数值分析理论作业

学号：231501025 ，姓名：张树威

问题 1. §3.T7

对下列给定的权函数 $W(x)$, 求出区间 $[-1,1]$ 上的正交多项式系得前三个多项式 $p_0(x), p_1(x), p_2(x)$

$$(1)W(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}};\quad (2)W(x)=1+x^2.$$

(1) 对 $Span\{1,x,x^2\}$ 用 Schmidz 正交化方法:

$$p_0(x)=1;$$

$$p_1(x)=x-\frac{(x,p_0)}{(p_0,p_0)}p_0(x)=x;$$

$$p_2(x)=x^2-\frac{(x^2,p_0)}{(p_0,p_0)}p_0(x)-\frac{(x^2,p_1)}{(p_1,p_1)}p_1(x)=x^2-\frac{\sqrt{2}}{2\ln(1+\sqrt{2})}.$$

(2) 对 $Span\{1,x,x^2\}$ 用 Schmidz 正交化方法:

$$p_0(x)=1;$$

$$p_1(x)=x-\frac{(x,p_0)}{(p_0,p_0)}p_0(x)=x;$$

$$p_2(x)=x^2-\frac{(x^2,p_0)}{(p_0,p_0)}p_0(x)-\frac{(x^2,p_1)}{(p_1,p_1)}p_1(x)=x^2-\frac{8}{5}.$$

问题 2. §3.T8

设 $q_n(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上关于权函数 $W(x)$ 得首一 n 次正交多项式. 令

$$A_n=\begin{pmatrix}\alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & & \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \alpha_{n-2} & \sqrt{\beta_{n-1}} \\ & & & \sqrt{\beta_{n-1}} & \alpha_{n-1}\end{pmatrix}, n\geq 1,$$

其中 α_k,β_k 为递推关系式 (3.3.3) 中的系数. 试证, 矩阵 A_n 的特征值是正交多项式 $q_n(x)$ 的根.

要证矩阵 A_n 的特征值是正交多项式 $q_n(x)$ 的根, 只需证 A_n 的特征多项式为 $q_n(x)$. 即证 $\det(xI_n-A_n)=q_n(x)$, 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时, $\det(xI_1-A_1)=x-\alpha_0=q_1(x)$, 当 $n=1$ 时, $\det(xI_2-A_2)=x^2-(\alpha_0+\alpha_1)x+\alpha_0\alpha-1-\beta_1=q_2(x)$ 均满足. 假设 $n\leq k-1$ 时均成立, 当 $n=k$ 时,

$$
\begin{aligned}
\det(xI_n - A_n) &= \det\begin{pmatrix} x-\alpha_0 & -\sqrt{\beta_1} & & & \\ -\sqrt{\beta_1} & x-\alpha_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & x-\alpha_{n-2} & -\sqrt{\beta_{n-1}} \\ & & & -\sqrt{\beta_{n-1}} & x-\alpha_{n-1} \end{pmatrix} \\
&= (x-\alpha_{n-1})\det\begin{pmatrix} x-\alpha_0 & -\sqrt{\beta_1} & & \\ -\sqrt{\beta_1} & x-\alpha_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & x-\alpha_{n-2} \end{pmatrix} + \sqrt{\beta_{n-1}}\det\begin{pmatrix} x-\alpha_0 & -\sqrt{\beta_1} & & \\ -\sqrt{\beta_1} & x-\alpha_1 & & \\ & \ddots & \ddots & -\sqrt{\beta_{n-2}} \\ & & & -\sqrt{\beta_{n-1}} \end{pmatrix} \\
&= (x-\alpha_{n-1})q_{n-1}(x) - \beta_{n-1}\det\begin{pmatrix} x-\alpha_0 & -\sqrt{\beta_1} & & \\ -\sqrt{\beta_1} & x-\alpha_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & x-\alpha_{n-3} \end{pmatrix} \\
&= (x-\alpha_{n-1})q_{n-1}(x) - \beta_{n-1}q_{n-2}(x) = q_n(x)
\end{aligned}
$$

于是 A_n 的特征多项式为 $q_n(x)$, 矩阵 A_n 的特征值是正交多项式 $q_n(x)$ 的根.

