2024-05-08
Summer Semester 2024
Gruppe 3, Jonathan Weihing

University of Konstanz
Faculty of Science
(Mathematics and Statistics)

Übungsblatt 4

Elias Gestrich

Aufgabe 1: Stetigkeit

(a)

Vor.: Ist (x_j, y_j) eine Folge mit $d_{\mathbb{R}^2}((x_j, y_j), (x, y)) \to 0$,
so konvergiert $d_{\mathbb{R}}(f((x_j, y_j)), f((x, y))) \to 0$.
Bzw. $(x_j, y_j) \to (x, y) \implies f((x_j, y_j)) \to f(x, y)$

Beh.:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} \frac{x_1^2 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ist Stetig mit $d_{\mathbb{R}^2}$ sei die von $\|\cdot\|_2$ induzierte Metrik und $d_{\mathbb{R}}$ die von $|\cdot|$ induzierte Metrik.

Bew.: Sei $(x_j), (y_j)$ konvergente Folgen mit $\lim_{j\to\infty} x_j = x, \lim_{j\to\infty} y_j = y$. Sei (c_j) definiert durch $c_j := x_j^3 y_j^2$, sodass

$$\lim_{j\to\infty} c_j = \left(\lim_{j\to\infty} x_j\right)^3 \left(\lim_{j\to\infty} y_j\right)^2 = x^3 y^2$$

und sei (h_j) definiert durch $h_j := (x_j^2 + y_j^2)^2$, sodass

$$\lim_{j\to\infty} h_j = \left(\left(\lim_{j\to\infty} x_j\right)^2 + \left(\lim_{j\to\infty} y_j\right)^2\right)^2 = (x^2 + y^2)^2$$

nach Ana I.
Für $(x, y) \neq (0, 0)$: (insbesondere $0 < |\lim_{j\to\infty} c_j|, |\lim_{j\to\infty} h_j| < \infty$)

$$\begin{aligned} \lim_{j\to\infty} f((x_j, y_j)) &= \lim_{j\to\infty} \frac{x_j^3 y_j^2}{(x_j^2 + y_j^2)^2} \\ &= \lim_{j\to\infty} \frac{c_j}{h_j} \\ &= \frac{\lim_{j\to\infty} c_j}{\lim_{j\to\infty} h_j} \\ &= \frac{x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= f((x, y)) \end{aligned}$$

Für $(x, y) = (0, 0)$:

$$\lim_{j\to\infty} \frac{x_j^3 y_j^2}{(x_j^2 + y_j^2)^2} = \begin{cases} 0, & y_j = 0 \\ \lim_{j\to\infty} \frac{x_j^3 y_j^2}{(x_j^2+y_j^2)^2} & \text{sonst} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0, & y_j = 0 \\ \lim_{j\to\infty} \frac{x_j^3 y_j^2}{x_j^4+2x_j^2y_j^2+y_j^4} & \text{sonst} \end{cases}$$
$$\leq \begin{cases} 0, & y_j = 0 \\ \lim_{j\to\infty} \frac{x_j^3 y_j^2}{2x_j^2y_j^2} & \text{sonst} \end{cases}$$
$$\leq \begin{cases} 0, & y_j = 0 \\ \lim_{j\to\infty} \frac{x_j}{2} & \text{sonst} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0, & y_j = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(b) Stetig für geraden: $(ax_j, bx_j) \to 0$, zu zeigen $f((ax_j, bx_j)) \to 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{j\to\infty} |f((ax_j, bx_j))| &= \lim_{j\to\infty} \left| \frac{ax_j b^2 x_j^2}{a^2x_j^2 + b^4x_j^4)} \right| \\ &= \lim_{j\to\infty} \left| \frac{ab^2x_j^3}{x_j^2(a^2 + b^4x_j^2)} \right| \\ &= \lim_{j\to\infty} \left(\frac{|ab^2x_j|}{a^2 + b^4x_j^2} \right) \\ &\leq \lim_{j\to\infty} \left(\frac{|ab^2x_j|}{a^2} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Nicht Stetig in $x_0 = 0$: Sei (x_j) eine nicht-negative Nullfolge, betrachte die Folge:

$$\left(x_j, \sqrt{x_j}\right)$$

mit $\lim_{j\to\infty} \left(x_j, \sqrt{x_j}\right) = \left(0, \sqrt{0}\right)$. Aber

$$\begin{aligned} \lim_{j\to\infty} \left| f\left(\left(x_j, \sqrt{x_j}\right)\right) \right| &= \lim_{j\to\infty} \left| \frac{x_j \cdot \sqrt{x_j}^2}{x_j^2 + \sqrt{x_j}^4} \right| \\ &= \lim_{j\to\infty} \frac{x_j^2}{2x_j^2} \\ &= \frac{1}{2} \neq 0 = f\left(\left(0, \sqrt{0}\right)\right) \end{aligned}$$

