数值分析理论作业

学号：231501025 ，姓名：张树威

问题 1. §2.T21

已知 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 的端点满足

$$f(1)=1, f(2)=8, f'(1)=3, f'(2)=12,$$

求 Hermite 插值多项式 $H_3(x)$ 以及 $f(1.5)$ 的近似值.

首先计算 Lagrange 基本插值多项式及其导数:

$$l_1(x)=\frac{x-2}{1-2}=-x+2,$$

$$l_1'(x)=-1,$$

$$l_2(x)=\frac{x-1}{2-1}=x-1,$$

$$l_2'(x)=1.$$

其次计算多项式 $A_i(x)$ 和 $B_i(x)(i=1,2)$:

$$A_1(x)=[1-2(x-1)l_1'(1)]l_1^2(x)=(2x-1)(x-2)^2,$$

$$A_2(x)=[1-2(x-2)l_2'(2)]l_2^2(x)=(-2x+5)(x-1)^2,$$

$$B_1(x)=(x-1)l_1^2(x)=(x-1)(x-2)^2,$$

$$B_2(x)=(x-2)l_2^2(x)=(x-2)(x-1)^2.$$

最后得到:

$$\begin{aligned}H_3(x)&=A_1(x)+8A_2(x)+3B_1(x)+12B_2(x)\\&=(2x-1)(x-2)^2+8(-2x+5)(x-1)^2+3(x-1)(x-2)^2+12(x-2)(x-1)^2,\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}f(1.5)&\approx 0.5+8\times 0.5+3\times 0.125+12\times 0.125\\&=6.375.\end{aligned}$$

问题 2. §2.T24

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有四阶连续导数, 试构造三次多项式 $H_3(x)$, 使其满足插值条件,

$$H_3(a)=f(a), H_3'(a)=f'(a), H_3''(a)=f''(a), H_3''(b)=f''(b),$$

并求其余项 $f(x)-H_3(x)$ 的表达式.

注意到 $f(a)+f'(a)(x-a)+\dfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2$ 满足前三个插值条件, 不妨设

$$H_3(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + h(x),$$

则 $h(x)$ 需满足

$$h(a) = h'(a) = h''(a) = 0, h''(b) = f''(b).$$

则 $h(x) = \beta(x-a)^3$, 其中 $\beta = \dfrac{f''(b) - f''(a)}{6(b-a)}$. 于是

$$H_3(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f''(b) - f''(a)}{6(b-a)}(x-a)^3.$$

记 $r(x) = f(x) - H_3(x)$, 对 $f(x)$ 作带 Lagrange 余项的 Taylor 公式展开:

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{f^{(3)}(a)}{6}(x-a)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}(x-a)^4 - \frac{f''(b) - f''(a)}{6(b-a)}(x-a)^3 \\ &= \left[\frac{f^{(3)}(a)}{6} - \frac{f''(b) - f''(a)}{6(b-a)}\right](x-a)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}(x-a)^4, \xi \in (a,x). \end{aligned}$$

若设 $r(x) = K(x)(x-a)^3[x+(a-2b)]$, 为求 $K(x)$ 构造辅助函数 $F(t) = r(t) - K(x)(t-a)^3[t+(a-2b)]$. $F(t)$ 有 a, x 两个零点, 由 Rolle 中值定理可知, $F'(t)$ 在 (a,b) 有一个零点, 而 a 也是 $F'(t)$ 的零点, 从而 F'' 在 (a,b) 有一个零点, 而 a,b 也是 $F''(t)$ 的零点, 从而 $F^{(3)}(t)$ 有两个零点, 同理 $F^{(4)}(t)$ 有一个零点, 即 $\exists \eta \in (a,b)$, 使得

$$0 = F^{(4)}(\eta) = f^{(4)}(\eta) - 24K(x),$$

所以 $K(x) = \dfrac{f^{(4)}(\eta)}{24}$, 于是 $f(x) - H_3(x) = \dfrac{f^{(4)}(\eta)}{24}(x-a)^3[x-(2b-a)]$.

问题 3. §2.T25

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有四阶连续导数, 试构造三次多项式 $H_3(x)$, 使其满足插值条件,

$$H_3(a) = f(a), H_3(b) = f(b), H_3(c) = f(c), H_3'(c) = f'(c),$$

其中 $c = \dfrac{a+b}{2}$, 并求其余项 $f(x) - H_3(x)$ 的表达式.

记 $x_0 = a, x_1 = b, x_2 = c$, 则 $\sum\limits_{i=0}^{2} f(x_i) l_i(x)$ 满足前三个插值条件, 其中 $l_i(x)$ 是 Lagrange 基本多项式. 不妨设

$$H_3(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i) l_i(x) + h(x),$$

则 $h(x)$ 满足条件:

$$h(a) = h(b) = h(c) = 0, h'(c) = f'(c) - \frac{f(a) - f(b)}{a-b},$$

设 $h(x)=\beta(x-a)(x-b)(x-c)$, 可解得 $\beta=\dfrac{f'(c)}{(c-a)(c-b)}$. 于是

$$\begin{aligned}H_3(x)&=\sum_{i=0}^{2}f(x_i)l_i(x)+\frac{f'(c)}{(c-a)(c-b)}(x-a)(x-b)(x-c)\\&=\sum_{i=0}^{2}f(x_i)l_i(x)+f'(c)(x-c)l_2(x)\end{aligned}$$

设 $f(x)-H_3(x)=K(x)(x-a)(x-b)(x-c)^c$, 为求 $K(x)$ 引入辅助函数

$$F(t)=f(t)-H_3(t)-K(x)(t-a)(t-b)(t-c)^2,$$

则 a,b,c,x 是 $F(t)$ 的四个互异零点, 由 Rolle 中值定理可知 $F'(t)$ 在它们之间有 3 个零点, 又有 $F'(c)=0$, 用 Rolle 中值定理可得, $F''(t)$ 在 (a,b) 上有三个互异零点, 进一步 $F^{(3)}(t)$ 在 (a,b) 上有两个零点, $F^{(4)}(t)$ 有一个零点. 即 $\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$0=F^{(4)}(\xi)=f^{(4)}(\xi)-24K(x),$$

于是 $K(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{24}$, 即 $f(x)-H_3(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{24}(x-a)(x-b)(x-c)^2$.

记 $h=\dfrac{b-a}{2},x=a+th,t\in[0,2]$, 则

$$|(x-a)(x-b)(x-c)^2|=h^3|t(t-1)^2(t-2)|=h^3|(t-1)^2[(t-1)^2-1]|\le\frac{h^3}{4},$$

则误差 $|f(x)-H_3(x)|\le\dfrac{M_4}{96}$, 其中 $M_4=sup_{a\le x\le b}|f^{(4)}(x)|$.