数值分析理论作业

学号: 231501025, 姓名: 张树威

问题 1. §2.T3

试利用 $81, 100$ 和 121 的平方根求 $\sqrt{95}$.

利用 Lagrange 插值公式, 分别用两个点和三个点作拟合，则有如下估计:

$$f(x) \approx p_1(x) = 9\frac{x-100}{81-100} + 10\frac{x-81}{100-81};$$

$$f(x) \approx p_2(x) = 9\frac{(x-100)(x-121)}{(81-100)(81-121)} + 10\frac{(x-81)(x-121)}{(100-81)(100-121)} + 11\frac{(x-81)(x-100)}{(121-81)(121-100)};$$

代入 $x = 95$, 可得:

$$p_1(95) \approx 9.7368;$$

$$p_2(95) \approx 9.7456.$$

经计算器计算可得 $\sqrt{95} \approx 9.7468$, 因此这里使用 $p_2(x)$ 即线性拟合效果更好.

问题 2. §2.T6

设 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为 $n+1$ 个互异的插值节点, $l_i(x)(i = 0, 1, \cdots, n)$ 为 Lagrange 基本多项式, 证明:

$$(1) \sum_{i=0}^{n} l_i(x) = 1;$$

$$(2) \sum_{i=0}^{n} x_i^j l_i(x) = x^j, j = 1, 2, \cdots, n;$$

$$(3) \sum_{i=0}^{n} (x_i - x)^j l_i(x) = 0, j = 1, 2, \cdots, n;$$

$$(4) \sum_{i=0}^{n} l_i(0) x_i^j = \begin{cases} 1, & j = 0, \\ 0, & j = 1, 2, \cdots, n, \\ (-1)^n x_0 x_1 \cdots x_n, & j = n+1. \end{cases}$$

证明： (1) 令 $g(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} l_i(x) - 1$, 则 $g(x_i) = 0(i = 0, 1, \cdots, n)$, 即 $g(x)$ 至少有 $n+1$ 个根, 但 $g(x)$ 本身只是 n 次多项式, 所以只能 $g(x) = 0$, 即 $\sum\limits_{i=0}^{n} l_i(x) = 1$ 成立.

(2) 令 $h(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^j l_i(x) - x^j$, 则 $h(x_i) = 0(i = 0, 1, \cdots, n)$, 即 $h(x)$ 至少有 $n+1$ 个根, 但 $h(x)$ 本身只是 n 次多项式, 所以只能 $h(x) = 0$, 即 $\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^j l_i(x) = x^j, j = 1, 2, \cdots, n$ 成立.

(3) 由 (2) 可知: $\forall j=1,2,\cdots,n$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}(x_i-x)^j l_i(x) &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{j} C_j^k x_i^k l_i(x)(-x)^{j-k}\\ &= \sum_{k=0}^{j} C_j^k(-x)^{j-k}\sum_{i=0}^{n} x_i^k l_i(x)\\ &= \sum_{k=0}^{j} C_j^k(-x)^{j-k}x^k\\ &= x^j(1+(-1))^j = 0.\end{aligned}$$

(4) 记 $f(x)=x^j$, 对 $f(x)$ 用 Lagrange 插值公式的误差：

$$r(x)=f(x)-\sum_{i=0}^{n} l_i(x)x_i^j=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}w_{n+1}(x),\xi\in(x_0,x_n).$$

又有 $w_{n+1}(0)=(-1)^{n+1}x_0x_1\cdots x_n$, 以及 $f^{(n+1)}(\xi)=\begin{cases}0, & j=0,1,\cdots,n,\\ (n+1)!, & j=n+1,\end{cases}$, 把 $x=0$ 代入 $r(x)$ 可得:

$$\sum_{i=0}^{n} l_i(0)x_i^j=f(0)-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}w_{n+1}(0)=\begin{cases}1, & j=0,\\ 0, & j=1,2,\cdots,n,\\ (-1)^n x_0x_1\cdots x_n, & j=n+1.\end{cases}$$

问题 3. §2.T7

假定要造零阶 Bessel 函数

$$I_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin t)\mathrm{d}t$$

的等距数值表, 问如何选取表距 h, 使利用这个数值表作线性插值时, 误差不超过 10^{-6}.

设 $x=a,x=b$ 是两个相邻的插值节点, 即 $h=b-a$, 利用 Lagrange 插值公式可以得到插值多项式 p_1, 以及误差 $r_1=p_1-I_0(x)$, 其中

$$r_1(x)=\frac{I_0^{(2)}(\xi)}{2!}w_2(x),\xi\in(a,b),$$

且

$$\left|I_0^{(2)}(x)\right|\le 1;$$

$$|w_2(x)|=|(x-a)(x-b)|\le\frac{(b-a)^2}{4}=\frac{h^2}{4};$$

于是若想要误差不超过 10^{-6}, 需要:

$$|r_1(x)|\le\frac{h^2}{8}\le 10^{-6}.$$

即 $h\le 2\sqrt{2}\times 10^{-3}$ 时, 误差不超过 10^{-6}, 不妨取 $h=1\times 10^{-3}$.