2024-04-25
Winter Semester 2023/2024

University of Konstanz
Faculty of Science
(Mathematics and Statistics)

Übungsblatt 2

Elias Gestrich

Aufgabe 1: Metriken

(a) Für eine Metrik muss gelten:

(i) Positive Definitheit: $\forall x, y \in X : d(x,y) = 0 \iff x = y$:
Wenn x, y auf einer Geraden liegen, dann folgt pos. Def. aus Euklidischer Norm, sonst:

"$\implies$": $\|x\| + \|y\| = \underbrace{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}_{\geq 0} + \underbrace{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}_{\geq 0} = 0 \iff \|x\| = 0 \text{ und } \|y\| = 0$

"$\impliedby$" Wenn $x = y$, dann liegen x und y auf einer Geraden durch $(0,0)$, somit tritt dieser Fall nicht auf

(ii) Symmetrie: $\forall x, y \in X : d(x,y) = d(y,x)$:

Fall 1: $d(x,y) = \|x - y\| \overset{\text{Eukl.N.}}{=} \|y - x\| = d(y,x)$

Fall 2: $d(x,y) = \|x\| + \|y\| = \|y\| + \|x\| = d(y,x)$

(iii) Dreiecksungleichung: $\forall x, y, z \in X : d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Fall 1: x, y, z auf einer Geraden durch $(0,0)$, dann folgt Dreiecksungleichung aus Euklidischer Norm

Fall 2: x, y auf einer Geraden durch $(0,0)$, z nicht.

$$
\begin{aligned}
d(x,y) &= \|x - y\| && \mid \text{ Euklidische Norm} \\
&\leq \|x - (0,0)\| + \|(0,0) - y\| \\
&\leq \|x\| + \|y\| \\
&\leq \|x\| + \|z\| + \|z\| + \|y\| \\
&\leq d(x,z) + d(z,y)
\end{aligned}
$$

Fall 3: x, z oder y, z auf einer Geraden durch $(0,0)$, aber y bzw. x nicht, Œ x, z auf einer

Geraden durch $(0,0)$

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \|x\| + \|y\| \\ &= \|x + (0,0)\| + \|y\| && \mid \text{ Euklidische Norm} \\ &\leq \|x - z\| + \|-z + (0,0)\| + \|y\| && \mid \text{ Euklidische Norm} \\ &\leq \|x - z\| + \|z\| + \|y\| \\ &\leq d(x,z) + d(z,y) \end{aligned}$$

Fall 4: Keine der Variablen liegen auf einer Geraden durch $(0,0)$:

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \|x\| + \|y\| && \mid \text{ Euklidische Norm} \\ &\leq \|x\| + \|z\| + \|z\| + \|y\| \\ &\leq d(x,z) + d(z,y) \end{aligned}$$

Wenn man sich zu jedem Punkt in $\mathbb{R}^2$ eine unendlich lange Schiene Denke, die durch den Ursprung $(0,0)$ und den Punkt selbst geht, dann beschreibt die Eisenbahnmetrik den kürzesten Weg, den eine Bahn auf diesen Schienen zwischen zwei Punkten fahren muss, wenn sie bei $(0,0)$ auf andere Schienen umsteigen kann. Dementsprechen kann man den Punkt $(0,0)$ als Zentralbahnhof verstehen, da alle Gleise dort zusammen kommen und die Bahn dort die Gleise wechseln kann/darf.

(b) Pos. Def. folgt aus erstem Punkt.
Symmetrie $\forall x, y \in X : d(x,y) \leq d(x,x) + d(y,x) = d(y,x)$ und $d(y,x) \leq d(y,y) + d(x,y) \implies d(x,y) = d(y,x)$. Dreiecksungleichung: $\forall x, y, z \in X : d(x,z) \leq d(x,y) + d(z,y) \overset{\text{Sym}}{=} d(x,y) + d(y,z)$

Aufgabe 2: Topologische Begriffe

(a)

$$\begin{aligned} B &= (0,1) \cup (1,2) \cup [3,4] \cup \{5\} \cup \{q \in Q : 6 \leq q \leq 7\} \\ \bar{B} &= [0,2] \cup [3,4] \cup \{5\} \cup [6,7] \\ \mathring{B} &= (0,1) \cup (1,2) \cup (3,4) \\ \mathring{\bar{B}} &= (0,2) \cup (3,4) \cup (6,7) \\ \bar{\mathring{B}} &= [0,2] \cup [3,4] \\ \bar{\mathring{\bar{B}}} &= [0,2] \cup [3,4] \cup [6,7] \\ \mathring{\bar{\mathring{B}}} &= (0,2) \cup (3,4) \end{aligned}$$

(b) Für $\mathring{\bar{\mathring{\bar{B}}}} = \mathring{\bar{B}}$:

"$\subset$": $\mathring{\bar{B}} \subset \bar{B} \implies \bar{\mathring{\bar{B}}} \subset \bar{\bar{B}} \implies \mathring{\bar{\mathring{\bar{B}}}} \subset \mathring{\bar{B}}$

"$\supset$": $\mathring{\bar{B}} \subset \bar{\mathring{\bar{B}}} \implies \mathring{\mathring{\bar{B}}} \subset \mathring{\bar{\mathring{\bar{B}}}} \implies \mathring{\bar{B}} \subset \mathring{\bar{\mathring{\bar{B}}}}$, was zu zeigen war.

