2024-05-10
Summer Semester 2024
Gruppe 3, Briefkasten 11, Beiz

University of Konstanz
Faculty of Science
(Mathematics and Statistics)

# Übungsblatt 04

Elias Gestrich

**Aufgabe 4.1:**

(a)

$$\begin{aligned}
f(T)(x_1,x_2,x_3) &= \left(\sum_{i=0}^{3} c_i T^i\right)(x_1,x_2,x_3)\\
&= \sum_{i=0}^{3} c_i T^i(x_1,x_2,x_3)\\
&= -(T\circ T\circ T)(x_1,x_2,x_3) + 2\cdot(x_1,x_2,x_3)\\
&= -T(T(T((x_1,x_2,x_3)))) + 2\cdot(x_1,x_2,x_3)\\
&= -T(T((x_1,x_3,-2x_2-x_3))) + 2\cdot(x_1,x_2,x_3)\\
&= -T((x_1,-2x_2-x_3,-2x_3+2x_2+x_3)) + 2\cdot(x_1,x_2,x_3)\\
&= -T((x_1,-2x_2-x_3,2x_2-x_3)) + 2\cdot(x_1,x_2,x_3)\\
&= -(x_1,2x_2-x_3,4x_2+2x_3-(2x_2-x_3)) + 2\cdot(x_1,x_2,x_3)\\
&= -(x_1,2x_2-x_3,4x_2+2x_3-2x_2+x_3) + 2\cdot(x_1,x_2,x_3)\\
&= -(x_1,2x_2-x_3,2x_2+3x_3) + 2\cdot(x_1,x_2,x_3)\\
&= (-x_1,-2x_2+x_3,-2x_2-3x_3) + 2\cdot(x_1,x_2,x_3)\\
&= (x_1,x_3,-2x_2-x_3)
\end{aligned}$$

und somit $f(T) = T$

(b) **Vor.:** $K$ ein Körper

$$\varphi_h : K[x] \to K[x], f = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i \mapsto \sum_{i=0}^{n} c_i h^i$$

wobei $h^0 = 1, \underbrace{h\cdot\dots\cdot h}_{i\text{-mal}} \in K[x] (i \geq 1)$.

**Beh.:** $\varphi_h$ linear und injektiv, also $\forall f,g \in K[x], \lambda_1,\lambda_2 \in K$

$$\varphi_h(\lambda_1 f + \lambda_2 g) = \lambda_1\varphi_h(f) + \lambda_2\varphi_h(g) \text{ und}$$

$$\varphi_h(f) = 0 \implies f = 0$$

**Bew.:** Sei $f,g \in K$ gegeben mit $f = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i, g = \sum_{i=0}^{m} g_i x^i$ und $\lambda_1,\lambda_2 \in K$. Œ $n \geq m$ und

$g_i = 0$ für $m < i \leq n$, so gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi_h(\lambda_1 f + \lambda_2 g) &= \varphi_h\left(\lambda_1\left(\sum_{i=0}^{n} f_i x^i\right) + \lambda_2\left(\sum_{i=0}^{m} g_i x^i\right)\right) \\
&= \varphi_h\left(\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_1 f_i x^i\right) + \left(\sum_{i=0}^{m} \lambda_2 g_i x^i\right)\right) \\
&= \varphi_h\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_1 f_i x^i + \lambda_2 g_i x^i\right) \\
&= \varphi_h\left(\sum_{i=0}^{n} (\lambda_1 f_i + \lambda_2 g_i) x^i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} (\lambda_1 f_i + \lambda_2 g_i) h^i \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_1 f_i h^i\right) + \left(\sum_{i=0}^{m} \lambda_2 g_i h^i\right) \\
&= \left(\lambda_1 \sum_{i=0}^{n} f_i h^i\right) + \left(\lambda_2 \sum_{i=0}^{m} g_i h^i\right) \\
&= \lambda_1 \varphi_h\left(\sum_{i=0}^{n} f_i x^i\right) + \lambda_2 \varphi_h\left(\sum_{i=0}^{m} g_i h^i\right) \\
&= \lambda_1 \varphi_h\,(f) + \lambda_2 \varphi_h(g),
\end{aligned}$$

was zu zeigen war
Für $\deg h =: l$ gilt $\deg(h^i) = \deg(\underbrace{h \cdot \cdots \cdot h}_{i\text{-mal}}) = \underbrace{l + \cdots + l}_{i\text{-mal}} = il$ Also

$$\deg(\varphi_h(f)) = \deg(f) \cdot l = nl = \deg(f) \cdot \deg(h). \tag{1}$$

Wenn also $n \geq 1$, dann auch $\deg(\varphi_h(f)) \geq 1$, also ist $f = f_0$. Also $0 = \varphi_h(f) = \sum_{i=0}^{0} f_i h^i = f_0 \cdot 1 = f_0 = 0$, somit ist auch $f = f_0 = 0$ ■

(c) s. (1)

(d) **Beh.:** $\varphi_h$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $\deg(h) = 1$

**Bew.:** **“ $\Longrightarrow$ ”:** Durch Kontraposition, sei $\deg(h) = n > 1$, zu zeigen $\varphi_h$ ist kein Isomorphismus, insbesondere $\varphi_h$ ist nicht surjektiv. Betrachte hierfür die Funktion $g(x) = x$, mit $\deg(g) = 1$. Für alle Funktionen $f \in K[x]$ mit $\deg(f) = m$ gilt $\deg(\varphi_h(f) = n \cdot m$. Für $m = 0$ gilt $\deg(\varphi_h(f)) = 0$ und für $n \geq 1$ gilt $\deg(\varphi_h(f)) = nm > n \geq 1$, da aber wenn $\varphi_h(f) = g$ gelten soll auch der Grad der Funktionen gleich sein muss, aber $\deg(\varphi_h(f)) \neq 1$ für alle $f \in K[x]$, gibt es kein $f \in K[x]$ mit $\varphi_h(f) = g$

