2024-06-07
Summer Semester 2024
Gruppe 3, Briefkasten 11, Baiz

University of Konstanz
Faculty of Science
(Mathematics and Statistics)

Übungsblatt 07

Elias Gestrich

Aufgabe 7.1:

(a) Zu zeigen für alle $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{Z}^n$ gilt $\sigma(\tau f)(z) = (\sigma\tau)f(z)$. Hierfür gilt (Umformungen mithilfe Def 12.3 und Produkt von Permutationen)

$$\begin{aligned}
\sigma(\tau f)(z) &= \sigma((\tau f)(z)) \\
&= \sigma\left(f\left(z_{\tau(1)}, \dots, z_{\tau(n)}\right)\right) \\
&= f\left(z_{\sigma(\tau(1))}, \dots, z_{\sigma(\tau(n))}\right) \\
&= f\left(z_{\sigma\tau(1)}, \dots, z_{\sigma\tau(n)}\right) \\
&= (\sigma\tau)f(z)
\end{aligned} \qquad \blacksquare$$

(b) Zu zeigen für alle $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{Z}^n$ gilt $(\sigma(fg))(z) = ((\sigma f)(\sigma g))(z)$. Hierfür gilt (Umformungen mithilfe Def 12.3 und Produkt von Funktionen)

$$\begin{aligned}
(\sigma(fg))(z) &= (fg)\left(z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(n)}\right) \\
&= \left(f\left(z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(n)}\right)\right)\left(g\left(z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(n)}\right)\right) \\
&= ((\sigma f)(z))((\sigma g)(z)) \\
&= ((\sigma f)(\sigma g))(z)
\end{aligned} \qquad \blacksquare$$

Aufgabe 7.2:

(a) Da S_n für alle n schon eine Gruppe ist, reicht es zu zeigen, dass S_n genau dann kommutativ, wenn $n \leq 2$

Fall 1 S_1**:** Da $S_1 = \left\{\begin{pmatrix}1\end{pmatrix}\right\}$ gilt für alle σ, τ, dass $\sigma\tau = \begin{pmatrix}1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\end{pmatrix} = \tau\sigma$, wodurch die Kommutativität schon gezeigt ist

Fall 2 S_2**:** Da $S_2 = \left\{\begin{pmatrix}1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\right\}$. Für $\sigma, \tau \in S_2$ mit $\sigma = \tau$ folgt direkt, dass $\sigma\tau = \tau\sigma$. Wenn $\sigma \neq \tau$, dann ist entweder σ, oder τ das neutrale Element, und dann entsprechend entgegensetzt τ, oder σ gleich $\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$ ist, dadurch folgt $\sigma\tau = \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix} = \tau\sigma$

Fall 3 S_n **mit** $n > 2$**:** Für $n > 2$ gilt, $\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix} \in S_n$, für die gilt: $\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$

(Da nach Beweis von Satz 12.1 $\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$)

(b) Sei $\sigma \in A_n$.
Für zwei Transpositionen $\tau_1, \tau_2 \in S_n$ gilt, $\tau_1 = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} i_3 & i_4 \end{pmatrix}$. Wenn also $\tau_1 = \tau_2$, dann gilt $\tau_1\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, also $\tau_1\tau_2$ durch 3-Zyklen darstellbar. Außerdem gilt im Allgemeinen $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \end{pmatrix}$, da für $x \neq a, x \neq b$ gilt

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}(x) = x = \begin{pmatrix} b & a \end{pmatrix}(x),$$

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}(a) = b = \begin{pmatrix} b & a \end{pmatrix}(a) \text{ und}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}(b) = a = \begin{pmatrix} b & a \end{pmatrix}(b)$$

Es gibt also noch die Fälle, dass beide Transpositionen genau einen gemeinen nicht-Fixpunkt haben oder dass sie disjunkt sind. Denn Fall in dem die Transpositionen zwei gleiche nicht-Fixpunkte haben, bedeutet, dass $\tau_1 = \tau_2$, da eine Transposition nur zwei nicht-Fixpunkte hat.

