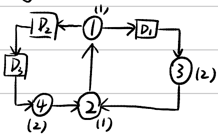
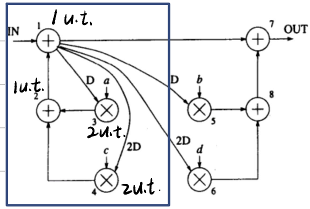
Chapter 2 迭代边界

3. 解：方框内才有环

仅考虑方框内的DFG

如下





易知 $T_\infty = \max\left\{\frac{4}{2}, \frac{4}{1}\right\} = 4$

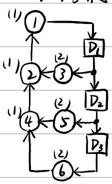
下利用 LPM 算法

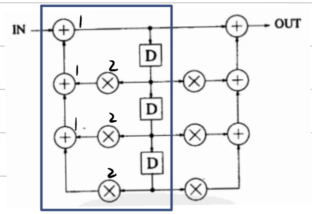
$$L^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -\infty \\ -\infty & -\infty & 0 \\ 4 & 4 & -\infty \end{bmatrix} \rightarrow L^{(2)} = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & -\infty \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow L^{(3)} = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \\ 12 & 12 & 8 \end{bmatrix}$$

则迭代边界 $T_\infty = \max\left\{\frac{8}{2}, \frac{4}{2}, \frac{4}{2}, \frac{12}{3}, \frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right\} = 4$

4. 解：仅方框内有环

故仅考虑该部分 DFG





易知 $T_\infty = \max\left\{\frac{4}{1}, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}\right\} = 4$

下用 LPM 算法计算

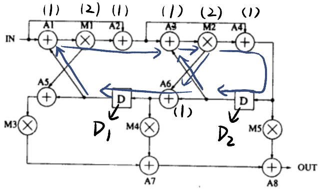
$$L^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & -\infty & 0 \\ 5 & -\infty & -\infty \end{bmatrix} \rightarrow L^{(2)} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 9 & 5 & 5 \\ 9 & 5 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow L^{(3)} = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 8 \\ 13 & 9 & 9 \\ 13 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

∴ 迭代边界 $T_\infty = \max\left\{\frac{8}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{12}{3}, \frac{9}{3}, \frac{9}{3}\right\} = 4$

6. 解：仅图中标注部分有环、

易知 $T_\infty = \max\{\frac{8}{1}, \frac{4}{1}, \frac{8}{2}\} = 8$

按图示标注 D_1, D_2



则由 LPM 算法

$$L^{(1)} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow L^{(2)} = \begin{bmatrix} 16 & 16 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$$

则迭代边界 $T_\infty = \max\{\frac{16}{2}, \frac{9}{2}\} = 8$

Chapter 3 流水线与并行处理

2.

解：乘法 2 u.t. 加法 1 u.t.

(a) 关键路径为

$M_1 \to A_2 \to M_2 \to A_1 \to M_3 \to A_3 \to A_4$

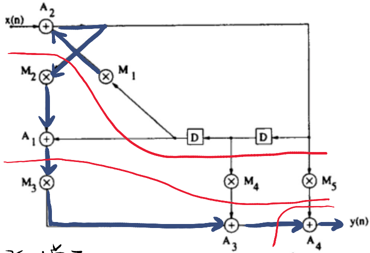
$2+1+2+1+2+1+1=10$

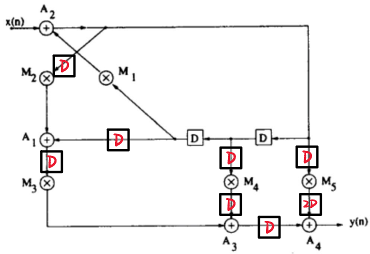
(b) 将关键路径降为 3 u.t.

在图中画红线位置各填加一个延时单元

结果如右图

共 9 个延时单元





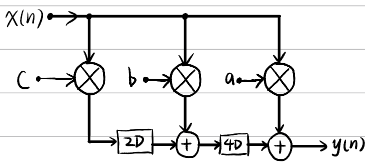
7. **考察6阶FIR滤波器**

$$y(n) = ax(n) + bx(n-4) + cx(n-6) \tag{3-45}$$

(a) 画出该滤波器的拓扑结构，使时钟周期不超过一次乘加的时间。注意不要增加新的锁存器。

(b) 对(a)中结构，画出分组规模为3时的结构。重新分配这个分组结构，使时钟周期是一次乘加时间的四分之一。其中，假定乘法计算时间是加法计算时间的3倍。

解：(a) 采用数据广播结构



(b) $y(3k) = a\,x(3k) + b\,x(3k-4) + c\,x(3k-6)$

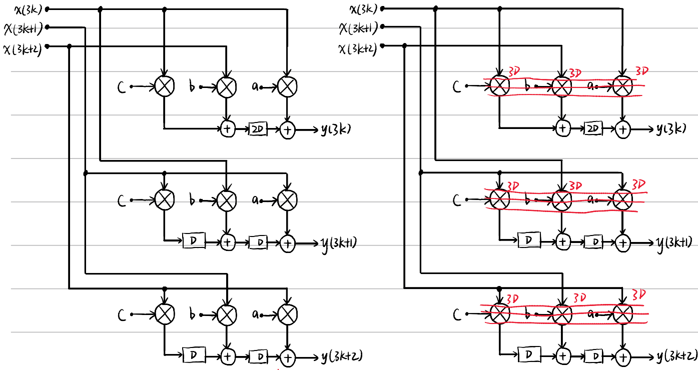
$= a\,x(3k) + b\,x(3(k-2)+2) + c\,x(3(k-2))$

$y(3k+1) = a\,x(3k+1) + b\,x(3(k-1)) + c\,x(3(k-2)+1)$

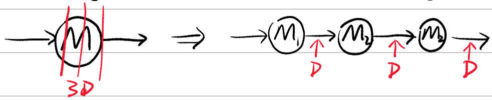
$y(3k+2) = a\,x(3k+2) + b\,x(3(k-1)+1) + c\,x(3(k-2)+2)$

结构如下左图、 $T_m = 3T_A$ 需令 $T_{clk} = \frac{1}{4}(T_m + T_A) = T_A$

需使用细粒度流水线 令 M 变为 $M_1 \to M_2 \to M_3$

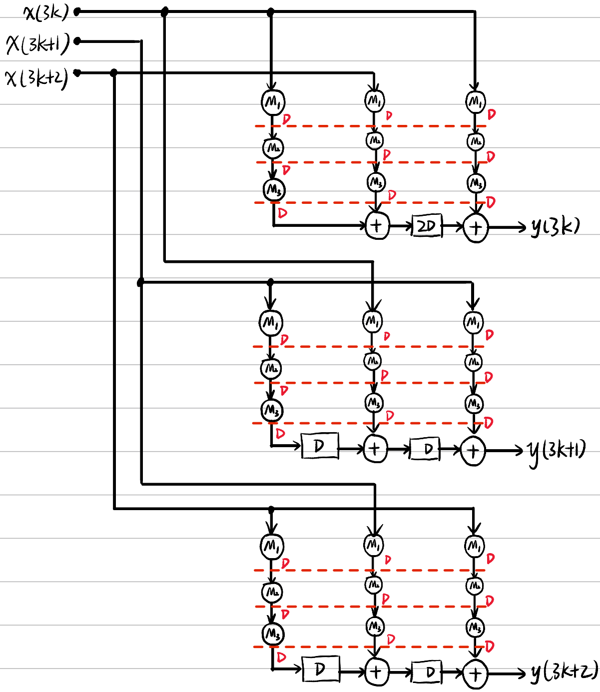


划分方式为



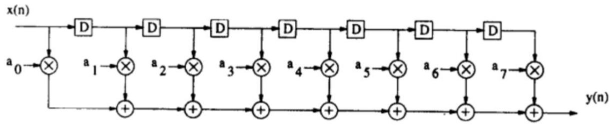
故结果为如上右图

最终为

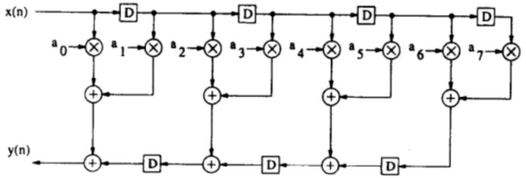


10 一个8阶FIR滤波器的两种实现如图3-24。假定乘法器的关键路径(或传播延时)为加法器的两倍，即 $T_m = 2T_a$，因而乘法器充电电容是加法器的两倍。进而假定乘法器的总电容是加法器的10倍，即 $C_m = 10C_a$。图3-24a中直接形式结构的关键路径是 $T_m + 7T_a = 9T_a$。图3-24b中的结构可以工作在较低的电源电压下，而保持时钟周期或采样周期 $9T_a$ 的约束。因此图3-24b的结构可以用来降低功耗。假如图3-24a的结构工作在4V电源电压下，工艺阈值电压为0.5V，电源电压大于1.2V以保证可容忍的噪声容限。

