信号 与 系统

柏业超　ychbai@nju.edu.cn

教材

《信号与系统》第三版
（郑君里）

平时作业 10%
期中 20%
期末 70%

本课程的教学内容和目的:

➢研究确定性信号经线性时不变系统传输和处理的基本概念 、基本分析方法

➢从时间域到变换域, 从连续到离散, 从输入-输出描述到状态空间描述

➢以通信和控制工程为主要应用背景注重实例分析。

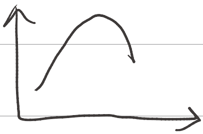
➢有选择得学习部分章节
(一, 二, 三, 四, 五, 七, 八)

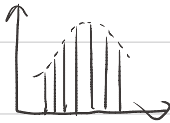
确定性信号　随机信号　伪随机信号

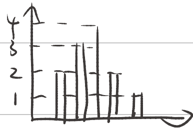
周期信号　非周期信号 $\begin{cases} \text{准周期（}f\text{之比不为有理数）} \\ \text{瞬态（脉冲衰减）} \end{cases}$

正弦　复杂

模拟信号　抽样信号 $\xrightarrow{\text{离散}}$ 数字信号







一维信号　多维信号

几种典型确定性信号

1. 指数信号　$f(t)=Ke^{\alpha t}$

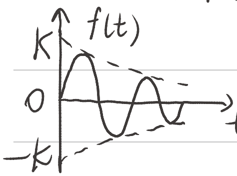
单边指数信号　$f(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ e^{-\frac{t}{\tau}} & t\geq 0 \end{cases}$

$\tau=\frac{1}{|\alpha|}$ ⇒ 时间常数

微分 积分 仍是 指数信号

2. 正弦信号　$f(t)=K\sin(\omega t+\theta)$

衰减正弦信号　$f(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ Ke^{-at}\sin(\omega t) & t\geq 0 \end{cases}$ $(a>0)$



Euler 公式

$e^{j\omega t}=\cos\omega t+j\sin\omega t$

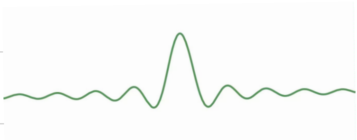
$\begin{cases} \cos\omega t=\frac{1}{2}(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}) \\ \sin\omega t=\frac{1}{2j}(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}) \end{cases}$

3. 复指数信号　$f(t)=Ke^{st}=Ke^{\sigma t}(\cos(\omega t)+j\sin(\omega t))$

$\begin{cases} s=\sigma+j\omega\in\mathbb{C} & \text{复频率} \\ \sigma,\omega\in\mathbb{R} & \text{rad}\cdot s^{-1} \end{cases}$

4、抽样信号 (Sampling Signal)

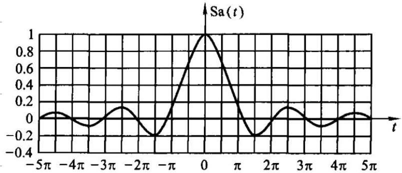
$$Sa(t) = \frac{\sin t}{t}$$



$Sa(0) = 1 \quad Sa(-t) = Sa(t)$

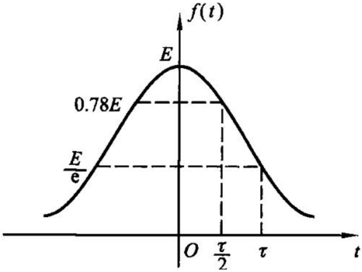
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}.$$



5. 钟形脉冲函数 (Gauss函数)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$ 正态分布



信号运算

1. 平移 $f(t) \to f(t-\tau)$

2. 反褶 $f(t) \to f(-t)$

3. 信号展缩 $f(t) \to f(At)$

$f(t) \to f(kt+b)$

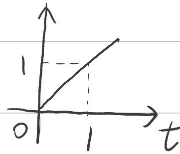
4. 微分与积分 $\longrightarrow$ 消除毛刺

突显它变化的毛刺部分(边缘)

5. 两信号相加 & 相乘

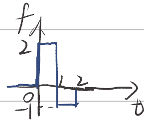
阶跃 & 冲激 信号

> 单位斜边信号 $R(t)$ →



> 单位阶跃跃 $u(t)$

$f(t) = 2u(t) - 3u(t-1) + u(t-2)$



符号函数 (Signum)

$$\mathrm{Sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t>0 \\ -1 & t<0 \end{cases} = 2u(t) - 1$$

$$u(t) = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{Sgn}(t))$$

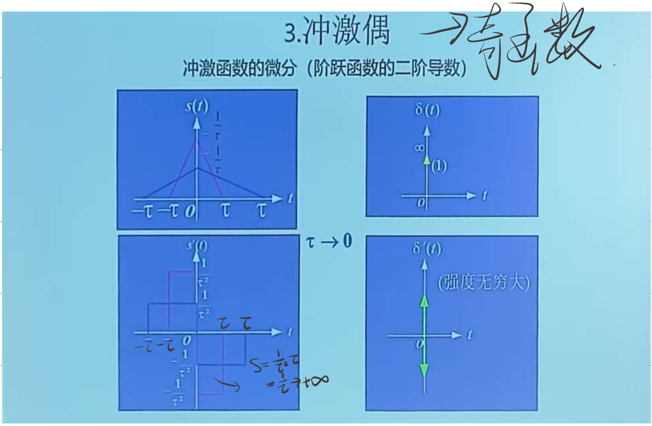
> 冲激函数 单位 $\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t=0 \\ 0, & t\neq 0 \end{cases}$ 且 $\int_{0^-}^{0^+} \delta(t) = 1$

