University of Konstanz
Faculty of Science
(Mathematics and Statistics)

BMA

Vor.: Es seien $m, r \in \mathbb{N}$, V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension m und W ein beliebiger $\mathbb{R}$-Vektorraum. Weiter seien $v_1, \ldots, v_r \in V$ und $w_1, \ldots, w_r \in W$. **Beh.:** $v_1, \ldots, v_r$ linear unabhängig $\implies \exists f : V \to W$ mit

$$f(v_j) = w_j \quad (j = 1, \ldots, r).$$

und f eine lineare Abbildung

Proof

Sei $v_1, \ldots, v_r \in V$ linear unabhängig und $w_1, \ldots, w_r \in W f : V \to W$ mit und da $v_1, \ldots, v_r$ linear unabhängig Existiert nach Korollar 13.9. eine Basis $\mathcal{B}$ mit $\{v_1, \ldots, v_r\} \subset \mathcal{B}$, sodass $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_r, \ldots, v_m\}$.
Außerdem seien $w_{r+1} = w_m = 0$.
Sei

$$f : V \to W, v = \sum_{n=1}^{m} c_n v_n \mapsto \sum_{n=1}^{m} c_n w_n \quad \forall c_n \in \mathbb{R}$$

sodass $f(v_j) = w_j$ für $j = 1, \ldots, r$. zu zeigen f lineare Abbildung, also zu zeigen $\forall c \in \mathbb{R} : \forall \alpha, \beta \in V : f(c\alpha + \beta) = cf(\alpha) + f(\beta)$: Seien $c \in R, \alpha, \beta \in V$ gegeben, zu zeigen $f(c\alpha + \beta) = cf(\alpha) + f(\beta)$: Seien $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ mit $n = 1, \ldots, r$ gegeben, sodass $\alpha = \sum_{n=1}^{m} a_n v_n$ und $\beta = \sum_{n=1}^{m} b_n v_n$:

$$\begin{aligned}
f(c\alpha + \beta) &= f\left(c\sum_{n=1}^{m} a_n v_n + \sum_{n=1}^{m} b_n v_n\right) \\
&= f\left(\sum_{n=1}^{m} (ca_n + b_n) v_n\right) \\
&= \sum_{n=1}^{m} (ca_n + b_n) w_n \\
&= c\sum_{n=1}^{m} a_n w_n + \sum_{n=1}^{m} b_n w_n \\
&= cf\left(\sum_{n=1}^{m} a_n v_n\right) + f\left(\sum_{n=1}^{m} b_n v_n\right) \\
&= cf(\alpha) + f(\beta)
\end{aligned}$$