Fall 1: Einen gemeinsamen nicht-Fixpunkt: Œ $i_1 = i_3$, also $\tau_2 = \begin{pmatrix} i_1 & i_4 \end{pmatrix}$.
Beh. $\tau_1\tau_2 = \begin{pmatrix} i_1 & i_4 & i_2 \end{pmatrix}$, sei hierfür $x \in \mathbb{N}_n$ beliebig.
Falls $x \neq i_1, x \neq i_2, x \neq i_4$, dann:

$$\tau_1\tau_2(x) = x = \begin{pmatrix} i_1 & i_4 & i_2 \end{pmatrix}$$

Falls $x = i_1$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 & i_4 \end{pmatrix}(i_1) &= \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \end{pmatrix}(i_4) \\ &= i_4 \\ &= \begin{pmatrix} i_1 & i_4 & i_2 \end{pmatrix}(i_1) \end{aligned}$$

Falls $x = i_2$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 & i_4 \end{pmatrix}(i_2) &= \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \end{pmatrix}(i_2) \\ &= i_2 \\ &= \begin{pmatrix} i_1 & i_4 & i_2 \end{pmatrix}(i_2) \end{aligned}$$

Falls $x = i_4$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 & i_4 \end{pmatrix}(i_4) &= \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \end{pmatrix}(i_1) \\ &= i_2 \\ &= \begin{pmatrix} i_1 & i_4 & i_2 \end{pmatrix}(i_4) \end{aligned}$$

Fall 2: i_1, i_2, i_3, i_4 paarweise verschieden
Beh. $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_3 & i_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & i_3 & i_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 & i_4 & i_3 \end{pmatrix}$.
Bew. sei $x \in \mathbb{N}_n$ Falls $x \neq i_1, x \neq i_2, x \neq i_3, x \neq i_4$, dann:

$$\tau_1\tau_2(x) = x = \begin{pmatrix} i_1 & i_3 & i_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 & i_4 & i_3 \end{pmatrix}(x)$$

Falls $x = i_1$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_3 & i_4 \end{pmatrix}(i_1) &= \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \end{pmatrix}(i_1) \\ &= i_2 \\ &= \begin{pmatrix} i_1 & i_3 & i_2 \end{pmatrix}(i_3) \\ &= \begin{pmatrix} i_1 & i_3 & i_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 & i_3 & i_4 \end{pmatrix}(i_1) \end{aligned}$$

Falls $x = i_2$:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_3 & i_4 \end{pmatrix}(i_2) &= \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \end{pmatrix}(i_2) \\ &= i_1 \\ &= \begin{pmatrix} i_1 & i_3 & i_2 \end{pmatrix}(i_2) \\ &= \begin{pmatrix} i_1 & i_3 & i_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 & i_3 & i_4 \end{pmatrix}(i_2)\end{aligned}$$

Falls $x = i_3$:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_3 & i_4 \end{pmatrix}(i_3) &= \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \end{pmatrix}(i_4) \\ &= i_4 \\ &= \begin{pmatrix} i_1 & i_3 & i_2 \end{pmatrix}(i_4) \\ &= \begin{pmatrix} i_1 & i_3 & i_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 & i_3 & i_4 \end{pmatrix}(i_3)\end{aligned}$$

Falls $x = i_4$:

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_3 & i_4 \end{pmatrix}(i_4) = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \end{pmatrix}(i_3) = i_3 = \begin{pmatrix} i_1 & i_3 & i_2 \end{pmatrix}(i_1) = \begin{pmatrix} i_1 & i_3 & i_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 & i_3 & i_4 \end{pmatrix}(i_4)$$

Also lassen sich jewils zwei Transpositionen durch ein Produkt von 3-Zyklen darstellen. Da σ alternierend existieren Transpositionen $\tau_1, \tau_2, \dots \tau_{2j-1}, \tau_{2j}$ mit $j \in \mathbb{N}_0$ sodass mit $\sigma = \tau_1\tau_2 \cdots \tau_{2j-1}\tau_{2j}$, Sei $\alpha_i = \tau_{2i-1}\tau_{2i}$ mit $1 \leq i \leq j$, so, dass $\tau_1\tau_2 \cdots \tau_{2j-1}\tau_{2j} = \alpha_1 \cdots \alpha_j$. Da jedes α_i ein Produkt zweier Transpositionen, welche sich durch Produkt von 3-Zyklen darstellen lassen, lässt sich also auch σ durch ein Produkt von (Produkten von) 3-Zyklen darstellen.

