数值分析理论作业

学号：231501025 ，姓名：张树威

问题 1. §2.T26

已知函数 $y = f(x)$ 在若干点的函数值:

$$f(1) = 1, f(2) = 3, f(4) = 4, f(5) = 2,$$

且 $f''(1) = f''(5) = 0$. 试求 $f(x)$ 的自然三次样条函数 $S_N(x)$, 并求 $f(3)$ 的近似值.

根据自然三次样条插值的公式可以计算: $d_i = 6f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]$, 得 $d_2 = -3, d_3 = -5$, 接着解线性方程组:

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

得到 $\alpha_2 = -\frac{14}{15}, \alpha_3 = -\frac{34}{15}$, 由题意知 $\alpha_1 = \alpha_4 = 0$. 代入公式可得:

$$S(x) = \begin{cases} -\frac{7}{45}(x-1)^3 + 1 + 2(x-1) + \frac{7}{35}(x-1), & x \in [1,2]; \\ -\frac{7}{90}(4-x)^3 - \frac{17}{90}(x-2)^3 + 3 + \frac{1}{2}(x-2) + \frac{4}{9}(x-2) + \frac{28}{45}, & x \in [2,4]; \\ -\frac{7}{45}(5-x)^3 + 4 - 2(x-4) - \frac{17}{45}(x-4) + \frac{17}{45}, & x \in [4,5]. \end{cases}$$

则 $f(3) \approx S(3) = \frac{43}{10}$.

问题 2. §2.T27

已知 $f(x)$ 在若干点的函数值: $f(1) = 1, f(2) = 3, f(4) = 4, f(5) = 2$, 以及 $f'(1) = 1, f'(5) = -4$. 求完备三次样条插值函数 $S_C(x)$, 并计算 $f(1.5)$ 和 $f(3)$ 的近似值.

由前一题和题目的条件可知: $d_1 = 6, d_2 = -3, d_3 = -5, d_4 = -12$. 解线性方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & \\ & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ & & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix},$$

再代入公式可得

$$S_C(x) = \begin{cases} -\frac{1}{21}(x-1)^3 + \frac{11}{21}(2-x)^3 + \frac{18}{7}(x-1) + \frac{10}{21}, & x \in [1,2] \\ -\frac{12}{42}(x-2)^3 - \frac{1}{42}(4-x)^3 + \frac{15}{7}(x-2) - \frac{6}{7}, & x \in [2,4] \\ -\frac{13}{21}(5-x)^3 - \frac{4}{21}(x-4)^3 - \frac{24}{7}(x-4) + \frac{118}{21}, & x \in [4,5] \end{cases}$$

则 $f(1.5) \approx S_C(1.5) = \frac{51}{28}$, $f(3) \approx S_C(3) = 5$.

问题 3. §2.T28

函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一次连续可微, 给定节点组 $a=x_1<x_2<\cdots<x_{n+1}=b$, 及节点处函数值:$f(x_j)=f_j, j=1,\cdots,n+1$. 设函数

$$S(x)=\begin{cases} S_1(x), & x\in[x_1,x_2],\\ \cdots & \cdots\\ S_i(x), & x\in[x_i,x_{i+1}],\\ \cdots, & \cdots\\ S_n(x), & x\in[x_n,x_{n+1}]\end{cases}$$

一次连续可微, 且 $S_i(x), i=1,2,\cdots,n$ 是不高于二次的多项式, 满足

$$S(x_j)=f_j, j=1,\cdots,n+1,$$

则称 $S(x)$ 为函数 $f(x)$ 的“二次样条插值函数”. 试给出一种边界条件下的 $S(x)$ 的计算方法, 注意设计的算法应采用尽可能少的未知量 (如以节点处的导数为未知量).

设 $S_i(x)=a_ix^2+b_ix+c_i$, 则共需要求 $3n$ 个未知量. 假设已知插值节点处的函数值及导数值, 得到

$$S_i(x_i)=f_i, S_i(x_{i+1})=f_{i+1}, i=1,2,\cdots,n,$$

$$S_i'(x_{i+1})=S_{i+1}'(x_{i+1}), i=1,2,\cdots,n-1,$$

再加上边界条件 $S_1'(x_1+0)=f'(x_1+0)$, 共有 $3n$ 个方程. 下面尝试解这个方程组.

在 $[x_1,x_2]$ 上, 有方程组

$$\begin{cases} a_1x_1^2+b_1x_1+c_1=f_1,\\ a_1x_2^2+b_1x_2+c_1=f_2,\\ 2a_1x_1+b_1=f'(x_i+0).\end{cases}$$

其系数矩阵的行列式 $(x_1-x_2)^2>0$, 故该方程有唯一解, 即能求得 $S_1(x)$ 的表达式, 然后在第二段利用两个函数值和 $S_2'(x_2+0)=S_1'(x_2-0)$ 可以求得 $S_2(x)$, 以此类推可以求得 $S(x)$.

