpha_1(a_j) = \alpha_1 \cdots \alpha_k(a_j) = \sigma(a_j) = \beta_1 \cdots \beta_k(a_j) = \beta_1(a_j)$$

Also $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \end{pmatrix} = \beta_1$. Führe dies für $\alpha_2, \dots, \alpha_k$ weiter, so dass, $\beta_i = \alpha_i$ für $1 \leq i \leq k$ Daraus folgt

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdots \alpha_k &= \beta_1 \cdots \beta_k \beta_{k+1} \cdots \beta_l \\ (1) &= \beta_{k+1} \cdots \beta_l \end{aligned}$$

Beh. $k = l$ (sodass $\beta_{k+1} \cdots \beta_l = (1)$), zum Widerspruch: $k < l$, Dann existiert $\alpha \in \mathbb{N}_n$ so, dass $\beta_{k+1}(\alpha) \neq \alpha$, da $\beta_{k+1}, \dots, \beta_l$ paarweise disjunkte Zyklen, gilt $\beta_i(\alpha) = \alpha$ für $k+1 < i \leq l$, also $\beta_{k+1} \cdots \beta_l(\alpha) = \beta_{k+1}(\alpha) \neq \alpha = (1)(\alpha)$, was ein Widerspruch ist.

Aufgabe 6.4:

Für ein Zyklus $\sigma \in S_n$ gilt, dass $a_1, \dots, am$ existieren mit $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_m \end{pmatrix}$, hierfür gilt $m \leq n$ und

$$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_m \end{pmatrix}^m (a_i) = \begin{pmatrix} a_1 & \dots a_m \end{pmatrix}^i (a_m) = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_m \end{pmatrix}^{i-1} (a_1) = a_i$$

und insbesondere für $\alpha \neq a_i$ für alle $1 \leq i \leq m$: $\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_m \end{pmatrix}^m (\alpha) = \alpha$. Also gilt:

$$\sigma^{n!} = (\sigma^m)^{\prod_{i \neq m} i} = \mathrm{id}^{\prod_{i \neq m} i} = \mathrm{id}$$

Da sich alle $\tau \in S_n$ durch Produkt paarweise disjunkter Zyklen $\tau_1, \dots, \tau_l$ darstellen lässt, gilt:

$$\begin{aligned} \tau^{n!} &= (\tau_1 \cdots \tau_l)^{n!} \\ &= \underbrace{(\tau_1 \cdots \tau_l) \cdots (\tau_1 \cdots \tau_l)}_{n!\text{-mal}} \\ &= \underbrace{\tau_1 (\tau_2 \cdots \tau_l) \cdots \tau_1 (\tau_2 \cdots \tau_l)}_{n!\text{-mal}} \\ &\overset{6.1(b)\&(c)}{=} \underbrace{\tau_1 \cdots \tau_1}_{n!\text{-mal}} (\tau_2 \cdots \tau_l)^{n!} = \cdots \\ &= \tau_1^{n!} \tau_2^{n!} \cdots \tau_l^{n!} \\ &= \mathrm{id} \cdot \mathrm{id} \cdots \mathrm{id} \\ &= \mathrm{id} \end{aligned}$$

■