2024-07-03
Summer Semester 2024

University of Konstanz
Faculty of Science
(Mathematics and Statistics)

Analysis II

Contents

Organisatorisches

- Freitag 10 Uhr Abgabe
- Skript???
- Prüfung 2024-08-15

1 Grenzprozesse: Differentiation & Integration

Wiederholung: $\Omega \subset \mathbb{R}$ nichtleer, $f, f_1, f_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$

- $f_j \to f$ **punktweise** $\iff \forall x \in \Omega : f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x)$.
- $f_j \to f$ **gleichmäßig** $\iff \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall j \geq N : \forall x \in \Omega : |f_j(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\Big(\iff \lim_{j\to\infty} \|f_j - f\|_{\infty,\Omega} = 0.\Big)$

Erinnerung: Alle f_j stetig und $f_j \to f$ gleichmäßig $\implies f$ stetig.
Zwei zentrale Fragen:

(a) Wann gilt $f_j \overset{\text{geeignet}}{\to} f \overset{?}{\implies} \int_a^b \underbrace{f(x)}_{\lim_{j\to\infty} f_j(x)} dx = \lim_{j\to\infty} \int_a^b f_j(x)dx$

(b) Wann vererbt sich Differenzierbarkeit?
(z.B. ($\forall j : f_j$ diffbar) und $f_j \overset{\text{geeignet}}{\to} f \overset{?}{\implies} f$ diff.)

1.1 Integration & Grenzprozesse

Example 1.1.1

$\Omega = (0,1), f_j : \Omega \ni x \mapsto j\mathbb{1}_{0,\frac{1}{j}}(x)$
Dann · konvergiert (f_j) punktweise gegen die Nullfunktion.
[Archimedes: $\forall x \in \Omega : \exists N \in \mathbb{N} : \frac{1}{x} < N$, so $\forall j \geq N+1 : f_j(x) = 0$]

- $\forall j \in \mathbb{N} : \int_0^1 f_j(x)dx = j\int_0^{\frac{1}{j}} dx = j \cdot \frac{1}{j} = 1$.
- $f \equiv$ (Grenzfunktion)

Also

$$\int_0^1 \lim_{j\to\infty} f_j(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = 0 \neq 1 = \lim_{j\to\infty}\int_0^1 f_j(x)dx.$$

- Punktweise Konvergenz ist **zu schwach**, im Integrale zu kontrollieren.

Theorem 1.1.2

Sei $-\infty < a < b < \infty$, sowie $f, f_1, \ldots : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar mit $f_j \to f$ gleichmäßig auf $[a,b]$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{j\to\infty}\int_a^b f_j(x)dx.$$

Proof Theorem 1.1.2

$g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, so

$$\left|\int_a^b g(x)dx\right| \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |g(x)| \overset{g=f_j-f}{\Longrightarrow} \left|\int_a^b f_j(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right|$$
$$= \left|\int_a^b f_j(x) - f(x)dx\right|$$
$$\leq (b-a) \underbrace{\sup_{x\in[a,b]} |f_j(x) - f(x)|}_{\to 0, j\to\infty \text{ da gleichmäßige Konvergenz}} \to 0. \qquad \blacksquare$$

1.2 Differentiation & Grenzprozesse

Grundfrage Was misst die Supremumsnorm? $\to$ "Größe" einer Funktion $\rightsquigarrow$ maximaler Wert der Beträge von $f(x)$

- Angenommen., $\|f\|_{\infty,\mathbb{R}} \leq a$

Example 1.2.1

$\Omega = (0, 1), f_j(x) := \frac{1}{j}\sin(2\pi jx)$
$\forall x \in (0, 1) : |f_j(x)| \leq \frac{1}{j} \overset{j\to\infty}{\to} 0$. Also: $f \equiv 0$ punktweise Grenzfunktion, Konvergenz sogar gleichmäßig!
Grenzfunktion f diffbar, Ableitung $f' \equiv 0$
Aber. $f_j'(x) = 2\pi\cos(2\pi jx)$ mit $\left|f_j'\left(\frac{1}{2}\right)\right| = 2\pi : f_j' \not\to f'$ punktweise.

Example 1.2.2

$\Omega = (-1, 1), f_j(x) := \sqrt{x^2 + \frac{1}{j}} \to f(x) = |x|$

- **Beh.:** $f_j \to f$ gleichmäßig: $\forall x \in (-1, 1)$:

$$|f_j(x) - f(x)| = \left|\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{j}}\right|$$
$$= \frac{\frac{1}{j}}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{j}}}$$
$$\leq \frac{1}{j} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{j}}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{j}} \overset{j\to\infty}{0}$$

- **Damit:** Alle f_j's diffbar, aber $f_j \to f$ gleichmäßig reicht nicht aus, um die Diffbarkeit von f zu sichern.

Theorem 1.2.3

Sei $-\infty < a < b < \infty, (f_j)$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen mit der folgenden Eigenschaft: Es konvergiert (f_j) punktweise gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}\&(f_j')$ konvergiert gleichmäßig gegen ein $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Dann ist f diffbar mit $f' = g$.

Proof Thorem 1.2.3

Zuerst: g ist stetig. Nun ist $\forall x \in [a,b] : f_j(x) \overset{\text{HDI}}{=} f_j(a) + \int_a^x f_j'(t)dt \overset{\text{Theorem 1.1.2}}{\to} f(a) + \int_a^x g(t)dt \implies \forall x \in [a,b] : f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt$. Aber $x \mapsto \int_a^x g(t)dt$ stetig diffbar mit $\left(\int_a^x g(t)dt\right)' = g(x)$, also auch f, und es gilt $f'(x) = g(x)$ für alle $x \in [a,b]$ ■

Bemerkung: Sei für $f \in C'([a,b]) = \{g : [,b] \to \mathbb{R} : g \text{ einmal stetig differenzierbar}\}$

$$\|f\|_{1,\infty;[a,b]} \coloneqq \|f\|_{\infty;[a,b]} + \|f'\|_{\infty;[a,b]}$$

Dann: $\|f_j - f\|_{1,\infty;[a,b]} \overset{j\to\infty}{\to} 0$ & alle f_j stetig diffbar $\implies f$ stetig diffbar

1.3 Potenzreihen revisited

Potenzreihe:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{a_j}_{\text{Koeffizienten}} \Bigg(x - \underbrace{x_0}_{\text{Entwicklungspunkt}}\Bigg)^j$$

- $\sum_{j=1}^{\infty} a_j(x-x_0)^j = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots$
  Solange wir nur bis zu einem endlichen Wert gehen ist die "Potenzreihe" unendlich differenzierbar

Wie vererbt sich Differenzierbarkeit von Polynomen auf Potenzreihen

Bemerkung: (Thm. 8.3.3, Ana I) Weierstraß: $A \subset \mathbb{R}, (f_j)$ Folge mit $\sum_{j=0}^{\infty} \|f_j\|_{\infty;A} < \infty$. Dann konvergiert $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$ absolut und gleichmäßig auf A. $\Big[\text{AK} \iff \sum_{j=0}^{\infty} |f_j(x)| < \infty, \text{GLM} \iff \text{klar}\Big]$

Theorem 1.3.1 Konvergenzverhalten von Potenzreihen

Sei $(a_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ ein Entwicklungspunkt

(i) Ist $x_1 \in \mathbb{R}$ so, dass $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x_1 - x)^j$ konvergiert, so konvergiert $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$.
Speziell konvergiert die Potenzreihe absolut und gleichmäßig auf allen Bällen $B_r(x_0)$ mit $0 < r < |x_1 - x_0|$.

*(ii) Die **formal differenzierte** Potenzreihe $\sum_{j=1}^{\infty} ja_j(x-x_0)^{j-1}$ hat genau dieselben Eigenschaften*

Proof Theorem 1.3.1

(i) $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x_1 - x_0)^j$ Konvergenz $\implies (a_j(x_1-x_0))_j$ NF

$$\implies M \coloneqq \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \left|a_j(x_1-x_0)^j\right| < \infty. \text{ Für } |x - x_0| < |x_1 - x_0|$$

setze

$$\theta := \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} < r < 1.$$

Damit

$$\left|a_j(x-x_0)^j\right| = \underbrace{\left(|a_j| \cdot |x_1 - x_0|^j\right)}_{\leq M} \left(\frac{|x-x_0|}{|x_1-x_0|}\right)^j \leq M\theta^j.$$

Für

$$x \in B_r(x_0) : \|f_j\|_{\infty;B_r(x_0)} \leq M\theta^j, \text{ wobei } f_j(x) = a_j(x-x_0)^j.$$

Also:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|f_j\|_{\infty;B_r(x_0)} < \infty$$

nach geometrischer Reihe, Rest folgt mit Weierstraß. $\implies$ (i) folgt. Zu (ii): Analog

Wiederholung

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j.$$

Konvergenzradius

$$\rho = \sup\left\{r > 0 : \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j \text{ konvergiert für alle } x \text{ mit } |x-x_0| < r\right\}$$

- Konvergenz von Potenzreihen immer auf Bällen

Corollary 1.3.2

*Eine Potenzreihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j$ mit Konvergenzradius ρ und Konvergenzball $B_\rho(x_0)$ stellt im **Inneren des Konvergenzballs** eine unendlich oft stetig differenzierbare Funktion dar ("$C^\infty(B_\rho(x_0))$"), die gliederweise differenziert werden darf: Auf $B_\rho(x_0)$ gilt:*

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j\right)' = \sum_{j=0}^{\infty} j a_j(x-x_0)^{j-1}$$

Proof Corollary 1.3.2

Nach Theorem 1.3.1 konvergiert di Potenzreihe auf allen $B_r(x_0)$ mit $0 < r < \rho$ absolut und gleichmäßig. Hierfür bemerke, dass

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j \& \sum_{j=0}^{\infty} j a_j(x-x_0)^{j-1}$$

denselben Konvergenzradius haben:

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{j\to\infty} \sqrt[j]{|a_j|}},$$

$$\frac{1}{\limsup_{j\to\infty} \sqrt[j]{j\,|a_j|}} = \rho.$$

Nun gilt:

$$\forall N \in \mathbb{N} : \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j\right)' = \sum_{j=0}^{\infty} j a_j (x - x_0)^{j-1}$$

Einerseits konvergiert $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j$ gleichmäßig (also auch punktweise) auf $B_r(x_0)$, und andererseits $\sum_{j=0}^{\infty} j a_j (x - x_0)^{j-1}$ gleichmäßig auf $B_r(x_0)$. Damit dürfen wir Limes und Ableitung vertauschen, und die Behauptung folgt nun induktiv ■

Bemerkung: Die vorausgegangenen Resultate vererben sich auf natürlich Art und Weise auf Funktionen $f : \mathbb{C} \supset \Omega \to \mathbb{C}$. (Mehr dazu in Funktionentheorie)

Example 1.3.3 exp, sin, cos

$$\begin{aligned}
\exp'(x) &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}\right)' \\
&= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{j-1}}{(j-1)!}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \\
&= \exp(x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin' &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{(2j+1)!} (2j+1) x^{2j} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!} \\
&= \cos(x)
\end{aligned}$$

Zur Systematisierung:

Definition 1.3.4

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen. Wir nennen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ **analytisch**, falls gilt: Für jedes $x_0 \in \Omega$ gibt es ein $r > 0$ mit $B_r(x_0) \subset \Omega$ so, dass f auf $B_r(x_0)$ mit einer in $B_r(x_0)$ konvergente Potenzreihe übereinstimmt.

Der Raum aller analytischen Funktionen auf Ω wird $C^\omega(\Omega)$ bezeichnet.

Differenzierbarkeit ist eine lokale Eigenschaft $\overset{\text{Cor. 1.3.2}}{\Longrightarrow}$

$$\underbrace{C^\omega(\Omega)}_{\text{analytisch}} \subsetneqq \underbrace{C^\infty(\Omega)}_{\infty-\text{oft stetig differenzierbar}}$$

Diese Inklusion ist strikt! (Blatt 1 / Aufgabe 3)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

1.4 Taylorreihen

Grundfrage: Wie ist eine Funktion durch Potenzfunktionen aufgebaut, oder anders: Wie lassen sich Funktionen durch Polynome approximieren?

- approximieren exp um $x_0 = 0$ mit affin-linearen Funktion, quadratischen Funktionen, ...
- **Wie** bekommen wir solche Approximationen?

Eine solche Approximationstrategie sollte/**muss** auch für Polynome funktionieren und irgendwann terminieren.
Hierzu:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{N} a_j (x-x_0)^j = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$$

$$p'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + \dots$$

- $p(x_0) = a_0$.
- $p'(x_0) = a_1 \rightsquigarrow a_0 + a_1(x-x_0) = p(x_0) + p'(x_0)(x-x_0)$
- $p''(x_0) = 2a_2$
- $p^{(k)}(x_0) = k! a_k$

$$p(x) = \sum_{j=0}^{N} \frac{p^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j$$

Theorem 1.4.1

Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $x_0 \in I$ & $f: I \to \mathbb{R}(N+1)$-mal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\forall x \in I : f(x) = \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k \right) + \left(\frac{1}{N!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^N f^{(N+1)}(t)dt \right).$$

Taylorpolynom vom Grad N an/in x_0

Restglied

Proof Theorem 1.4.1

$N = 0:$
$\forall x \in I : f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t)dt$. Gilt nach HDI.
$N-1 \curvearrowright N$. Nach IV gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + \frac{1}{(N-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{N-1} f^{(N)}(t)dt.$$

$$\frac{1}{(N-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{N-1} f^{(N)}(t)dt$$

$$\begin{aligned}
&= -\int_{x_0}^x \frac{d}{dt}\left(\frac{(x-t)^N}{N!}\right) f^{(N)}(t)dt \\
&= -\left[\left[\frac{(x-t)^N}{N!} f^{(N)}(t)\right]_{t=x_0}^{t=x} - \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t)dt\right] \\
&= \frac{(x-x_0)^N}{N!} f^{(N)}(x_0) + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t)dt
\end{aligned}$$

Corollary 1.4.2

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ $(N+1)$-mal stetig differenzierbar und gelte $f^{(N+1)}(x) = 0$ für alle $x \in I$. Dann ist f ein Polynom vom Grad N.

Theorem 1.4.3 Lagrange-Restglied

In der Situation von Theorem 1.4.1 gibt es für $x, x_0 \in I$ ein $\xi \in (\min\{x, x_0\}, \max\{x, x_0\})$ so, dass

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-x_0)^{N+1}$$

Erinnerung: (MWS der Integralrechnung)
$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ regelint., $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so $\exists \xi \in [a,b]$:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)dx.$$

Proof Theorem 1.4.3

Nach Theorem 1.4.1:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + \frac{1}{N!}\int_{x_0}^x (x-t)^N f^{(N+1)}(t)dt$$

Œ $x > x_0$. Wende MWS an auf $\varphi(t) = (x-t)^N$.

$$\Longrightarrow \exists \xi \in [x_0, x] : \int_{x_0}^{x} (x-t)^N f^{(N+1)}(t)dt = f^{(N+1)}(\xi) \underbrace{\int_{x_0}^{x} (x-t)^N dt}_{\left[-\frac{(x-t)^{N+1}}{N+1}\right]_{t=x_0}^{t=x}} = +f^{(N+1)}(\xi)\frac{(x-x_0)^{N+1}}{N+1}.$$

Bemerkung: ("Polynomialisierbarkeit") Schicken wir $x \to x_0$, so auch $\xi \to x_0$, und damit ist der Approximierfehler von der Größenordnung eines Polynoms vom Grad $N+1$.

Definition 1.4.4

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ & $f : I \to \mathbb{R}$ ∞-oft stetig differenzierbar. Dann nennen wir

$$T_{x_0} f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

die **Taylorreihe** von f im **Entwicklungspunkt** x_0
Kann, muss aber nicht f darstellen: $\exists r > 0 : \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\} : f(x) \neq T_{x_0} f(x)$.

Example 1.4.5

- $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist C^∞& $\exp^{(k)} = \exp \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$ mit $x_0 = 0 : T_0 \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$.
- $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist C^∞,
  - $\sin^{(0)}(x) = \sin^{(0)}(x)$
  - $\sin^{(1)}(x) = \cos(x)$
  - $\sin^{(2)}(x) = -\sin(x)$
  - $\sin^{(3)}(x) = -\cos(x)$

  $x_0 = 0 : k \in \mathbb{N}_0 : \sin^{(4k)}(x_0) = 0$, usw.

  $$T_0 \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(4k+1)!} x^{4k+1} - \frac{1}{(4k+3)!} x^{4k+3} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

  Analog für cos

Example 1.4.6

$f(x) = \log(1+x)$

- $f^{(0)}(x) = \log(1+x)$
- $f^{(1)}(x) = (1+x)^{-1}$
- $f^{(2)}(x) = -(1+x)^{-2}$
- $f^{(3)}(x) = 2(1+x)^{-3}$ ind:
- $f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}(k-1)!(1+x)^{-k}$

  $$T_0 f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(k-1)!(-1)^{k+1}(x)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k.$$

Falls $|x| < 1$, so konvergiert dies (Majorantenkriterium)

$$\begin{aligned}
\log(1+x) &= \int_0^x \frac{dt}{1+t} \\
&= \int_0^x \frac{1}{1+t} dt. && \Big| \quad \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} q^n}_{s,} = \underbrace{\frac{1}{1-q}}_{sq=s-1} \\
&= \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-t)^k dt && \Big| \quad \text{Weierstraß} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x t^k dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} x^{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k.
\end{aligned}$$

Später: $\log(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

2 Topologische Strukturen

2.1 Metrische Räume

Ziel/Idee Räume, in denen wir Abstände messen können. X Menge, $d : X \times X \ni (x,y) \mapsto \underbrace{d(x,y)}_{\text{“Abstand”}}$

(i) Abstand nicht-negativ

(ii) Abstand 0 $\iff$ Objekte dieselben

(iii) Abstand von x zu y = Abstand von y zu x.

(iv) Gehen wir über Zwischenpunkte, so machen wir einen Umweg

Definition 2.1.1 Metrik, Metrischer Raum

Sei X eine Menge und $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Wir nennen d eine **Metrik** & (X,d) einen **metrischen Raum**, falls:

(a) Pos. Definitheit: $\forall x, y \in X : d(x,y) = 0 \iff x = y$.

(b) Symmetrie: $\forall x, y \in X : d(x,y) = d(y,x)$.

(c) **Dreiecksungleichung**: $\forall x, y, z \in X : d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Example 2.1.2 Triviale Metrik

X nichtleere Menge. **Triviale Metrik:** $d(x,y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$ (kein Vektorraum)

Example 2.1.3 Normierter Vektorraum & Metriken

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Vektorraum mit Norm:

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

mit

(N1) $\forall x \in X : \|x\| = 0 \iff x = 0..$ (0 Nullvektor in X)

(N2) $\forall x \in X : \forall \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

(N3) $\forall x, y \in X : \|x + y\| \leq \|x\| + |y|$.

Wir definieren die kanonische Metrik in $(X, \|\cdot\|)$ via

$$d(x,y) := \|x - y\|, \quad x, y \in X.$$

Example 2.1.4 $\mathbb{R}^n$, Normen

$\|(x_1, x_2, x_3)\|_2 := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

Sei $1 \leq p \leq \infty$, und für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definieren

$$\|x\|_p \coloneqq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \leq p < \infty$$
$$\|x\|_\infty \coloneqq \max |x_j|, \qquad p = \infty$$

Dann ist $\|\cdot\|_p$ eine **Norm auf** $\mathbb{R}^n$ ("p-Norm")

- Nichtnegativ klar. Positiv Definiert & Homogenität (N2): klar.
- Für Dreiecksungleichung: **Youngsche Ungleichung:** $\forall 1 \leq p < \infty : \forall\forall a, b \in \mathbb{R} : |ab| \leq \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{p'}|b|^{p'}, p' \coloneqq \frac{p}{p-1}$
Hölderexponent von p, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$
- exp konvex: $\forall \lambda \in [0,1] : \forall x, y \in \mathbb{R} : \exp(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda \exp(x) + (1-\lambda)\exp(y)$
- Œ $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann:

$$\begin{aligned} |ab| &= \exp(\log(|ab|) \\ &= \exp(\log|a| + \log|b|) \\ &= \exp\left(\frac{1}{p} \log|a|^p + \frac{1}{p'} \log|b|^{p'} \right) \\ &\leq \frac{1}{p} \exp\log|a|^p + \frac{1}{p'} \exp\log|b|^{p'} \end{aligned}$$

Zur Dreiecksungleichung: **Höldersche Ungleichung:** $1 \leq p < \infty, x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_{p'}$$

Œ erst $\|x\|_p = \|y\|_{p'} = 1$.