Algorithm 1 给定初始节点导数值的二次样条插值函数各段的系数

Require: 节点组 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$, 函数值 $f_1,f_2,\cdots,f_{n+1}$, 导数值 df_1
Ensure: $S(x)$ 各段的系数 $a_i,b_i,c_i,i=1,2,\cdots,n$

function SPLINE$(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1},f_1,f_2,\cdots,f_{n+1},df_1)$
  for $k=1,2,\cdots,n$ **do**
    $\Delta_i\leftarrow(x_{i+1}-x_i)^2$;
    $A_i\leftarrow(x_{i+1}-x_i)df_i+(f_{i+1}-f_i)$;
    $B_i\leftarrow(x_{i+1}^2-x_i^2)df_i-2x_i(f_{i+1}-f_i)$;
    $C_i\leftarrow x_i^2x_{i+1}df_i+x_{i+1}^2f_i+2x_i^2f_{i+1}-2x_ix_{i+1}f_i-x_i^2f_{i+1}-x_ix_{i+1}^2df_i$;
    $a_i\leftarrow A_i/\Delta_i, b_i\leftarrow B_i/\Delta_i, c_i\leftarrow C_i/\Delta_i$;
    if $i\neq n$ **then**
      $df_{i+1}\leftarrow 2a_ix_{i+1}+b_i$;
    end if
  end for
  输出 $a_i,b_i,c_i,i=1,2,\cdots,n$, 停机.
end function

问题 4. §3.T2

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 试证明 $f(x)$ 的 n 次最佳一致逼近多项式是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的某一个 Lagrange 插值多项式.

设 $f(x)$ 的 n 次最佳一致逼近多项式为 $p(x)$, 由 Chebychev 定理可知 $f(x)-p(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在一个至少有 $n+2$ 个点构成的交错点组, 则 $f(x)-p(x)$ 在 $[a,b]$ 上至少有 $n+1$ 个零点, 记为 $x_0<x_1<\cdots<x_n$, 即 $p(x_i)=f(x_i), i=0,1,\cdots,n$. 对 $f(x)$ 在 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 上插值, 得到 n 次 Lagrange 插值多项式 $L_n(x)$, 也有 $L_n(x_i)=f(x_i), i=0,1,\cdots,n$. 于是 $p(x_i)=L_n(x_i), i=0,1,\cdots,n$, 而 $p(x)$ 和 $L_n(x)$ 是至多 n 次多项式, 故 $p(x)=L(x)$. 即 $f(x)$ 的 n 次最佳一致逼近多项式是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的某一个 Lagrange 插值多项式.

问题 5. §3.T4

记 $H_2=Span\{1,x,x^2\}$ 是二次多项式空间. 求 $p(x)\in H_2$ 使得 $\max\limits_{x\in[0,2]}|x^3-p(x)|$ 达到最小.

$\max\limits_{x\in[0,2]}|x^3-p(x)| = \max\limits_{x\in[-1,1]}|(x+1)^3-p(x+1)|$, 而在 $[-1,1]$ 上, 无穷范数最小的三次首一多项式为 $\frac{1}{4}T_3(x)=x^3-\frac{3}{4}x$, 于是 $(x+1)^3-p(x+1)=x^3-\frac{3}{4}x$, 可以解得

$$p(x)=3x^2+\frac{15}{4}x+1.$$

问题 6. §3.T6

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 试证 $f(x)$ 的零次最佳一致逼近多项式是

$$p(x)=\frac{M+m}{2},$$

其中

$$M=\max_{a\le x\le b}f(x), m=\min_{a\le x\le b}f(x).$$

设 $p(x)=C$ 是 $f(x)$ 的零次最佳一致逼近多项式, 则 $m-C\le f(x)-p(x)\le M-C$, 所以

$$\max_{0\le x\le 2}|f(x)-p(x)|=\max\{|m-C|,|M-C|\},$$

而 $\max\{|m-C|,|M-C|\}=\frac{|m-C|+|M-C|}{2}+\frac{||m-C|-|M-C||}{2}\ge\frac{|(m-C)-(M-C)|}{2}=\frac{M-m}{2}$. 取等当且仅当 $(m-C)(M-C)\le 0$ 且 $|m-C|=|M-C|$, 即 $C=\frac{M+m}{2}$. 所以 $f(x)$ 的零次最佳一致逼近多项式为 $p(x)=\frac{M+m}{2}$.