请问：当图3-24b所示结构达到所希望的 $9T_a$ 采样周期时，最小的工作电源电压是多少？与图3-24a的结构相比，计算图3-24b所示结构在功耗上降低的百分比。其中可以忽略在计算关键路径或功耗时延时元件的传播延时和电容。



a)



b)

解：对 a)图 $(T_m+7T_a)=\frac{(C_{c,m}+7C_{c,a})V_0}{k(V_0-V_t)^2}$ 即 $T_{seq}=9T_a=\frac{9C_{c,a}V_0}{k(V_0-V_t)^2}$

对 b)图，类似得 $T'_{seq}=\frac{4C_{c,a}\beta V_0}{k(\beta V_0-V_t)^2}$ $(V_0'=\beta V_0)$

$\therefore$ $9(\beta V_0-V_t)^2=4\beta(V_0-V_t)^2$ 其中 $\begin{cases} V_0=4V \\ V_t=0.5V \\ \beta V_0>1.2V \end{cases}$

解得 $\beta=\frac{9}{16}=0.5625>0.3$ $\therefore V_0'=\beta V_0=2.25V$

故 $\eta=\frac{P'}{P}=\beta^2\frac{C_t'}{C_t}=(\frac{9}{16})^2=31.64\%$ ($C_t'=C_t$ 均为 8M7A)

减少了 $1-\eta=68.36\%$ 的功耗

最小工作电压为 2.25V

12 计算某一计算系统的功耗降低。其中该系统采用了4级流水线和块尺寸为4的并行处理结构，并保持了与原始系统相同的采样速率。这里假定该原始系统工作在5V电源电压，CMOS工艺的阈值电压 V_t 为0.4V。计算这个并行-流水线系统与原始系统相比的功耗。该并行-流水线系统的电源电压是多少？

解：流水级数 $M=4$ 　　并行级数 $L=4$

$$\begin{cases} T = \dfrac{C_{charge} V_0}{k(V_0 - V_t)^2} \\ LT = \dfrac{C_{charge}/M \cdot \beta V_0}{k(\beta V_0 - V_t)^2} \end{cases}$$

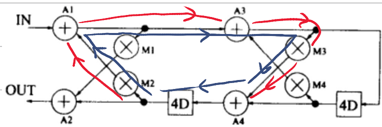
而 $\begin{cases} V_0 = 5V \\ V_t = 0.4V \end{cases}$

解得 $\beta = 0.177$ 　　功耗降低为原来的 $\beta^2 = 0.031$

$V_0' = \beta V = 0.885V$

Chapter 4 重定时

3.

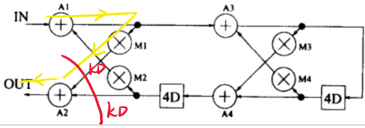


1) 迭代边界，由图中环决定

$$T_\infty = \frac{3+4}{4} = \frac{7}{4}$$

2) 关键路径 由图中红线决定 为 $3+4=7$

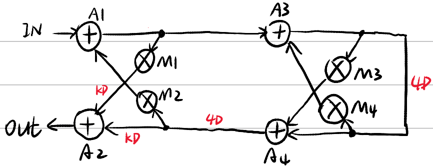
3) 黄色路径 由输入至输出无延时 故需增加流水线

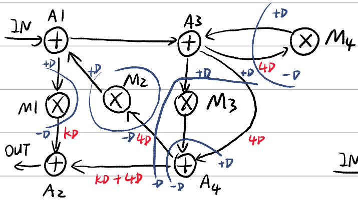


取红线作前馈割集

为方便，设割集增加k个延时

DFG重绘为

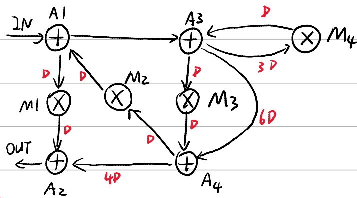




共取4次割集

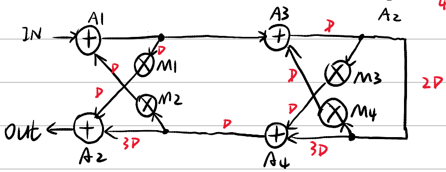
如左图蓝线

发现取 $k=2$ 即可



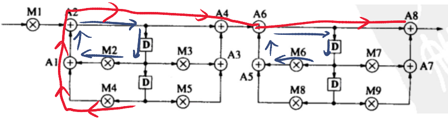
最终得到右图

与下图



5

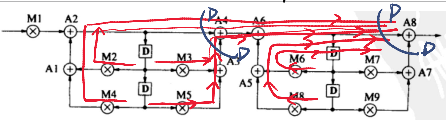
解：(a) 关键路径如图红线标注 即M4→A1→A2→A4→A6→A8 为 7u.t.



迭代边界为图中两环流

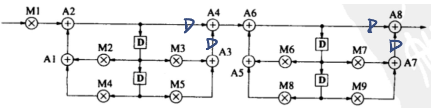
$T_\infty = \frac{4}{1} = 4$

(b) 由于 $T_\infty = 4$ 故仅需令关键路径降低为4及以下



图中红线路径均大于4

取割集为蓝线

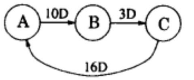


如左图

最小时钟为4u.t.

Chapter 5 展开

2.(a) $\underbrace{J=2 \text{ 展开}}$



$w=10$: $i=0$ $A_0 \to B_0$ $\lfloor \frac{0+10}{2} \rfloor = 5$

$i=1$ $A_1 \to B_1$ $\lfloor \frac{1+10}{2} \rfloor = 5$

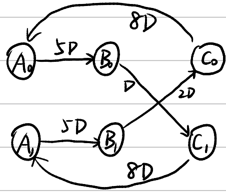
$w=3$: $i=0$ $B_0 \to C_1$ $\lfloor \frac{0+3}{2} \rfloor = 1$

$i=1$ $B_1 \to C_0$ $\lfloor \frac{1+3}{2} \rfloor = 2$

$w=16$: $i=0$ $C_0 \to A_0$ $\lfloor \frac{0+16}{2} \rfloor = 8$

$i=1$ $C_1 \to A_1$ $\lfloor \frac{1+16}{2} \rfloor = 8$

$\Rightarrow$



$\underbrace{J=5 \text{ 展开}}$

$w=10$ $i=0,1,2,3,4$ 均有 $(i+w)\%J=i$, $\lfloor \frac{i+10}{5} \rfloor = 2$ 故 $A_i \to B_i$ 上为 2D

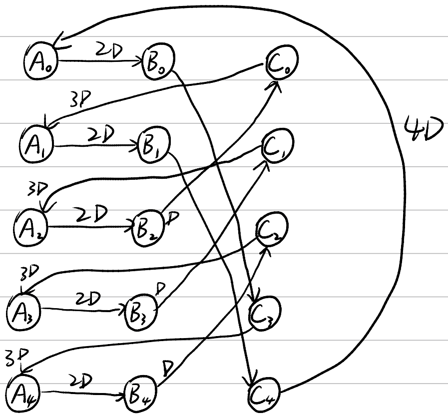
$w=3$ $i=0,1$ 有 $(i+w)\%J=i+3$, $\lfloor \frac{i+3}{5} \rfloor = 0$ 故 $B_i \to C_{i+3}$ 上为 0D

$i=2,3,4$ 有 $(i+w)\%J=i-2$, $\lfloor \frac{i+3}{5} \rfloor = 1$ 故 $B_i \to C_{i-2}$ 上为 D

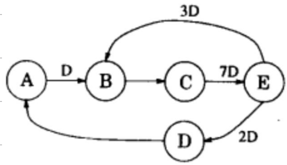
$w=16$ $i=0,1,2,3$ 有 $(i+w)\%J=i+1$, $\lfloor \frac{i+16}{5} \rfloor = 3$ 故 $C_i \to A_{i+1}$ 上为 3D

$i=4$ 有 $(i+w)\%J=i-4$, $\lfloor \frac{i+16}{5} \rfloor = 4$ 故 $C_i \to A_{i-4}$ 上为 4D