- $\sum_{j=1}^n |x_j y_j| \leq \frac{1}{p} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p}_{1} + \frac{1}{p'} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} |y_j|^{p'}}_{1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$

Für $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ so $\tilde{x} \coloneqq \frac{x}{\|x\|_p}, \tilde{y} \coloneqq \frac{y}{\|y\|_{p'}}$.
Also

$$\sum_{j=1}^{n} |\tilde{x}_j \tilde{y}_j| \leq \|\tilde{x}\|_p \left\|\tilde{y}_{p'}\right\| = 1 \implies \sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq \|x\|_p \|y\|_{p'}.$$

$x, y \in \mathbb{R}^n$

$$
\begin{aligned}
\|x+y\|_p^p &= \sum_{j=1}^n |x_j+y_j|^p \\
&= \sum_{j=1}^n |x_j+y_j|^{p-1}\,|x_j+y_j| \\
&\le \sum_{j=1}^n \underbrace{|x_j+y_j|^{p-1}}_{a_j}\,\underbrace{|x_j|}_{b_j} + \sum_{j=1}^n |x_j+y_j|^{p-1}\,|y_j| \\
&\le \left(\sum_{j=1}^n |x_j+y_j|^{(p-1)p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^n |x_j+y_j|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \quad (\dots) \\
&= \|x+y\|_p^{p-1}\left(\|x\|_p + \|y\|_p\right).
\end{aligned}
$$

$$\implies \|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$$

Ziel: Konvergenz auf metrischen Räumen.
Ana I :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in N : \forall j \ge N : \underbrace{|x_j - x|}_{=\|x_j-x\|_2} < \varepsilon.$$

Definition 2.1.5

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_j) \subset X$ **konvergiert gegen** x (bzgl. d), falls

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall j \ge N : d(x_j, x) < \varepsilon.$$

Wir nennen (x_j) **Cauchy** (bzgl. d), falls

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall i, j \ge N : d(x_i, x_j) < \varepsilon.$$

Wir nennen (X, d) **vollständig**, falls jede d-Cachyfolge bezüglich d konvergiert.

$r > 0, x \in X : B_r(x) \coloneqq \{y \in X : d(x,y) < r\}$ "offener Ball".

- $U \subset X$ **offen** bezüglich $d \iff \forall x \in U : \exists r > 0 : B_r(x) \subset U$
- U abgeschlossen $\iff X \setminus U$ offen

Hausdorff, Brief "... das Ende nicht ..."

Lieber Freund Wollstein!

Wenn Sie diese Zeilen erhalten, haben wir drei das Problem auf andere Weise gelöst – auf die Weise, von der Sie uns beständig abzubringen versucht haben. Das Gefühl der

Geborgenheit, das Sie uns vorausgesagt haben, wenn wir erst einmal die Schwierigkeiten des Umzugs überwunden hätten, will sich durchaus nicht einstellen, im Gegenteil:

Auch Endenich
Ist noch vielleicht das Ende nich!

Was in den letzten Monaten gegen die Juden geschehen ist, erweckt begründete Angst, dass man uns einen für uns erträglichen Zustand nicht mehr erleben lassen wird.

Sagen Sie Philippsons, was Sie für gut halten, nebst dem Dank für ihre Freundschaft (der vor allem aber Ihnen gilt). Sagen Sie auch Herrn Mayer unseren herzlichen Dank für alles, was er für uns getan hat und gegebenenfalls noch getan haben würde; wir haben seine organisatorischen Leistungen und Erfolge aufrichtig bewundert und hätten uns, wäre jene Angst nicht, gern in seine Obhut gegeben, die ja ein Gefühl relativer Sicherheit mit sich gebracht hätte, – leider nur einer relativen.

Wir haben mit Testament vom 10. Okt. 1941 unseren Schwiegersohn Dr. Arthur König, Jena, Reichartsteig 14, zum Erben eingesetzt. Helfen Sie ihm, soweit Sie können, lieber Freund! helfen Sie auch unserer Hausangestellten Minna Nickol oder wer sonst Sie darum bittet; unseren Dank müssen wir ins Grab mitnehmen. Vielleicht können nun die Möbel, Bücher usw. noch über den 29. Jan. (unseren Umzugstermin) im Haus bleiben; vielleicht kann auch Frau Nickol noch bleiben, um die laufenden Verbindlichkeiten (Rechnung der Stadtwerke u. s. w.) abzuwickeln. – Steuerakten, Bankkorrespondenz u. dgl., was Arthur braucht, befindet sich in meinem Arbeitszimmer.

Wenn es geht, wünschen wir mit Feuer bestattet zu werden und legen Ihnen drei Erklärungen dies Inhalts bei. Wenn nicht, dann muss wohl Herr Mayer oder Herr Goldschmidt das Notwendige veranlassen. Für Bestreitung der Kosten werden wir, so gut es geht, sorgen; meine Frau war übrigens in einer evangelischen Sterbekasse – die Unterlagen dazu befinden sich in ihrem Schlafzimmer. Was augenblicklich an der Kostendeckung noch fehlt wird unser Erbe oder Nora übernehmen.

Verzeihen Sie, dass wir Ihnen über den Tod hinaus noch Mühe verursachen; ich bin überzeugt, dass Sie tun, was Sie tun <u>können</u> (und was vielleicht nicht sehr viel ist). Verzeihen Sie uns auch unsere Desertion! Wir wünschen Ihnen und allen unseren Freunden, noch bessere Zeiten zu erleben.

Ihr treu ergebener

- Felix Hausdorff

Lemma Hausdorfffeigenschaft metrische Räume

Ist (X, d) ein metrischer Raum, so gibt es für $x, y \in X, x \neq y$ offene Mengen U, V mit $x \in U, y \in V \& U \cap V = \emptyset$

Theorem 2.1.6

Sei (X, d) vollständiger metrischer Raum, $U \subset X$. Dann sind äquivalent:

(i) (U, d) vollständig.

(ii) U ist bezüglich d abgeschlossen

Proof Theorem 2.1.6

"$\implies$" Hierzu folgende Charakterisierung der Abgeschlossenheit: $U \subset X$ abgeschlossen $\iff$ $U \subset X$ folgenabgeschlossen $:\iff$ $(x_j) \subset U$ Folge mit $d(x_j, x) \to 0, j \to \infty$, so $x \in U$.
Bew. (Zwischenbehauptung)

"$\implies$" Sei $(x_j) \subset U$ konvergent mit $d(x_j, x) \to 0, x \in X \setminus U$. U abgeschlossen $\implies$ $X \setminus U$ offen $\implies$ $\exists r \geq$: $B_r(x) \subset X \setminus U$. Aber $\exists N \in \mathbb{N} : \forall j \geq N : x_j B_r(x) \subset X \setminus U$. Aber $(x_j) \subset U \perp$

"$\impliedby$" Angenommen, U nicht abgeschlossen, also $X \setminus U$ nicht offen. $\implies$ $\exists x \in X \setminus U$: $\forall r > 0 : B_r(x) \not\subset X \setminus U$, also $B_r(x) \cap U \neq \emptyset$
$\implies$ also $\forall j \in \mathbb{N} : \forall x_j \in B_{\frac{1}{j}}(x) \cap U$. Dann $(x_j) \subset U$ & $d(x_j, x) \to 0$, aber $x \in X \setminus U$. Also U nicht folg.ab., also Beh. gez. ■

Nun: (i) $\implies$ (ii) Sei $(x_j) \subset U$ mit $d(x_j, x) \to 0, x \in X$. Dann ist (x_j) d-Cauchy (da konvergent), also $\exists y \in U : d(x_j, x) \to 0, j \to \infty$ ((X, d) VMR).
Nach Lemma (Hausdorff) $x = y$, also (ii)

"(ii) $\implies$ (i)" Sei $x_j \subset U$ d-Cauchy, Wegen (X, d) VMR, $\exists x \in X : d(x_j, x) \to$
Aber da U folgen abgeschlossen $x \in U$ Also (U, d) VMR ■

Example 2.1.7

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, und sei $C_b(U) := \{u : U \to \mathbb{R} : u \text{ stetig und } \textbf{beschränkt}\}$ $\|u\|_{C(U)} := \sup_{x \in U} |u(x)|$ ist Norm auf $C_b(U)$ (keine Norm auf $C(U) \hat{=}$ stetige Funktionen auf U.)
$\|\cdot\|_{C(U)}$ ind. Metrik $d(u, v) := \|u - v\|_{C(U)}$.
Beh.: $(C_b(U), d)$ ist **vollständig**.
Sei (u_j) Cauchyfolge in $(C_b(U), d)$, d.h., $\lim_{j,l \to \infty} \|u_j - u_l\|_{C(U)} = 0$.
Für jedes $x \in U : |u_j(x) - u_l(x)| \overset{\text{Def}}{\leq} \|u_j - u_l\|_{C(U)} \overset{j,l \to \infty}{\longrightarrow} 0$.
$\implies$ $(u_j(x))$ Cauchy in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ vollständig $\implies$ $\exists u(x) \in \mathbb{R} : u_j(x) \to u(x), j \to \infty$. Zu zeigen: $u \in C_b(U)$& $\|u_j - u\|_{C(U)} \to 0$.
Für letzteres:

$$\forall x \in U : \forall j \in \mathbb{N} : |u(x) - u_j(x)| = \lim_{l \to \infty} |u_l(x) - u_j(x)| \leq \lim_{j \to \infty} \|u_j - u_l\|_{C(U)},$$

also

$$\|u - u_j\|_{C(U)} \leq \lim_{l \to \infty} \|u_l - u_j\|_{C(U)},$$

also

$$\lim_{j \to \infty} \|u - u_j\|_{C(U)} \leq \lim_{j,l \to \infty} \|u_j - u_l\|_{C(U)} = 0.$$

Konvergenz bezüglich d ist gleichmäßige Konvergenz, und da alle u_j's stetig, folgt $u \in C(U)$ nach Analysis I. Genauer: z. z. u stetig. Sei $x \in U$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Hierzu $|u(x) - u_j(y)| \leq \underbrace{|u(x) - u_j(x)|} + |u_j(x) - u_j(y)| + \underbrace{|u_j(y) - u(y)|}$ $\forall y \in U$.

Wähle zuerst $j \in \mathbb{N}$ mit $\|u_j - u\|_{C(U)} < \frac{\varepsilon}{3}$, und dann wegen u_j stetig $\delta > 0 : |x - y| < \delta \implies |u_j(x) - u_j(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Nach obiger Abschätzung $|u(x) - u(y)| < \varepsilon$, also u stetig. Für Beschränktheit von u: Wähle $j \in \mathbb{N} : \|u - u_j\|_{C(U)} \leq 1$. Dann $\forall x \in U : |u(x)| \leq |u_j(x) - u(x)| + |u_j(x)| \leq \underbrace{\|u_j - u\|_{C(U)}}_{\leq 1} + \underbrace{\|u_j\|_{C(U)}}_{< \infty} \implies u$ beschränkt

Example 2.1.8

Betrachte $C_b([0,2])$ mit **Norm**

$$\|u\|_{\mathcal{L}^1([0,2])} := \int_0^2 |u(x)|\, dx.$$

Zu positiver Definitheit: $\|u\|_{\mathcal{L}^1([0,2])} = 0$. Angenommen, $u \equiv 0$, so $\exists x_0 \in [0,2] : |u(x_0)| > 0$. Dann, für $\varepsilon := \frac{|u(x_0)|}{2} : \exists \delta > 0 : |x_0 - x| < \delta \implies |u(x) - u(x_0)| < \frac{|u(x_0)|}{2} \implies |u(x)| - |u(x_0)| > -\frac{|u(x_0)|}{2} \implies |u(x)| > \frac{|u(x_0)|}{2} \implies \|u\|_{\mathcal{L}^1([0,2])} \geq \int_0^2 1_{B_\delta}(x_0)\, |u(x)|\, dx \geq \frac{|u(x_0)|}{2}\delta$
Beh.: Ist d die durch $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^1([0,2])}$ ind. Metrik, so ist $(C_b([0,2]), d)$ **nicht vollständig**: Definiere

$$u_j(x) := \begin{cases} x^j, & x \in [0,1) \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann: (u_j) d-Cauchy:
$\|u_j - u_l\|_{\mathcal{L}^1([a,b])} = \int_0^1 \left|x^j - x^l\right| dx \leq \int_0^1 x^j dx + \int_0^1 x^l dx = \frac{1}{j+1} + \frac{1}{l+1} \overset{j,l\to\infty}{\longrightarrow} 0$, Cauchyeigenschaft.

- Gäbe es ein $u : [0,2] \to \mathbb{R}$ mit $d(u_j, u) \to 0$, so notwendigerweise $u = 0$ auf $[0,1)\&u = 1$ auf $(1,2]$. Dann aber u unstetig - $(C_b([0,2]), d)$ **nicht** vollständig.

Example 2.1.9

$R^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_j \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq n\}$, für $1 \leq p \leq \infty$ sei d_p die durch $\|\cdot\|_p$ ind. Metrik. Dann ist $(\mathbb{R}^n, d_p)$ **vollständig**. Denn:
Ist $(x_j) \subset \mathbb{R}^n$ eine Cauchyfolge bezüglich d_p, so sind die einzelnen Koordinatenfolgen Cauchy in $\mathbb{R}$.
$a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n : \forall i \in \{1, \ldots, n\} :$

$$\begin{aligned} |a_i| &= (|a_i|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq (n\, \|a\|_\infty^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= n^{\frac{1}{p}}\, \|a\|_\infty. \end{aligned}$$

$$\implies \forall p \in [1,\infty) : \underbrace{\|a\|_\infty}_{\max_{i=1,\ldots,n}|a_i|} \leq \underbrace{\|a\|_p}_{\left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \leq n^{\frac{1}{p}}\, \|a\|_\infty \implies |a|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|a\|_p = 1$$

Für $1 \leq p \leq \infty$ sei $\mathbb{B}_p := \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \|x_1, x_2\|_p \leq 1\right\}$ **Bälle** bezüglich d_p.
(Für $p = 1$ Quadrat mit Ecken $(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1).$, für $1 < p < 2$ nähert sich zu einem Kreis mit Radius 1, für $p = 2$ Kreis, für $2 < p < \infty$ nähert sich Quadrat mit Seitenlänge 2, parallel zu Koordinatenachsen, für $p = \infty$ Quadrat)

Definition 2.1.10

Seien $(X, d_X)\&(Y, d_Y)$ zwei metrische Räume & $f : X \to Y$ eine Abbildung. Wir nennen f **stetig in** $x_0 \in X$, falls gilt: Ist $W \subset Y$ offen (bezüglich Y) mit $f(x_0) \in W$, so ist $f^{-1}(W)$ offen bezüglich d_X. f heißt **stetig** wenn f stetig in jedem $x_0 \in X$ ist.

- **Warnung:** Das heißt **NICHT**, dass Bilder offener Mengen offen sind!
  Bsp.: $\sin : \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{offen}} \to \mathbb{R}$, aber $\sin(\mathbb{R}) = [-1,1] \leftarrow$ abgeschlossen

Theorem 2.1.11

Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume. Dann ist für $f : X \to Y$ äquivalent:

(i) f *stetig in* x_0.

(ii) $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in X : d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

(iii) *Ist* $(x_j) \subset X$ *eine Folge mit* $d_X(x_j, x) \to 0$, *so* $d_Y(f(x_j), f(x_0)) \to 0, j \to \infty$.

Proof Theorem 2.1.11

(i) $\implies$ (ii): Sei $\varepsilon > 0$, also $B_\varepsilon(f(x_0))(=: W)$ offen in Y. Da f stetig, $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$ offen in X. Aber wegen $x_0 \in f^{-1}(W)$ gibt es ein $\delta > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subset f^{-1}(W)$, also $f(B_\delta(x_0)) \subset W$. Damit folgt (ii).

(ii) $\implies$ (iii): Sei $\varepsilon > 0$, dann wegen (ii) $\exists \delta > 0 : d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.
Da $d_X(x, x_j) \to 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall j \geq N : d_X(x, x_j) < \delta$, also auch $f(x_j) \in B_\varepsilon(f(x_0)) \implies$ (iii)

¬(ii) $\implies$ ¬(iii): $\exists \varepsilon > 0 : \forall j \in \mathbb{N} : \exists x_j \in X : d_X(x, x_j) < \frac{1}{j}$, aber $d_Y(f(x_0), f(x_j)) > \varepsilon \implies f$ nicht folgenstetig, also ¬(iii)

(ii) $\implies$ (i): f stetig in $x_0 \iff$ Ist $W \subset Y$ offen, $f(x_0) \in W$, so $f^{-1}(W)$ offen. Sei also $W \subset Y$ offen mit $f(x_0) \in W$. Also $\exists \varepsilon : B_\varepsilon(f(x_0)) \subset W$. f ε-δ-Stetigkeit, also $\exists \delta > 0 : B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$. Also $f^{-1}(W)$ offen, d.h. f stetig. ∎

Example 2.1.12

Ist $p(x_1, \dots, x_n) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha x^\alpha$ ein Polynom wobei $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ein **Multiinex**, & für $x = (x_1, \dots, x_n)$ $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$. Dann ist $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig, wobei $\mathbb{R}^n$ mit euklidischer Metrik ausgestattet.

Example 2.1.13

$\mathbb{R}^{n \times n} \hat{=} (n \times n)$-Matrizen. Norm auf $\mathbb{R}^{n \times n} : A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}, \|A\|_2 := \left(\sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Setze:

$$\mathrm{GL}(n; \mathbb{R}) := \left\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ invertierbar}\right\}.$$

Frage: Ist $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ **offen?** Ja.

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \det{}^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

$\det(A)$ ist ein Polynom der Einträge von A. Also ist $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ stetig. Aber $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ offen in $\mathbb{R}$, & damit $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ **offen**.
Konsequenz: Ist A inv., so lassen sich die Einträge von A stets so "gering" abändern, dass wir wieder eine inv. Matrix erhalten.

