数值分析理论作业

学号：231501025 ，姓名：张树威

问题 1. §4.T34

给出计算积分

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1+x^2)\mathrm{d}x$$

的两点插值求积公式, 使它的代数精确度为 3, 并导出求积公式的离散误差.

先计算 $[-1,1]$ 上, 关于权函数 $W(x)=1+x^2$ 的直交多项式. 由于要求代数精确度为 3, 只需要计算 2 次直交多项式. 利用递推公式

$$\begin{cases} p_{k+1}=(x-\alpha_k)p_k(x)-\beta_k p_{k-1}(x) \\ p_0(x)=1, p_{-1}=0 \\ \alpha_k=\dfrac{(xp_k(x),p_k(x))}{(p_k(x),p_k(x))} \\ \beta_k=\begin{cases} 0, & k=0 \\ \dfrac{(p_k(x),p_k(x))}{(p_{k-1}(x),p_{k-1}(x))}, & k\geq 1 \end{cases} \\ k=0,1,2 \end{cases}$$

得到 $p_2(x)=x^2-\dfrac{2}{5}$, 将其零点 $x_1=-\dfrac{\sqrt{10}}{5}, x_2=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ 作为求积节点, 得到 Gauss 型求积公式

$$I_1(f)=A_1f(x_1)+A_2f(x_2),$$

其中

$$A_1=\int_{-1}^{1}\frac{x-x_2}{x_1-x_2}W(x)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$$

$$A_2=\int_{-1}^{1}\frac{x-x_1}{x_2-x_1}W(x)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$$

则求积公式 $I_1(f)=\dfrac{4}{3}\left[f\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)+f\left(\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)\right]$, 其离散误差为

$$E_1(f)=C_1f^{(4)}(\xi), \quad \xi\in(-1,1)$$

由于 C_1 对所有的 f 都成立, 故对 x^4 也成立, 有

$$E_1(x^4)=\int_{-1}^{1}x^4W(x)\mathrm{d}x-I_1(x^4)=\frac{136}{525}=24C_1,$$

得到 $C_1=\dfrac{17}{1575}$, 即离散误差为 $E_1(f)=\dfrac{17}{1575}f^{(4)}(\xi), \xi\in(-1,1)$.

问题 2. §4.T35

求 Gauss 型求积公式

$$\int_0^1 f(x)\ln x\mathrm{d}x \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

的系数 A_1, A_2 以及节点 x_1, x_2, 并导出离散误差.

可以求得 $[0,1]$ 上关于权函数 $W(x) = \ln x$ 的直交多项式为

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1 \\ p_1(x) &= x - \frac{1}{4} \\ p_2(x) &= x^2 - \frac{5}{7}x + \frac{17}{252} \end{aligned}$$

$p_2(x) = 0$ 的两个根为 $x_1 = \dfrac{15-\sqrt{106}}{42}, x_2 = \dfrac{15+\sqrt{106}}{42}$, 于是

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^1 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}\ln x\mathrm{d}x = -\frac{7+2\sqrt{106}}{2\sqrt{106}} \\ A_2 &= \int_0^1 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\ln x\mathrm{d}x = \frac{7-2\sqrt{106}}{2\sqrt{106}} \end{aligned}$$

所以求积公式为

$$\int_0^1 f(x)\ln x\mathrm{d}x \approx -\frac{7+2\sqrt{106}}{2\sqrt{106}} f\left(\frac{15-\sqrt{106}}{42}\right) + \frac{7-2\sqrt{106}}{2\sqrt{106}} f\left(\frac{15+\sqrt{106}}{42}\right)$$

其离散误差为 $E_1(f) = C_1 f^{(4)}(\xi), \xi \in (0,1)$, 代 $f(x) = x^4$, 得到:

$$E_1(x^4) = \int_0^1 x^4 \ln x\mathrm{d}x - I_1(x^4) = 24C_1$$

于是 $C_1 = \dfrac{647}{5443200}$, 离散误差为 $E_1(f) = \dfrac{647}{5443200} f^{(4)}(\xi), \xi \in (0,1)$.

问题 3. §4.T37

应用三点 Gauss-Legendre 求积公式计算积分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x}\mathrm{d}x$.

作 $x = \dfrac{t+1}{2}$, 利用 Gauss-Legendre 求积公式:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x}\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \frac{\sin\frac{t+1}{2}}{t+3}\mathrm{d}t \approx \frac{1}{9}\left[5\frac{\sin\frac{-\sqrt{\frac{3}{5}}+1}{2}}{-\sqrt{\frac{3}{5}}+3} + \frac{8\sin 1/2}{3} + 5\frac{\sin\frac{\sqrt{\frac{3}{5}}+1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{5}}+3}\right] \approx 0.28425$$

而 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x}\mathrm{d}x \approx 0.284227$, 所以用 Gauss-Legendre 求积公式得到的积分值绝对误差小于 10^{-4}.

问题 4

作适当变换, 应用 Gauss-Chebyshev 求积公式计算积分的

$$I = \int_1^3 x\sqrt{4x - x^2 - 3}\mathrm{d}x$$

准确值.

作变换 $x = t + 2$, 于是 $I = \int_{-1}^{1}(t+2)\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1}\frac{(t+2)(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$, 令 $f(t) = (t+2)(1-t^2)$, 要想得到准确值, 需要代数精确度达到 3, 因此需要应用两点以上的 Gauss-Chebyshev 求积公式, 选择两点的 Gauss-Chebyshev 求积公式:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{2}\left[f\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) + f\left(\cos\frac{3\pi}{4}\right)\right] \\ &= \frac{\pi}{2}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+2\right)\frac{1}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+2\right)\frac{1}{2}\right] \\ &= \pi \end{aligned}$$

经计算是该积分的精确值.