故有



(b) $J=2$



$w=1$ $\quad i=0$ $\quad A_0 \to B_{(0+1)\%2}(B_1)$ 上 $\lfloor \frac{0+1}{2} \rfloor = 0D$

$\quad i=1$ $\quad A_1 \to B_{(1+1)\%2}(B_0)$ 上 $\lfloor \frac{1+1}{2} \rfloor = 1D$

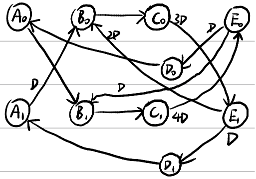
$w=2$ $\quad i=0,1$ 均有 $E_i \to D_i$ 上 $\lfloor \frac{i+2}{2} \rfloor = 1D$

$w=3$ $\quad i=0$ $\quad E_0 \to B_{(0+3)\%2}(B_1)$ 上 $\lfloor \frac{0+3}{2} \rfloor = 1D$

$\quad i=1$ $\quad E_1 \to B_{(1+3)\%2}(B_0)$ 上 $\lfloor \frac{1+3}{2} \rfloor = 2D$

$w=7$ $\quad i=0$ $\quad C_0 \to E_{(0+7)\%2}(E_1)$ 上 $\lfloor \frac{0+7}{2} \rfloor = 3D$

$\quad i=1$ $\quad C_1 \to E_{(1+7)\%2}(E_0)$ 上 $\lfloor \frac{1+7}{2} \rfloor = 4D$



故最终为右图

$J=5$

$w=1$ $\quad i=0,1,2,3$ 有 $(i+w)\%J = i+1$ 故 $A_i \to B_{i+1}$ 上 $\lfloor \frac{i+w}{J} \rfloor = 0D$

$\quad i=4$ 有 $(i+w)\%J = i-4$ 故 $A_i \to B_{i-4}$ 上 $\lfloor \frac{i+w}{J} \rfloor = 1D$

$w=2$ $\quad i=0,1,2$ 有 $(i+w)\%J = i+2$ 故 $E_i \to D_{i+2}$ 上 $\lfloor \frac{i+w}{J} \rfloor = 0D$

$\quad i=3,4$ 有 $(i+w)\%J = i-3$ 故 $E_i \to D_{i-3}$ 上 $\lfloor \frac{i+w}{J} \rfloor = 1D$

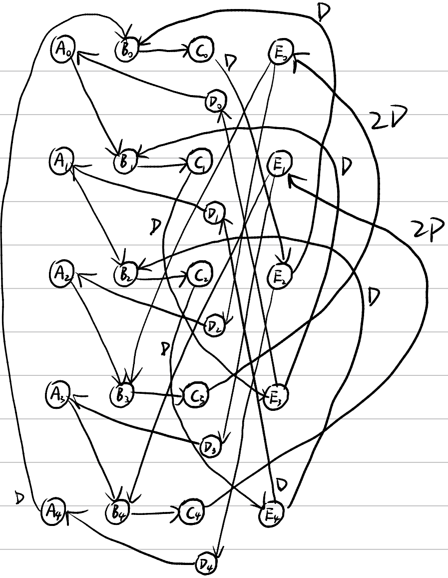
$w=3$ $\quad i=0,1$ 有 $(i+w)\%J = i+3$ 故 $E_i \to B_{i+3}$ 上 $\lfloor \frac{i+w}{J} \rfloor = 0D$

$\quad i=2,3,4$ 有 $(i+w)\%J = i-2$ 故 $E_i \to B_{i-2}$ 上 $\lfloor \frac{i+w}{J} \rfloor = 1D$

$w=7$ $\quad i=0,1,2$ 有 $(i+w)\%J = i+2$ 故 $C_i \to E_{i+2}$ 上 $\lfloor \frac{i+w}{J} \rfloor = 1D$

$\quad i=3,4$ 有 $(i+w)\%J = i-3$ 故 $C_i \to E_{i-3}$ 上 $\lfloor \frac{i+w}{J} \rfloor = 2D$

故最终得到



7、

迭代算法:

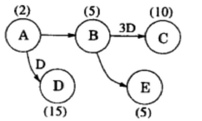
迭代，直到 $T_{crit} < JT$

{

$$J = \left\lceil \frac{T_{crit}}{T} \right\rceil$$

T_{crit} = J 阶展开DFG的关键路径

}



解: $J=2$ 时 存在 $D_1 \to A_0$ 路径为17 $T_{crit} \geq 17$

故 $T_{crit} \geq JT = 16$ 不成立

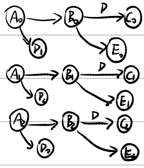
考虑 $J=3$

$w=1$ $i=0,1$ 有 $(i+w)\%J = i+1$ 故 $A_i \to D_{i+1}$ 上 $\lfloor \frac{i+w}{J} \rfloor = 0D$

$i=2$ 有 $(i+w)\%J = i-2$ 故 $A_i \to D_{i-2}$ 上 $\lfloor \frac{i+w}{J} \rfloor = 1D$

$w=3$ 时 有 $(i+w)\%J = i$ 故 $B_i \to C_i$ 上 $\lfloor \frac{i+w}{J} \rfloor = 1D$

故最终

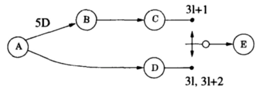


(D的下标作了修改)

故 $T_{crit} = 17 \leq 3 \times 8$

故 J最小值为3

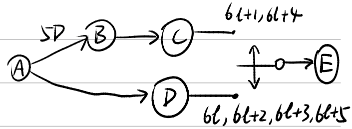
20



解: $J=2$

$[2,3]=6$

则先扩展为右图



下做展开

$6l+0 = 2(3l+0)+0$

$>$ $6l+1 = 2(3l+0)+1$

$6l+2 = 2(3l+1)+0$

$6l+3 = 2(3l+1)+1$

$>$ $6l+4 = 2(3l+2)+0$

$6l+5 = 2(3l+2)+1$

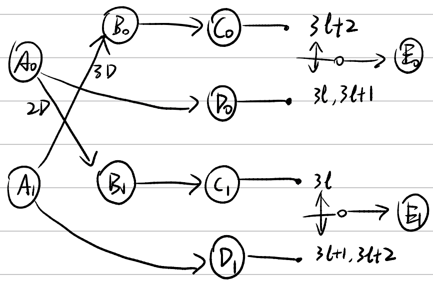
对 $A\to B$ 的 $w=5$

$i=0$ $(i+w)\%J=1$

故 $A_0\to B_1$ 有 $\lfloor\frac{0+5}{2}\rfloor=2D$

$i=1$ $(i+w)\%J=0$

故 $A_1\to B_0$ 有 $\lfloor\frac{1+5}{2}\rfloor=3D$



Chapter 7 脉动阵列

6.

解: $d=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\quad P^T=(0\ 1)$ $\quad s^T=(2\ 1)$

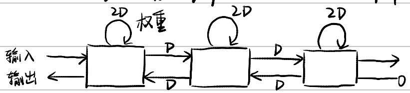
表格	e^T	p^Te	s^Te
wt	$(1\ 0)$	0	2
i/p	$(0\ 1)$	1	1
result	$(1\ -1)$	-1	1

均满足 $s^Te \geq 0$

则 $\begin{cases}\text{权重 保持}\\ \text{输入 右移}\\ \text{输出 左移}\end{cases}$

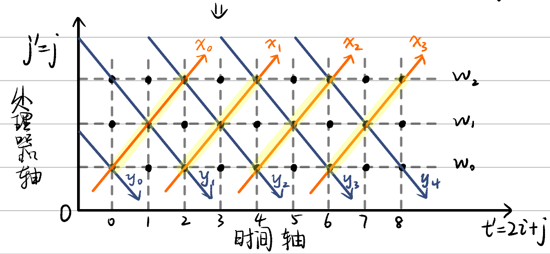
仍考虑用3个PE

利用率 $HEU=\frac{1}{|s^Td|}=\frac{1}{2}$



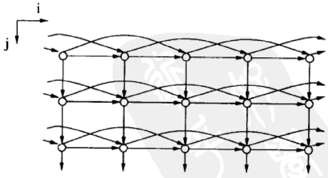
$$\begin{pmatrix}i'\\j'\\t'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\ \ 0\ \ 1\\ p^T\ \ 0\\ s^T\ \ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\\j\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\j\\2i+j\end{pmatrix}$$

$\Downarrow$



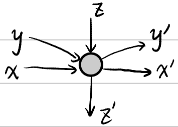
易见利用率为50%

10.