Theorem 2.1.14

Sei (X, d) vollständiger metrischer Raum & $T : X \to X$ eine ***Kontraktion:***

$$\exists 0 \leq L < 1 : \forall x, y \in X : d_X(T_x, T_y) \leq L d(x, y).$$

Dann $\exists! x_0 \in X : T_{x_0} = x_0$ (“x_0 Fixpunkt”). [Banach]

Proof Theorem 2.1.14

T stetig: Ist $\varepsilon > 0$, so wähle $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$, und wende ε-δ-Charakterisierung der Stetigkeit an. **T eindeutig:** Seien $x, y \in X$ zwei Fixpunkte: $T_x = x \& T_y = y$. Dann $d(x,y) = d(T_x, T_y) \overset{\text{Kontraktion}}{\leq} Ld(x,y) \overset{0\leq L<1}{\Longrightarrow} d(x,y) = 0 \implies x = y$.
Existenz: Sei $x \in X$ beliebig, definiere

$$x_{j+1} := T_{x_j}, j \in \mathbb{N}, x_1 := x.$$

Zu zeigen: (x_j) konvergiert gegen einen **Fixpunkt**.
Vorbemerkung: $d(x_{k+1}, x_k) \overset{\text{Def}}{=} d\left(T_{x_k}, T_{x_{k-1}}\right) \overset{T \text{ Kont.}}{\leq} Ld\left(x_k, x_{k-1}\right) \overset{\text{Def}}{=} Ld\left(T_{x_{k-1}}, T_{x_{k-2}}\right) \overset{\text{Kontr.}}{\leq} L^2 d\left(x_{k-1}, x_{k-2}\right) \leq \cdots \leq L^{k-1} d(x_2, x_1)$. Zu zeigen: (x_j) **Cauchy**.
Seien $j < l, j, l \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} d(x_j, x_l) &\leq \sum_{k=j}^{l-1} d\left(x_{k+1}, x_k\right) \\ &\leq d(x_2, x_1) \sum_{k=j}^{l-1} L^k \overset{j,l\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

da

$$\sum_{k=1}^{\infty} L^k \overset{0\leq L<1}{<} \infty \text{ (geom. Reihe)}.$$

Also: (x_j) Cauchy $\overset{(X,d) \text{ VMR}}{\Longrightarrow}$ (x_j) konvergiert gegen $x_0 \in X$. **Zu zeigen:** x_0 Fixpunkt.
$d(x_0, T_{x_0}) = \lim_{j\to\infty} d(\underbrace{x_j}_{T_{x_{j-1}}}, T_{x_{j-1}})$. Damit $x_0 = T_{x_0}$.

$X \hat{=}$ Stadtgebiet von Konstanz. T : bildet Konst. auf Landkarte von Konstanz ab, Landkarte wir **in Konstanz** hingelegt: $X \to X$. $L < 1 \hat{=}$ Landkarte ansonsten Unsinn.

Example 2.1.15

Alle Bedingungen wichtig:

(i) X vollständig: $(0,1) \subset \mathbb{R}, T_x := \frac{1}{4}x^2$

- $|T_x - T_y| = \frac{1}{4} \underbrace{(|x| + |y|)}_{\leq 2} |x - y| \leq \underbrace{\frac{1}{2}}_{L<1} |x - y|, \quad x, y \in (0,1),$
- $T : (0,1) \to (0,1)$,
- $((0,1), d_{\text{Eukl.}})$ nicht vollst.

(ii) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist keine Kontraktion, $\exp x = x$ hat keine Lösung.

$f(x) = 0, \underbrace{f(x) + x}_{T_x} = x$

$T : [0,1] \to [0,1]$ stetig, dann hat T einen Fixpunkt.

Anwendung: Gewöhnliche Differentialgleichungen

$$T > 0, f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} :$$

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), 0 < t \leq T. \\ u(0) = u_0. \quad u_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

Beispiel:

$$\begin{cases} u'(t) = u(t), t \in [0,1] \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Annahme:}}$ $\exists L > 0 : \forall t \in [0,T] : \forall x, y \in \mathbb{R} : |f(t,x) - f(t,y)| \leq L\,|x-y|\,.$
Beh.: Unter dieser Annahme existiert genau eine Funktion $u \in C^1([0,T])$ die 1 lößt. (Variante des Satzes von **Picard-Lindelöf**)

$$T : C([0,T]) \to C([0,T]), \|a\|_\sim := \max_{t \in [0,T]} \exp(-2Lt)\,|u(t)|\,.$$

$$\exp -2LT \leq \exp -2LT \leq 1 \quad \forall t \in [0,T],$$

also

$$\exists c = c(T) > 0 : \frac{1}{c}\,\|u\|_\sim \leq \|u\|_{C([0,T])} \leq c\,\|u\|_\sim\,. \tag{2}$$

Definiere:

$$\boxed{Tu(t) := u_0 + \int_0^t f(s, u(s))ds}$$

$u \in C([0,T])$, so $Tu \in C^1([0,T])$. $Tu(0) = u_0$.

$$u'(t) \overset{u\text{ FP}}{=} (Tu)'(t) = f(t, u(t)).$$

Zu zeigen: T hat Fixpunkt, denn Fixpunkte von T sind die Lösungen von 1. T **Konstraktion:** $u, v \in C([0,1]) : \forall t \in [0,T] :$

$$\begin{aligned} \exp(-2Lt)\,|Tu(t) - Tv(t)| &\overset{\text{Def}}{=} \exp(-2Lt)\left|\int_0^t f(s,u(s)) - f(s,v(s))ds\right| \\ &\overset{Lip.}{\leq} L\exp(-2Lt)\int_0^t \underbrace{(|u(s) - v(s)|\exp -2Ls)}_{\leq \|u-v\|_N} \exp(2Ls)ds \\ &\leq L\exp(-2Lt)\,\|u-v\|_\sim\,\frac{1}{2L}\underbrace{(\exp(2Lt) - 1)}_{\leq \exp 2Lt} \\ &\leq \frac{1}{2}\,\|u-v\|_\sim\,. \end{aligned}$$

$\implies \|T_u - T_v\|_\sim \leq \frac{1}{2}\,\|u-v\|_\sim$
Wegen 2 ist $C([0,T])$ mit der durch $\|\cdot\|_\sim$ induzierten Metrik vollständig $\overset{\text{Banach}}{\implies}$ ∎

2.2 Kompaktheit

- **Ana I:** $\underbrace{A \subset \mathbb{R} \textbf{ kompakt}}_{\substack{\text{bezüglich Metrik,} \\ \text{die von } |\cdot| \text{ auf } \mathbb{R} \text{ induziert}}} \iff A$ abgeschlossen und beschränkt

Definition 2.2.1 Kompaktheit

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir nennen $U \subset X$ **kompakt** genau dann wenn:
Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine **Familie von offenen Mengen** mit $U \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ ("$(U_i)_{i \in I}$ überdeckt U"). Dann gilbt es **endlich viele**

$$i_1 \ldots, i_N \in I \text{ mit } U \subset \bigcup_{j=1}^{N} U_{i_j}.$$

[Das muss für beliebige Familien mit obiger Eigenschaft gelten]
D.h.: kompakt $\iff$ jede offene Überdeckung besitzt endliche Teilüberdeckung

- Kompaktheit bedeutet **nicht**, dass es eine endliche Überdeckung durch offene Mengen gibt. [Überdecke $U \subset X$ durch X, und X ist offen]

Example 2.2.2

$\mathbb{R}$, $d \mathrel{\widehat{=}}$ Metrik durch $|\cdot|$ induziert.
$(0,1)$ **kompakt**? Betrachte für $i \in \mathbb{N}_{\geq 3} : U_i := \left(\frac{1}{i}, 1 - \frac{1}{i}\right)$. Dann $(0,1) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$. Angenommen, es gäbe endlich viele $i_1, \ldots, i_N \in \mathbb{N}$ mit $(0,1) = \bigcup_{j=1}^{N} U_{i_j}$. Œ $i_1 < \ldots < i_N$, dann $U_{i_1} \subset \cdots \subset U_{i_N}$, also

$$\bigcup_{j=1}^{N} U_{i_j} = U_{i_N} = \left(\frac{1}{N}, 1 - \frac{1}{N}\right) \subsetneqq (0,1).$$

Example 2.2.3

X Menge, $d(x,y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$
$U \subset X$ kompakt. Offene Überdeckung: $0 < \varepsilon < 1$. Für $x \in U : B_\varepsilon(x)$ ist offen. Dann $B_\varepsilon(x) = \{x\}$. Dann $U \subset \bigcup_{x \in U} B_\varepsilon(x)$. Mit U kompakt:

$$\exists x_1, \ldots, x_N \in U : U \subset \bigcup_{j=1}^{N} \underbrace{B_\varepsilon(x_j)}_{\{x_j\}} = \{x_1, \ldots, xN\}.$$

$\implies$ Kompakte Mengen sind hier notwendigerweise endlich.
Hier: U kompakt $\iff$ U endlich.

Definition 2.2.4 Relative & Präkompaktheit

Sei (X, d) metrischer Raum. Wir nennen $U \subset X$

(i) **relativ kompakt**, falls $\bar{U}$ kompakt. Hier ist

$$\bar{U} := \bigcap \{V : V \text{ abg. } \& U \subset V\}$$

der Abschluss von U.

(ii) **präkompakt** (oder **totalbeschränkt**)
Für jedes $\varepsilon > 0$ existieren endlich viele $x_1, \dots, x_N \in U$ so, dass

$$U \subset \bigcup_{j=1}^{N} B_\varepsilon(x_j).$$

- Kompaktheit $\implies$ Präkompaktheit.
  U kompakt, $\varepsilon > 0 \implies U \subset \bigcup_{x \in U} B_\varepsilon(x)$, also

$$\exists x_1, \dots, x_N \in U : U \subset \bigcup_{j=1}^{N} B_\varepsilon(x_j) \implies U \text{ präkompakt.}$$

$\implies$ $\boxed{\text{Frage:}}$ Worin besteht der Unterschied zwischen Präkompaktheit und Kompaktheit?

Theorem 2.2.5

Sei (X, d) vollständiger metrischer Raum & $U \subset X$. Dann sind äquivalent:

(i) U kompakt.

*(ii) U ist **folgenkompakt**: Ist $(x_j) \subset U$ eine Folge, so besitzt (x_j) eine Teilfolge (x_{j_k}), die bezüglich d gegen ein $x \in U$ konvergiert.*

(iii) U ist präkompakt und abgeschlossen.

Proof Theorem 2.2.5

(i) $\implies$ (ii): Angenommen, U kompakt, aber nicht folgenkompakt.
Also $\exists (x_j) \subset U$: keine Teilfolge konvergiert gegen in U.
Damit $|\{x_j : j \in \mathbb{N}\}| = +\infty$ Wenn endlich, dann existiert mind. ein $x \in \{x_j : j \in \mathbb{N}\}$, welches unendlich oft angenommen wird, dann gäbe es aber eine Teilfolge, die diesen Wert unendlich oft annähme.
Weiter: $\forall x \in U : \exists \varepsilon > 0$: es gibt nur endlich viele x_j's in $B_\varepsilon(x)$.
Damit ist $(B_\varepsilon(x))_{x \in U}$ offene Überdeckung von $U \overset{U \text{komp.}}{\implies} \exists \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N \in U$.

$$\underbrace{U}_{\text{alle } x_j\text{'s}} \subset \bigcup_{j=1}^{N} \underbrace{B_\varepsilon(\tilde{x}_j)}_{\text{endlich viele } x_j\text{'s}} .$$

Aber $(x_j) \subset U$, Also liegen unendlich viele x_j's in einem dieser Bälle - Widerspruch.

(ii) $\implies$ (iii): U abgeschlossen: U abgeschlossen $\iff (x_j) \subset U$ mit $x_j \to x \in X$, so $x \in U$.
Sei also $(x_j) \subset U$ mit $x_j \to x \in X$. zu zeigen $x \in U$.
Folgenkompaktheit aus (ii) $\implies \exists (x_{j_k}) \subset (x_j) : \exists y \in U : x_{j_k} \to y$. Aber auch $x_{j_k} \to x, k \to \infty$. Aber (X, d) Hausdorff, also sind Grenzwerte eindeutig, also $\boxed{x = y.}$ Also $x \in U$; U ist abgeschlossen.
Zur **Präkompaktheit**: Angenommen, U sei folgenkompakt, aber nicht präkompakt.
D.h. U lässt sich nicht durch endlich viele in U zentrierte offene ε-Bälle überdecken.
Sei $\varepsilon > 0$ so, dass diese Eigenschaft gibt. Für $x_1 \in U$ beliebig betrachte $B_\varepsilon(x_1)$. Dann $\exists x_2 \in U \setminus B_\varepsilon(x_1)$. Dann $\exists x_3 \in U \setminus (B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2))$. Iteriere dies - da U nicht präkompakt, bricht dies nie ab da U nicht präkompakt.
Dann ist $(x_j) \subset U$ eine Folge mit $j \neq l \implies d(x_j, x_l) \geq \varepsilon$. Damit ist **keine** Teilfolge

von (x_j) Cauchy $\implies$ keine **Teilfolge** kann konvergent sein $\implies$ (x_j) hat konvergente Teilfolgen $\perp$ - Widerspruch

(iii) $\implies$ **(i):**

—

Angenommen U nicht kompakt. Damit $\exists (U_i)_{i\in I}$ offene Überdeckung von U, die keine endliche Teilüberdeckung zulässt.
Wir verwenden die Präkompaktheit wie folgt: Sei $\varepsilon = 1$. Dann

$$\exists B^1 := B_1(\tilde{x}_1), \dots, B^N = B_N(\tilde{x}_N) : U \subset \bigcup_{j=1}^{N} B^j.$$

Damit existiert Ball (Œ) B^1 so, dass $U \cap B^1$ nicht durch endlich viele der U_i's überdeckt werden kann. Nun Präkompaktheit mit $\varepsilon\frac{1}{2}$. Dann gibt es einen $\varepsilon = \frac{1}{2}$-Ball $B^{(2)}$ so, dass $U \cap B^1 \cap B^2 \neq \emptyset$ & $U \cap B^{(1)} \cap B^{(2)}$ nicht durch endlich viele U_i's überdeckt werden kann. — Angenommen U nicht kompakt. Dann $\exists$ offenene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von U: es gibt keine endliche Teilüberdeckung. Für $\varepsilon = 1$ überdecke U via Präkompaktheit durch 1-Bälle $B^{(1)}, \dots, B^{(N)}$. Sei Œ $B^1 := B^{(1)}$ der ein Ball so, dass $B^1 \cap U$ nicht durch endlich viele U_i's überdeckt wird. Schreibe $B^1 := B_1(x_1)$. Überdecke nun mit Präkompaktheit U mit endlich vielen Bällen $\tilde{B}^{(1)}, \dots, \tilde{B}^{(M)}$. Unter denjenigen Bällen, die nichtleeren Schnitt mit $U \cap B^1$ haben, gibt es einen Ball B^2, so, dass $U \cap B^2$ nicht endlich viele U_i's überdeckt werden kann. Schreibe $B^2 = B_{\frac{1}{2}}(x_2)$. Setze dies induktiv fort. Erhalte $B^j := B_{2^{-j+1}}(x_j)$ so, dass $d(x_j, x_{j+1}) \le 2^{-j+2}$ $\forall j \in \mathbb{N}$, und kein $U \cap B^j$ kann durch endliche viele U_i's überdeckt werden. Damit $\forall j, l \in \mathbb{N}$, $j > l$.

$$d(x_l, x_j) \le \sum_{i=l}^{j-1} d(x_i, x_{i+1}) \le \sum_{i=l}^{j-1} 2^{-i+2} \overset{j,l\to\infty}{\longrightarrow} 0. \text{ (geom. Reihe)}$$

$\implies$ (x_j) Cauchy, (X, d) Vollständiger metrischer Raum $\implies$ $\exists x \in X : x_j \to x$. Aber nach (iii) U abgeschlossen, also $x \in U$. Damit $\exists i_0 \in I : x \in U_{i_0}$: U_{i_0} offen $\implies$ $\exists r > 0 : B_r(x) \subset U_{i_0}$. Da $x_j \to x$, $\exists j_0 \in \mathbb{N} : \forall j \ge j_0 : B_{2^{-j+1}}(x_j) \subset B_1(x) \subset U_{i_0}$. Damit kann ab $j = j_0$ jeder Ball $B_{2^{-j+1}}(x_j)$ durch **endlich viele** U_i's überdeckt werden - Widerspruch.

Example

$$l^2(\mathbb{N}) := \left\{ (x_j) : \|(x_j)\|_{l^2(\mathbb{N})} := \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}$$

$$\$:= \left\{ (x_j) \in l^2(\mathbb{N}) : \|(x_j)\|_{l^2(\mathbb{N})} = 1 \right\}.$$

Für $i \in \mathbb{N} : e_i := (\delta_{ij})_{j\in\mathbb{N}}$. Dann $\forall i \in \mathbb{N} : e_i \in \$$.
Angenommen, (e_i) hätte konvergente (bzgl. der durch $\|\cdot\|_{l^2(\mathbb{N})}$ induzierte Metrik) Teilfolge. Das im Widerspruch zu $\forall i \neq l : \|e_i - e_l\|_{l^2(\mathbb{N})} = \sqrt{2}$ - also kann keine Teilfolge Cauchy, und schon gar nicht konvergent sein.

$$\|e_i - e_l\|_{l^2(\mathbb{N})} = \left(|0|^2 + \dots + \underbrace{|1|^2}_{i\text{-ter Eintrag}} + |0|^2 + \dots + |0|^2 + \underbrace{|1|^2}_{l\text{-ter Eintrag}} + |0|^2 + \dots \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

Diese Pathologien gibt es im endlichdimensionalen nicht! (dass beschränkte Folgen keine konvergente Teilfolgen haben **müssen**)

2.3 Spezielle Rolle von $\mathbb{R}^n$

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ (wobei $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_2 := \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$) ist ein **Banachraum**: $\mathbb{R}^n$ ist mit der durch $\|\cdot\|_2$ induzierten Metrik vollständig.

Was ist gelb und gekrümmt? – der Bananachraum

Theorem 2.3.1

Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist bezüglich der durch $\|\cdot\|_2$ induzierten Metrik genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. [Heine - Borel]
(Hierbei bedeutet U beschränkt $\iff \exists R > 0 : U \subset B_R(0)$)

Proof Theorem 2.3.1

“ $\Longrightarrow$ ”: Ist U kompakt, so abgeschlossen. Weiter ist hier die Kompaktheit zur Folgenkompaktheit äquivalent. Angenommen, U nicht beschränkt $\Longrightarrow \forall j \in \mathbb{N} : \exists x_j \in U : \|x_j\|_2 \geq j$. Dann besitzt (x_j) keine konvergente Teilfolge. Also ist U doch nicht beschränkt

“ $\Longleftarrow$ ”: Sei $(x_j) \subset U$ eine Folge, zu zeigen (x_j) hat konvergente Teilfolgen. Schreibe $x_j = \left(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)}\right)$. Da U beschränkt, $\exists C > 0 : \forall j \in \mathbb{N} : \forall i \in \{1, \ldots, n\} : \left|x_j^{(i)}\right| \leq \|x_j\|_2 \leq C$.

Ana I: Jede beschränkte Folge $(a_j) \subset \mathbb{R}$ hat konvergente Teilfolge.

$\Longrightarrow \left(x_j^{(1)}\right) \subset \mathbb{R}$ hat konvergente Teilfolge $\left(x_{j_1,(l)}^{(1)}\right)_{l \in \mathbb{N}}$.
$\Longrightarrow \left(x_{j_1(l)}^{(2)}\right) \subset \mathbb{R}$ hat konvergente Teilfolge $\left(x_{j_2,(l)}^{(2)}\right)_{l \in \mathbb{N}}$.
$\vdots$
$\Longrightarrow \left(x_{j_{n-1}(l)}^{(n)}\right) \subset \mathbb{R}$ hat konvergente Teilfolge $\left(x_{j_n,(l)}^{(n)}\right)_{l \in \mathbb{N}}$.
$\Longrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\} : \left(x_{j_n(l)}^{(i)}\right)_{l \in \mathbb{N}}$ konvergent
$\Longrightarrow \left(x_{j_n(l)}\right)_{l \in \mathbb{N}}$ konvergent bezüglich $\|\cdot\|_2$ in $\mathbb{R}^n$. Aber U ist abgeschlossen, also ist der Limes von $\left(x_{j_n(l)}\right)_{l \in \mathbb{N}}$. Also U folgenkompakt, also komapkt. ■

Definition 2.3.2

Zwei Normen $\|\cdot\|, |||\cdot|||$ auf einem Vektorraum X heißen **äquivalent**, falls $\exists c \geq 1 : \forall x \in X : \frac{1}{c}|||x||| \leq \|x\| \leq c|||x|||$.