**“ $\Longleftarrow$ ”:** Sei $h \in K[x]$ mit $\deg(h) = 1$, also $h = h_0 + h_1 x$ mit $h_1 \neq 0$ Sei $g \in K[x]$ beliebig mit $\deg(g) = n$. So gilt nach Tayors Formel mit Entwicklungspunkt $a = -\frac{h_0}{h_1}$:

$$g = \sum_{i=0}^{n} \frac{g^{(i)}}{i!} \cdot \left(x + \frac{h_0}{h_1}\right)^i = \sum_{i=0}^{n} \frac{g^{(i)}}{h_1^i i!} \cdot (h_0 + h_1 x)^i$$

Wähle $f = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i$ mit

$$f_i \coloneqq \frac{g^{(i)}}{h_1^i i!}$$

so, dass

$$\varphi_h(f) = \sum_{i=0}^{n} \frac{g^{(i)}}{h_1^i i!} h^i = \sum_{i=0}^{n} \frac{g^{(i)}}{h_1^i i!} (h_0 + h_1 x)^i = g \qquad \blacksquare$$

**Aufgabe 4.2:**

(a) Sei $f \in K[x]$ gegeben mit $f = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i$, zu zeigen es existieren endlich viele $c_{\sigma(1)}, \ldots, c_{\sigma(m)}$ mit $\sigma$ injektiv, sodass $f = \sum_{i=0}^{m} c_{\sigma(i)} x^{\sigma(i)}$. Wähle $\sigma = \mathrm{Id}$, $m = n$ und $c_i = f_i$, sodass $\sum_{i=0}^{m} c_{\sigma(i)} x^{\sigma(i)} = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i = f$ $\blacksquare$

(b) Wähle $f = \sum_{i=0}^{\infty} x^i \in K[\![x]\!]$. Behauptung, $f$ ist nicht durch eine enldiche lineare Kombination von Elementen aus $\mathcal{B}$ darstellbar.
Zum Widerspruch, nehme an es gäbe eine endliche Linearkombination aus Elementen aus $\mathcal{B}$, sodass diese $f$ darstellt. Dann muss es auch ein Element $x^k$ aus $\mathcal{B}$ geben mit dem größtem $k$, sei dies $n$. Also existieren $c_0, \ldots, c_n$ mit $f = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$. Das ist aber ein Widerspruch dazu, dass $f = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$ ist.

**Aufgabe 4.3:**

(a) Da $K$ endlich ist $\exists m, l \in \mathbb{N}$, sodass $c^m = c^l$, Œ $m > l$, also $c^{m-l} = 1$. Setze $n = m - l$, sodass $c^n = c^{m-l} = 1$.

(b) Sei $m \coloneqq \mathrm{Char}(K) \geq 1$. Für alle $i = 1, \ldots, m-1$ existiert nach (a) ein $n_i$ mit $i^{n_i} = 1$. Sei $n = 1 + \prod_{i=1}^{m-1} n_i$, so dass für alle $c \in K$ gilt

$$c^n = c^{\left(1 + \prod_i n_i\right)} = c \cdot (c^{n_c})^{\left(\prod_{i \neq c} n_i\right)} = c \cdot (1)^{\left(\prod_{i \neq c} n_i\right)} = c \cdot 1 = c$$

Sei $f_1 = cx$ ein Polynom und $f_2 = cx^n$ so, dass $f_1 \neq f_2$ Dann folgt $\phi(f_1)(a) = c \cdot a = c \cdot a^n = \phi(f_2)(a)$. Für alle $a \in K$. Also $\phi(f_1) = \phi(f_2)$

### Aufgabe 4.4:

(a) Für $i \neq j$:

$$\begin{aligned} L_i(P_j) &= P_j(t_i) \\ &= \prod_{k\neq j} \frac{t_i - t_k}{t_j - t_k} \\ &= \frac{t_i - t_i}{t_j - t_i} \cdot \left( \prod_{k\neq j, k\neq i} \frac{t_i - t_k}{t_j - t_k} \right) \\ &= 0 \cdot \left( \prod_{k\neq j, k\neq i} \frac{t_i - t_k}{t_j - t_k} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

und für $i = j$:

$$\begin{aligned} L_i(P_j) &= L_i(P_i) \\ &= P_i(t_i) \\ &= \prod_{k\neq i} \frac{t_i - t_k}{t_i - t_k} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(b) Lineare Unabhängigkeit von $\{P_0, \dots, P_n\}$: Sei

$$\sum_{i=0}^{n} a_i P_i = 0$$

zu zeigen $a_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq n$. Betrachte hierfür:

$$\begin{aligned} 0 &= L_j(0) \\ &= L\left( \sum_{i=0}^{n} a_i P_i \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i L_j(P_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i \delta_{ij} \\ &= a_j \end{aligned}$$

Also $a_j = 0$ für alle $1 \leq j \leq n$, was zu zeigen war. Da $\{1, x, \dots, x^n\}$ eine Basis für $K[x]_{\leq n}$ gilt $\dim V = n + 1 = |\{P_0, \dots, P_n\}|$. Also $\{P_0, \dots, P_n\}$ Basis von $V$.

Da $|\{L_0, \dots, L_n\}| = |\{P_0, \dots, P_n\}|$ und $L_i(P_j) = \delta_{ij}$ ist $\{L_0, \dots, L_n\}$ die Dualbasis zu $\{P_0, \dots, P_n\}$ und damit insbesondere eine Basis.