Für $\overline{\mathring{\overline{\mathring{B}}}} = \overline{\mathring{B}}$:

"$\subset$": $\mathring{\overline{\mathring{B}}} \subset \overline{\mathring{B}} \implies \overline{\mathring{\overline{\mathring{B}}}} \subset \overline{\overline{\mathring{B}}} \implies \overline{\mathring{\overline{\mathring{B}}}} \subset \overline{\mathring{B}}$

"$\supset$": $\mathring{B} \subset \overline{\mathring{B}} \implies \mathring{\mathring{B}} \subset \mathring{\overline{\mathring{B}}} \implies \mathring{B} \subset \mathring{\overline{\mathring{B}}} \implies \overline{\mathring{B}} \subset \overline{\mathring{\overline{\mathring{B}}}}$

Aufgabe 3: Offenheit

Sei für $x \in \mathbb{R}^n$ definiert $B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < r\}$
Sei $x \in U$ gegeben, sei $R := \{r \in \mathbb{R} : B_r(x) \subset U\}$. Ist R nach oben unbeschränkt, dann ist bereits trivialer weise $B_\infty(x) = U$, sonst sei $r := \sup R$
Beh.: $B_r(x) \subset U$

Proof

Sei $R \supset (r_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} r$ eine monotone steigende Folge. Sodass gilt $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |r - r_n| = r - r_n < \varepsilon$.
Beh.: $\forall y \in B_r(x) : y \in U$

Proof

Sei $y \in B_r(x)$ gegeben, zu zeigen $y \in U$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \|x - y\| < r &\iff r - \|x - y\| > 0 \qquad | \text{ da } (r_n) \text{ konvergente Folge } \exists n \in \mathbb{N}: \\ &\implies r - \|x - y\| > r - r_n \\ &\iff r_n > \|x - y\| \\ &\iff y \in B_{r_n}(x) \\ &\implies y \in U \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Also gibt es für jedes $x \in U$ ein größtes $r \in \mathbb{R}$ sodass $B_r(x) \subset U$ oder es gilt bereits trivialer Weise $B_\infty(x) = U = \mathbb{R}^n$.

Betrachten wir nun den Fall, dass für alle $x \in U$ gilt, dass es ein größtes r gibt, sodass $B_r(x) \subset U$.

Sei $U_\mathbb{Q} := \{q \in \mathbb{Q}^n : q \in U\}$, da $\mathbb{Q}^n$ abzählbar ist, kann man alle $q \in U_\mathbb{Q}$ auf $q_1, q_2, q_3, \ldots$ abbilden. Da U offen ist, gilt: $\forall i \in \mathbb{N} : \exists r_i \in \mathbb{R} : B_{r_i}(q_i) \subset U$ und r_i maximal.
Beh.: $\exists (r_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_{r_i}(q_i) = U$.

Proof

$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_{r_i}(q_i) \subset U$ trivial.
$U \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_{r_i}(q_i)$:
Sei $x \in U$ zu zeigen $x \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_{r_i}(q_i)$, d.h. zu zeigen: $\exists i \in \mathbb{N} : x \in B_{r_i}(q_i)$.
Wähle ein r, so dass $B_r(x) \subset U$ und ein $i \in \mathbb{N}$, sodass $\|x - q_i\| < \frac{r}{4}$. Dies geht, da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$.
Zu zeigen $B_{\frac{r}{2}}(q_i) \subset U$ und $x \in B_{\frac{r}{2}}(q_i)$:

(1) Zu zeigen $\forall y \in B_{\frac{r}{2}}(q_i) : y \in U$. Sei $y \in B_{\frac{r}{2}}(q_i)$ gegeben, zu zeigen $y \in U$.

$y \in B_{\frac{r}{2}}(q_i) \implies \|q - y\| < \frac{r}{2}$:

$$\begin{aligned}\|x-y\| &\overset{\triangle\text{-Ung.}}{\leq} \|x-q_i\| + \|q_i - y\| \\ &\leq \frac{r}{4} + \frac{r}{2} \\ &< r \\ &\implies y \in B_r(x) \subset U\end{aligned}$$

(2) Zu zeigen $\|x - q_i\| < \frac{r}{2}$: $\|x - q_i\| \leq \frac{r}{4} < \frac{r}{2}$ ■

Dies gilt nicht für allgemeine metrische Räume, da für die triviale Metrik für $n = 1$ und $U := (0,1)$ alle Bälle mit Radius r um x_0 nur x_0 enthalten für $r \leq 1$ oder ganz $\mathbb{R}$, für $r > 1$. Da $(0,1)$ aber überabzählbare Elemente besitz, gibt es keine abzählbare Vereinigung von offenen Bällen, bzw. keine abzählbare Menge die gleich $(0,1)$ ist.

Aufgabe 4: Hausdorff für metrische Räume

Sei $U := \left\{a \in X : d(x,a) < \frac{d(x,y)}{2}\right\}$ und $V := \left\{a \in X : d(y,a) < \frac{d(x,y)}{2}\right\}$. Zu zeigen U, V offen und $U \cap V = \emptyset$.
U, V offen folgt direkt aus Definition.
Beweis durch Widerspruch: wir nehmen an $U \cap V \neq \emptyset \implies \exists a \in U \cap V$. Wähle ein solches a. Für a gilt:

(i) $d(x,a) < \frac{d(x,y)}{2}$ und

(ii) $d(y,a) < \frac{d(x,y)}{2}$.

Es gilt

$$d(x,y) \overset{\triangle-\text{Ung.}}{\leq} d(x,a) + d(y,a) < \frac{d(x,y)}{2} + \frac{d(x,y)}{2} = d(x,y)$$

Was zum Widerspruch führt. ■