

# 数值分析理论作业

学号: 231501025, 姓名: 张树威

## 问题 1. §5.T38(2)(4)

判断解初值问题

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

的下列多步法

$$(1) \quad y_{n+2} + y_{n+1} - 2y_n = h(2f_{n+1} + f_n);$$

$$(2) \quad y_{n+1} - y_{n-1} = \frac{h}{3}(3f_n - f_{n-1} + 4f_{n-2})$$

是否收敛? 为什么?

对于 (1),  $\rho(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2$  以及  $\sigma(\lambda) = 2\lambda + 1$ , 于是  $\rho(1) = 0$  以及  $\rho'(0) = \sigma(0)$ , 即该方法相容. 而  $\rho(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda - 1)$ , 有一个根在单位圆之外, 所以该方法不稳定, 于是不收敛.

对于 (2),  $\rho(\lambda) = \lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 1)$ , 以及  $\sigma(\lambda) = \lambda^2 - \frac{1}{3}\lambda + \frac{4}{3}$ , 由于  $\rho(\lambda)$  满足特征根条件, 可知该方法稳定, 又因为  $\rho(1) = 0$  和  $\rho'(1) = \sigma(1)$ , 其相容. 故该方法收敛.

## 问题 2. §5.T39

证明 Hamming 方法的校正公式是强稳定的.

Hamming 方法的校正公式:

$$y_{n+1} = \frac{1}{8}[9y_n - y_{n-2} + 3h(f_{n+1} + 2f_n - f_{n-1})]$$

其特征多项式  $\rho(\lambda) = \lambda^3 - \frac{9}{8}\lambda^2 + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}(\lambda - 1)(8\lambda^2 - \lambda - 1)$ , 其三个根  $1, \frac{1 \pm \sqrt{33}}{16}$  除 1 外都落在单位圆内, 因此  $\rho(\lambda)$  满足强根条件, Hamming 方法的校正公式是强稳定的.