解：不关心数据含义，仅关心节点与对应边

标定边(对应方向)为 x、y、z



$$\begin{cases} x=(1,0) \\ y=(2,0) \\ z=(0,1) \end{cases}$$

(a) 投影矢量 $d^T=(0\ \ 1)$ 则 $p^T=(k\ \ 0)$，考虑 $k=1$

须使硬件利用率最大 $\Rightarrow$ 考虑 $s^T=(t\ \ 1)$，不妨 $t=1$

则 $\begin{cases} p^T=(1\ \ 0) \\ s^T=(1\ \ 1) \end{cases}$ 有 $HUE=\frac{1}{|s^T d|}=1$ s、p不平行

表格

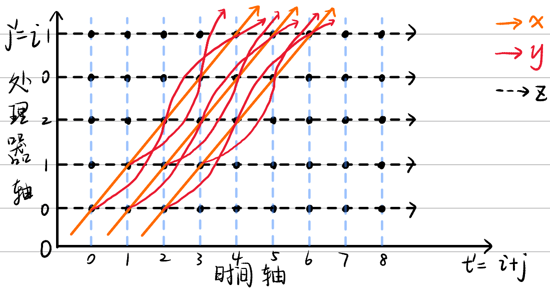
e	p^Te	s^Te
$x:\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$	1	1
$y:\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$	2	2
$z:\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$	0	1

显然 $s^Te\geq 0$

$$\begin{pmatrix} i' \\ j' \\ t' \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} i \\ j \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ j \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ i \\ i+j \end{pmatrix}$$

故 (i,j) 节点 在 处理器 i 上于 $(i+j)$ 时间 执行

由于同一时间最多3个节点被执行，故最少需3个PE



故 $d^T=(0\ 1)$ 时 可取 $p=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $s=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

硬件利用率100% 需3个处理单元

(b) 投影矢量 $d^T=(1\ \ 1)$ 则 $p^T=(k\ \ -k)$，考虑 $k=1$

须使硬件利用率最大 $\Rightarrow$ 不妨考虑 $s^T=(1\ 0)$

则 $\begin{cases} p^T=(1\ \ -1) \\ s^T=(1\ \ 1) \end{cases}$ 有 $HUE=\frac{1}{|s^Td|}=\frac{1}{2}$ s、p 不平行

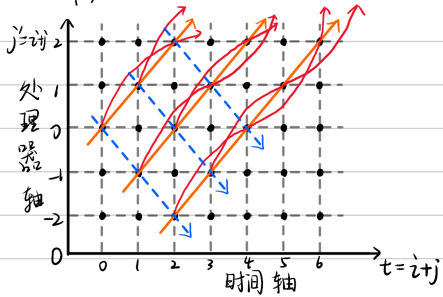
表格 e	p^Te	s^Te
$x:\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$	1	1
$y:\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$	2	2
$z:\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$	-1	1

显然 $s^Te\geq 0$

$$\begin{pmatrix}i'\\j'\\t'\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}i\\j\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&-1&0\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\\j\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\i-j\\i+j\end{pmatrix}$$

故 (i,j) 节点在处理器 $(i-j)$ 上于 $(i+j)$ 时间执行

同样，同一时间最多3个节点被执行，故最少需3个PE



（对于负编号处理单元对3取模即可）

故 $d^T=(1\ 1)$ 时 可取 $p=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $s=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

硬件利用率 50%　　需3个处理单元

Chapter 8 快速卷积

5. $\beta_i = 0, 1, -1, 2, -2$

解： 对 3×3 卷积 $s(p) = h(p)\,x(p)$ 其中 $\begin{cases} h(p) = h_0 + h_1 p + h_2 p^2 \\ x(p) = x_0 + x_1 p + x_2 p^2 \\ s(p) = s_0 + s_1 p + s_2 p^2 + s_3 p^3 + s_4 p^4 \end{cases}$

直接实现方式为 $\begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 \\ h_1 & h_0 & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 \\ 0 & h_2 & h_1 \\ 0 & 0 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

下计算 $h(\beta_i)$ 与 $x(\beta_i)$

$\beta_0 = 0 \qquad h(\beta_0) = h_0 \qquad x(\beta_0) = x_0$

$\beta_1 = 1 \qquad h(\beta_1) = h_0 + h_1 + h_2 \qquad x(\beta_1) = x_0 + x_1 + x_2$

$\beta_2 = -1 \qquad h(\beta_2) = h_0 - h_1 + h_2 \qquad x(\beta_2) = x_0 - x_1 + x_2$

$\beta_3 = 2 \qquad h(\beta_3) = h_0 + 2h_1 + 4h_2 \qquad x(\beta_3) = x_0 + 2x_1 + 4x_2$

$\beta_4 = -2 \qquad h(\beta_4) = h_0 - 2h_1 + 4h_2 \qquad x(\beta_4) = x_0 - 2x_1 + 4x_2$

而 $s(\beta_i) = h(\beta_i) \cdot x(\beta_i) \quad (i = 0,1,2,3,4)$ 需5次乘法

故 $s(p) = \sum_{i=0}^{4} s(\beta_i) \prod_{j \neq i} \frac{p - \beta_j}{\beta_i - \beta_j}$

$$= s(\beta_0)\frac{(p-1)(p+1)(p-2)(p+2)}{(0-1)(0+1)(0-2)(0+2)} + s(\beta_1)\frac{(p-0)(p+1)(p-2)(p+2)}{(1-0)(1+1)(1-2)(1+2)} + s(\beta_2)\frac{(p-0)(p-1)(p-2)(p+2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)(-1+2)} + s(\beta_3)\frac{(p-0)(p-1)(p+1)(p+2)}{(2-0)(2-1)(2+1)(2+2)} + s(\beta_4)\frac{(p-0)(p-1)(p+1)(p-2)}{(-2-0)(-2-1)(-2+1)(-2-2)}$$

$$= \frac{s(\beta_0)}{4}(p^4 - 5p^2 + 4) + \frac{s(\beta_1)}{-6}(p^4 + p^3 - 4p^2 - 4p) + \frac{s(\beta_2)}{-6}(p^4 - p^3 - 4p^2 + 4p) + \frac{s(\beta_3)}{24}(p^4 + 2p^3 - p^2 - 2p) + \frac{s(\beta_4)}{24}(p^4 - 2p^3 - p^2 + 2p)$$

$$= s(\beta_0) + p\left(\frac{2s(\beta_1)}{3} - \frac{2s(\beta_2)}{3} - \frac{s(\beta_3)}{12} + \frac{s(\beta_4)}{12}\right) + p^2\left(-\frac{5s(\beta_0)}{4} + \frac{2s(\beta_1)}{3} + \frac{2s(\beta_2)}{3} - \frac{s(\beta_3)}{24} - \frac{s(\beta_4)}{24}\right)$$

$$+ p^3\left(-\frac{s(\beta_1)}{6} + \frac{s(\beta_2)}{6} + \frac{s(\beta_3)}{12} - \frac{s(\beta_4)}{12}\right) + p^4\left(\frac{s(\beta_0)}{4} - \frac{s(\beta_1)}{6} - \frac{s(\beta_2)}{6} + \frac{s(\beta_3)}{24} + \frac{s(\beta_4)}{24}\right)$$

最后 转化为矩阵-矢量形式

$$\begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & -2 & 2 \\ -5 & 4 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(\beta_0)/4 \\ s(\beta_1)/6 \\ s(\beta_2)/6 \\ s(\beta_3)/24 \\ s(\beta_4)/24 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & -2 & 2 \\ -5 & 4 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{h_0}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h_0+h_1+h_2}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h_0-h_1+h_2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h_0+2h_1+4h_2}{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h_0-2h_1+4h_2}{24} \end{bmatrix}}_{H} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}}_{D} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(1) $H = \mathrm{diag}(H_0, H_1, H_2, H_3, H_4)$ 事先算出 (2) $X_i = x(\beta_i)$ 为 Dx 计算得到

(3) $S_i = H_i X_i$ 为对 Dx 左乘 H 计算得到 (4) 最后对 $H(Dx)$ 左乘 C 得到 $\vec{s} = \begin{bmatrix} s_0 \\ \vdots \\ s_4 \end{bmatrix}$