- (x_j) Konvergenz bezüglich $\|\cdot\| \iff (x_j)$ konvergiert bezüglich $|||\cdot|||$

Theorem 2.3.3

Auf $\mathbb{R}^n$ sind alle Normen ***äquivalent****.*

Proof Theorem 2.3.3

Normenäquivalenz ist transitiv $\implies$ zu zeigen bel. Norm $\|\cdot\|$ zu $\|\cdot\|_2$ äquivalent. Für $x \in \mathbb{R}^n$: $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, hierbei $e_i = (\delta_{ij})_{j\in\{1,\dots,n\}}$. Da $\|\cdot\|$ Norm,

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \underbrace{\|e_i\|}_{\leq \max_{i\in\{1,\dots,n\}}\|e_i\| \leq (\max_{i=1,\dots,n}\|e_i\|) \underbrace{\sum_{i=1}^n |x_i|}_{n\cdot\|x\|_2}} = C\,\|x\|_2\,.$$

Hierbei $C = n \max_{i=1,\dots,n} \|e_i\|$.
Für andere Richtung:

$$\|x\| = \underbrace{\left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\|}_{\geq \tilde{c}} \|x\|_2 \geq \tilde{c}\,\|x\|_2\,.$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$: $\frac{x}{\|x\|_2} \in \$^{n-1} := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\|_2 = 1\}$. $\$^{n-1}$ kompakt, $\|\cdot\|$. $\$^{n-1} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig und $\|\cdot\|\,(\$^{n-1})$ kompakt, also $\tilde{c} := \min_{z\in\$^{n-1}} \|z\|$. Da $\|\cdot\|$ Norm, $\tilde{c} > 0$. Damit $\tilde{c}\,\|x\|_2 \leq \|x\|$. ∎

- Auf $\mathbb{R}^n$ sind jeweils zwei Normen **äquivalent**.
  $\|\cdot\|, |||\cdot||| : \exists c > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{c}\|x\| \leq |||x||| \leq c\,\|x\|$.
  Wichtig, weil: Bei Äquivalenz: $\exists \delta > 0 : B_1^{\|\cdot\|}(0) \leq B_\delta^{|||\cdot|||}(0)$ **also:** Folgen konvergieren bezüglich $\|\cdot\| \iff$ Folgen konvergieren bezüglich $|||\cdot|||$. Œ $|||\cdot||| = \|\cdot\|_2$. Schreibe $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i e_i\| \overset{\text{Hom.}}{=} \sum_{i=1}^n \underbrace{|x_i|}_{\leq \|x\|_2} \|e_i\| \leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|\right)}_{=:C} \|x\|_2$$

$$|x_i| = \left(|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2$$

- $\|x\| \geq \tilde{c}\,\|x\|_2$ $\boxed{\left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\| \geq \tilde{c}}$.
  $\frac{x}{\|x\|_2} \in \$^{n-1} = \underbrace{\{z \in \mathbb{R}^n : \|z\|_2 = 1\}}_{\text{kompakt, da abg. \& beschränkt}}$

- $\|\cdot\|$ bezüglich $\|\cdot\|_2$ stetig.

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq C\,\|x - y\|_2\,,$$

  also ist $\|\cdot\|$ bezüglich $\|\cdot\|_2$ (Lipschitz) stetig. Also nimmt $\|\cdot\|$ auf $\$^{n-1}$ (stetige Funktionen auf Kompakta) Minimum an:

$$m := \min_{\$^{n-1}} \|\cdot\| > 0.$$

  Nun setze $\tilde{c} := m$. ∎

Note

Die Äquivalenz aller Normen gilt nur in endlich dimensionalen Räumen.
Gesehen: $\left(C([0,2]), \|\cdot\|_{\infty;[0,2]}\right)$ ist vollständig/Banach.
$(C([0,2]), \|\cdot\|_1)$ ist nicht vollständig/Banach.
$\|f\|_1 \coloneqq \int_0^2 |f(x)| \, \mathrm{d}x$. Angenommen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_{\infty;[0,2]}$ äquivalent. Wir wissen: $\exists (f_j) : (f_j)$ $\|\cdot\|_1$-Cauchy, nicht bezüglich $\|\cdot\|_1$ konvergent.
$\overset{\text{Äq. d. Normen}}{\Longrightarrow} (f_j)$ $\|\cdot\|_{\infty;[0,2]}$-Cauchy $\overset{\text{Banach}}{\Longrightarrow} (f_j)$ konvergiert bezüglich $\|\cdot\|_{\infty;[0,2]}$
$\overset{\text{Alle Normen äq.}}{\Longrightarrow} (f_j)$ konvergiert bezüglich $\|\cdot\|_1$, und das ist ein **Widerspruch**. ■

3 Kurven

Definition 3.1

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine (steige/stetig diffbare) **Kurve** ist eine (%) Abbildung $f : (f_1, \dots, f_n) : I \to \mathbb{R}^n$. Hierbei bedeutet stetig/stetig differenzierbar, dass es die einzelnen Komponentenfunktionen f_i sind. Wir nennen $\mathrm{Sp}(f) := \{f(t) : t \in I\}$ die **Spur der Kurve**.

Example 3.2

$f : [0, 2\pi] \ni t \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^2}$

$$g : [0, 6\pi] \ni t \mapsto \begin{cases} f, & [0, 2\pi] \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & [2\pi, 4\pi] \\ f, & [4\pi, 6\pi] \end{cases}$$

$$h : [0, 2\pi] \ni t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(-t) \\ \sin(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$$

Sieht gleich aus, aber läuft in verschiedene Richtungen, und g macht wonky things

Example 3.3

Für $v \in \mathbb{R}^n$ (Richtungsvektor) und $a \in \mathbb{R}^n$ (Aufhängepunkt) sei

$$f : \mathbb{R} \ni t \mapsto a + tv \in \mathbb{R}^n.$$

Spur von f entspricht Gerade. $[0, 1] \to$ Spur entspricht Strecke

Example 3.4 Helicen

$$f : \mathbb{R} \ni t \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \\ ct \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Definition 3.5

Für eine differenzierbare Kurve $f : I \to \mathbb{R}^n$ mit $f = (f_1, \dots, f_n)$ heißt für $t \in I$

$$f'(t) = \big(f_1', \dots, f_n'(t)\big)$$

Tangentialvektor an f **in** t. Ist $f'(t) \neq 0$, so heißt $\frac{f'(t)}{\|f'(t)\|_2}$ der **Einheitstangentialvektor.**

Example 3.6

Kurven sind im Allgemeinen **nicht** injektiv. Wir sagen, $x \in \mathbb{R}^n$ ist **Doppelpunkt der Kurve**, falls es $t_1, t_2 \in I$ gibt mit $t_1 \neq t_2$ und $x = f(t_1) = f(t_2)$.
Z.B. $f(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$ $t \in \mathbb{R}$

Definition 3.7 Rektifizierbare Kurven (Kurven endlicher Länge)

Eine Kurve $f : \underbrace{[a,b]}_{\text{kompakt}} \to \mathbb{R}$ heißt **rektifizierbar** mit **Länge** $L \geq 0$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : a = t_0 < \cdots < t_k = b$$

und

$$\max_{i=1,\ldots,k} |t_i - t_{i-1}| < \delta \implies |p_f(t_0, \ldots, t_k) - L| < \varepsilon > 0.$$

Hierbei:

$$p_f(t_0, \ldots, t_k) \coloneqq \sum_{i=1}^{k} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|_2$$

(Länge des Polygonzugs)

Theorem 3.8 Stetig differenzierbare Kurven und Rektifizierbarkeit

Jede stetig differenzierbare Kurve $f : \underbrace{[a,b]}_{\textit{kompakt}} \to \mathbb{R}^n$ *ist* ***rektifizierbar*** *mit*

$$L_f = \int_a^b \left\|f'(t)\right\|_2 \, dt.$$

- $f' = (f_1', \ldots, f_n')$ $\|f'(t)\|_2 = \sqrt{|f_1'(t)|^2 + \cdots + |f_n'(t)|^2}$.

Proof Theorem 3.8

Hilfsaussage (H1): Für jedes $\varepsilon > 0 : \exists \delta > 0$, sodass

$$\forall s, t \in [a,b], 0 < |s-t| < \delta \implies \left\|\frac{f(s) - f(t)}{s-t} - f'(t)\right\|_2 < \varepsilon$$

Bew. (H1): Durch komponentenweise Betrachtung genügt der eindimensionale Fall. Auf $[a,b]$ ist dann f' gleichmäßig stetig. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, sodass $|\xi - t| < \delta \implies |f'(\xi) - f'(t)| < \varepsilon$ $\forall \xi, t \in [a,b]$ mit $|\xi - t| < \delta$ Seien $s, t \in [a,b]$ mit $|s-t| < \delta$, dann ex. nach MWS ein

$$\xi \in [\min\{s,t\}, \max\{s,t\}]$$

mit

$$f'(\xi) = \frac{f(s) - f(t)}{s-t}$$

Insgesamt wegen $|\xi - t| < \delta$ folgt

$$\left\|\frac{f(s) - f(t)}{s-t} - f'(t)\right\|_2 < \varepsilon$$

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $\varepsilon > 0$. Nach MWS d. Int. gibt es ein $\delta' > 0$, sodass für jede Partition

$$a = t_0 < \cdots < t_k = b \quad \text{gilt}$$

$$\max_{i=0,\dots,k-1} |t_{i+1} - t_i| \implies \left| \int_a^b \left\| f'(t) \right\|_2 \, \mathrm{d}t - \sum_{i=0}^{k-1} \left\| f'(t_i) \right\|_2 (t_{i+1} - t_i) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

MWS: $\exists \xi \in [t_{i+1}, t_i] : \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| f'(t) \right\| \, \mathrm{d}t = \| f(\xi) \|_2 (t_{i+1} - t_i)$ Wähle $\delta > 0$ wie in H1 für $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ statt ε. Setze $\tilde{\delta} := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Dann gilt

$$\max_i |t_{i+1} - t_i| < \tilde{\delta} \implies \left\| f(t_{i+1}) - f(t_i) - f'(t_i)(t_{i+1} - t_i) \right\|_2 < \frac{\varepsilon(t_{i+1} - t_i)}{2(b-a)}$$

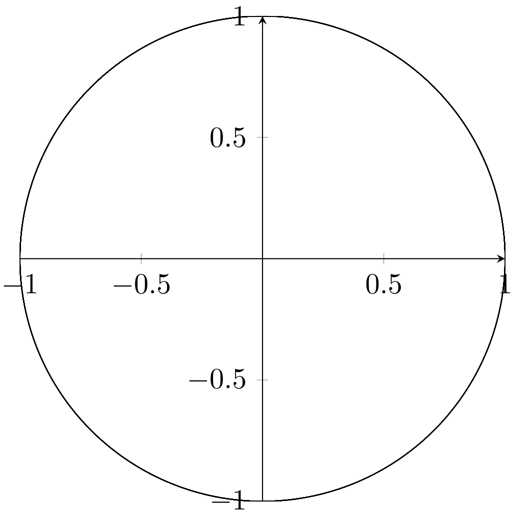
Mit umgekehrter $\triangle$-Ungleichung

$$\max_i |t_{i+1} - t_i| < \tilde{\delta} \implies \left| \| f(t_{i+1}) - f(t_i) \|_2 - \left\| f'(t_i)(t_{i+1} - t_i) \right\|_2 \right| < \frac{\varepsilon(t_{i+1} - t_i)}{2(b-a)} \qquad \blacksquare$$

Example 3.9

Sei $f : [0, 2\pi] \ni t \to (\cos(t), \sin(t)) \in \mathbb{R}^2$. dann $f'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$ und damit

$$L_f = \int_0^{2\pi} \left\| f'(t) \right\|_2 \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1 \, \mathrm{d}t = 2\pi$$



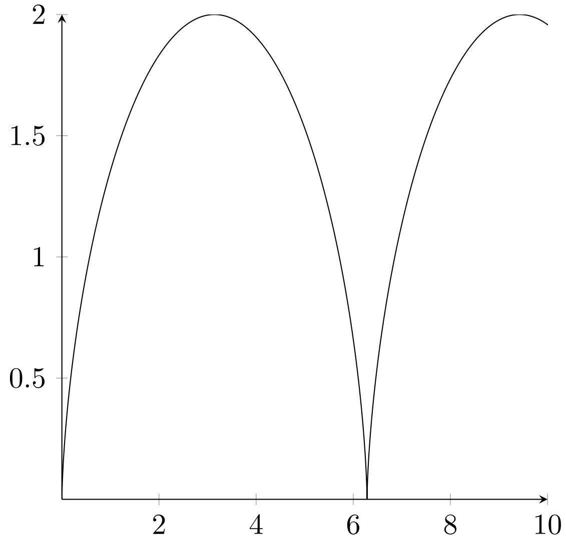
Example 3.10

$$f : [0, 2\pi] \ni t \mapsto (t - \sin(t), 1 - \cos(t)) \in \mathbb{R}^2, f'(t) = (1 - \cos(t), \sin(t))$$

Damit

$$\left\| f'(t) \right\|^2 = \left((1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t) \right) = 1 - 2\cos(t) = 4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$L_f = \int_0^{2\pi} \left\| f'(t) \right\| \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 2\sin\left(\frac{t}{2}\right) \, \mathrm{d}t = 8$$


2
1.5
1
0.5
2
4
6
8
10

4 Mehrdimensionale Differenzierbarkeit

Für

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $f'(x_0) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Umformuliert: f ist genau dann in $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar, wenn es eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so, dass

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)|}{|h|} = 0$$

mit $L(h) = f'(x_0) \cdot h$, h ein Vektor

Definition 4.1 Differenzierbarkeit

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $x_0 \in \Omega$. Wir nennen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ **differenzierbar in** x_0, falls eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existiert mit

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)|}{|h|} = 0.$$

(h Vektor)
Wir nennen $Df(x_0) := L$ die **totale Ableitung** von f in x_0
Umformuliert: Mit $R(x_0, h) := |f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)|$, ist die Differenzierbarkeit von f in x_0 äquivalent zu

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{R(x_0, h)}{|h|} = 0.$$

Daraus folgt die Eindeutigkeit der totalen Ableitung. Ist $\tilde{L}$ eine weitere, so folgt für jeden Einheitsvektor

$$e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-te Stelle}}, 0, \dots, 0)$$

$$(L - \tilde{L})(e_i) = \lim_{t \searrow 0} \frac{(L - \tilde{L})(te_i)}{|te_i|} = 0 \implies L = \tilde{L}$$

Ist $h = (h_1, \dots, h_n)^T \in \mathbb{R}^n$, so schreibe

$$h = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i$$

Damit folgt

$$Df(x_0)(a) = L(h) = \sum_{i=1}^{n} L(h_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} h_i L(e_i)$$

Deswegen definieren wir

$$\nabla f(x_0) := (L(e_1), \dots, L(e_n))$$

Damit gilt der Zusammenhang $Df(x_0)(h) = \nabla f(x_0) \cdot h$

Example 4.2

Sei $f(x) = Ax + b$ mit $A \in \mathbb{R}^{1\times n}$ und $b \in \mathbb{R}$. Dann ist $L(h) := Ah$ und $\nabla f(x_0) = A$ f.a. $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Example

Sei $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix (d.h. $a_{ij} = a_{ji}$). Wir betrachten $f(x) := x^t(Ax)\,(= \langle x, Ax\rangle)$. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gilt $f(x_0+h)-f(x_0) = 2x_0^tAh+h^tAh$. Definiere $L(h) := 2x_0^tAh$. Dann ist L eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ und für $R(h) := h^tAh$ gilt, dass $|R(h)| \leq c\,|h|^2$. Also $\nabla f(x_0) = 2x_0^tA$

Anschauliche Interpretation

$$\mathrm{Gr}(f) := \{(x, f(x)) : x \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \text{(Graph von } f\text{)}.$$

Ist f in x_0 differenzierbar, so gibt uns

$$T_{f_{x_0}} := f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0)$$

eine affin-lineare Approximation von f in x_0 .
Der Graph von $T_{f_{x_0}}$ also $\mathrm{Gr}(T(f_{x_0}) := \left\{(x, x_{n+1}) : x_{n+1} = T_{f_{x_0}}(x)\right\}$ heißt **Tangentialhyperebene**

Theorem 4.4

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0. Dann ist f stetig in x_0.

Proof Theorem 4.4

Folgt direkt aus der Differenzierbarkeit, denn

$$|f(x_0) - f(x_0)| \leq |\nabla f(x_0) \cdot h + R(h)| \overset{|h|\to 0}{\longrightarrow} 0$$

4.1 Partielle Ableitung

Definition Niveaumenge

Sei $f : U \to \mathbb{R}$ ($U \subseteq \mathbb{R}^n$), dann definiere die Niveaumengen für $c \in \mathbb{R}$:

$$N_f(c) := \{x \in U : f(x) = c\} \subset \mathbb{R}^n$$

Definition 4.5 Partielle Ableitungen

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$. Dann heißt f im Punkt $x_0 \in U$ **partiell differenzierbar in der i-ten Koordinate**, falls der Limes

$$D_if(x) := \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(x + e_ih) - f(x)}{h}$$

existiert und endlich ist mit $e_i := (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-te}}, 0, \ldots, 0)$. Sei $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$. Für $i = 1, \ldots, n$ betrachte die Funktion

$$\xi \mapsto f_i(\xi) := f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Dann folgt direkt aus Definition 4.5, dass

$$D_i f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f_i(x_i+h) - f_i(x_i)}{h} = f_i'(x_i).$$

Definition 4.6 (stetige) partielle Differenzierbarkeit

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann heißt eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ **partiell differenzierbar**, falls $D_i f(x)$ f.a. $x \in U$ und alle $i = 1, \dots, n$ existiert. f heißt stetig partiell differenzierbar, falls zusätzlich alle partiellen Ableitungen $D_i f_i U \to \mathbb{R}$ stetig sind.
Schreibweise: statt $D_i f$ schreibt man auch

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Entsprechend

$$D_i f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}.$$

Example 4.7

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto F(x,y) := \exp(x^2+y^2)$$

Für $f(x) := \exp(x^2+c^2)$ gilt $f'(x) = 2x\exp(x^2+c^2)$. D.h.

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\exp(x^2+y^2) = 2x\exp(x^2+y^2)$$

und analog

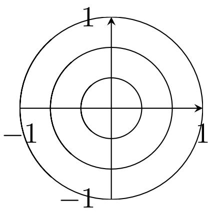
$$\frac{\partial}{\partial y} F(x,y) = 2y\exp(x^2+y^2).$$

Example 4.8

Betrachte $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $r(x) := \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$. Die Niveaumengen

$$N_f(c) = \{x \in \mathbb{R}^n : r(x) = c\}$$

sind Sphären mit Radius $c > 0$.



Beh.: Die Funktion r ist in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ partiell differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial r}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{r_i}$$

für $x \neq 0$.

Für $x \neq 0$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|x| = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

"Beweis" der Behauptung:
Betrachte $\xi \mapsto \sqrt{x_1^2 + \cdots + \xi^2 + \cdots + x_n^2}$, das ist differenzierbar! Es gilt

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(x_1^2 + \cdots + x_i^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} = 2x_i \cdot \frac{1}{2}\left(x_1^2 + \cdots + x_i^2 + \cdots + x_n^2\right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{x_i}{r(x)}$$

Example 4.9

Sei $n \geq 2$ betrachte $F(x) : \begin{cases} \frac{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}{r(x)^n} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ In $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist F partiell differenzierbar (nach vorherigem Beispiel). Für die partielle Ableitung nach x_1 gilt

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x_1} = \frac{x_2 \cdots x_n}{r_n} - n\frac{x_1^2 x_2 \cdots x_n}{r^{n+2}}.$$

Analog für partielle Ableitung in Richtung x_i F ist auch in $x = 0$ partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(0) = \lim_{h \to 0} \frac{F(h \cdot e_i) - F(0)}{h} = 0.$$

$\implies$ F ist auf ganz $\mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar.
Aber: F ist in $x_0 = 0$ nicht stetig, denn betrachte $a_k = \left(\frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{k}\right), k \geq 1$. Es gilt $r(a_k) = \frac{\sqrt{n}}{k}$, also $F(a_k) = \frac{\left(\frac{1}{k}\right)^n}{\left(\frac{\sqrt{n}}{k}\right)^n} = n^{-\frac{n}{2}} \neq 0 = F(0)$.
Also: Partiell differenzierbar $\not\Rightarrow$ stetig.

