# 数值分析理论作业

学号: 231501025, 姓名: 张树威

**问题 1. §2.T12**

设 $f(x)$ 为 $x$ 的 $k$ 次多项式, $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 为互不相同的实数, 且 $k > m$. 试证明 $f[x, x_1, \cdots, x_m]$ 为 $x$ 的 $k-m$ 次多项式.

**证明：** 用数学归纳法, 当 $m = 1$ 时,

$$f[x, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x},$$

其中分子为 $k$ 次多项式, 代入 $x = x_1$ 可得分子为 0, 故分子含有因式 $(x - x_1)$, 与分母约分后可得 $f[x, x_1]$ 为 $k-1$ 次多项式.

假设当 $m = n - 1$ 时结论成立.

当 $m = n$ 时, 由递推定义:

$$f[x, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f[x_1, \cdots, x_n] - f[x, x_1, \cdots, x_{n-1}]}{x_n - x},$$

其中分子为一个 $k - n + 1$ 次多项式, 代入 $x = x_n$ 可得分子为 0, 故分子含有因式 $(x - x_n)$, 与分母约分后可得 $f[x, x_1, \cdots, x_n]$ 为 $x$ 的 $k - n$ 次多项式.

因此 $f[x, x_1, \cdots, x_m]$ 为 $x$ 的 $k - m$ 次多项式.

**问题 2. §2.T13**

设 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, 函数 $f(x)\in C^1[a,b]$, 则差商

$$g(x)=f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n]$$

关于 $x$ 在 $[a,b]$ 上连续, 这里 $g(x)$ 在节点 $x_k$ 上的值是通过重节点差商来定义的. 进一步, 若 $f(x)\in C^2[a,b]$, 则有

$$g'(x)=f[x,x,x_0,x_1.\cdots,x_n],$$

且 $g'(x)$ 也关于 $x$ 在 $[a,b]$ 上连续.

**证明：**记

$$h_i(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(x_i)}{x-x_i} & x\neq x_i,\\ f'(x_i) & x=x_i.\end{cases}$$

由于 $f(x)\in C^1[a,b]$, 可知 $h_i(x)\in C^0[a,b]$.

$$\begin{aligned}
g(x)&=\frac{f(x)}{\prod_{j=0}^n(x-x_j)}+\sum_{i=0}^n\frac{f(x_i)}{(x_i-x)\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}\\
&=\frac{f(x)}{\prod_{j=0}^n(x-x_j)}\sum_{i=0}^n\frac{\prod_{j\neq i}(x-x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}+\sum_{i=0}^n\frac{f(x_i)}{(x_i-x)\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}\\
&=\sum_{i=0}^n\frac{f(x)}{(x-x_i)\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}+\sum_{i=0}^n\frac{f(x_i)}{(x_i-x)\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}\\
&=\sum_{i=0}^n\frac{f(x)-f(x_i)}{(x-x_i)\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}\\
&=\sum_{i=0}^n\frac{h_i(x)}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}
\end{aligned}$$

由 $h(x)$ 的连续性可知 $g(x)$ 的连续性.

当 $x\neq x_i$, $h_i'(x)=\dfrac{f'(x)(x-x_i)-(f(x)-f(x_i))}{(x-x_i)^2}$, 且

$$\begin{aligned}
h_i'(x_i)&=\lim_{x\to x_i}\frac{h_i(x)-h_i(x_i)}{x-x_i}=\lim_{x\to x_i}\frac{\frac{f(x)-f(x_i)}{x-x_i}-f'(x_i)}{x-x_i}\\
&=\lim_{x\to x_i}\frac{f(x)-f(x_i)-f'(x_i)(x-x_i)}{(x-x_i)^2}\\
&=\lim_{x\to x_i}\frac{f'(x)-f'(x_i)}{2(x-x_i)}=\frac{f''(x_i)}{2}
\end{aligned}$$

故 $g(x)$ 可导, 且其导函数为:

$$g'(x)=\lim_{y\to x}\frac{g(y)-g(x)}{y-x}=\lim_{y\to x}\frac{f[y,x_0,x_1,\cdots,x_n]-f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n]}{y-x}=f[x,x,x_0,x_1.\cdots,x_n]$$

且 $\lim\limits_{x\to x_i}h_i'(x)=\dfrac{f''(x_i)}{2}=h_i'(x_i)$, 可知 $h'\in C^0$, 即 $g'\in C^0$.

**问题 3. §2.T15**

试证明, 对 $k=0,1,\cdots,n-2$ 恒有等式

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i^k}{(i-1)\cdots(i-i+1)(i-i-1)\cdots(i-n)}=0.$$

这是下面 T17 的特殊情况, 令 $x_i=i, i=0,1,\cdots,n$ 即得, 故只证 T17.