$\Downarrow$

5次乘法

6、 $\beta_i = 0, 1, -1, 2$

解： $s(p) = h(p)\cdot x(p) = s_0 + s_1 p + s_2 p^2 + s_3 p^3 + s_4 p^4$ 　则 $s_4 p^4 = h_2 x_2 p^4$

令 $s'(p) = s(p) - h_2 x_2 p^4$

下计算 $h(\beta_i)$ 、$x(\beta_i)$ 与 $s'(\beta_i)$

$\beta_0 = 0$ 　 $h(\beta_0) = h_0$ 　 $x(\beta_0) = x_0$

$\beta_1 = 1$ 　 $h(\beta_1) = h_0 + h_1 + h_2$ 　 $x(\beta_1) = x_0 + x_1 + x_2$

$\beta_2 = -1$ 　 $h(\beta_2) = h_0 - h_1 + h_2$ 　 $x(\beta_2) = x_0 - x_1 + x_2$

$\beta_3 = 2$ 　 $h(\beta_3) = h_0 + 2h_1 + 4h_2$ 　 $x(\beta_3) = x_0 + 2x_1 + 4x_2$

而 $s'(\beta_i) = h(\beta_i)\cdot x(\beta_i) - h_1 x_1 \beta_i^4 \quad (i = 0,1,2,3)$

下先求 $s'(p)$ 　 $(s(p) = s'(p) + h_1 x_1 p^2)$

$$s'(p) = \sum_{i=0}^{3} s'(\beta_i) \prod_{j\neq i} \frac{p-\beta_j}{\beta_i - \beta_j}$$

$$= s'(\beta_0)\frac{(p-1)(p+1)(p-2)}{(0-1)(0+1)(0-2)} + s(\beta_1)\frac{(p-0)(p+1)(p-2)}{(1-0)(1+1)(1-2)} + s(\beta_2)\frac{(p-0)(p-1)(p-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} + s(\beta_3)\frac{(p-0)(p-1)(p+1)}{(2-0)(2-1)(2+1)}$$

$$= \frac{s'(\beta_0)}{2}(p^3 - 2p^2 - p + 2) + \frac{s'(\beta_1)}{-2}(p^3 - p^2 - 2p) + \frac{s'(\beta_2)}{-6}(p^3 - 3p^2 + 2p) + \frac{s'(\beta_3)}{6}(p^3 - p)$$

$$= s'(\beta_0) + p\left(-\frac{s'(\beta_0)}{2} + s'(\beta_1) - \frac{s'(\beta_2)}{3} - \frac{s'(\beta_3)}{6}\right) + p^2\left(-s'(\beta_0) + \frac{s'(\beta_1)}{2} + \frac{s'(\beta_2)}{2}\right) + p^3\left(\frac{s'(\beta_0)}{2} - \frac{s'(\beta_1)}{2} - \frac{s'(\beta_2)}{6} + \frac{s'(\beta_3)}{6}\right)$$

故 $\begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s'(\beta_0)/2 \\ s'(\beta_1)/2 \\ s'(\beta_2)/6 \\ s'(\beta_3)/6 \\ h_2 x_2 \end{bmatrix}$ 　而 $\begin{bmatrix} s'(\beta_0)/2 \\ s'(\beta_1)/2 \\ s'(\beta_2)/6 \\ s'(\beta_3)/6 \\ h_2 x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(\beta_0)/2 \\ s(\beta_1)/2 \\ s(\beta_2)/6 \\ s(\beta_3)/6 \\ h_2 x_2 \end{bmatrix}$

因而 后置加法矩阵 $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

而 $H = \begin{bmatrix} \frac{h_0}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h_0+h_1+h_2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h_0-h_1+h_2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h_0+2h_1+4h_2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_2 \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(H_0, H_1, H_2, H_3, H_4)$ 　后置加法矩阵 $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

故最终

$$\vec{s} = CHD\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{h_0}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h_0+h_1+h_2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h_0-h_1+h_2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h_0+2h_1+4h_2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(1) $H = \mathrm{diag}(H_0, H_1, H_2, H_3, H_4)$ 事先算出 　 (2) 先对 $\vec{x}$ 左乘 D 得到 $D\vec{x}$ 　 $(X_i = x(\beta_i))$

(3) $S_i = H_i X_i$ 　为对 $D\vec{x}$ 左乘 H 计算得到 　 (4) 最后对 $H(D\vec{x})$ 左乘 C 得到 $\vec{s} = \begin{bmatrix} s_0 \\ \vdots \\ s_4 \end{bmatrix}$

$\Downarrow$

5次乘法

11、

解: $m(p)=p(p-1)(p+1)$

令 $\begin{cases} m^{(0)}(p)=p \\ m^{(1)}(p)=p-1 \\ m^{(2)}(p)=p+1 \end{cases}$ $\begin{cases} M^{(0)}(p)=\frac{m(p)}{m^{(0)}(p)}=p^2-1 \\ M^{(1)}(p)=\frac{m(p)}{m^{(1)}(p)}=p^2+p \\ M^{(2)}(p)=\frac{m(p)}{m^{(2)}(p)}=p^2-p \end{cases}$

由 $N^{(i)}(p)M^{(i)}(p)+n^{(i)}(p)m^{(i)}(p)=1$ 可计算并取 $N^{(i)}(p)$ 与 $n^{(i)}$ 如下

i	$m^{(i)}(p)$	$M^{(i)}(p)$	$n^{(i)}(p)$	$N^{(i)}(p)$
0	p	p^2-1	$-p$	-1
1	$p-1$	p^2+p	$-\frac{1}{2}(p+2)$	$\frac{1}{2}$
2	$p+1$	p^2-p	$-\frac{1}{2}(p-2)$	$\frac{1}{2}$

统 $h^{(i)}(p)=h(p)\ mod\ m^{(i)}(p)$ $\quad x^{(i)}(p)=x^{(i)}(p)\ mod\ m^{(i)}(p)$

有 $\begin{cases} h^{(0)}(p)=h_0 \\ h^{(1)}(p)=h_0+h_1 \\ h^{(2)}(p)=h_0-h_1 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x^{(0)}(p)=x_0 \\ x^{(1)}(p)=x_0+x_1 \\ x^{(2)}(p)=x_0-x_1 \end{cases}$ 而 $s^{(i)}(p)=h^{(i)}(p)\cdot x^{(i)}(p)\ mod\ m^{(i)}p$

故 $\begin{cases} s^{(0)}(p)=h_0x_0 \\ s^{(1)}(p)=(h_0+h_1)(x_0+x_1) \\ s^{(2)}(p)=(h_0-h_1)(x_0-x_1) \end{cases}$ $\Longrightarrow \begin{bmatrix} s^{(0)}(p) \\ s^{(1)}(p) \\ s^{(2)}(p) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 \\ 0 & h_0+h_1 & 0 \\ 0 & 0 & h_0-h_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ x_0+x_1 \\ x_0-x_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 \\ 0 & h_0+h_1 & 0 \\ 0 & 0 & h_0-h_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}$

则 $s(p)=\sum_{i=0}^{2}s^{(i)}(p)N^{(i)}(p)M^{(i)}(p)\ mod\ m(p)$

$=-s^{(0)}(p)(p^2-1)+\frac{s^{(1)}(p)}{2}(p^2+p)+\frac{s^{(2)}(p)}{2}(p^2-p)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s^{(0)}(p) \\ s^{(1)}(p) \\ s^{(2)}(p) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & p & p^2 \end{bmatrix}$

从而得到

$\vec{s}=\begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 \\ 0 & h_0+h_1 & 0 \\ 0 & 0 & h_0-h_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\vec{x}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 \\ 0 & h_0+h_1 & 0 \\ 0 & 0 & h_0-h_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}$

即 $\vec{s}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h_0+h_1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h_0-h_1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\vec{x}$ 则 $C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $H=\begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h_0+h_1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h_0-h_1}{2} \end{bmatrix}=diag(H_0,H_1,H_2)$ $D=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

(1) $H=diag(H_0,H_1,H_2)$ 事先计算出 (2) 先对 $\vec{x}$ 左乘 D 得 $D\vec{x}$

(3) 再对 $D\vec{x}$ 左乘 H 得到 $H(D\vec{x})$,此时有3次乘法 (4) 再左乘后置加法矩阵C得到 $\vec{s}$

Chapter 9

5.