Also nicht Stetig

Aufgabe 2: Kompaktheit unter stetiger Abbildung

(a)

Beh.: Ist $f : X \to Y$ stetig und $K \subset X$ kompakt, dann ist auch $f(K) \subset Y$ kompakt.
Äquivalent zu: Ist f stetig und K kompakt, dann gilt $\forall (y_j) \subset f(K)$ existiert eine konvergente Teilfolge, die gegen $y \in f(K)$ konvergiert.

Bew.: Sei $(y_j) \subset f(K)$ gegeben, zu zeigen, es existiert eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in $f(K)$.
Sei $(x_j) \subset f((y_j))$, mit $x_j = \max\left\{f^{-1}(y_j)\right\}$. Da K kompakt hat (x_j) eine konvergente Teilfolge x_{j_k}, die gegen $x \in f(K)$ konvergiert. Da f stetig konvergiert $(f(x_{j_k})) = (y_{j_k})$ gegen $f(x) \in f(K)$, da $x \in K \implies f(x) \in f(K)$

(b) sei $X = \mathbb{R}, Y = \{0, 1\}$, dann gilt für die Kompakte Menge: $K = [-1, 1]$ mit

$$f := x \to \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & \text{sonst}, \end{cases}$$

sodass f nicht stetig, aber $f(K) = \{0, 1\}$ kompakt.

Aufgabe 3: Kompaktheit bleibt erhalten

(a)

Vor.: Eine Menge $K \subset X$ ist genau dann kompakt, wenn für alle Folgen in K gilt, dass eine konvergente Teilfolge existiert, deren Grenzwert in K liegt.
Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $A, B \subset X$ seien kompakt.

Beh.: $A \cup B$ und $A \cap B$ sind kompakt.

Bew.:

$A \cup B$**:** Sei (x_j) eine Folge in $A \cup B$, zu zeigen es existiert eine konvergente Teilfolge, die gegen ein x in $A \cup B$ konvergiert.
Falls endlich viele Folgenglieder in A liegen, müssen unendlich viele Folgenglieder in B liegen, sei (x_{j_k}) die Folge aller Folgenglieder in B. Da B kompakt, existiert eine konvergente Teilfolge in (x_{k_n}), deren Grenzwert in B liegt. Was zu zeigen war.
Falls unendlich viele Folgenglieder in A liegen analog (vertausche B mit A) ■

$A \cap B$**:** Sei (x_j) eine Folge in $A \cap B$, zu zeigen: es existiert eine konvergente Teilfolge, die gegen ein x in $A \cap B$ konvergiert.
Da insbesondere (x_j) in A liegt, existiert eine konvergente Teilfolge, die gegen $x \in A$ konvergiert. Diese Teilfolge liegt aber auch in B, also muss wegen der Kompaktheit auch ihr Grenzwert x in B liegen. Also liegt x sowohl in A, als auch in B, also $x \in A \cap B$. ■

(b)

Vor.: Ein Unterraum $K \subset X$ ist genau dann kompakt, wenn für alle Folgen in K gilt, dass eine konvergente Teilfolge existert, deren Grenzwert in K liegt.
Es sei (X, d) ein normierter Vektorraum und $A, B \subset X$ seien kompakt.

Beh.: $A + B \coloneqq \{a + b : a \in A, b \in B\}$ ist kompakt.

Bew.: Sei $(a_j + b_j)$ eine Folge in $A + B$ mit $\forall j \in \mathbb{N} : a_j \in A, b_j \in B$, da $(a_j) \subset A$ existiert eine konvergente Teilfolge (a_{j_k}), die gegen einen Wert a in A konvergiert.
Da $(b_j) \subset B$ folgt auch $(b_{j_k}) \subset B$, also hat auch (b_{j_k}) eine konvergente Teilfolge $(b_{j_{k_n}})$ in B, die gegen einen Wert $b \in B$ konvergiert.
Da jede Teilfolge von konvergenten Folgen konvergieren, konvergiert auch $(a_{j_{k_n}})$ gegen a.
Also konvergiert $(a_{j_{k_n}} + b_{j_{k_n}})$ gegen $a + b \in A + B$. ■

Aufgabe 4: Kompaktheit

Vor.: (X, d) ein kompakter metrischer Raum und $(U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von X, durch offene Mengen in X.