**问题 4. §2.T17**

设 $n$ 次多项式 $f(x)$ 有互异的 $n$ 个实根 $x_1,x_2,\cdots,x_n$. 证明

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^k}{f'(x_i)}=\begin{cases}0, & 0\le k\le n-2;\\ a_n^{-1}, & k=n-1,\end{cases}$$

其中 $a_n$ 为 $f(x)$ 的首项系数.

**证明：**由于 $n$ 次多项式 $f(x)$ 有 $n$ 个互异的实根 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 故

$$f(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n),$$

对任意一个函数 $g(x)$ 有 $n-1$ 阶差商

$$g[x_1,\cdots,x_n]=\sum_{i=1}^{n}\frac{g(x_i)}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}=a_n\sum_{i=1}^{n}\frac{g(x_i)}{f'(x_i)}.$$

令 $g(x)=x^k, 0\le k\le n-1$, 对其进行 Newton 插值得到唯一的多项式

$$p_n(x)=b_0+b_1(x-x_1)+\cdots+b_{n-1}(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}),$$

差商和 Newton 插值系数的关系可以知道 $b_{n-1}=g[x_1,\cdots,x_n]$, 且由于 $g(x)$ 本身是不超过 $n-1$ 次的多项式, 故 $g(x)=p_n(x)$, 比较 $x^{n-1}$ 的系数得到:

$$b_{n-1}=\begin{cases}0, & 0\le k\le n-1;\\ 1, & k=n-1,\end{cases}$$

于是有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^k}{f'(x_i)}=a_n^{-1}g[x_1,\cdots,x_n]=a_n^{-1}b_{n-1}=\begin{cases}0, & 0\le k\le n-2;\\ a_n^{-1}, & k=n-1.\end{cases}$$

**问题 5. §2.T19**

已知 $f(x)$ 的函数值 $f(0)=3, f(1)=3, f(2)=\frac{5}{2}$. 试求 Newton 差商插值多项式 $N_2(x)$. 再增加 $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{13}{4}$. 求 $N_3(x)$.

计算差商:

$$
\begin{gathered}
f[x_0]=f(x_0)=3,\\
f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{3-3}{1-0}=0,\\
f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=-\frac{1}{4},
\end{gathered}
$$

由 Newton 插值多项式系数和差商的关系可知:

$$
\begin{aligned}
N_2(x)&=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)\\
&=3-\frac{1}{4}x(x-1).
\end{aligned}
$$

增加 $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{13}{4}$ 后,

$$
f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\sum_{i=0}^{3}\frac{f(x_i)}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}=-\frac{7}{6},
$$

于是：

$$
\begin{aligned}
N_3(x)&=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\\
&=3-\frac{1}{4}x(x-1)-\frac{7}{6}x(x-1)(x-2).
\end{aligned}
$$

**问题 6. §2.T20**

已知函数 $y=f(x)$ 的观测数据为 $f(0)=1, f(1)=2, f(2)=4, f(3)=8$, 试分别求出三次 Newton 前差和后差插值多项式, 并求 $f(0.25)$ 和 $f(2.5)$ 的近似值.

由题中所给数据可以做出前差表和后差表, 放到了题后.

由 Newton 前差插值公式:

$$
\begin{aligned}
N_3(x)&=N_3(0+s)\\
&=f(x_0)+s\Delta f(x_0)+\frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0)+\frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f(x_0)\\
&=1+s+\frac{s(s-1)}{2}+\frac{s(s-1)(s-2)}{6}
\end{aligned}
$$

由 Newton 后差插值公式:

$$
\begin{aligned}
N_3(x)&=N_3(3+t)\\
&=f(x_3)+t\nabla f(x_3)+\frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 f(x_3)+\frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\nabla^3 f(x_3)\\
&=8+4t+t(t+1)+\frac{t(t+1)(t+2)}{6}
\end{aligned}
$$

由于 0.25 接近 0, 2.5 接近 3, 故分别用前差和后差插值公式:

$$
f(0.25)\approx N_3(0+0.25)=\frac{155}{128},
$$

$$f(2.5) \approx N_3(3+(-0.5)) = \frac{91}{16}.$$

| $f(x_n)$ | $\Delta f(x_n)$ | $\Delta^2 f(x_n)$ | $\Delta^3 f(x_n)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | |
| 4 | 4 | | |
| 8 | | | |

表 1: 前差表

| $f(x_n)$ | $\nabla f(x_n)$ | $\nabla^2 f(x_n)$ | $\nabla^3 f(x_n)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 2 | 1 | | |
| 4 | 2 | 1 | |
| 8 | 4 | 2 | 1 |

表 2: 后差表