Aufgabe 7.3:

(a) Sei $\pi \in S_n$, dann gibt es $\tau_1, \dots, \tau_m$ Transpositionen mit $\tau_1 \cdots \tau_m = \pi$ und $\operatorname{sign}(\pi) = (-1)^m$, da für m gerade $\operatorname{sign}(\pi) = 1$ nach Definition, aber auch $(-1)^m = 1$ gilt, und für m ungerade $\operatorname{sign}(\pi) = -1 = (-1)^m$ ebenfalls gilt.
Betrachte nun

$$\begin{aligned}\delta\left(z_{\pi(1)}, \dots, z_{\pi(n)}\right) &= \delta\left(z_{\tau_1\cdots\tau_m(1)}, \dots, z_{\tau_1\cdots\tau_m(n)}\right) \\ &\overset{\text{Lem. 13.6.}}{=} (-1)^1\delta\left(z_{\tau_1\cdots\tau_{m-1}(1)}, \dots, z_{\tau_1\cdots\tau_{m-1}(n)}\right) \\ &\overset{\text{Lem. 13.6.}}{=} (-1)^2\delta\left(z_{\tau_1\cdots\tau_{m-2}(1)}, \dots, z_{\tau_1\cdots\tau_{m-2}(n)}\right) \\ &\vdots \\ &\overset{\text{Lem. 13.6.}}{=} (-1)^m\delta(z_1, \dots, z_n) \\ &= \operatorname{sign}(\pi)\delta(z_1, \dots, z_n)\end{aligned}$$

(b) Sei $z_1, \dots, z_n \in V$ gegeben.

“ $\Longrightarrow$ ”: Sei δ trivial zu zeigen $\delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$. Es folgt unmittelbar $\delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$

“ $\Longleftarrow$ ”: Sei

$$\delta' : K^{n\times n} \to K,$$

mit

$$\delta'\left(\begin{pmatrix}[a_1]_{\mathcal{B}}\\ \vdots \\ [a_n]_{\mathcal{B}}\end{pmatrix}\right) = \delta(a_1,\dots,a_n)$$

Sei $\delta(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0$, zu zeigen für alle $z_1,\dots,z_n \in V : \delta(z_1,\dots,z_n)=0$. Sei $z_1,\dots,z_n \in V$ gegeben.
Es gilt, für

$$B = \begin{pmatrix}[\alpha_1]_{\mathcal{B}}\\ \vdots \\ [\alpha_n]_{\mathcal{B}}\end{pmatrix} = \mathrm{Id},$$

dass

$$\delta'(\mathrm{Id}) = \delta'(B) = \delta(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = 0$$

nach Korollar 14.4 folgt daraus, dass $\delta'=0$, das heißt für alle $z_1,\dots,z_n\in V$, gilt

$$\delta(z_1,\dots,z_n) = \delta'\left(\begin{pmatrix}[z_1]_{\mathcal{B}}\\ \vdots, \\ [z_n]_{\mathcal{B}}\end{pmatrix}\right) = 0. \qquad \blacksquare$$

Aufgabe 7.4:

$\mathbb{A}\subset L^{(n)}\left(K^n\times\cdots\times K^n;K\right)$ per Definition.
Es reicht zu zeigen für alle $c\in K,\delta_1,\delta_2\in\mathbb{A}$ gilt $\delta_1+c\delta_2\in\mathbb{A}$. Sei also $c\in K,\delta_1,\delta_2\in\mathbb{A}$ gegeben, zu zeigen $\delta_1+c\delta_2\in\mathbb{A}$, also zu zeigen $(\delta_1+c\delta_2)(z_1,\dots,z_n)=0$, wenn $i\neq j$ existieren mit $z_i=z_j$. Sei also $z_1,\dots,z_n$ gegeben, sodass $1\leq i,j\leq n$ existieren mit $i\neq j$ und $z_i=z_j$, zu zeigen $(\delta_1+c\delta_2)(z_1,\dots,z_n)=0$.

$$\begin{aligned}(\delta_1+c\delta_2)(z_1,\dots,z_n) &\overset{def.}{=} \underbrace{\delta_1(z_1,\dots,z_n)}_{\overset{\delta_1\in\mathbb{A}}{=}0} + c\,\underbrace{\delta_2(z_1,\dots,z_n)}_{\overset{\delta_2\in\mathbb{A}}{=}0}\\ &= 0 + c\cdot 0\end{aligned} \qquad \blacksquare$$