Beobachtung: Komponenten von $\nabla f(x)$ sehen aus wie

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{|f(x + he_i) - f(x)|}{|h|}.$$

D.h. $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$ und (totale) Differenzierbarkeit $\implies$ partielle Differenzierbarkeit.

Example 4.10

$\nabla r(x) = \frac{x}{r}$ und $\nabla f(r) = f'(r)\frac{x}{r}$, zum Beispiel $\nabla \frac{1}{r} = -\frac{x}{r^3}$ (Manche schreiben "grad" statt "∇")

Example 4.11

Seien $f, g : U \to \mathbb{R}$ zwei partiell differenzierbare Funktionen. Dann

$$\nabla(fg) = g \cdot \nabla f + f \cdot \nabla g.$$

Definition 4.12 Divergenz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $v = v_1, \ldots, v_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein partiell differenzierbares Vektorfeld (VF = Abbildung nach $\mathbb{R}^n$, partiell differenzierbar = jede Komponente ist partiell differenzierbar). Dann definiere Divergenz von V durch

$$\operatorname{div} v := \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} v_k$$

Bemerkung: Formal kann man schreiben

$$\operatorname{div} v = \langle \nabla, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} v_i.$$

Rechenregel:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f v_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i + f \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (f : U \to \mathbb{R}^n).$$

$\Longrightarrow \operatorname{div}(fv) = \langle \nabla f, v \rangle + f \cdot \operatorname{div} v$. (Formal $\langle \nabla, fv \rangle = \langle \nabla f, v \rangle + f \langle \nabla, v \rangle$.

Example

$F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n, F(x) := \frac{x}{r(x)}$.
Da

$$\operatorname{div} x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = n \text{ und}$$

$$\langle x, x \rangle = r^2(x).$$

Damit folgt

$$\operatorname{div} \frac{x}{r} = \left\langle \nabla \frac{1}{r}, x \right\rangle + \frac{1}{r} \operatorname{div} x = \left\langle -\frac{x}{r^3}, x \right\rangle + \frac{n}{r} = \frac{n-1}{r}$$

4.2 Höhere Ableitungen und Satz von Schwarz

Theorem 4.13 Schwarz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar in Ω. Dann gilt f. a. $1 \leq i, j \leq n$, dass

$$\frac{\partial}{x_i} \cdot \frac{\partial}{x_j} u = \frac{\partial}{x_j} \cdot \frac{\partial}{x_i} u.$$

$\mathbb{R}$ versus $\mathbb{R}^n$:
Im $\mathbb{R}$ gibt es zwei Möglichkeiten.
Im $\mathbb{R}^n$ gibt es unendlich viele Möglichkeiten.

Zwei (drei) Möglichkeiten, über Differenzierbarkeit zu sprechen:

- Zurückführen auf die 1-dim Situation.

$$x_j \mapsto f(\underbrace{x_1, \ldots, x_{j-1}}_{\text{friere ein}}, x_j, \underbrace{x_{j+1}, \ldots, x_n}_{\text{friere ein}})$$

"j-te partielle Funktion"

$$\partial_j f(x_0) := \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f_j(x_j+h)-f_j(x_j)}{h}$$

(h ist eine Zahl, also $h \in \mathbb{R}$)

- **Richtungsableitungen**: $\nu \in \$^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ (mit $|\cdot|$ Euklidische Norm $|x| := \|x\|_2$)

  $$\partial_\nu f(x_0) := \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(x_0+h\nu)-f(x_0)}{h}$$

  (h ist eine Zahl, also $h \in \mathbb{R}$) Hierbei interessiert nur, was f entlang $x_0 + \mathbb{R}\nu$ macht. Dies liefert **eine** Art der Ableitung:
  Richtungsableitung entlang ν. Partielle Ableitung entspricht Richtungsableitung bezüglich $\nu \in \{e_1, \ldots, e_n\}$. Jede Richtung ν lässt sich als $\nu = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ schreiben - können wir also Richtungsableitungen über partielle Ableitungen ausdrücken? $\to$ Ja, später.

- Linearisierbarkeit: In 1-dim Differenzierbarkeit entspricht lokale Approximierbarkeit durch affin-lineare Funktion entspricht Approximierung des Graphen durch Tangenten
  $\rightsquigarrow$ Differenzierbarkeit entspricht Approximierbarkeit (lokal) durch affin-lineare Funktionen (!) entspricht Approximierbarkeit des Graphen durch affine Hyperebenen.

Definition Hyperebenen

Hyperebene $(n-1)$-dim. Untervektorräume im $\mathbb{R}^n$.
Algebraische Charakterisierung:

$$\Phi \in (\mathbb{R}^n)^*. \quad \ker(\Phi).$$

Definition Affin-lineare Hyperebenen

$$x_0 + \ker(\Phi) = \{x_0 + y : \Phi(y) = 0\}$$

- $\Phi(x_1, x_2, x_3) := x_1$, $\ker(\Phi) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\}$
  $x_0 + \ker(\Phi)$, Ebene parallel zur x_2, x_3-Ebene
- $\mathbb{E} = \{(x_1, x_2, x_3) : 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1\} = x_0 + \ker(\Phi)$
- $f(x_1, x_2) = e^{-x_1^2 - x_2^2}, x \mapsto e^{-x^2}$

Ziel: Differenzierbarkeit $\implies$ partielle Differenzierbarkeit ($\impliedby$ falls partielle Ableitung stetig)

Theorem 4.15 Schwarz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei mal stetig partiell differenzierbar (d.h., die zweite partiellen Ableitungen $\partial_i \partial_j f$ existieren und sind stetig) in $x_0 \in \Omega$, so gilt:

$$\partial_i \partial_j f(x_0) = \partial_j \partial_i f(x_0)$$

MWS: $g : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $-\infty < a < b < \infty$, so $\exists \xi \in [a, b]$:

$$g'(\xi) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

Proof Theorem 4.15

Œ $n = 2$. $i = 1, j = 2$. (x_1, x_2) entspricht (x, y).
Ω offen $\implies \exists \delta > 0 : \{(x,y) : |x| < \delta, |y| < \delta\} \subset \Omega$, wobei Œ $x_0 = 0$

(1) Fixiere $y \in \mathbb{R}$ mit $|y| < \delta$. Definiere

$$F_y : (-\delta, \delta) \ni x \mapsto f(x,y) - f(x,0) \in \mathbb{R}$$

Mit **MWS**

$$\exists \xi \in \mathbb{R} : |\xi| \leq |x| : F_y'(\xi)x = F_y - F_y(0) \tag{$\heartsuit$}$$

$$F_y'(\xi) = (\partial_1 f)(\xi, y) - (\partial_1 f)(\xi, 0).$$

Wiederum MWS.

$$\exists \eta \in \mathbb{R} : |\eta| \leq |y| : (\partial_1 f)(\xi, y) - (\partial_1 f)(\xi, 0) = \partial_2 \partial_1 f(\xi, \eta) \cdot y \tag{$\heartsuit\heartsuit$}$$

Hiermit:

$$\begin{aligned}
&f(x,y) - f(x,0) - f(0,y) + f(0,0) \\
&= \underbrace{(f(x,y) - f(x,0))}_{=F_y(x)} - \underbrace{(f(0,y) - f(0,0)}_{=F_y(0)} \\
&\overset{\text{Def.}}{=} F_y(x) - F_y(0) \\
&\overset{(\heartsuit)}{=} F_y'(\xi) \cdot x \\
&\overset{(\heartsuit\heartsuit)}{=} \partial_2 \partial_1 f(\xi, \eta) x \cdot y
\end{aligned} \tag{$\dagger$}$$

(2) Fixiere nun x, betrachte $G_x(y) := f(x,y) - f(0,y)$. Analog wie für (1):

$$\exists \tilde{\eta} \in \mathbb{R} : |\tilde{\eta}| \leq |y| : G_x(y) - G_x(0) = G_x'(\tilde{\eta}) \cdot y.$$

Daneben mit MWS

$$\exists \tilde{\xi} \in \mathbb{R} : \left|\tilde{\xi}\right| \leq |x| : G_x'(\tilde{\eta}) = \partial_2 f(x, \tilde{\eta}) - \partial_2 f(0, \tilde{\eta}) = \partial_1 \partial_2 f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \cdot x$$

$\implies f(x,y) - f(x,0) - f(0,y) + f(0,0) = \partial_1 \partial_2 f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) xy$
$\overset{(\dagger)}{\implies} \partial_2 \partial_1 f(\xi, \eta) xy = \partial_1 \partial_2 f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) xy$
$\overset{xy \neq 0}{\implies} \partial_2 \partial_1 f(\xi, \eta) = \partial_1 \partial_2 f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ hier hängen aber $\xi, \tilde{\xi}$ von x und $\eta, \tilde{\eta}$ von y ab. Nach Konstruktion: $(x,y) \to (0,0) \implies (\xi, \eta), (\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \to 0$. Da f **zweimal stetig partiell differenzierbar:**

$$\partial_1 \partial_2 f(0,0) = \lim_{(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \to (0,0)} \partial_1 \partial_2 f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = \lim_{(\xi, \eta) \to (0,0)} \partial_2 \partial_1 f(\xi, \eta) = \partial_2 \partial_1 f(0,0). \qquad \blacksquare$$

Dies kann iteriert werden: $f : \Omega \to \mathbb{R}$ k-mal stetig partiell differenzierbar und $\pi : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, k\}$ Permutation (d.h. bijektiv), so gilt für alle $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} = \partial_{i_{\pi(1)}} \cdots \partial_{i_{\pi(k)}} f.$$

Satz von Schwarz: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei mal stetig partiell differenzierbar $\implies \forall i, j \in$

$\{1, \ldots, n\} : \partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f := \partial_i f.$$

- Damit: $Hf = \nabla^2 f := (\partial_{ij} f)_{i,j \in \{1,\ldots,n\}}$ (**Hessematrix**). Mit Schwarz ist dies eine **symmetrische Matrix** (Bei Fr. Kuhlmann besonders aufpassen).

$$A = A^T.$$

Dann gibt es eine Basis $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$: Darstellende Matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Dann z.B. v_1 entspricht $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, also

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\implies$ Abbildung verhält sich auf span $\{v_1\}$ wie Streckung.

Example 4.16 Rotation und Gradient

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \vdots \\ \partial_n f \end{pmatrix}.$$

Falls $n = 3$ definiere **Rotation** ("curl") von $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$\operatorname{rot}(v) = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix}$$

Die Rotation annihiliert den Gradienten $\boxed{\operatorname{rot}(\nabla f) = 0}$ $\forall f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar (beachte: $\nabla f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$)

$$\operatorname{rot}(\nabla f) = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \\ \partial_3 f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 \partial_3 - \partial_3 \partial_2 f \\ \partial_3 \partial_1 - \partial_1 \partial_3 f \\ \partial_1 \partial_2 - \partial_2 \partial_1 f \end{pmatrix} \overset{\text{Schwarz}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lemma Poincaré-Lemma

Für später *Ist* $\operatorname{rot}(v) = 0$*, gibt es ein* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : v = \nabla f$*? (Ja, aber nur in* $\mathbb{R}^3$*, nicht in* Ω*)*

Example 4.17

Die **Divergenz** von $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}^n$ ist definiert als

$$\operatorname{div}(f) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f_i.$$

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Beh.: $\boxed{\operatorname{div}(\operatorname{rot}(g)) = 0}$ Mit **Schwarz:**

$$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} \begin{pmatrix} \partial_2 g_3 - \partial_3 g_2 \\ \partial_3 g_1 - \partial_1 g_3 \\ \partial_1 g_2 - \partial_2 g_1 \end{pmatrix} = \partial_1 (\partial_2 g_3 - \partial_3 g_2) + \partial_2 (\partial_3 g_1 - \partial_1 g_3) + \partial_3 (\partial_1 g_2 - \partial_2 g_1)$$

$$\overset{\text{Schwarz}}{=} 0$$

Damit: Divergenz annihiliert Rotation.

$$f \to \nabla f \to \operatorname{rot}(\nabla f) \equiv 0$$

$$g \to \operatorname{rot} g \to \operatorname{div}(\operatorname{rot} g) = 0$$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\nabla} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\text{rot}} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\text{div}} \mathbb{R}$$

"**Differentialkomplex**"

Example 4.18

Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ zweimal stetig partiell differenzierbar:

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \partial_i \partial_i f \left(=: \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 f \right)$$

"Laplace-Operator"
Das ist die Spur ($\hat{=}$ Summe über Diagonal Diagonalelemente) der Hessematrix. Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ zweimal stetig partiell differenzierbar mit $\boxed{\Delta f = 0}$, so heißt f **harmonisch**. (Erstes Beispiel einer partiellen Differentialgleichung)

- $f(x) = a \cdot x + b, a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}, \ \Delta f = 0.$
- $f(x) = \varphi(|x|)$, mit $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty), |x| := \|x\|_2$

Frage: Wie muss φ aussehen?

$$f(x) = \varphi(|x|).$$

Dann $\partial_i f(x) = \varphi'(|x|)\frac{x_i}{|x|}$

$$\partial_i \partial_i f(x) = \partial_i \left(\varphi'(|x|) \frac{x_i}{|x|} \right) = \varphi''(|x|) \frac{x_i^2}{|x|^2} + \varphi'(|x|) \frac{|x| - x_i \frac{x_i}{|x|}}{|x|^2} = \varphi''(|x|) + \varphi'(|x|) \frac{|x|^2 - x_i^2}{|x|^3},$$

also

$$0 \overset{!}{=} \Delta f \overset{\text{Def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \partial_i \partial_i f = \varphi''(|x|) + \varphi'(|x|) \frac{n}{|x|} - \varphi'(|x|) \frac{1}{|x|}.$$

Setze $\boxed{r := |x|}$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \; 0 = \varphi''(r) + \frac{\varphi'(r)}{r}(n-1) \\
&\Longrightarrow \; \frac{1-n}{r}\psi(r) = \psi'(r), \text{ wobei } \boxed{\psi := \varphi'} \\
&\overset{\text{Œ } \psi \neq 0}{\Longrightarrow} \frac{1-n}{r} = \boxed{\frac{\psi'(r)}{\psi(r)}} = (\log(\psi(r)))'. \\
&\Longrightarrow \; \int_1^r \frac{1-n}{s} \, \mathrm{d}s = \int_1^r (\log(\psi(s)))' \, \mathrm{d}s = \log(\psi(r)) + C \\
&\Longrightarrow \; (1-n)\log(r) = \log(\psi(r)) + C \overset{\text{Œ } C=0}{=} \log(r^{1-n}) = \log(\psi(r))
\end{aligned}$$

Also $\psi(r) = r^{1-n}$, aber $\psi(r) := \varphi'(r)$, also

$$\begin{aligned}
\varphi(r) &= \frac{1}{2-n} r^{2-n} \quad \text{für } n \geq 3 \\
\varphi(r) &= \log(r) \quad \text{für } n = 2.
\end{aligned}$$

Mit diesen φ's löst $f(x) := \varphi(|x|)$ die Laplacegleichung $\Delta f = 0$ Diese Funktion f heißt auch **Fundamentallösung des Laplaceoperators**

In 1d ($n = 1$):

$$\Delta f(x) \overset{\text{1-d}}{=} f''(x) \overset{!}{=} 0$$

Integriere

$$f'(x) - f'(0) = \int_0^x f''(s) \, \mathrm{d}s = 0$$

$\Longrightarrow$ lösen: $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$
Fordern wir weiter Radialsymmetrie im 1d so muss $a = 0$, also f konstant sein.

Nun zur Differenzierbarkeit von Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^n \supset \underbrace{\Omega}_{\text{offen}} \to \mathbb{R}^m$$

Definition 4.19

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ Abbildung. Wir nennen f in x_0 (total) **differenzierbar**, falls es einen Ball $B_r(x_0) \subset \Omega$ und eine Funktion $\varphi : B_r(0) \to \mathbb{R}^m$ gibt mit

(i) $\forall h \in B_r(0) : f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + \varphi(h)$, wobei $A \in \underbrace{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)}_{\text{lin Abb.} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{m \times n}}$ ist.

(ii)

$$\lim_{|h| \to 0, h \neq 0} \frac{\varphi(h)}{|h|} = 0.$$

Theorem 4.20

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ in $x_0 \in \Omega$ differenzierbar mit

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + o(|h|)$$

mit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$. Dann:

(i) f stetig in x_0

(ii) Alle Komponenten $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$ (wobei $f = f1, \ldots, f_n$) sind in x_0 ***partiell*** *differenzierbar mit $\partial_j f_i(x_0) = a_{ij}$, falls wir A mit der darstellenden Matrix bezüglich Einheitsvektoren identifizieren.*

Proof Satz 4.20

(i) Da A linear, $\|Ah\|_2 \leq C \|h\|_2 \to 0, \|h\|_2 \to 0$. Da $f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + o(\|h\|_2) \overset{\|h\|_2 \to 0}{\longrightarrow} f(x_0)$

(ii) Haben: $f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + \varphi(h)$

$$\underbrace{e_i^T f}_{f_i}(x_0 + h) = e_i^T f(x_0) + e_i^T Ah + e_i^T \varphi(h),$$

wende dies mit $h = te_j$, $|t|$ hinreichend klein:

$$\frac{1}{t} f_i(x_0 + te_j) - f_i(x_0) = e_i^T Ae_j + e_i^T \underbrace{\frac{\varphi(te_j)}{t}}_{\to 0} \to a_{ij}$$

Note

Wir schreiben auch Jf, Df, (oder ∇f) **"Jacobimatrix"**, "Gradient"

Zur hier implizit verwendeten "Beschränktheit" linearer Abbildungen.

Lemma 4.21

Seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume, $T : X \to Y$ linear. Dann sind äquivalent:

(i) T ist stetig in $x = 0$,

(ii) T ist stetig,

(iii) T ist Lipschitzstetig

*(iv) T ist **beschränkt**, d.h. hier: $\|T\| := \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} \|Tx\|_Y < \infty$*

Proof Lem. 4.21

"(iv) $\implies$ (iii)":

$$\left\|Tx - Tx'\right\|_Y \overset{\text{lim}}{=} \left\|T(x - x')\right\|_Y \overset{\text{Œ } x \neq x'}{=} \left\|x - x'\right\|_X \left\|T \frac{(x - x')}{\|x - x'\|_X}\right\|_Y \overset{\text{(iv)}}{\leq} \|T\| \left\|x - x'\right\|_X$$

"(iii) $\implies$ (ii)": %

"(ii) $\implies$ (i)": %

"(i) $\implies$ (iv)": Betrachte $\neg$ (iv) $\implies \neg$ (i).
Falls $\neg$ (iv), so existiert $(x_j) \subset X : \|Tx_j\|_Y > j \|x_j\|_X$ (für alle $j \in \mathbb{N}$). Definiere

$$y_j := \frac{x_j}{j \|x_j\|_X}.$$

Dann: $\|y_j\|_X = \frac{1}{j} \to 0, j \to \infty, T$ lin, also $T(0) = 0$, aber $\|Ty_j\| > 1 \ \forall j \in \mathbb{N}$. Widerspruch. ∎

Bis jetzt Differenzierbarkeit $\overset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ partiell Differenzierbarkeit, Differenzierbarkeit $\overset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ stetig, partiell differenzierbar $\not\Rightarrow$ stetig

Example 4.22

Betrachte

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- $f|_{\mathbb{R}\times\{0\}} = f|_{\{0\}\times\mathbb{R}} \equiv 0 \implies f$ partiell differenzierbar in $(0, 0)$.
- $(x_j, y_j) := \left(\frac{1}{j^2}, \frac{1}{j}\right)$, so $(x_j, y_j) \to (0, 0)$. Aber: $f(x_j, y_j) = \frac{\frac{1}{j^4}}{\frac{2}{j^4}} = \frac{1}{2} \neq 0 \nrightarrow$ nicht differenzierbar??

