数值分析理论作业

学号：231501025 ，姓名：张树威

问题 1. §4.T2

求 x_1, x_2, 使得计算积分 $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ 的求积公式

$$I_2(f) = \frac{1}{3}[f(-1) + 2f(x_1) + 3f(x_2)]$$

的代数精确度至少为 2.

根据代数精确度的定义, 需要 $I(x^j) = I_2(x^j), j = 0, 1, 2$, 即

$$0 = \frac{1}{3}(-1 + 2x_1 + 3x_2)$$
$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3}(1 + 2x_1^2 + 3x_2^2)$$

可解得: $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{6}}{5}, x_2 = \dfrac{3-2\sqrt{6}}{15}$, 或 $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{6}}{5}, x_2 = \dfrac{3+2\sqrt{6}}{15}$.

问题 2. §4.T3

已知计算积分 $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ 的求积公式

$$I_2(f) = C[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)]$$

的代数精确度是 3, 试确定系数 C 和节点 x_1, x_2 和 x_3.

根据代数精确度的定义, 需要 $I(x^j) = I_2(x^j), j = 0, 1, 2, 3$, 即

$$2 = 3C$$
$$0 = C(x_1 + x_2 + x_3)$$
$$\frac{2}{3} = C(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$
$$0 = C(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)$$

可解得: $C = \dfrac{2}{3}, x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, x_2 = 0, x_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

问题 3. §4.T8

试导出 $n = 1, 2, 3$ 时, 开型 Newton-Cotes 型求积公式.

在有限区间 $[a, b]$, 取等距节点 $x_i = a + ih, i = 0, 1, 2, \ldots, n+1$, 其中 $h = \dfrac{b-a}{n+1}$, 令

$$l_i(x) = \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}, i = 1, \cdots, n.$$

定义开型 Newton-Cotes 型求积公式:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i), \quad A_i = \int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x.$$

当 $n=1$ 时, 取节点 $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$, 此时 $l_i(x)=1$. 则

$$A_1 = \int_a^b 1\mathrm{d}x = b-a.$$

从而可得

$$J_1(f) = (b-a)f\left(\frac{b-a}{2}\right).$$

当 $n=2$ 时, 取节点 $x_1 = \dfrac{2a+b}{3}, x_2 = \dfrac{a+2b}{3}$, 则

$$A_1 = \int_a^b l_1(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}, \quad A_2 = \int_a^b l_2(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}.$$

从而可得

$$J_2(f) = \frac{b-a}{2}\left[f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + f\left(\frac{a+2b}{3}\right)\right].$$

当 $n=3$ 时, 取节点 $x_1 = \dfrac{3a+b}{4}, x_2 = \dfrac{a+b}{2}, x_3 = \dfrac{a+3b}{4}$, 则

$$A_1 = \frac{2}{3}(b-a), \quad A_2 = \frac{1}{3}(a-b), \quad A_3 = \frac{2}{3}(b-a).$$

从而可得

$$J_3(x) = \frac{b-a}{3}\left[2f\left(\frac{3a+b}{4}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 2f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right]$$

问题 4. §4.T11

设函数 $f(x)$ 在 $[-h,h]$ 上充分可导, 试推导求积公式

$$\int_0^h f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}[3f(0) - f(-h)]$$

的余项.

对 $(-h, f(-h)), (0, f(0))$ 插值, 得到 $l(x) = \dfrac{f(0)-f(-h)}{h}x + f(0)$, 则

$$\int_0^h l(x)\mathrm{d}x = \frac{h}{2}[3f(0) - f(-h)],$$

由 Lagrange 插值多项式的余项可知: $\exists \xi \in (-h, 0)$, 使得

$$\int_0^h f(x)\mathrm{d}x - \frac{h}{2}[3f(0)-f(-h)] = \int_0^h f(x) - l(x)\mathrm{d}x = \int_0^h \frac{f^{(2)}(\xi)}{2}(x+h)x\mathrm{d}x = \frac{5}{12}f^{(2)}(\xi)h^3$$

问题 5. §4.T16

应用复合梯形公式计算积分

$$I(f)=\int_1^2 \frac{1}{2x}\mathrm{d}x,$$

要求误差不超过 10^{-3}. 并把计算的结果与准确值 $I(f)$ 比较.

