数值计算第一周理论作业

学号：231501025 ，姓名：张树威

问题 1. §1.T1

应用梯形公式

$$T=\frac{b-a}{2}(f(b)-f(a))$$

计算积分

$$I=\int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x$$

的近似值，在整个计算过程中按四舍五入规则取五位小数，计算中产生的误差的主要原因是离散或是舍入？为什么？

根据梯形公式算出积分 I 的近似解为

$$\bar{I}=\frac{1+e^{-1}}{2}=0.6839397\cdots$$

保留五位小数为 0.68394, 由舍入产生的误差为 0.5×10^{-5}，而积分 I 的实际值为

$$I=1-e^{-1}$$

则离散产生的误差

$$\left|\bar{I}-I\right|=\frac{3-e}{2e}\approx 0.0518\cdots \gg 0.5\times10^{-5}$$

因此产生误差的主要原因是离散.

问题 2. §2.T3

证明：若近似数 $\bar{a}=\pm a_0a_1\cdots a_m.a_{m+1}\cdots a_n$ 的相对误差有估计式

$$\left|\frac{a-\bar{a}}{\bar{a}}\right|\le\frac{1}{2(a_s+1)}\times10^{-(n-s)},$$

其中 $a_s\neq0$ 是 $\bar{a}$ 的第一位有效数字，则 $\bar{a}$ 至少具有 $n+1-s$ 位有效数字.

证明：要证明 $\bar{a}$ 至少具有 $n+1-s$ 位有效数字，可以证明误差界不超过 a_n 所在数位的半个单位，即

$$|a-\bar{a}|\le 0.5\times10^{-(n-m)}.$$

由题中给的估计式可以得到

$$\begin{aligned}|a-\bar{a}|&\le\frac{|\bar{a}|}{2(a_s+1)}\times10^{-(n-s)}\\&=\frac{a_s.a_{s+1}\cdots a_n}{2(a_s+1)}\times10^{-(n-m)}\\&\le\frac{1}{2}\times10^{-(n-m)}\end{aligned}$$

因此 $\bar{a}$ 至少具有 $n+1-s$ 位有效数字. □

问题 3. §1.T4

设 $\bar{x} = 23.3123$，$\bar{y} = 23.3122$ 且 $|e_{\bar{x}}| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}$，$|e_{\bar{y}}| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}$. 问差 $\bar{x} - \bar{y}$ 最多有几位有效数字？

需要看 $|(x-y) - (\bar{x} - \bar{y})| = |e_{\bar{x}} - e_{\bar{y}}|$ 的范围. 由三角不等式可得：

$$0 \leq |e_{\bar{x}} - e_{\bar{y}}| \leq |e_{\bar{x}}| + |e_{\bar{y}}| \leq 10^{-4}$$

而 $\bar{x} - \bar{y} = 1 \times 10^{-4}$，可知 $\bar{x} - \bar{y}$ 最多有一位有效数字.

问题 4. §1.T5

当 $x(>0)$ 很大时，如何计算 (1) $\arctan(x+1) - \arctan x$; (2) $\ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$; (3) $\frac{\tan x}{x - \sqrt{x^2-1}}$，可使其误差较小.

由于接近的同号数相减时会使计算结果的误差变得很大，所以应避免相减相消，同时也要避免很小的数做分母。可以进行以下操作来减小误差：

$$\arctan(x+1) - \arctan x = \arctan \frac{1}{1+x+x^2}$$

$$\ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) = -\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\frac{\tan x}{x - \sqrt{x^2-1}} = \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\tan x.$$