Theorem 4.23

*Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ eine in Ω partiell diffbare Funktion. Weiter sei $x_0 \in \Omega$ so, dass alle $\partial_j f, j \in \{1, \ldots, n\}$ in x_0 $\boxed{\textbf{stetig}}$ sind. Dann ist f in x_0 **differenzierbar**.*

$$f = (f_1, \ldots, f_n), \partial_j f = (\partial_j f_1, \ldots, \partial_j f_m)$$

Proof Thm. 4.23

Ω offen $\implies \exists \delta > 0 : B_\delta(x_0) \subset \Omega$. Sei nun $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ so, dass $|\xi| < \delta$. Definiere

$$z^{(k)} := x_0 + \sum_{i=1}^{k} \xi_i e_i, k = 0, \ldots, n.$$

- $z^{(k)}, z^{(k+1)}$ unterscheiden sich in $(k+1)$-te Koordinate.
- Damit ex. nach **Mittelwertsatz** für k ein $\theta_k \in [0,1] : f\left(z^{(k)}\right) - f\left(z^{(k-1)}\right) = \partial_k f(y^{(k)}) \cdot \xi_k$, $y^{(k)} = z^{(k-1)} + \theta_k \xi_k e_k$. Damit:

$$f(x_0 + \xi) - f(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \partial_k f\left(y^{(k)}\right) \cdot \xi_k.$$

Setze $a_k := \partial_k f(x_0)$ Dann:

$$f(x_0 + \xi) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k + \varphi(\xi),$$

wobei

$$\varphi(\xi) = \sum_{k=1}^{n} \left(\partial_k f\left(y^{(k)}\right) - a_k\right) \xi_k.$$

Definiere

$$A\xi := \sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k,$$

weiter

$$\frac{|\varphi(\xi)|}{|\xi|} \le \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left|\partial_k f\left(y^{(k)}\right) - a_k\right|}_{\overset{|\xi|\to 0}{\longrightarrow} 0} \cdot \frac{|\xi|}{|\xi|} \overset{|\xi|\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Also: f differenzierbar in x_0

Theorem 4.24 Kettenregel

*Seien $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : \Omega_1 \to \mathbb{R}^m, g : \Omega_2 \to \mathbb{R}^k$ Abbildungen mit $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$. Sei f in $x_0 \in \Omega$ und g in $f(x_0) \in \Omega_2$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f : \Omega_1 \to \mathbb{R}^k$ in x_0 **differenzierbar** mit*

$$D(\underbrace{g \circ f}_{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k})(x_0) = \underbrace{(Dg)(f(x_0))}_{\mathbb{R}^{k \times m}} \cdot \underbrace{Df(x_0)}_{\mathbb{R}^{m \times n}}$$

Proof Thm 4.24

f diffbar in x_0, also

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Df(x_0) \cdot h + \varphi_1(h) \tag{A}$$

für $|h|$ genügend klein mit

$$\lim_{|h|\searrow 0} \frac{|\varphi_1(h)|}{|h|} = 0.$$

Definiere

$$y_0 = f(x_0).$$

Da g diffbar in y_0:

$$g\left(y_0 + h'\right) = g(y_0) + Dg(y_0) \cdot h' + \varphi_2\left(h'\right),$$

für alle $|h'|$ genügend klein und

$$\underbrace{\lim_{|h'|\searrow 0} \frac{|\varphi_2(h')|}{|h'|}}_{\lim_{h' \in \mathbb{R}^m, |h'|\searrow 0} \frac{|\varphi_2(h')|}{|h'|}} = 0 \tag{B}$$

Für den Beweis kombiniere (A) und (B). Setze

$$Df(x_0) \coloneqq \mathcal{A}$$

$$Dg(y_0) \coloneqq \mathcal{B}$$

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x_0 + h) &= g(f(x_0 + h)) \\
&\overset{\text{(A)}}{=} g(f(x_0) + \mathcal{A} \cdot h + \varphi_1(h)) \\
&= g\left(f(x_0) + h'\right) \\
&= g(y_0) + \mathcal{B} \cdot h' + \varphi_2\left(h'\right) \\
&= (g \circ f)(x_0) + \mathcal{B}(\mathcal{A} \cdot h + \varphi_1(h)) + \varphi_2(\mathcal{A} \cdot h + \varphi_1(h)) \\
&= (g \circ f)(x_0) + \mathcal{B} \cdot \mathcal{A} \cdot h + \underbrace{(\mathcal{B} \cdot \varphi_1(h) + \varphi_2(\mathcal{A} \cdot h + \varphi_1(h)))}_{=:\varphi(h)}
\end{aligned} \tag{$*$}$$

zu zeigen

$$\lim_{|h|\searrow 0} \frac{|\varphi(h)|}{|h|} = 0.$$

- $$\frac{|\mathcal{B} \cdot \varphi_1(h)|}{|h|} \overset{\text{Lem. 4.22}}{\leq} \underbrace{\|\mathcal{B}\|}_{<\infty} \underbrace{\frac{|\varphi_1(h)|}{|h|}}_{\overset{|h|\searrow 0}{\longrightarrow} 0} \to 0, |h| \searrow 0.$$

Schreibe φ_2 als $\varphi(h') = |h'|\, \eta\left(|h'|\right), \eta : (0,1) \to \mathbb{R}^k$, $\lim_{t\searrow 0} \eta(t) = 0$. Andererseits mit selbem Argument für f: $\exists \tilde{\eta} : (0,1) \to \mathbb{R}^m$, $\lim_{t\searrow t} \tilde{\eta}(t) = 0$: $\varphi_1(h) = |h|\, \tilde{\eta}\left(|h|\right)$

- $$\begin{aligned}|\mathcal{A}\cdot h+\varphi_1(h)| &\leq |\mathcal{A}\cdot h|+|\varphi_1(h)|\\ &\leq \|\mathcal{A}\|\,|h|+|h|\,|\tilde{\eta}\,(|h|)|\\ &= (\|\mathcal{A}\|+|\tilde{\eta}\,(|h|)|)\,|h|\,.\end{aligned}$$

  Damit

  $$\begin{aligned}|\varphi_2\,(\mathcal{A}\cdot h+\varphi_1(h))| &= |\eta\,(\mathcal{A}\cdot h+\varphi_1(h))|\,|\mathcal{A}\cdot h+\varphi_1(h)|\\ &\leq |\eta\,(|\mathcal{A}\cdot h+\varphi(h)|)|\,(\|\mathcal{A}\|+|\tilde{\eta}(h)|)\,|h|\\ &\leq |\eta\,(\|\mathcal{A}\|\cdot|h|+|\varphi_1(h)|)|\cdot(\|\mathcal{A}\|+|\tilde{\eta}\,(|h|)|)\,|h|\\ &\leq |\eta\,(\|\mathcal{A}\|\cdot|h|+|\tilde{\eta}\,(|h|)|)|\cdot(\|\mathcal{A}\|+|\tilde{\eta}\,(|h|)|)\,|h|\end{aligned}$$

  $$\implies \frac{|\varphi_2\,(\mathcal{A}\cdot h+\varphi_1(h))|}{|h|} \leq |\eta\,((\|\mathcal{A}\|+|\tilde{\eta}\,(|h|)|)\,|h|)|\,(\|\mathcal{A}\|+|\tilde{\eta}(h)|)$$

Definition 4.23

nennen wir für $\nu \in \$^{n-1}$ falls existieren

$$\partial_\nu f(x_0) := \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\nu)-f(x_0)}{t}$$

die **Richtungsableitung** von f in x_0 in Richtung ν

Ziel:
Reduziere dies auf partielle Ableitungen (also die Richtungsableitungen der Standard Einheitsvektoren)

Theorem 4.24

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so gilt für $x_0 \in \Omega \& \nu \in \$^{n-1}$.

$$\partial_\nu f(x_0) = \langle Df(x_0), \nu\rangle$$

Hierbei ist für

$$a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n)$$

$$\langle a, b\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$$

Proof Thm. 4.24

Definiere für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein:

$$\varphi(t) := x_0 + t\nu, t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

(d.h. Œ $\varphi((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset \Omega$. Dann setze $g(t) := f(\varphi(t))$. Es ist

$$\begin{aligned} Dg(t) &= D((f \circ \varphi)(t)) \\ &= (Df)(\varphi(t)) \cdot D\varphi(t) \\ &= (Df)(x_0 + t\nu) \cdot \nu \end{aligned}$$

Aber mit

$$t \to 0 : \partial_\nu g(x_0) = Dg(0) = (Df)(x_0) \cdot \nu = \sum_{j=1}^{n} (\partial_j f)(x_0) \cdot \nu_j. \qquad \blacksquare$$

Recap: Sei

$$\langle v, w \rangle := \sum_{j=1}^{n} v_j w_j$$

das Euklidische Skalarprodukt ($v = (v_1, \ldots, v_n), w = (w_1, \ldots, w_n)$). $\|v\|_2 = \sqrt{\langle v, w \rangle}$ ist dann die Euklidische 2-Norm. Sind $v, w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, so definieren wir den **Winkel** zwischen v und w durch

$$\cos(\theta) := \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|_2 \|w\|_2}, \theta \in [0, \pi]$$

Lemma 4.25 Cauchy-Schwarz-Bunyakowski

Für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$:

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\|_2 \|w\|_2$$

Proof Lem. 4.25

$\|v\| = \|w\| = 1.$

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + 2\langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= 2 + 2\langle v, w \rangle \\ &\leq (\|v\| + \|w\|)^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\implies \langle v, w \rangle \leq 1.$$

Selbes Argument mit $w \to -w$ liefert $-1 \leq \langle vv, w \rangle$. Also $|\langle v, w \rangle| \leq 1$. Für $v, w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gibt dies

$$\left| \left\langle \frac{v}{\|v\|_2}, \frac{w}{\|w\|_2} \right\rangle \right| \leq 1 \implies \frac{|\langle v, w \rangle|}{\|v\|_2 \|w\|_2} \leq 1 \qquad \blacksquare$$

Note 4.26

Der Gradient von $f : \Omega \to \mathbb{R}$ zeigt in $x_0 \in \Omega$ **immer** in die Richtung des stärksten Anstieges der

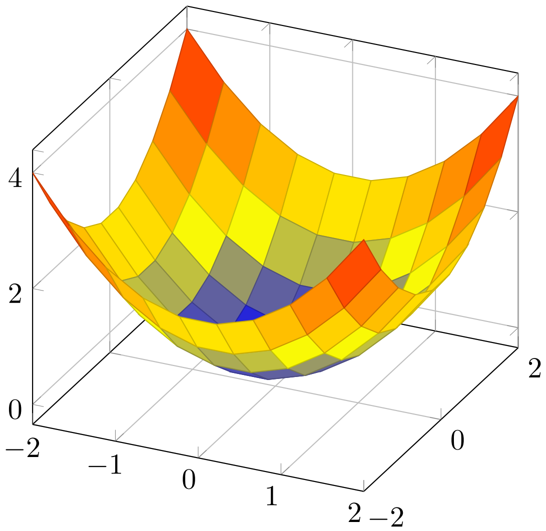
Funktion f in x_0. Genauer

$$\partial_\nu f(x_0) = \langle Df(x_0), \nu \rangle = \cos(\theta) \|Df(x_0)\|_2 \underbrace{\|\nu\|_2}_{=1} = \cos(\theta) \|Df(x_0)\|_2 .$$

Die rechte Seite wird maximal für $\theta = 0$. In diesem Fall sind aber $Df(x_0), \nu$ kollinear, also Behauptung

Example 4.27

$$f : (x_1, x_2) \mapsto \frac{1}{2} \left(x_1^2 + x_2^2 \right) .$$

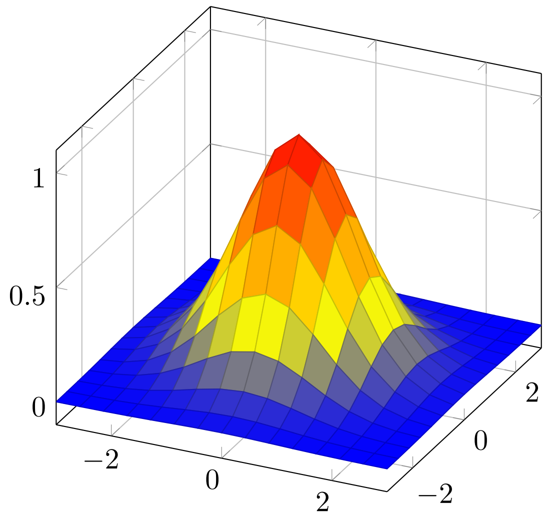


$$Df(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$$

$$Df(1, 1) = (1, 1)$$

Example 4.28

$$g : (x_1, x_2) \mapsto \exp\left(-\frac{1}{2} \left(x_1^2 + x_2^2 \right) \right)$$



$$Dg(x_1, x_2) = (-x_1, -x_2) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right)$$

$$Dg(1,1) = (-1,-1)\frac{1}{e}$$

Theorem 4.29

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Wir nennen dann $\mathcal{N}_f(c) \coloneqq \{x \in \Omega : f(x) = c\}$, $c \in \mathbb{R}$ die ***Niveaumenge*** *von f zum Wert c.*
Dann steht $Df(x)$ für $x \in \mathcal{N}_f(c)$ senkrecht in folgendem Sinne:
Ist $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset \mathcal{N}_f(c)$ mit $\varphi(0) = x$ stetig differenzierbar, so $\langle \varphi'(0), Df(x)\rangle = 0$

Proof Theorem 4.29

Definiere

$$g(t) \coloneqq f(\varphi(t)) = c$$

dann

$$\underbrace{(Df)(\varphi(t))}_{Df(0)} \underbrace{D\varphi(t)}_{\varphi'(0)} = 0$$

Theorem 4.29

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$. Sei $\xi \in \mathbb{R}^n$ so, dass

$$[x_0, x_0 + \xi] \coloneqq \{x_0 + t\xi : 0 \le t \le 1\} \subset \Omega.$$

Ist f stetig differenzierbar, so

$$f(x_0 + \xi) - f(x_0) = \int_0^1 \underbrace{Df}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}} (x_0 + t\xi)\, dt \cdot \xi.$$

Hierbei setzen wir für

$$A : [a,b] \to \mathbb{R}^{m \times n},$$

wobei $A(x) = (a_{ij}(x))_{i=1,\dots,m,j=1,\dots,n}$*:*

$$\int_a^b A(x)\ dx := \left(\int_a^b a_{ij}(x)\ dx\right)_{ij}.$$

Proof Thm. 2.29

$g(t) := f(x_0, +t\xi)$. Dann

$$\begin{aligned}
f(x_0+\xi) - f(x_0) &= g(1) - g(0) \\
&= \begin{pmatrix} g_1(1) - g_1(0) \\ \vdots \\ g_m(1) - g_m(0) \end{pmatrix} \\
&= (g_k(1) - g_k(0))_{k=1,\dots,m} \\
&\overset{\text{Hauptsatz}}{=} \left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g_k(t)\ \mathrm{d}t\right)_{k=1,\dots,m} \\
&= \left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_k(x_0+t\xi)\right)_{k=1,\dots,m} \\
&\overset{\text{Kettenregel}}{=} \left(\left\langle \int_0^1 \mathbf{Df_k}(x_0+\xi)\ \mathrm{d}t, \xi \right\rangle\right)_{k=1,\dots,m} \\
&= \int_0^1 \underbrace{Df}_{\mathbb{R}^{m\times n}}(x_0+t\xi)\ \mathrm{d}t \cdot \underbrace{\xi}_{\mathbb{R}^{n\times 1}}
\end{aligned}$$

■

Theorem 4.30 Schrankensatz

In der Situation von Thm 4.29 gilt

$$\|f(x_0+\xi) - f(x_0)\|_2 \le M\,\|\xi\|_2\,,$$

wobei

$$M := \sup_{0\le t\le 1} \|(Df)(x_0+t\xi)\|$$

Operatornorm, Lemma 4.22

Proof Thm 4.30

Nach Thm. 4.29:

$$\begin{aligned}
\|f(x_0+\xi) - f(x_0)\|_2 &= \left\|\int_0^1 (Df)(x_0+t\xi)\ \mathrm{d}t \cdot \xi\right\|_2 \\
&\overset{(*)}{\le} \int_0^1 \|Df(x_0+t\xi)\cdot\xi\|_2\ \mathrm{d}t \\
&\le \int_0^1 \underbrace{|(Df)(x_0+t\xi)|}_{\le M} \cdot |\xi|_2\ \mathrm{d}t \\
&\le M \cdot \|\xi\|_2\,.
\end{aligned}$$

Zu $(*)$: Ist $v : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ stetig. Dann:

$$\left\| \int_a^b v(t) \ \mathrm{d}t \right\|_2 \leq \int_a^b \|v(t)\|_2 \ \mathrm{d}t.$$

Sei hierzu

$$\eta \coloneqq \int_a^b v(t) \ \mathrm{d}t = \begin{pmatrix} \int_a^b v_1(t) \ \mathrm{d}t \\ \vdots \\ \int_a^b v_m(t) \ \mathrm{d}t \end{pmatrix}$$

Definiere

$$\begin{aligned} K \coloneqq \|\eta\|_2 \implies K^2 &= \|\eta\|_2^2 \\ &= \langle \eta, \eta \rangle \\ &= \left\langle \int_a^b v(t) \ \mathrm{d}t, \eta \right\rangle \\ &= \int_a^b \langle v(t), \eta \rangle \\ &\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \int_a^b \|v(t)\|_2 \cdot \underbrace{\|\eta\|_2}_{K} \ \mathrm{d}t \\ &= K \int_a^b \|v(t)\|_2 \ \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Œ $K \neq 0$, kürze durch K. ■

5 Taylorformel & lokale Extrema

Ziel: Approximation durch Polynome im Mehrdimensionalen; Reduzierung auf 1-D Taylorapproximationen.

Definition Notation

Für $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ("Multiindex"):

$$|\alpha| \coloneqq |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n| \, (= \alpha_1 + \cdots + \alpha_n)$$

$$\alpha! \coloneqq \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n!$$

Ist f $|\alpha|$-mal stetig differenzierbar, so sei

$$\partial^\alpha f \coloneqq \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f$$

Bedeutung: α_i entspricht wie oft man nach der i-ten Variablen partiell ableitet. Hierbei $\partial_i^{\alpha_i} f \coloneqq \underbrace{\partial_i \left(\partial_i \cdots \left(\partial_i f\right)\right)}_{\alpha_i\text{-mal}}$.