令 $f(x)=\dfrac{1}{2x}$, 则

$$f'(x)=-\frac{1}{2x^2},\quad f''(x)=\frac{1}{x^3},$$

由于 $f''(x)$ 在 $[1,2]$ 恒正且单调递减, 可知

$$\max_{x\in[1,2]}|f''(x)|=f''(1)=1,$$

所以误差

$$|E_n(f)|\le\frac{h^2}{12}\le 10^{-3},$$

故 $h\le\sqrt{1.2}\times 0.1$, 取 $h=0.1$ 即满足条件, 此时的梯形公式:

$$T(f)=\frac{h}{2}\sum_{i=1}^{10}[f(1+(i-1)h)+f(1+ih)]\approx 0.34689,$$

而 $I=\dfrac{1}{2}\ln 2\approx 0.34657$, 所以 $|T(f)-I(f)|\le 10^{-3}$ 满足题意.

问题 6. §4.T18

试用复合 Simpson 公式计算积分

$$I(f)=\int_1^2 3\ln x\mathrm{d}x,$$

要求误差不超过 10^{-5}, 并把计算结果与准确值比较.

令 $f(x)=3\ln x$, 则 $f^{(4)}(x)=-\dfrac{18}{x^4}$, 由于 $f^{(4)}(x)$ 在 $[1,2]$ 上恒负且单调递增, 故

$$\max_{x\in[1,2]}|f^{(4)}(x)|=|f^{(4)}(1)|=18,$$

所以误差

$$|E_n(f)|\le\frac{18h^4}{2880}\le 10^{-5},$$

只需要 $h\le 0.2$, 取 $h=0.1$, 此时的 Simpson 公式:

$$S(f)=\frac{h}{3}\left[f(a)+f(b)+4\sum_{i=1}^{5}f(1+(2i-1)h)+2\sum_{i=1}^{4}f(a+2ih)\right]\approx 1.1588802,$$

而 $I(f)=6\ln 2-3\approx 1.1588831$, 所以 $|S(f)-I(f)|\le 10^{-5}$ 满足题意.

问题 7. §4.T21

设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有六阶连续导数, $p_5(x)\in R[x]_6$ 是满足插值条件

$$p_5(x_i)=f(x_i),\quad p_5'(x_i)=f'(x_i),\quad x_i=-1,0,1$$

的 Hermite 插值多项式. 试证明

$$\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x\approx\int_{-1}^{1}p_5(x)\mathrm{d}x=\frac{7}{15}f(-1)+\frac{16}{15}f(0)+\frac{7}{15}f(1)+\frac{1}{16}f'(-1)-\frac{1}{15}f'(1);$$

并推导其余项.

设 $p_5(x)=f(0)+f'(0)x+ax^2+bx^3+cx^4+dx^5$, 代入题目条件可得

$$\begin{cases}f(0)-f'(0)+a-b+c-d=f(-1)\\ f(0)+f'(0)+a+b+c+d=f(1)\\ f'(0)-2a+3b-4c+5d=f'(-1)\\ f'(0)+2a+3b+4c+5d=f'(1)\end{cases}$$

此时 $\int_{-1}^{1}p_5(x)\mathrm{d}x=2f(0)+\frac{2}{3}a+\frac{2}{5}c$, 解上面的方程组可得

$$a=f(-1)-2f(0)+f(1)+f'(-1)-f'(1),\quad c=-\frac{1}{2}f(-1)+f(0)-\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{4}f'(-1)+\frac{1}{4}f'(1).$$

所以 $\int_{-1}^{1}p_5(x)\mathrm{d}x=\frac{7}{15}f(-1)+\frac{16}{15}f(0)+\frac{7}{15}f(1)+\frac{1}{16}f'(-1)-\frac{1}{15}f'(1)$, 由 Hermite 插值多项式的余项可知

$$\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\int_{-1}^{1}p_5(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}(x+1)^2x^2(x-1)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{4752}f^{(6)}(\xi),$$

其中 $\xi\in(-1,1)$.