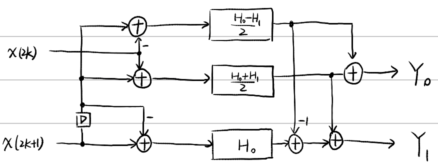
$$\begin{aligned} h_0x_0 &= h_0x_0 \\ h_0x_1+h_1x_0 &= \frac{h_0+h_1}{2}(x_0+x_1)-\frac{h_0-h_1}{2}(x_0-x_1) \\ h_1x_1 &= -h_0x_0+\frac{h_0+h_1}{2}(x_0+x_1)+\frac{h_0-h_1}{2}(x_0-x_1) \end{aligned}$$

解：先将卷积书写为矩阵形式（颠倒） $\vec{s}=CHA\vec{x}$

$$\begin{bmatrix} s_2 \\ s_1 \\ s_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 \\ h_0 & h_1 \\ 0 & h_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \operatorname{diag}\begin{bmatrix} \frac{h_0-h_1}{2} \\ \frac{h_0+h_1}{2} \\ h_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix}$$

而 $Y=(CHA)^T X$，故

$$\begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \operatorname{diag}\begin{bmatrix} \frac{H_0-H_1}{2} \\ \frac{H_0+H_1}{2} \\ H_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^{-2}X_1 \\ X_0 \\ X_1 \end{bmatrix}$$



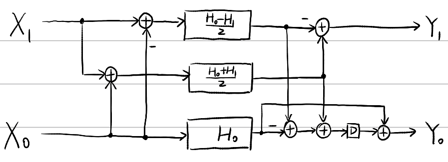
6

解：5中结构可进一步书写为

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \operatorname{diag}\begin{bmatrix} \frac{H_0-H_1}{2} \\ \frac{H_0+H_1}{2} \\ H_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & z^{-2} \\ 1 & z^{-2} \\ 0 & 1-z^{-2} \end{bmatrix} X$$

则 $Q^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad P^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ z^{-2} & z^{-2} & 1-z^{-2} \end{bmatrix}$ $\quad Y_F = P^T H^T Q^T X_F$

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ z^{-2} & z^{-2} & 1-z^{-2} \end{bmatrix} \operatorname{diag}\begin{bmatrix} \frac{H_0-H_1}{2} \\ \frac{H_0+H_1}{2} \\ H_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_0 \end{bmatrix}$$



9.

$$Y_0 = X_0H_0 + z^{-2}X_1H_1$$
$$Y_1 = X_0H_0 + X_1H_1 - (X_0 - X_1)(H_0 - H_1)$$

$$\begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z^{-2} & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathrm{diag}\begin{bmatrix} H_0 \\ H_1 \\ H_0-H_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \end{bmatrix}$$

解：为方便，记4并行FFA输出为 ${}^{(4)}Y = [{}^{(4)}Y_0, {}^{(4)}Y_1, {}^{(4)}Y_2, {}^{(4)}Y_3]^T$ 相应有 ${}^{(4)}X_i$ 与 ${}^{(4)}H_i$

令 ${}^{(4)}Y = (X_0' + z^{-1}X_1')(H_0' + z^{-1}H_1')$ 其中 $\begin{cases} X_0' = {}^{(4)}X_0 + z^{-2}\,{}^{(4)}X_2 \\ X_1' = {}^{(4)}X_1 + z^{-2}\,{}^{(4)}X_3 \end{cases}$ $\begin{cases} H_0' = {}^{(4)}H_0 + z^{-2}\,{}^{(4)}H_2 \\ H_1' = {}^{(4)}H_1 + z^{-2}\,{}^{(4)}H_3 \end{cases}$

则由该2并行FFA 有 ${}^{(4)}Y = X_0'H_0' + z^{-1}[X_0'H_0' + X_1'H_1' - (X_0'-X_1')(H_0'-H_1')] + z^{-2}X_1'H_1'$

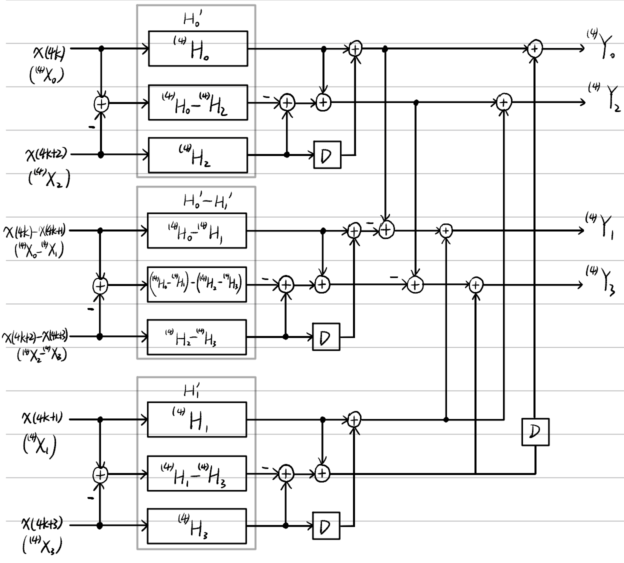
而 $X_0'H_0' = ({}^{(4)}X_0 + z^{-2}\,{}^{(4)}X_2)({}^{(4)}H_0 + z^{-2}\,{}^{(4)}H_2) = {}^{(4)}X_0\,{}^{(4)}H_0 + z^{-2}[{}^{(4)}X_0\,{}^{(4)}H_0 + {}^{(4)}X_2\,{}^{(4)}H_2 - ({}^{(4)}X_0 - {}^{(4)}X_2)({}^{(4)}H_0 - {}^{(4)}H_2)] + z^{-4}\,{}^{(4)}X_2\,{}^{(4)}H_2$

$X_1'H_1' = ({}^{(4)}X_1 + z^{-2}\,{}^{(4)}X_3)({}^{(4)}H_1 + z^{-2}\,{}^{(4)}H_3) = {}^{(4)}X_1\,{}^{(4)}H_1 + z^{-2}[{}^{(4)}X_1\,{}^{(4)}H_1 + {}^{(4)}X_3\,{}^{(4)}H_3 - ({}^{(4)}X_1 - {}^{(4)}X_3)({}^{(4)}H_1 - {}^{(4)}H_3)] + z^{-4}\,{}^{(4)}X_3\,{}^{(4)}H_3$

$(X_0'-X_1')(H_0'-H_1') = [({}^{(4)}X_0 - {}^{(4)}X_1) + z^{-2}({}^{(4)}X_2 - {}^{(4)}X_3)][({}^{(4)}H_0 - {}^{(4)}H_1) + z^{-2}({}^{(4)}H_2 - {}^{(4)}H_3)]$

$= ({}^{(4)}X_0 - {}^{(4)}X_1)({}^{(4)}H_0 - {}^{(4)}H_1) + z^{-2}\{({}^{(4)}X_0 - {}^{(4)}X_1)({}^{(4)}H_0 - {}^{(4)}H_1) + ({}^{(4)}X_2 - {}^{(4)}X_3)({}^{(4)}H_2 - {}^{(4)}H_3) - [({}^{(4)}X_0 - {}^{(4)}X_1) - ({}^{(4)}X_2 - {}^{(4)}X_3)][({}^{(4)}H_0 - {}^{(4)}H_1) - ({}^{(4)}H_2 - {}^{(4)}H_3)]\}$

$+ z^{-4}({}^{(4)}X_2 - {}^{(4)}X_3)({}^{(4)}H_2 - {}^{(4)}H_3)$



33.