问题 3. §3.T9

设

$$X_n(x,y) = T_{n+1}(x)T_n(y) - T_{n+1}(y)T_n(x),$$

其中 $T_n(x)$ 表示 Chebyshev 多项式. 证明

$$X_n(x,y) = 2(x-y)T_n(x)T_n(y) + X_{n-1}(x,y), \quad n \geq 1,$$

并导出

$$\frac{1}{2}X_n(x,y) = (x-y)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} T_k(x)T_k(y)\right].$$

由 Chebyshev 多项式递推关系: $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ 可得:

$$
\begin{aligned}
X_n(x,y) &= T_{n+1}(x)T_n(y) - T_{n+1}(y)T_n(x) \\
&= (2xT_n(x) - T_{n-1}(x))T_n(y) - (2yT_n(y) - T_{n-1}(y))T_n(x) \\
&= 2(x-y)T_n(x)T_n(y) + T_n(x)T_{n-1}(y) - T_n(y)T_{n-1}(x) \\
&= 2(x-y)T_n(x)T_n(y) + X_{n-1}(x,y),
\end{aligned}
$$

即 $X_n(x,y) - X_{n-1}(x,y) = 2(x-y)T_n(x)T_n(y)$, 两边同时求和得:

$$\sum_{k=1}^{n}(X_k(x,y) - X_{k-1}(x,y)) = \sum_{k=1}^{n} 2(x-y)T_k(x)T_k(y),$$

即

$$X_n(x,y) - X_0(x,y) = \sum_{k=1}^{n} 2(x-y)T_k(x)T_k(y),$$

把 $X_0(x,y) = T_1(x)T_0(y) - T_1(y)T_0(x) = x - y$ 代入, 整理即得:

$$\frac{1}{2}X_n(x,y) = (x-y)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} T_k(x)T_k(y)\right].$$

问题 4. §3.T13

求函数 $f(x) = \arctan x$ 在 $[-1,1]$ 上的三次 Chebyshev 插值多项式.

由插值节点公式: $x_j = \cos\left(\frac{2j+1}{8}\pi\right)$, $j = 0,1,2,3,$, 计算得:

$$x_0 = \cos\left(\frac{1}{8}\pi\right) = 0.9239;$$

$$x_1 = \cos\left(\frac{3}{8}\pi\right) = 0.3827;$$

$$x_2 = \cos\left(\frac{5}{8}\pi\right) = -0.3827;$$

$$x_3 = \cos\left(\frac{7}{8}\pi\right) = -0.9239.$$

以 x_0, x_1, x_2, x_3 为节点做 $f(x)$ 的三次 Newton 插值多项式, 得:

$$N_3(x) = -0.7458 + 0.7027(x-x_0) + 0.1932(x-x_0)(x-x_1) - 0.2275(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

问题 5. §3.T16

试证明: 在所有首项系数为 1 的 n 次多项式集合 Q_n 中, (3.3.22) 中 $\bar{P}_n(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上与零的平方误差最小, 即

$$\int_{-1}^{1} |\bar{P}_n(x)|^2 \mathrm{d}x = \min_{p_n(x)\in Q_n(x)} \int_{-1}^{1} |p_n(x)|^2 \mathrm{d}x.$$

设 $p_n(x) \in Q_n$, 则存在至多 $n-1$ 阶多项式 $q_{n-1}(x)$ 使得 $p_n(x) = \bar{P}_n(x) + q_{n-1}(x)$, 则 $\bar{P}_n(x)$ 与 $q_{n-1}(x)$ 正交, 即

$$\int_{-1}^{1} |p_n(x)|^2 \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} |\bar{P}_n(x) + q_{n-1}(x)|^2 \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} |\bar{P}_n(x)|^2 \mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} |q_{n-1}(x)|^2 \mathrm{d}x,$$

显然有 $\int_{-1}^{1} |q_{n-1}(x)|^2 \mathrm{d}x \geq 0$, 故 $\int_{-1}^{1} |p_n(x)|^2 \mathrm{d}x \geq \int_{-1}^{1} |\bar{P}_n(x)|^2 \mathrm{d}x$, 且取等条件为 $p_n(x) = \bar{P}_n(x)$.