问题 8. §4.T22

试在 Euler-Maclaurin 公式 (4.4.6) 中令 $[a,b]=[0,n],h=1$, 推导出公式

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n}f(j)=\int_0^n f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}[f(0)+f(n)]+\frac{1}{12}[f'(n)-f'(0)]\\ -\frac{1}{720}[f'''(n)-f'''(0)]-\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 f^{(4)}((i-1+t)h)q_4(t)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

以及计算

$$\sum_{j=1}^{n}j,\quad\sum_{j=1}^{n}j^2,\quad\sum_{j=1}^{n}j^3$$

的公式.

取等距节点 $x_i = i-1, i = 1, 2, \cdots, n$, 则 Euler-Maclaurin 公式为

$$\begin{aligned}\int_0^n f(x)\mathrm{d}x =& T(f) - q_2(0)[f'(n) - f'(0)] - q_4(0)[f'''(n) - f'''(0)] - \sum_{i=1}^{n}\int_0^1 f^{(4)}(i-1+t)q_4(t)\mathrm{d}t \\ =& \sum_{j=1}^{n-1} f(j) + \frac{1}{2}[f(0)+f(n)] - \frac{1}{12}[f'(n) - f'(0)] + \frac{1}{720}[f'''(n) \\ & - f'''(0)] - \sum_{i=1}^{n}\int_0^1 f^{(4)}(i-1+t)q_4(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

整理可得题目要求的式子. 分别把 $f(x) = x, x^2, x^3$ 代入上式可得

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} j &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}n(n+1) \\ \sum_{j=0}^{n} j^2 &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{1}{6}n(2n+1)(n+1) \\ \sum_{j=1}^{n} j^3 &= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\end{aligned}$$

问题 9. §4.T22

用 Romberg 积分法计算下列积分的近似值 $T_{3,3}$

$$(2)\int_0^1 x^2 e^x \mathrm{d}x$$

与积分准确值比较

利用 Romberg 积分法可以得到下面的表格

i	$T_{i,1}$	$T_{i,2}$	$T_{i,3}$
1	1.35914		
2	0.88566	0.72783	
3	0.76060	0.71891	0.71832

而积分准确值为 $\int_0^1 x^2 e^x \mathrm{d}x = e - 2 \approx 0.71828$, 所以用 $T_{3,3}$ 估计积分值的误差为

$$\left|\int_0^1 x^2 e^x \mathrm{d}x - T_{3,3}\right| \approx 3.81715 \times 10^{-5}.$$

问题 10. §4.T26

证明 $T_{j,j} = \alpha_1 T_{1,1} + \alpha_2 T_{2,1} + \cdots + \alpha_j T_{j,1}$, 其中 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_j = 1, j \geq 2$.

已知

$$T_{m,j} = \frac{4^{j-1}T_{m,j-1} - T_{m-1,j-1}}{4^{j-1}-1}, j = 2, 3, \cdots (m \geq j)$$

故 $T_{m,j}$ 是 $T_{m,j-1}$ 和 $T_{m-1,j-1}$ 的线性组合, 且系数和为 1. 由于把 $T_{j,j}$ 分解为 $T_{i,1}(i=1,2,\cdots,j)$ 的过程就是不断用上面的式子, 故每一步都会得到其系数和为 1, 结论成立.

问题 11. §4.T28

应用自适应 Simpson 求积法计算积分 $I=\int_0^3 x\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$. 要求误差不超过 10^{-2}.

在 $[0,3]$ 中, $S(0,3)=10.15174, S(0,3/2)=1.61354, S(3/2,3)=8.58773$, 误差估计式:

$$|S(0,3)-S(0,3/2)-S(3/2,3)|=0.04953<0.15,$$

在误差容限之内, 故积分估计值 $I\approx S(0,3/2)+S(3/2,3)=10.20127$.