Theorem 5.1

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\Omega :\to \mathbb{R}$ k-mal stetig differenzierbar und $x_0 \in \Omega$. Sei $\xi \in \mathbb{R}^n$ so, dass $[x_0, x_0 + \xi] \subset \Omega$. Dann ist $g : [0,1] \ni t \mapsto f(x_0 + t\xi) \in \mathbb{R}$ k-mal stetig differenzierbar und

$$\frac{d^k g}{dt^k} = \sum_{|\alpha| = k} \frac{k!}{\alpha!} \left(\partial^\alpha f\right)(x_0 + t\xi)\xi^\alpha.$$

Proof Thm. 5.1

$$\forall k \in \mathbb{N} : \frac{d^k g}{\mathrm{d}t^k}(t) = \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^{n} \partial_{i_k} \dots \partial_{i_1} f(x_0 + t\xi)\xi_{i_1} \cdots \xi_{i_k}$$

$k = 1$**:**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x_0 + t\xi) = \langle Df(x_0 + t\xi), \xi \rangle = \sum_{i=1}^{n} \left(\partial_i f\right)(x_0 + t\xi)\, \xi_i$$

$k - 1 \curvearrowright k$**:**

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}^k} g &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}t^{k-1}} g(t) \right) \\
&\overset{I.V.}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i_1, \dots, i_{k-1} = 1}^{n} \partial_{i_{k-1}} \cdots \partial_{i_1} f\,(x_0 + t\xi) \cdot \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{k-1}} \\
&= \sum_{i_1, \dots, i_{k-1} = 1}^{n} \partial_{i_{k-1}} \cdots \partial_{i_1} \left(\sum_{i_k = 1}^{n} \partial_{i_k} f(x_0 + t\xi) \cdot \xi_{i_k} \right) \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_k} \\
&= \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^{n} \partial_{i_k} \cdots \partial_{i_1} f(x_0 + t\xi) \cdot \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_k}
\end{aligned}$$

Kombinatorisch: Wege des Satzes von Schwarz (Vertauschbarkeit partieller Ableitungen) treten hier partielle Ableitungen öfters auf. Speziell tritt $\partial^\alpha f$ $\frac{k!}{\alpha!}$ mal auf, und das zeigt die Behauptung. ■

Theorem 5.2 Taylor, mehrdimensional

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $[x_0, x_0 + \xi] \subset \Omega$. Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $(k+1)$-mal stetig differenzierbar. Dann $\exists \theta \in [0,1]$:

$$f(x_0 + \xi) = \underbrace{\sum_{|\alpha| \le k} \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!} \xi^\alpha}_{\text{Taylorpolynom der Ordnung } k} + \underbrace{\sum_{|\alpha| = k+1} \frac{\partial^\alpha f(x_0 + \theta\xi)}{\alpha!} \xi^\alpha}_{\text{assoziiertes Restglied}}$$

Proof Thm 5.2

Setze

$$g : [0,1] \ni t \mapsto f(x_0 + t\xi) \in \mathbb{R}$$

$k+1$-mal stetig differenzierbar $\implies$ [1-d Taylor] $\implies$ $\exists \theta \in [0,1]$:

$$g(1) = \sum_{m=0}^{k} \frac{1}{m!} g^{(m)}(0) + \frac{g^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!}.$$

Aber

$$\frac{g^{(m)}(0)}{m!} = \frac{1}{m!} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0) \xi^\alpha = \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0) \xi^\alpha.$$

$$\implies \sum_{m=0}^{k} \frac{1}{m!} g^{(m)}(0) = \sum_{m=0}^{k} \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0) \xi^\alpha = \sum_{|\alpha| \le k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0) \xi^\alpha.$$ ■

Corollary 5.3

Sei Ω offen, $x_0 \in \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ k-mal stetig differenzierbar. Dann haben wir bereits

$$f(x_0 + \xi) = \sum_{|\alpha| \le k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0) \xi^\alpha + o\left(|\xi|^k\right).$$

mit $|\xi| \searrow 0$.

$$\left[\frac{|f(x_0 + \xi) - \sum(\dots)|}{|\xi|^k} \xrightarrow{|\xi| \searrow 0} 0 \right]$$

Proof Cor. 5.3

Nach Theorem 5.2

$$\left| f(x_0 + \xi) = \sum_{|\alpha| \le k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0) \xi^\alpha \right| = \left| \sum_{|\alpha|=k} \frac{(\partial^\alpha f(x_0 + \theta\xi) - \partial^\alpha f(x_0))}{\alpha!} \cdot \frac{\xi^\alpha}{|\xi|^k} \right| \xrightarrow{\xi \searrow 0} 0$$ ■

Note 5.4

Ist f in der Situation von Cor 5.3 zweimal stetig differenzierbar, so gilt

$$f(x_0+\xi) = \underbrace{f(x_0)}_{|\alpha|=0} + \underbrace{\langle Df(x_0), \xi\rangle}_{|\alpha|=1} + \underbrace{\frac{1}{2}\langle D^2 f(x_0)\xi, \xi\rangle}_{|\alpha|=2} + o\left(|\xi|^2\right), |\xi| \searrow 0.$$

Plan für heute:

- Notwendige & hinreichende Kriterien für **Extrema** (bzw. lokale Ext.)
- "Krümme" von Graphen

Definition 5.5

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen & $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass f in $x_0 \in \Omega$

- ein **lokales Maximum** besitzt, falls $\exists U \subset \Omega$ offen $\forall x \in U : f(x) \leq f(x_0)$.
- ein **lokales Minimum** besitzt, falls $\exists U \subset \Omega$ offen $\forall x \in U : f(x) \geq f(x_0)$.
- ein **lokales Extremum**, falls in x_0 ein lokales Maximum/Minimum vorliegt

Theorem 5.6

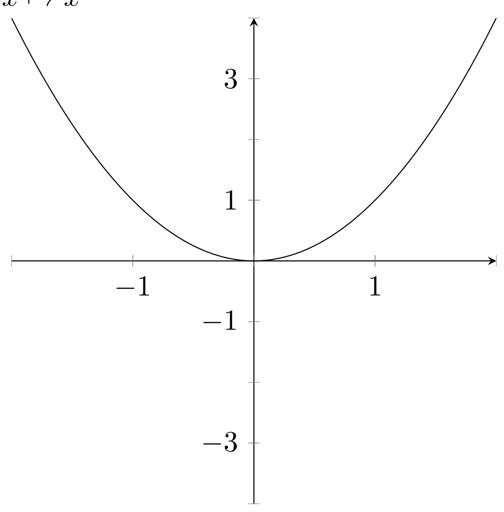
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion. Hat f in x_0 ein lokales Extremum, so $\nabla f(x_0) = (\partial_1 f(x_0), \ldots, \partial_n f(x_0)) = (0, \ldots, 0)$

Proof Thm. 5.6

Sei $U \subset \Omega$ wie in dder Definition des lokalen Extremum, Œ lokales Maximum. Dann $\exists \varepsilon > 0 : \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon) : \forall j : x_0 + te_j \in U$. Nun hat also für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ die Funktion $g_j(t) := f(x_0 + te_j)$ ein lokales Maximum in $t = 0$; $g_j : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$. Damit nach Ana 1: $0 \overset{!}{=} g_j'(0)$, aber $g_j'(t) = \langle Df(x_0 + te_j), e_j\rangle$ & daher $g_j'(0) = \partial_j f(x_0)$. ■

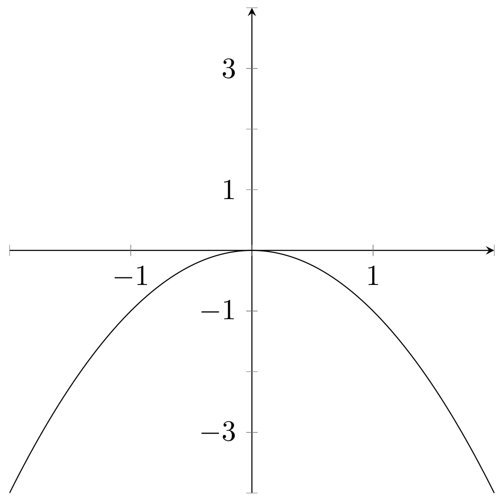
Ziel: Hinreichende Bedingung

- $x \mapsto x^2$



"pos. gekrümmt"

- $x \mapsto -x^2$



"neg. gekrümmt"

- Für $x \mapsto ax^2$ definiert $a \in \mathbb{R}$ das Krümmungsverhalten

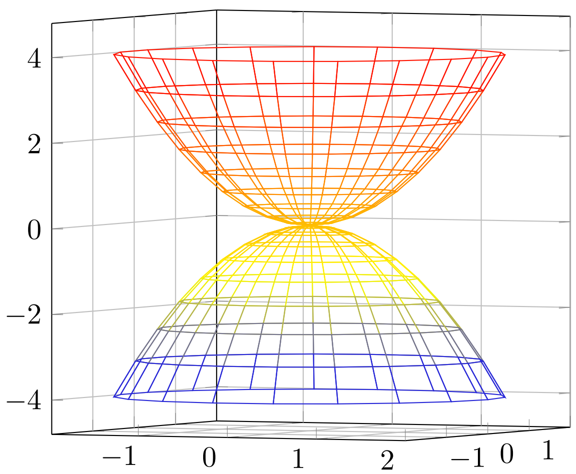
Für Multi-Dim.: Substitute von $x \mapsto ax^2$ sind die quadratischen Formen: $q : \mathbb{R}^n \ni x \mapsto \langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Example 5.7

Sei $A = E_n$ ($(n \times n)$-Einheitsmatrix), Œ für $n = 2$. Dann

$$q : \mathbb{R}^n \ni x \mapsto \|x\|_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2.$$

$$\tilde{q} : \mathbb{R}^n \ni x \mapsto -\|x\|_2^2 \ (\text{zu } A = -E_h)$$



Definition 5.8

Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}_{\text{sym}}$ (also $a_{ij} = a_{ji}$) heißt

- pos. definit, falls $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \langle Ax, x \rangle > 0$.
- pos semidefinit, falls $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \langle Ax, x \rangle \geq 0$.
- neg. definit, falls $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \langle Ax, x \rangle < 0$.

- neg. semidefinit, falls $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \langle Ax, x\rangle \leq 0$.
- undefinit, falls keine der obigen Bedingungen erfüllt sind.

Note 5.9

Ang., $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{sym}$ erfüllt $\forall x \in B_\varepsilon(0) : \langle Ax, x\rangle \geq 0$. Für $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sei

$$x_\varepsilon := \frac{\varepsilon}{2}\frac{y}{\|y\|_2}.$$

Dann

$$x_\varepsilon \in B_\varepsilon(0)\& \underbrace{\langle Ax_\varepsilon, x_\varepsilon\rangle}_{\underbrace{\frac{\varepsilon^2}{4}\frac{1}{\|y\|_2^2}}_{>0}\langle Ay,y\rangle} \geq 0$$

Theorem 5.10

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $x_0 \in \Omega$ mit $Df(x_0) = 0$. Dann gilt: Ist

(i) $D^2f(x_0)$ (bzw. $Hf(x_0)$) ***pos. definit****, so hat f in x_0 ein lokales Minimum*

(ii) $D^2f(x_0)$ (bzw. $Hf(x_0)$) ***neg. definit****, so hat f in x_0 ein lokales Maximum*

(iii) Ist $D^2f(x_0)$ ($Hf(x_0)$) indefinit, so liegt kein lokales Extremum in x_0 vor.

Proof Thm. 5.10

Nur (i), (ii), (iii) analog. Nach Tayorentwicklung zu Ornung 2 schreibe

$$f(x) = f(x_0) + \langle Df(x_0), x - x_0\rangle + \frac{1}{2}\left\langle D^2f(x_0)(x - x_0), (x - x_0)\right\rangle + r(x)\|x - x_0\|_2^2$$

für alle $x \in \omega$ & $\lim_{x\to x_0} |r(x)| = 0$. Definiere $A := D^2f(x_0)$. Betrachte

$$q : x \mapsto \langle Ax, x\rangle .$$

Dann ist q stetig, und nimmt $\$^{n-}$ sin Minimum an ($\$^{n-1}$ kompakt). Sei nun $\varepsilon := \min_{\$^{n-1}} q$, $\$^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$. Nun ist A pos. definit, also $\varepsilon > 0$. Dann, z.B. mit Bem. 5.9: $\langle Ay, y\rangle \geq \varepsilon \|y\|_2^2$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$. Denn $\forall y \neq 0 : \frac{y}{\|y\|_2} \in \$^{n-1}$, also $\left\langle A\frac{y}{\|y\|_2}, \frac{y}{\|y\|_2}\right\rangle \geq \varepsilon$. Weiter $\exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta(x_0) : |r(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Hiermit

$$\begin{aligned}\forall x \in B_\delta(x_0) : f(x) &= f(x_0) + \underbrace{\langle A(x - x_0), (x - x_0)\rangle}_{\geq\varepsilon\|x-x_0\|_2^2} + r(x)\|x - x_0\|_2^2 \\ &\geq f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}\|x - x_0\|_2^2 - \underbrace{|r(x)|}_{\leq\frac{\varepsilon}{2}} \cdot \|x - x_0\|_2^2 \\ &\geq f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}\|x - x_0\|_2^2 - \frac{\varepsilon}{2}\|x - x_0\|_2^2 = f(x_0).\end{aligned}$$

■

Zum Überprüfen der (pos.) Definitheit: Hauptminoren für $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$

$$|A_1| = a_{11}.$$

$$|A_2| = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$|A_k| = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots a_{kk} & \end{pmatrix} \text{ “}k\text{-te Hauptminore”}$$

Theorem 5.11 Hirwitz

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{sym}$. A ist

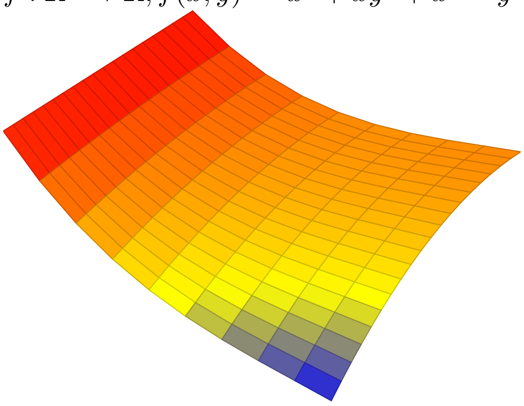
(i) pos. definit, falls alle Hauptminoren > 0 sind.

(ii) (neg. definit) Die Hauptminoren wechseln mit neg. Vz beginnend ihre Vorzeichen: $|A_1| < 0, |A_2| > 0, |A_3| < 0, \dots$

- $-I$*:* $|A_1| = -1$, $|A_2| = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1, \dots$

Example 5.12

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) \coloneqq x^3 + xy^2 + x^2 - y^2$.



Frage: Wo lokale Extrema?

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + y^2 + 2x \\ 2(x-1)y \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

$\implies x = 1 \vee y = 0$

$$\nabla(x,y) = \begin{pmatrix} 5 + y^2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\implies$ Œ $y = 0 \implies 3x^2 + 2x \overset{!}{=} 0 \implies x = -\frac{2}{3} \vee x = 0$. **Kritische Punkte:** $\xi_1 \coloneqq (0,0), \xi_2 = (-\frac{2}{3}, 0)$.

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x+2 & 2y \\ 2y & 2(x-1) \end{pmatrix}.$$

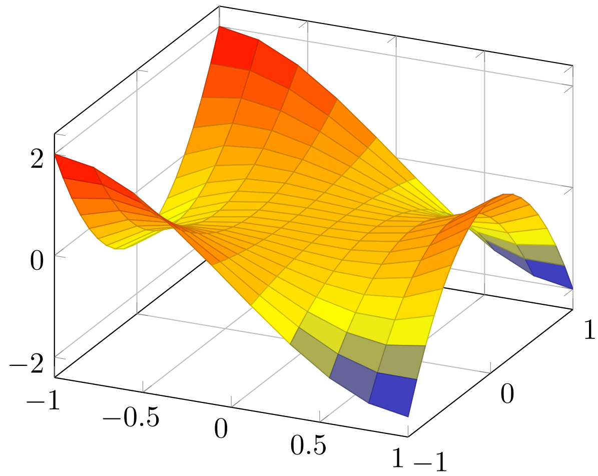
Dann

$$D^2 f(\xi_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = A,$$

$|A_1| = 2 > 0, |A_2| < 0$. Aber A ist indefint: $\left\langle A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\rangle > 0$, $\left\langle A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\rangle < 0$. Also nach Thm. 5.10 c) **kein** lokales Extremum.

$$(x,y) = \left(-\frac{2}{3}, 0\right), D^2 f\,(x,y) = \begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -\frac{10}{3}\end{pmatrix}$$

Eintrag links oben neg., $\det D^2 f(x,y) = \frac{20}{3} > 0$. Also ist $D^2 f(x,y)$ nach Hurwitz **neg. definit** $\implies$ bei $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ hat f ein **lok. Maximum**. Dies ist **kein** globales Maximum, denn für $(x,0)$: $f(x,0) = x^3 + x^2 \xrightarrow{x\to\infty} \infty$.



- **Affensattel:** $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}3x^2 - 3y^2\\ -6xy\end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\implies (x,y) = (0,0)$$

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix}6x & -6y\\ -6y & -6x\end{pmatrix} \overset{(x,y)=(0,0)}{=} \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \to \text{kein lok. Extremum}$$

6 Der lokale Umkehrsatz & implizite Funktionen

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Was müssen an $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fordern, so dass es eine offene Menge V mit $x_0 \in V$ &

  $$\underbrace{f : V}_{f|_V} \to f(V)$$

  ist bijektiv mit differenzierbarer Umkehrfunktion?

- Falls $y \in f(V)$, löse dann $\exists! x \in V : f(x) = y$.

Idee:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)}_{\text{linearisertes } f} + \left(\underbrace{\text{Rest}}_{\text{vernachlässigbar}} \right)$$

lokal:

$$f(x) \hat{=} f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) = y$$

Wollen wir dies lösen, also

$$Df(x_0)(x - x_0) = y - f(x_0),$$

so muss $Df(x_0)$ invertierbar sein. Frage: Auch hinreichend?

Lemma 6.1

Sei $\mathrm{GL}(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \textit{ invertierbar}\}$ *ist offen in* $\mathbb{R}^{n\times n}$ *bezüglich jeder Norm, und inv:* $\mathrm{GL}(n) \ni A \mapsto A^{-1} \in \mathrm{GL}(n)$ *ist stetig differenzierbar.*

Proof Lem 6.1

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \mapsto \det(A)$$

ist ein Polynom, also stetig. Damit $\mathrm{GL}(n) = \det^{-1} \underbrace{(\mathbb{R} \setminus \{0\})}_{\text{offen}}$ offen. Differenzierbarkeit folt aus der Cramerschen Regel. Nämlich

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{cof}(A)^T$$

$$\operatorname{cof}(A) = m_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

mit M_{ij}, der (i,j)-te Minore (det der Matrix, ohne i-te Zeile, j-te Spalte). (siehe Lin. Alg.) Damitist $A \mapsto \frac{1}{\det(A)} \operatorname{cof}(A)$ ist eine $\mathbb{R}^{n\times n}$ - wertige Abbildung, deren einzelne Komponeneten rationale Funktionen in den Einträgen von A sind. $\to$ **Beh.**

Theorem 6.2

Sei $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ *offen,* $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ *bijektiv. Sei* $x_0 \in \Omega_1$ *&* f *in* x_0 *differenzierbar,*

f^{-1} in $f(x_0)$ differenzierbar. Dann $m = n$; $Df(x_0)$ inv & $\left(Df^{-1}\right)(f(x_0)) = (Df(x_0))^{-1}$

$$f^{-1}(f(x)) = x, f(f^{-1}(x)) = x \implies \left(Df^{-1}\right)(x)\,(Df)\left(f^{-1}(x)\right) = 1$$

Proof Thm. 6.2

$$A := Df(x_0), B := \left(Df^{-1}\right)(f(x_0)).$$

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{\Omega_2} \& f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_{\Omega_1} \overset{\text{Kettenregel}}{\implies} BA = E_n, AB = E_m$$

Mit E_n ist die $(n \times n)$-Einheitsmatrix, und E_m ist die $(m \times m)$-Einheitsmatrix. ■

Frage: Wann ist f^{-1} differenzierbar?

Lemma 6.3

Seien $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ bijektiv & stetig differenzierbar. Weiter sei f^{-1} stetig & $\forall x \in \Omega_1 : Df(x) \in \mathrm{GL}(n)$. Dann ist f^{-1} ***stetig differenzierbar***.

Proof Lem 6.3

Zu zeigen: f^{-1} ist in jedem $b = f(x_0), x_0 \in \Omega_1$ differenzierbar

1. Reduktion $x_0 = 0, f(x_0) = 0$. Ansonsten betrachte $g(x) = f(x_0 + x) - f(x_0)$

2. Reduktion Sei $C := (Df(0))^{-1}$. Wir zeigen die Aussage für $(Cf)^{-1}$, denn $D\left((Cf)^{-1}\right) = C^{-1}\left(Df^{-1}\right)$ (+ C invertierbar!)