解：(a) 证明：将(9-53)部分列写如下

$$X(1) = M_0c_1 + M_1c_7 + M_2c_3 + M_3c_5$$
$$X(7) = M_0c_7 - M_1c_1 - M_2c_5 + M_3c_3$$
$$X(3) = M_0c_3 - M_1c_5 - M_2c_7 - M_3c_1$$
$$X(5) = M_0c_5 + M_1c_3 - M_2c_1 + M_3c_7$$

均为1次乘，3次乘加 共需 4×4=16 个 CLK

$$X(2) = M_{10}c_2 + M_{11}c_6$$
$$X(6) = M_{10}c_6 - M_{11}c_2$$

均为 1次乘，1次乘加 共需 2×2=4个CLK

共23次乘法 23个CLK

考虑X(0)与X(4) $\begin{bmatrix} X(0) \\ X(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_4 & c_4 \\ c_4 & -c_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{10} \\ P_{11} \end{bmatrix}$

$X(0) = C_4P_{10} + C_4P_{11}$ 需 1次乘，1次乘加

$X(1) = X(0) - 2C_4P_{11}$ 需 1次乘加

共3个CLK

其中，相关系数由(9-54)确定

$$M_0 = x_0 - x_7 \quad P_0 = x_0 + x_7$$
$$M_1 = x_3 - x_4 \quad P_1 = x_3 + x_4$$
$$M_2 = x_1 - x_6 \quad P_2 = x_1 + x_6$$
$$M_3 = x_2 - x_5 \quad P_3 = x_2 + x_5$$
$$M_{10} = P_0 - P_1 \quad P_{10} = P_0 + P_1$$
$$M_{11} = P_2 - P_3 \quad P_{11} = P_2 + P_3$$

共12次加法 共需12个CLK

综上 共 16+4+3+12 = 35个 CLK □

(b)

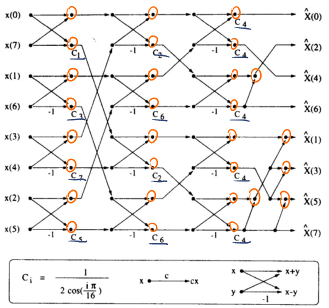


图9-17 8点快速DCT流图

共13次乘法 需13个CLK

共29次加法 需29个CLK

故总计 42个CLK

精度高

(c) 对于该DSP，仅考虑时间，则(a)更好 因为总耗时数少；~~但实际(b)中实现更好，因为一般乘法耗时更长。虽然(b)中加法更多，但乘法比(a)中少了1/3，在一般的DSP上执行得更快~~

Chapter 10

4. $$H(z) = \frac{1}{1-\frac{4}{3}z^{-1}+\frac{5}{12}z^{-2}}$$

解：a) 聚类超前　注意到

$$\left(1-\frac{4}{3}z^{-1}+\frac{5}{12}z^{-2}\right)\left(1+\frac{4}{3}z^{-1}+\frac{49}{36}z^{-2}+\frac{34}{27}z^{-3}\right) = 1-\frac{1441}{1296}z^{-4}+\frac{85}{162}z^{-5}$$

$$\therefore H(z) = \frac{1+\frac{4}{3}z^{-1}+\frac{49}{36}z^{-2}+\frac{34}{27}z^{-3}}{1-\frac{1441}{1296}z^{-4}+\frac{85}{162}z^{-5}}$$

b) 离散超前　显然　$1-\frac{4}{3}z^{-1}+\frac{5}{12}z^{-2}$ 对应 $1+\frac{4}{3}z^{-1}+\frac{5}{12}z^{-2}$

$$\left(1-\frac{4}{3}z^{-1}+\frac{5}{12}z^{-2}\right)\left(1+\frac{4}{3}z^{-1}+\frac{5}{12}z^{-2}\right) = 1-\frac{17}{18}z^{-2}+\frac{25}{144}z^{-4}$$

同样　$1-\frac{17}{18}z^{-2}+\frac{25}{144}z^{-4}$ 对应 $1+\frac{17}{18}z^{-2}+\frac{25}{144}z^{-4}$

$$\left(1-\frac{17}{18}z^{-2}+\frac{25}{144}z^{-4}\right)\left(1+\frac{17}{18}z^{-2}+\frac{25}{144}z^{-4}\right) = 1-\frac{353}{648}z^{-4}+\frac{625}{20736}z^{-8}$$

而 $\left(1+\frac{4}{3}z^{-1}+\frac{5}{12}z^{-2}\right)\left(1+\frac{17}{18}z^{-2}+\frac{25}{144}z^{-4}\right) = 1+\frac{4}{3}z^{-1}+\frac{49}{36}z^{-2}+\frac{34}{27}z^{-3}+\frac{245}{432}z^{-4}+\frac{25}{108}z^{-5}+\frac{125}{1728}z^{-6}$

$$\therefore H(z) = \frac{1+\frac{4}{3}z^{-1}+\frac{49}{36}z^{-2}+\frac{34}{27}z^{-3}+\frac{245}{432}z^{-4}+\frac{25}{108}z^{-5}+\frac{125}{1728}z^{-6}}{1-\frac{353}{648}z^{-4}+\frac{625}{20736}z^{-8}}$$

□

5. $H(z)=\dfrac{1}{1-0.6z^{-1}+0.25z^{-2}}$

解: $H(z)=\dfrac{1}{(1-0.3z^{-1})^2+(0.4z^{-1})^2}=\dfrac{1}{[1-(0.3+j0.4)z^{-1}][1-(0.3-j0.4)z^{-1}]}$

为方便记 $p=\frac{1}{2}e^{j\theta}=0.3+j0.4$，$\theta=\arctan\frac{0.4}{0.3}\approx 53^\circ$，其共轭 $q=\bar{p}=\frac{e^{-j\theta}}{2}=0.3-j0.4$ 则 $H(z)=\dfrac{1}{(1-pz^{-1})(1-qz^{-1})}$

对 $M_1\times M_2=3\times 3$ 分解，第一级实现 $N(M_1-1)=4$ 个零点 第二级实现 $NM_1(M_2-1)=12$ 个零点

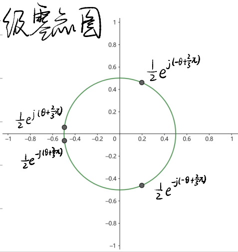
$$H(z)=\frac{1}{(1-pz^{-1})(1-qz^{-1})}=\frac{(1+pz^{-1}+p^2z^{-2})(1+p^3z^{-3}+p^6z^{-6})}{1-p^9z^{-9}}\cdot\frac{(1+qz^{-1}+q^2z^{-2})(1+q^3z^{-3}+q^6z^{-6})}{1-q^9z^{-9}}$$

$$=\underbrace{[(1+pz^{-1}+p^2z^{-2})(1+qz^{-1}+q^2z^{-2})]}_{\text{为第一级}}\underbrace{[(1+p^3z^{-3}+p^6z^{-6})(1+q^3z^{-3}+q^6z^{-6})]}_{\text{为第二级}}\frac{1}{(1-p^9z^{-9})(1-q^9z^{-9})}$$

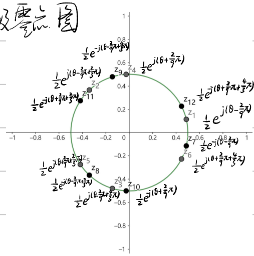
注意到 $\begin{cases}1+pz^{-1}+p^2z^{-2}=(pz^{-1}-e^{j\frac{2\pi}{3}})(pz^{-1}-e^{-j\frac{2\pi}{3}})\\ 1+qz^{-1}+q^2z^{-2}=(qz^{-1}-e^{j\frac{2}{3}\pi})(qz^{-1}-e^{-j\frac{2\pi}{3}})\end{cases}$ 故第一级零点为 $\begin{cases}e^{j\frac{2\pi}{3}}p=\frac{1}{2}e^{j(\frac{2\pi}{3}+\theta)}\\ e^{j\frac{4\pi}{3}}p=\frac{1}{2}e^{j(\frac{4\pi}{3}+\theta)}\end{cases}$ 与 $\begin{cases}e^{j\frac{2\pi}{3}}q=\frac{1}{2}e^{j(\frac{2\pi}{3}-\theta)}\\ e^{j\frac{4\pi}{3}}q=\frac{1}{2}e^{j(\frac{4\pi}{3}-\theta)}\end{cases}$

类似，得到第二级的零点为 $\frac{1}{2}e^{j[\theta\pm\frac{2}{9}\pi+\frac{2k}{3}\pi]}$，$\frac{1}{2}e^{-j[\theta\pm\frac{2}{9}\pi+\frac{2k}{3}\pi]}$ $k=0,1,2$ 共12个

