数值分析理论作业

学号：231501025 ，姓名：张树威

问题 1. §5.T28

应用算法 5.1 解初值问题

$$y' = \frac{1}{t}(y^2 + y), \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = -2.$$

取步长 $h = 0.5$.

其精确解为 $y = -\dfrac{2t}{2t-1}$, 应用 Adams 四阶预测校正算法得到

t	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
计算值	-2.0000	-1.4898	-1.3551	-1.2785	-1.2004
准确值	-2.0000	-1.5000	-1.3333	-1.2500	-1.2000
绝对误差	0.0000	0.0102	0.0217	0.0285	0.0004
相对误差	0.0000	0.0069	0.0160	0.0223	0.0003

问题 2. §5.T30

试用待定系数法导出 Milne 方法的校正公式:

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}(f(t_{n+1}, y_{n+1}) + 4f(t_n, y_n) + f(t_{n-1}, y_{n-1})).$$

设其形式为

$$y_{n+1} = ay_n + by_{n-1} + h(cf_{n+1} + df_n + ef_{n-1}),$$

展成 Taylor 级数有

$$\begin{aligned} &y(t+h) - ay(t) - by(t-h) - h(cy'(t+h) + dy'(t) + ey'(t-h)) \\ =&c_0 y(t) + c_1 hy'(t) + c_2 h^2 y''(t) + c_3 h^3 y^{(3)}(t) + c_4 h^4 y^{(4)}(t) + \cdots \end{aligned}$$

可以得到

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 - a - b \\ c_1 &= 1 + b - c - d - e \\ c_2 &= \frac{1}{2} - \frac{b}{2} - c + e \\ c_3 &= \frac{1}{6} - \frac{b}{6} - \frac{c}{2} - \frac{e}{2} \\ c_4 &= \frac{1}{24} - \frac{b}{24} - \frac{c}{6} + \frac{e}{6} \end{aligned}$$

令 $c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 0$, b 为自由参数, 可得

$$\begin{aligned} a &= 1 - b \\ c &= \frac{5-b}{12} \\ d &= \frac{2(1+b)}{3} \\ e &= \frac{5b-1}{12} \end{aligned}$$

令 $b = 1$ 得 $a = 0, c = 1/3, d = 4/3, e = 1/3$, 于是得到

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}(f(t_{n+1}, y_{n+1}) + 4f(t_n, y_n) + f(t_{n-1}, y_{n-1})),$$

且误差为 $-\frac{1}{90}h^4 f(\xi)$.

问题 3. §5.T32

证明 m 阶齐次线性差分方程至少有 m 个线性无关解.

对于一个初始条件 $y(0) = y_0, y(1) = y_1, \cdots, y(m-1) = y_{m-1}$, 由递推式可知方程

$$a_0(n)y(n) + a_1 y(n+1) + \cdots + a_m(n)y(n+m) = 0$$

有唯一解 $(a_m(n) \neq 0)$, 令 $y_i^{(j)} = \delta_i^j (i = 0, 1, \cdots, m-1; j = 0, 1, \cdots, m-1)$, 可以构成 m 组初始条件, 即得到了满足条件的 m 个解 $y_1(n), y_2(n), \cdots, y_m(n)$, 且这些解构成的行列式为 1, 故其线性无关. 因此 m 阶齐次线性差分方程至少有 m 个线性无关解.

问题 4. §5.T35(2)

求差分方程

$$y(n+2) + 2y(n+1) + 2y(n) = 2^n$$

的通解.

先解齐次部分的通解, 其特征方程为 $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$, 解特征方程得到特征根 $\lambda_1 = -1 + i, \lambda_2 = -1 - i$. 故通解为 $y = 2^{\frac{n}{2}}\left(C_1 \cos\frac{3n\pi}{4} + C_2 \sin\frac{3n\pi}{4}\right)$. 注意到 $\tilde{y} = \frac{1}{10}2^n$ 为其的一个特解. 因此该差分方程的通解为

$$y = \frac{1}{10}2^n + 2^{\frac{n}{2}}\left(C_1 \cos\frac{3n\pi}{4} + C_2 \sin\frac{3n\pi}{4}\right),$$

其中 $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.