故

$$\int_{-1}^{1} |\bar{P}_n(x)|^2 \mathrm{d}x = \min_{p_n(x)\in Q_n(x)} \int_{-1}^{1} |p_n(x)|^2 \mathrm{d}x.$$

问题 6. §3.T18(2)

求函数 $f(x)$ 在指定区间上的一次和二次最佳平方逼近多项式 (分别取函数系 $\{1,x\}$ 和 $\{1,x,x^2\}$).

$(2) f(x)=\ln x, \quad [1,2]$

记 $\varphi_0(x)=1,\varphi_1(x)=x,\varphi(x)=x^2$, 则

$$(\varphi_i,\varphi_j)=\int_1^2 x^i x^j \mathrm{d}x=\frac{1}{i+j+1}, i,j=0,1,2$$

$$(f,\varphi_k)=\int_1^2 x^k\ln x\mathrm{d}x=\begin{cases}2\ln 2-1, & k=0;\\ 2\ln 2-\dfrac{3}{4}, & k=1;\\ \dfrac{8}{3}\ln 2-\dfrac{7}{9}, & k=2.\end{cases}$$

对于一次最佳平方逼近多项式 $g_1(x)=a_0+a_1x$, 有法方程

$$\begin{cases}a_0+\dfrac{1}{2}a_1=2\ln 2-1,\\ \dfrac{1}{2}a_0+\dfrac{1}{3}a_1=2\ln 2-\dfrac{3}{4}.\end{cases}$$

解方程可得

$$\begin{cases}a_0=-4\ln 2+\dfrac{1}{2}=-2.2726,\\ a_1=12\ln 2-3=5.3178.\end{cases}$$

故一次最佳平方逼近多项式 $g_1(x)=-2.2726+5.3178x$.

对于二次最佳平方逼近多项式 $g_2(x)=b_0+b_1x+b_2x^2$, 有法方程

$$\begin{cases}b_0+\dfrac{1}{2}b_1+\dfrac{1}{3}b_2=2\ln 2-1,\\ \dfrac{1}{2}b_0+\dfrac{1}{3}b_1+\dfrac{1}{4}b_2=2\ln 2-\dfrac{3}{4},\\ \dfrac{1}{3}b_0+\dfrac{1}{4}b_1+\dfrac{1}{5}b_2=\dfrac{8}{3}\ln 2-\dfrac{7}{9}.\end{cases}$$

解方程可得

$$\begin{cases}b_0=26\ln 2-\dfrac{16}{3}=12.6885,\\ b_1=-168\ln 2+32=-84.4487,\\ b_2=180\ln 2-35=89.7665.\end{cases}$$

故二次最佳平方逼近多项式 $g_2(x)=12.6885-84.4487x+89.7665x^2$.

问题 7. §3.T21

求 $f(x)\arcsin x$ 的 Chebyshev 级数.

$f(x)$ 的 Chebyshev 级数为

$$f(x)=\frac{1}{2}c_0+\sum_{k=1}^{\infty}c_kT_k(x),$$

其中 $T_k(x)=\cos(n\arccos x)$ 是 Chebyshev 多项式,

$$c_k=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_k(x)f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$$

令 $x=\cos t$, 则

$$\begin{aligned}c_k&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(kt)\arcsin(\cos t)\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}u\cos\left[k\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\right]\mathrm{d}u\\&=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}u(-1)^{k/2}\cos(ku)\mathrm{d}u, & k\text{为偶数};\\ \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}u(-1)^{(k-1)/2}\sin(ku)\mathrm{d}u, & k\text{为奇数}.\end{cases}\end{aligned}$$

由于对称性 $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}u\cos(ku)\mathrm{d}u=0$, 由分部积分可知性 $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}u\sin(ku)\mathrm{d}u=(-1)^k\frac{2}{k^2}$, 故当 k 为奇数时,

$$c_k=\frac{2}{\pi}(-1)^{(k-1)/2}(-1)^k\frac{2}{k^2}=(-1)^{(3k-1)/2}\frac{4}{k^2\pi},$$

于是 $f(x)$ 的 Chebyshev 级数为

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}T_{2n-1}(x).$$