Beh.: $\exists r > 0 : \forall B_r(x) : \exists i \in I : B_r(x) \subseteq U_i$

Bew.: Da X kompakt existieren endlich viele U_i's, sodass

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{N} U_i$$

Sei $C_i \coloneqq X \setminus U_i$ und

$$f(x) \coloneqq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \inf_{c \in C_i} d(x, c)$$

Zwischenbeh. 1:

$$0 < f(x) \leq \sup_{1 \leq i \leq N} \inf_{c \in C_i} d(x, c)$$

Bew. der Zwischenbeh. 1:
Für ein beliebiges $x \in X$ gilt, dass $x \in \bigcup_{i=1}^{N} U_i$, also existiert ein $1 \leq i_0 \leq N$ mit $x \in U_{i_0}$, bzw. $x \notin X \setminus U_{i_0}$. Somit $\forall c \in C_{i_0} : x \neq c \implies d(x, c) > 0$.
Also da $d(x, c) \geq 0$ für alle $c \in C_{i_0}$ ist also:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \inf_{c \in C_i} d(x, c) \geq \frac{1}{N} \inf_{c \in C_i} d(x, c) > 0$$

und

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \inf_{c \in C_i} d(x, c) \leq \frac{1}{N} \sup_{1 \leq i \leq N} \inf_{c \in C_i} d(x, c) = \frac{1}{N} \cdot N \cdot \left(\sup_{1 \leq i \leq N} \inf_{c \in C_i} d(x, c) \right) = \sup_{1 \leq i \leq N} \inf_{c \in C_i} d(x, c)$$

Zwischenbeh. 2:
$\forall (x_j) \subset X$ gilt $f(x_j)$ konvergiert nicht gegen Null.

Also $\exists \varepsilon > 0 : \forall N_0 \in \mathbb{N} : \exists n > N_0 : |f(x_n)| = f(x_n) \geq \varepsilon$
Bew. der Zwischenbeh. 2:
Sei $(x_j) \subset X$ eine Folge.
Da X kompakt hat (x_j) eine konvergente Teilfolge (x_{j_k}) für die gilt $\lim_{k\to\infty} x_{j_k} = x \in X$.
Da $f(x) > 0 : \exists \delta > 0 : f(x) > \delta$, da (x_{j_k}) konvergent existiert ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k > N_1$ gilt $d(x_{j_k}, x) < \frac{\delta}{2}$, so dass $x_{j_k} \in B_{\frac{\delta}{2}}(x) \implies f(x_{j_k}) \geq \frac{\delta}{2}$.
Wähle also $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$, sodass für alle $N_0 \in \mathbb{N}$ ein $n > N_0$ existiert, sodass $f(x_n) \geq \frac{\delta}{2} = \varepsilon$. Was zu zeigen war

Fortsetzung des Bew.:
Aus der Zwischenbehauptung 2 folgt, dass $\inf_{x\in X} f(x) > 0$, da $f(x) > 0$ für alle $x \in X$ und für alle (x_j) für die $f(x_j)$ konvergiert, dass $\lim_{j\to\infty} f(x_j) > 0$.

Wähle also

$$r < \inf_{x\in X} f(x) = \inf_{x\in X} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \inf_{c\in C_i} d(x,c)$$

Zu zeigen $\forall x \in X : \exists 1 \leq i_0 \leq N : B_r(x) \subset U_{i_0}$.
Sei $x \in X$ gegeben.
Aus Zwischenbeh. 1 folgt:

$$r < f(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \inf_{c\in C_i} d(x,c) \leq \sup_{1\leq i\leq N} \inf_{c\in C_i} d(x,c)$$

Da

$$\left\{ \inf_{c\in C_i} d(x,c) : 1 \leq i \leq N \right\}$$

N Elemente hat, also endlich ist, ist sie auch Kompakt und besitzt ein Maximum, wähle i_0 so, dass $\inf_{c\in C_{i_0}} d(x,c)$ eben dieses Maximum ist. Also

$$r < f(x) \leq \inf_{c\in C_{i_0}} d(x,c)$$

Also $\forall c \in C_{i_0} : d(x,c) \geq r \implies B_r(x) \subset U_{i_0}$.
(Beweis durch Widerspruch, sei $x_1 \in B_r(x)$ mit $x_1 \notin U_{i_0}$, also $x_1 \in C_{i_0}$, also $d(x,x_1) \leq r < \inf_{c\in C_{i_0}} d(x,c) \leq d(x,x_1)$, was ein Widerspruch ist)