3. Reduktion Damit Œ $Df(0) = E_n$.

- f in 0 differenzierbar $\implies \exists r : \Omega_1 \overset{\text{stetig}}{\to} \mathbb{R}^n : r(0) = 0 \;\&\; \forall x \in \Omega_1 : f(x) \overset{\textbf{3. Red.}}{=} f(0) + E_n x + r(x)\,\|x\|_2$
- Setze

$$s(y) := \begin{cases} -r(x)\frac{\|x\|_2}{\|y\|_2}, & y \neq 0, y = f(x) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \implies -r(x)\,\|x\|_2 = s(y)\,\|y\|_2$$

$f(0) = 0$. Also $f^{-1}(0) = 0$. Für alle $y = f(x), y \neq 0$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(y) = x &= f(x) - r(x)\,\|x\|_2 \\ &= y + s(y)\,\|y\|_2 \\ &= \underbrace{f^{-1}(0)}_{0} + E_n y + s(y)\,\|y\|_2 \end{aligned}$$

Dies gilt auch für $y = 0$. Also ist f^{-1} in 0 differenzierbar. Also auch für alle $x_0 \in \Omega_1$.

—

Zunächst gilt

$$f^{-1} \circ f = id_{\Omega_1},$$

damit folgt nach Kettenregel

$$\left(Df^{-1}\right)(f(x))\,(Df(x)) = E_n,$$

also

$$\left(Df^{-1}\right)(f(x)) = (Df(x))^{-1}$$

mit $y = f(x)$ folgt, dass

$$Df^{-1} = \underbrace{\mathrm{inv}}_{\text{Lem. 6.1 stetig}} \circ \underbrace{Df}_{\text{stetig nach Vor.}} \circ \underbrace{f^{-1}}_{\text{stetig nach I teil des Bew.}}$$

Also Df^{-1} stetig ∎

Definition 6.4

Seien $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine stetig differenzierbare, bijektive Abbildung $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ heißt **Diffeomorphismus**, falls

$$f^{-1} : \Omega_2 \to \Omega_1$$

ebenfalls stetig differenzierbar ist.

Theorem 6.5 Lokaler Umkehrsatz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Sei $x_0 \in \Omega$ so, dass $Df(x_0)$ invertierbar ist. Dann gibt es eine offene Umgebung U von x_0, sodass $f(U)$ eine offene Umgebung von $f(x_0)$ ist und $f|_U : U \to f(U)$ ein Diffeomorphismus ist: $f|_U$ ist stetig differenzierbar und $(f|_U)^{-1}$ ist stetig differenzierbar.

Proof Theorem 6.5

Œ Sei Œ $x_0 = 0$ und $f(x_0) = 0$, ansonsten betrachte $x \mapsto f(x + x_0) - f(x_0)$. Betrachte mit $C := (Df(0))^{-1}$ den Isomorphismus $T : x \mapsto Cx$. Nach Lemma 5.3 gilt

$$D(T \circ f)(0) = C \cdot Df(0) = E_n.$$

Also können wir annehmen, dass $x_0 = f(x_0) = 0$ und $Df(0) = E_n$ Wir benutzen:

- den Schrankensatz
- den Banachschen Fixpunktsatz

Schritt 1 Wir wollen

$$f(x) = y$$

lösen. Setzen für $y \in \mathbb{R}^n$ und $x \in \Omega$ definiere

$$g_y(x) := y + x - f(x).$$

Wir wollen

$$g_y(x) = x$$

lösen. Nach Voraussetzung ist Df stetig in $x_0 = 0$. Daher gibt es ein $r > 0$, sodss

$$K := \overline{B_{2r}}(0) \subset \Omega,$$

sowie

$$\forall x \in K : \|E_n - Df(x)\| < \frac{1}{2}$$

Da $Dg_y(x) = E_n Df(x)$, folgt mit Schrankensatz

$$\forall x_1, x_2 \in K : \|g_y(x_1) - g_y(x_2)\| \leq \max_{x \in K} \|E_n - Df(x)\| \, \|x_1 - x_2\|_2 \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|_2$$

Daraus folgt, dass $\forall x \in K, y \in B_r(0) : \|g_y(x)\|_2 \leq \|g_y(x) - g_y(0)\|_2 + \|g_y(0)\|_2 \leq \frac{1}{2} \|x\|_2 + \|y\|_2 < r + r = 2r$.
$\implies g_y : K \to K$ ist kontrahierende selbstabbildung. Da K abgeschlossen und beschränkt ist, ist K kompakt, als BFS anwendbar.

- Ziel erreicht: Für jedes $y \in B_r(0)$ gibt es genau ein $x \in K$ so, dass $g_y(x) = x$, also $f(x) = y$ mit $B_{2r}(0)$.

Für $y \in B_r(0)$ definieren wir $h(y)$ also das eindeutig bestimmte $x \in B_{2r}(0)$, also

$$h(y) := x,$$

$$V := B_r(0)$$

und

$$U := f^{-1}(V) \cap B_{2r}(0)$$

Dies definiert eine Umkehrabbildung

$$h : V \to U$$

zu $f|_U : U \to f(U)$

Schritt 2 ***h* ist stetig**
Seien $y_1, y_2 \in V$. Definiere $x_1 = h(y_1)$ und $x_2 := h(y_2)$. Da $g_y(x) = x$ folgt $x_1 - x_2 = g_0(x_1) - g_0(x_2) + f(x_1) - f(x_2)$. D.h.

$$\|x_1 - x_2\|_2 \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|_2 + \|f(x_1) - f(x_2)\|_2 ,$$

also

$$\|h(y_1) - h(y_2)\|_2 \leq 2 \|y_1 - y_2\|_2 .$$

Also h stetig.

Schritt 3 Invertierbarkeit von $Df(x)$ auf U. Sei $x \in U$, dann gilt $\|x\|_2 < 2r$. Dann gilt

$$\forall v \in \mathbb{R}^n : \|v - Df(x)v\|_2 \leq \frac{1}{2} \|v\|_2$$

Angenommen $v \in \ker(Df(x))$. Dann $\|v\|_2 \leq \frac{1}{2} \|v\|_2$, also $v = 0$. Also $Df(x)$ invertierbar. Behauptung folgt aus Lemma 6.3 ∎

Corollary 6.6 Satz von der Offenheit

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion, sodass $Df(x)$ für alle $x \in \Omega$ invertierbar ist. Dann ist $f(\Omega)$ offen.

Proof Korollar 6.6

Nach lokalem Umkehrsatz gibt es für jedes $x \in \Omega$ eine offene Umgebung U_x, sodass $f(U_x)$ offen ist. D.h.

$$f(\Omega) = \bigcup_{x \in \Omega} f(U_x)$$

ist offen. ∎

Example 6.7

$$f(x_1, x_2) = \left(x_1 x_2^2, x_1^{x_2}\right)$$

auf

$$\Omega = (0, \infty) \times \mathbb{R}.$$

Wir beachten, dass $x_1^{x_2} = \exp(x_2 \log x_1)$. Damit gilt

$$Df(x) = \begin{pmatrix} x_2^2 & 2x_1x_2 \\ x_2 x_1^{x_2 - 1} & \log(x_1)\, x_1^{x_2} \end{pmatrix},$$

im Punkt $(1, 2)$ gibt

$$Df(1, 2) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ist invertierbar. $\implies$ Lokal umkehrbar.

Corollary 6.8

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und

$$f : U \to \mathbb{R}^n$$

eine injektiv, stetig differenzierbar mit $Df(x)$ invertierbar für alle $x \in U$. Dann ist $f(U)$ offen und

$$f^{-1} : f(U) \to \mathbb{R}^n$$

stetig differenzierbar.

Proof Korollar ref6.8

Nach Korollar 6.6: $f(U)$ offen. Sei nun $b \in f(U)$ und sei $a = f^{-1}(b)$. Nach Satz 6.5 existiert eine offene Umgebung $W \subseteq f(U)$ von b, sodass $f^{-1}_{|W}$ stetig differenzierbar ist. ∎

Example 6.9

Sei $f : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ definiert als

$$f(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

f ist injektiv und stetig differenzierbar. Es ist

$$Df\,(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Also $\det\left(Df\,(r, \varphi)\right) = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r > 0$. Also ist $Df\,(r, \varphi)$ invertierbar und somit $g = f^{-1}$ stetig differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für $(x, y) = f(r, \varphi)$ gilt

$$Dg(x, y) = (Df(r, \varphi))^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\frac{1}{r} \sin \varphi & \frac{1}{r} \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\|(x,y)\|} & \frac{y}{\|(x,y)\|} \\ -\frac{y}{\|(x,y)\|^2} & \frac{x}{\|(x,y)\|^2} \end{pmatrix}$$

Sei nun $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $F\,(a, b) = 0$. Wir suchen für die eindeutige Lösbarkeit der Gleichung

$$F(x, y) = 0$$

Werte y in Abhängigkeit von x in einer Umgebung von (a, b)

Example 6.10

Für

$$F\,(x, y)) = x - y^2.$$

Es ist $F(1, 1) = 0$ Definiere

$$g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

durch

$$g(x) = \sqrt{x}$$

Dann gilt $f(x, g(x)) = 0$ in einer Umgebung von $(1, 1)$

Definition Notation

Für

$$g : X \to Y$$

sei $\mathrm{Gr}(g) = \{(x, g(x)) : x \in X\}$ der Graph von g

Note

Seien $(u, v) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ und W Umgebung von (u, v). Dann existieren Umgebungen W_0 von u und W_1 von v mit $W_0 \times W_1 \subseteq W$.

Proof

Für $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ und $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ ist

$$\|(x,y)\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 \leq (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2,$$

also

$$\|(x,y)\|_2 \leq \|x_2\| + \|y\|_2$$

Wähle also $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon((u,v)) \subseteq W$. Dann ist

$$B_{\frac{\varepsilon}{2}}(u) \times B_{\frac{\varepsilon}{2}}(v) \subseteq B_\varepsilon((u,v)) \subseteq W.$$ ∎

Definition Notation

Seien

$$U_1 \subseteq \mathbb{R}^k \text{ und}$$

$$U_2 \subseteq \mathbb{R}^m$$

offen und

$$F : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$$

differenzierbar. Für $(a,b) \in U_1 \times U_2$ setze

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b) = \begin{pmatrix} D_1F_1(a,b) & \dots & D_kF_1(a,b) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1F_m(a,b) & \dots & D_kF_m(a,b) \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) = \begin{pmatrix} D_{k+1}F_1(a,b) & \dots & D_{k+m}F_1(a,b) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{k+1}F_m(a,b) & \dots & D_{k+m}F_m(a,b) \end{pmatrix}.$$

Es gilt also

$$DF(a,b) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(a,b) \;\middle|\; \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \right)$$

Somit ist für $(u,v) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$

$$DF(a,b)(u,v) = \frac{\partial F}{\partial x}(a,b) \cdot u + \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \cdot v.$$

Theorem 6.11 Implizite Funktionen

Seien $U_1 \subseteq \mathbb{R}^k$ und $U_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und sei

$$F : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$$

stetig differenzierbar. Weiter sei $(a,b) \in U_1 \times U_2$ mit

$$F(a,b) = 0$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)$$

sei invertierbar. Dann gibt es offene Umgebungen $V_1 \subseteq U_1$ von a und $V_2 \subseteq U_2$ von b, sowie eine stetig differenzierbare Funktion

$$g : V_1 \to V_2$$

mit

$$\mathrm{Gr}(g) = \{(x,y) \in V_1 \times V_2 : F(x,y) = 0\} \quad (\textit{d.h. } F(x,g(x)) = 0)$$

Weiterhin gilt

$$Dg(a) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(a,b)$$

Proof Satz 6.11

Definiere

$$H : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^{k+m}$$

durch

$$H(x,y) = (x, F(x,y)).$$

H ist stetig differenzierbar und es gilt

$$DH(a,b) = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$\det\left(DH(a,b)\right) = \underbrace{\det\left(\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\right)}_{\neq 0 \text{ nach Annahme}} \cdot \det(E_k) \neq 0$$

Also ist $DH(a,b)$ invertierbar $\implies$ Lokaler Umkehrsatz:

- Es gibt eine offene Umgebung $V \subseteq U_1 \times U_2$ von (a,b) und $W \subseteq \mathbb{R}^{k+m}$ von $H(a,b)$ derart, dass $h := H_{|V}$ eine Bijektion von V nach W ist, für die h^{-1} stetig differenzierbar ist.

Sei

$$h^* : W \to \mathbb{R}^m$$

die Funktion, die

$$h^{-1}(u,v) = (u, h^*(u,v))$$

für alle $(u,v) \in W$ erfüllt. Dann

$$\forall (x,y) \in V : (F(x,y) = 0 \iff H(x,y) = (x,0) \iff y = h^*(x,0)) \qquad (*)$$

Nach Bemerkung existieren offene Umgebungen W_1 von a und V_2 von b mit $W_1 \times V_2 \subseteq V$. Nun ist $h^*(a,0) = b$ und $x \mapsto h^*(x,0)$ ist stetig. Also existiert eine offene Umgebung $V_1 \subseteq W_1$ von a mit $h^*(x,0) \in V_2$ für alle $x \in V_1$. Definiere

$$g : V_1 \to V_2 \quad \text{durch} \quad g(x) = h^*(x,0).$$

h^{-1} ist stetig differenzierbar, also ist es auch g und es gilt

$$\mathrm{Gr}(g) = \{(x,y) \in V_1 \times V_2 : F(x,y) = 0\},$$

denn

"⊆" Sei $x \in V_1$. Dann ist $(x, g(x)) \in V_1 \times V_2$ und $g(x) = h^*(x,0)$, also

$$F(x, g(x)) = 0$$

nach $(*)$.

"⊆" Sei $(x,y) \in V_1 \times V_2$ mit $F(x,y) = 0$. Dann $(x,y) \in V$, nach $(*)$ $y = g(x)$

Nun zum Zusatz: Es ist $F(a, g(x)) = 0$, da $g(a) = b$. Also gilt für $g(x) = F(x, g(x))$, dass

$$0 = Dg(a) = DF(a,b) \begin{pmatrix} E_k \\ Dg(a) \end{pmatrix} = \frac{\partial F}{\partial x}(a,b) + \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) Dg(a)$$

und daher

$$Dg(a) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(a,b)$$ ■

- **Satz üver die implizite Funktion. Frage:** Können wir $f^{-1}(\{0\}) = \{x : f(x) = 0\}$ lokal als Graph schreiben. D.h., gegeben $x_0 \in f^{-1}(\{0\}), \exists U$ offen, $x_0 \in U$, $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $g : V \to \mathbb{R} : U \cap f^{-1}(\{0\}) = \{(x', g(x')) : x' \in V\}$

  $$f : (x,y) = x^2 + y^2 - 1, x_0 = (0,-1).$$

  Dann ist $f^{-1}(\{0\}) \cap U$ realisierbar als $\{(x, g(x)) : x \in (-\alpha, \alpha)\}$, $g(x') = -\sqrt{1 - |x'|^2}$

- $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^k, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}^m, F = (F_1, \ldots, F^m)$ stetig differenzierbar. Für $(a,b) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ setze

  $$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b) = \begin{pmatrix} \partial_1 F_1(a,b) & \ldots & \partial_k F_1(a,b) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 F_m(a,b) & \ldots & \partial_k F_m(a,b) \end{pmatrix}, \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) = \begin{pmatrix} \partial_{k+1} F_1(a,b) & \ldots & \partial_{k+m} F_1(a,b) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{k+1} F_m(a,b) & \ldots & \partial_{k+m} F_m(a,b) \end{pmatrix},$$

  Dann

  $$DF(a,b) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(a,b), \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\right)$$

  $\rightsquigarrow$ $F(a,b) = 0 \& \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)$ invertierbar. Dann $\exists V_1 \subset \Omega_1, V_2 \subset \Omega_2$ offene Umgegungen von a bzw. b, $g : V_1 \to V_2$ stetig differenzierbar mit

  $$\mathrm{Gr}(g) := \{(x,y) \in V_1 \times V_2 : F(x,y) = 0\}$$

  $$\& Dg(a) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(a,b)$$

Example 6.12

$$F(x,y) := x^2 + y^2 - 1, m = 1, k = 1$$

$$F : \underbrace{\mathbb{R}}_{k=1} \times \underbrace{\mathbb{R}}_{m=1} \to \underbrace{\mathbb{R}}_{m=1}$$

- $x_0 = (0, -1)$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \frac{\partial F}{\partial y} = 2y,$$

dann $\frac{\partial F}{\partial y}(0,-1) = -2 \neq 0 \implies$ **inv.**, also in Einklang mit Parametrisierung $g(x) = -\sqrt{1-|x|^2}$.

- Bei $x_0 = (-1, 0)$ wegen $\frac{\partial F}{\partial y}(-1,0) = 0$ nicht erwartbar.

Example 6.13

$$F(x_1, \ldots, x_8) = x_1^2 + \cdots + x_4^2 - x_5^2 - \cdots - x_8^2.$$

Wir nennen $F^{-1}(\{0\}) =: \mathcal{K}$ den **Simonskegel**: $x \in \mathcal{K} \implies \lambda x \in \mathcal{K}$.

Extrema unter Nebenbedingungen

$$f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ (Wärmeverteilung)}$$

$$\gamma : [0,1] \to \Omega \text{ (Lokation der Krösen)}$$

Ziel: Maximiere $f \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$
Das ist fast trivial, Grund: $\gamma \hat{=}$ Parametrisierung wird als bekannt vorausgesetzt. Allgemein ist eine solche nicht bekannt.

Theorem 6.14 Lagrange-Multiplikatoren

*Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar & setze $\mathcal{M} := \{x \in \Omega : f(x) = 0\}$. Sei $a \in \mathcal{M}$ mit $Df(a) \neq 0$, & sei $h : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar so, dass h in a ein lokales Extremum unter $f = 0$ besitzt: D.h., $\exists U \subset \Omega$ offen, $a \in U : \forall x \in U \cap \mathcal{M} : \underbrace{h(x) \leq h(a)}_{\text{lok. Max}}$ bzw. $\underbrace{h(a) \leq h(x)}_{\text{lok. Min.}}$. Dann $\exists \lambda \in \mathbb{R} : \boxed{Dh(a) = \lambda Df(a).}$ Ein solches λ heißt **Lagrangemultiplikator**.*

- *Sagt nur, was in kritischen Punkten gelten muss!*

Proof Theorem 6.14 Lagrange-Multiplikatoren

Œ $\partial_n f(a) \neq 0$, $n \geq 2$.

$$a := (a_1, \ldots, a_n), c := (a_1, \ldots, a_{n-1}).$$

Nach impliziter Funktionen $\exists V$ offene Umgebung von c, W offenen Umgebung von $a_n : V \times W \subset \Omega$,

$g : V \to W$ stetig differenzierbar mit $\mathrm{Gr}(g) = \mathcal{M} \cap (V \times W)$. Weiter:

$$\forall i \in \{1, \ldots, n-1\} : \partial_i g(c) = -\frac{\partial_i f(a)}{\partial_n f(a)}. \tag{$*$}$$

Sei $h^*(x) \coloneqq h(x, g(x))$. Nun: h^* hat Extremum (lokal) in c, also

$$\forall i \in \{1, \ldots, n-1\} : 0 = \partial_i h^*(c) = ((Dh)(c, \underbrace{g(c)}_{=a_n})) \cdot \begin{pmatrix} e_i \\ \partial_i g(c) \end{pmatrix} = (\partial_i h)(a) + (\partial_n h)(a)(\partial_i g)(c).$$

Setze:

$$\lambda \coloneqq \frac{\partial_n h(a)}{\partial_n f(a)},$$

$$(\partial_i h(a)) = -(\partial_n h)(a)(\partial_i g)(c) + (*)$$

$$(\partial_n h)(a) = \lambda(\partial_n f)(a) \qquad \blacksquare$$