数值分析理论作业

学号：231501025 ，姓名：张树威

问题 1. §5.T3

假设函数 $g(x)$ 和 $h(x)$ 在区间 [a,b] 上连续, 证明初值问题

$$y' = g(x)y + h(x), \quad y(a) = \eta$$

在 [a,b] 上有唯一解, 并且对任何初始值都是适定的.

设 $f(x,y) = g(x)y + h(x)$, 则初值问题变为

$$y' = f(x,y), \quad y(a) = \eta,$$

或

$$y(x) = \eta + \int_a^x f(t, y(t))\mathrm{d}t,$$

只需要证明函数 $z = f(x,y)$ 满足 Lipschitz 条件.

任取 $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, 则

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |g(x)||y_1 - y_2| \le L|y_1 - y_2|,$$

其中 $L = \max\limits_{x\in[a,b]} |g(x)|$. 因此该初值问题有唯一解且对任何初始值都是适定的.

问题 2. §5.T4

试用 Taylor 级数法 (取 $p = 3$) 导出求解初值问题

$$y' = \frac{1}{1+y^2}, \quad y(0) = 1$$

的数值方法.

记 $h = 1/N, t_n = nh, n = 0, 1, \cdots, N$, 根据 Taylor 公式, 在 $t_n, n = 0, 1, \cdots, N-1$ 处有

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) - h\frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{2!}h^2\frac{2y}{(1+y^2)^3} + \frac{1}{3!}h^3\frac{2-10y^2}{(1+y^2)^5} + O\left(\frac{1}{N^4}\right),$$

记 $\Phi(t,y,h) = \dfrac{1}{1+y^2} - h\dfrac{y}{(1+y^2)^3} + \dfrac{1}{3}h^2\dfrac{1-5y^2}{(1+y^2)^5}$, 则 $y(t_{n+1}) \approx y(t_n) + h\Phi(t_n, y(t_n), h)$.

因此求解微分方程变为求解如下差分方程初值问题:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h), \quad n = 0, 1, \cdots, N-1, \\ y_0 = 1. \end{cases}$$

局部离散误差为 $O(h^4)$, 全局离散误差为 $O(h^3)$.