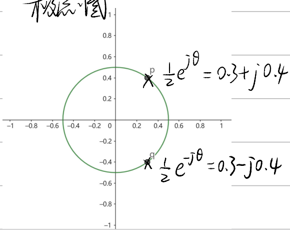
第一级零点图



第二级零点图



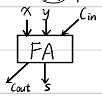
极点图



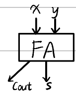
Chapter 13

3、

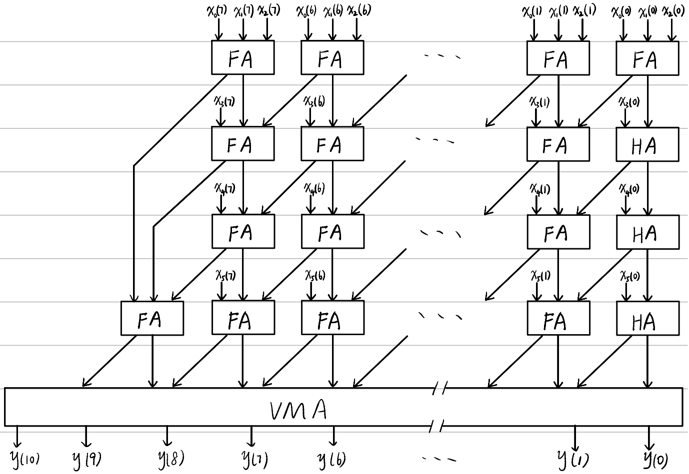
解：(a) 进位保留运算



$\Rightarrow 2C_{out} + s = x + y + C_{in}$



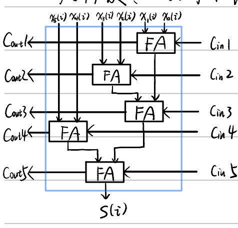
$\Rightarrow 2C_{out} + S = x + y$



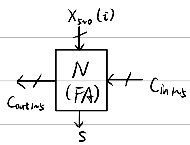
延迟为 $4\,t_{FA}$

(b) 树高度减小技术

为方便、设每个节点如下，记为节点N(FA)或N(HA)。



$\Rightarrow$

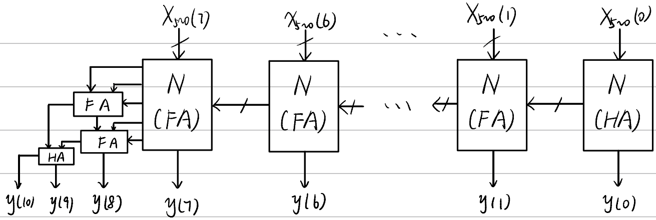


当无Cin ins时 用HA代替FA即可

$X_{5\sim0}(i)$为$\{x_5(i), x_4(i), x_3(i), x_2(i), x_1(i), x_0(i)\}$

Cout ins为$\{C_{out1}, C_{out2}, C_{out3}, C_{out4}, C_{out5}\}$

Cin ins为$\{C_{in1}, C_{in2}, C_{in3}, C_{in4}, C_{in5}\}$



延迟为 $2t_{HA} + 10\,t_{FA}$

20.

解： $C_0 = 1.11111111$ 将从右向左第一次出现的两位"11"变为$0\bar{1}$ 并向高1位加1

得到 C_0： $0.0000000\bar{1}$ 无"11" 故最终结果即为 $0.0000000\bar{1}$

利用 $\theta_i = \hat{\alpha}_i \oplus \hat{\alpha}_{i-1}$ $\quad \gamma_i = \overline{\gamma_{i-1}}\,\theta_i$ $\quad \alpha_i = (1-2\hat{\alpha}_{i+1})\,\gamma_i$

i: W W-1 ...... 0 -1

$\hat{\alpha}_i$: 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0

θ_i: 0 0 0 0 0 0 0 0 1

γ_i: 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0

α_i: 0 0 0 0 0 0 0 $\bar{1}$ ⇒ 相一致

$C_1 = 1.11110010$ 类似操作得到 $0.000\bar{1}0010$

$\hat{\alpha}_i$: 1 1 1 1 1 1 0 0 1 0 0

θ_i: 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0

γ_i: 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0

α_i: 0 0 0 0 $\bar{1}$ 0 0 1 0

类似 $C_2 = 0.01100110 = 0.0110101\bar{1}0 = 0.10\bar{1}010\bar{1}0$

$C_3 = 0.01001100111 = 0.0100110100\bar{1} = 0.01010\bar{1}0100\bar{1}$

Chapter 14

4. 设计关键路径为3个全加器的基4最小冗余加法器，假设基4数位 x_i 用3条线编码为 $-2x_i^{-2}+x_i^{+}+x_i^{++}$。所有输入和输出操作数均用最小冗余表示法表示。只使用4个全加器和一些延迟元件，给出相应的最高数位优先和最低数位优先架构。（提示：对于第3级加法器，将 $-a$ 替换为 $-2a+a$。）

解：需计算 $S_{<4,2>} = X_{<4,2>} + Y_{<4,2>}$ 将 $Y_{<4,2>}$ 拆为 $Y_{<4,2>} = Y^{+} - Y^{-}$

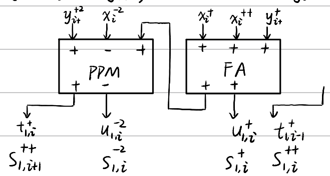
这样 先后计算 $S'_{<4,2>} = X_{<4,2>} + Y^{+}$，$S_{<4,2>} = S'_{<4,2>} - Y^{-}$

而 $y_i = -2y_i^{-2} + y_i^{+} + y_i^{++} = -2y_i^{+2} - y_i^{+} + 2y_i^{+} + y_i^{++} = (2y_i^{+} + y_i^{++}) - (2y_i^{-2} + y_i^{+})$

可记为 $y_i = y_{i+} - y_{i-} = (2y_{i+}^{+2} + y_{i+}^{+}) - (2y_{i-}^{+2} + y_{i-}^{+})$ 则 $\begin{cases} y_{i+}^{+2} = y_i^{+} \\ y_{i+}^{+} = y_i^{++} \end{cases}$ $\begin{cases} y_{i-}^{+2} = y_i^{-2} \\ y_{i-}^{+} = y_i^{+} \end{cases}$

先计算 $x_i + y_{i+} = 4t_{i1} + u_{i1}$ 结合 表14-5与式14-13

$$(-2x_i^{-2} + 2y_{i+}^{+2}) + (x_i^{+} + x_i^{++} + y_i^{+}) = 4t_{1,i}^{+} - 2u_{1,i}^{-2} + u_{1,i}^{+}$$

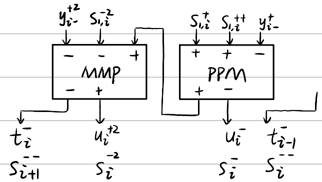


①

之后计算 $s_{1,i} - y_{i-} = 4t_i + u_i$

数位	基4数位集合	二进制码
$S_{1,i}$	$\{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$	$-2S_{1,i}^{-2} + S_{1,i}^{+} + S_{1,i}^{++}$
y_{i-}	$\{0,1,2,3\}$	$2y_{i-}^{+2} + y_{i-}^{+}$
$P_i = S_{1,i} - y_{i-}$	$\{\bar{5},\bar{4},\bar{3},\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$	…
t_i	$\{\bar{1},0\}$	$-t_i^{-}$
u_i	$\{\bar{1},0,1,2\}$	$2u_i^{+2} - u_i^{-}$
$S_i = u_i + t_{i-1}$	$\{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$	$S_i^{+2} - S_i^{-} - S_i^{--}$

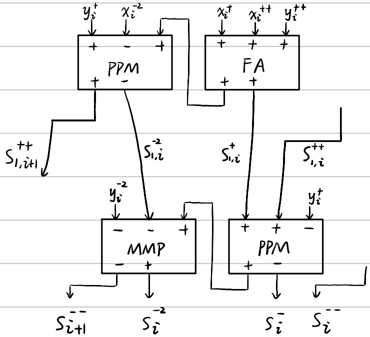
$$(-2S_{1,i}^{-2} - 2y_{i-}^{+2}) + (x_i^{+} + x_i^{++} - y_i^{+}) = -4t_i^{-} + 2u_i^{+2} - u_i^{-}$$



②

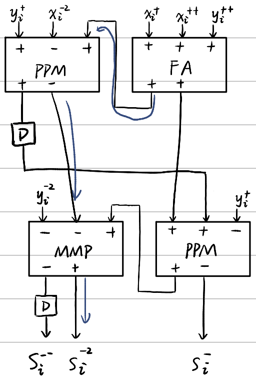
将 ① ② 级联 结合 $\begin{cases} y_{i+}^{+2} = y_i^{+} \\ y_{i+}^{+} = y_i^{++} \end{cases}$ $\begin{cases} y_{i-}^{+2} = y_i^{-2} \\ y_{i-}^{+} = y_i^{+} \end{cases}$

有

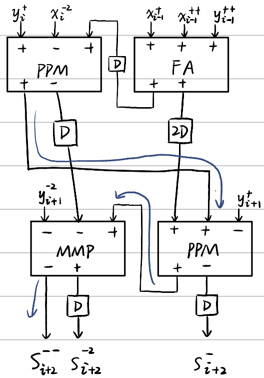


不难得到最高数位优先与最低数位优先架构如下

最低数位优先



最高数位优先（已插入流水线）



→ 标注出了关键路径，均不超过 3个FA