抽样性 $F(t) = \delta(t) f(t) = \delta(t) f(0)$

↳ $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(0)\, dt = f(0)$

显然 $\delta(t) = \delta(-t)$

冲激偶 (对冲激函数微分)



$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(t)f(t)\,dt = -f'(0)$$

$$= \cancel{f(t)\delta(t)\Big|_{-\infty}^{+\infty}} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\delta(t)\,dt = -f'(0)$$

（分部积分）

对 $\delta(t)$ k阶导数

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{(k)}(t)f(t)\,dt = (-1)^k f^{(k)}(0)$$

$$= \frac{1}{k-1}\cancel{\delta^{(k-1)}(t)f(t)\Big|_{-\infty}^{+\infty}} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\delta^{(k-1)}(t)\,dt$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{(k-1)}(t)f'(t)\,dt.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(t)\,dt = 0 \qquad \delta(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta'(\tau)\,d\tau$$

$$f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$$

$$[f(t)\delta(t)]' = [f(0)\delta(t)]' = f(0)\delta'(t)$$

$$= f'(t)\delta(t) + f(t)\delta'(t) = f'(0)\delta(t) + f(t)\delta'(t)$$

1.6 信号分解

一. 直流与交流

$$f(t) = f_D + f_A(t)$$

$$f_D = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt \quad \Rightarrow \quad \int_0^T f_A(t) = \int_0^T (f(t) - f_D)\,dt = 0$$

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T [f_D + f_A(t)]^2\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T [f_D^2 + 2f_D f_A(t) + f_A^2(t)]\,dt$$

$$= f_D^2 + \cancel{\frac{2f_D}{T}\int_0^T f_A(t)\,dt} + \frac{1}{T}\int_0^T f_A^2(t)\,dt$$

$$= f_D^2 + \frac{1}{T}\int_0^T f_A^2(t)\,dt$$

$$P = P_D + P_A$$

二. 奇偶分解

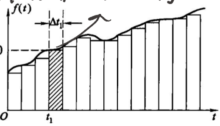
$$f = \overset{\text{even}}{f_e} + \overset{\text{odd}}{f_o}$$

$$\forall f(t) = \underbrace{\frac{1}{2}[f(t) + f(-t)]}_{= f_e(t)} + \underbrace{\frac{1}{2}[f(t) - f(-t)]}_{= f_o(t)}$$

显然 $P = P_o + P_e$

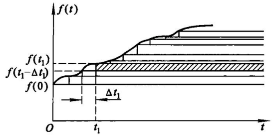
三、脉冲分量

$f(t_1)[u(t-t_1)-u(t-t_1-\Delta t_1)]$



(a)

令 $\Delta t \to 0$ 冲激



(b)

$$f(t) \approx \sum_i f(t_i)[u(t-t_i)-u(t-t_i-\Delta t)]$$

$$= \sum_i f(t_i)\frac{u(t-t_i)-u(t-t_i-\Delta t)}{\Delta t}\cdot \Delta t$$

$$= \sum_i f(t_i)\,\delta(t-t_i)\,\Delta t$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau \qquad f(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t_0-t)\,dt$$

阶跃 $$f(t) = f(0)f(t) + \int_0^{\infty} \frac{df(x)}{dx}\bigg|_{x=\tau} \cdot u(t-\tau)\,d\tau$$

四 实部分量与虚部分量

$$f(t) = f_r(t) + j f_i(t) \qquad f^* = f_r(t) - j f_i(t)$$

$$f_r = \frac{1}{2}(f + f^*) \qquad f_i = \frac{1}{2j}[f - f^*]$$

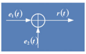
$$|f|^2 = f\cdot f^* = f_r^2 + f_i^2$$

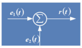
五 正交分量

六 利用分形理论

1.6 系统模型及其分类

1. 加法器

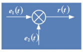




$r(t)=e_1(t)+e_2(t)$

$r(t)=e_1(t)\cdot e_2(t)$

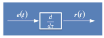
2. 乘法器



注意: 与公式中的卷积符号相区别，没有卷积器。

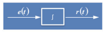
3. 标量乘法器（数乘器，比例器）

4.微分器



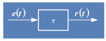
$$r(t)=\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}$$

5.积分器

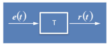


$$r(t)=\int_{-\infty}^{t}e(t)\mathrm{d}t$$

6.延时器



$$r(t)=e(t-\tau)$$



$$r(t)=e(t-T)$$

- 连续时间系统：微分方程
- 离散时间系统：差分方程
- 混合系统

- 即时系统（非记忆系统）：代数方程
- 动态系统（记忆系统）：微分方程或差分方程

- 集总参数系统:常微分方程 (t)
- 分布参数系统:偏微分方程 (t, x, y, z)

因果系统 / 非因果系统：若系统在 t_0 时刻的响应只与 $t=t_0$ 和 $t<t_0$ 时刻的输入有关，为因果系统；否则，即为 非因果系统。

可逆系统 / 不可逆系统：若系统在不同的激励信号作用下产生不同的响应，则称此系统为可逆系统。

线性　　时变

非线性　　时不变

重点研究：

确定性信号作用下的集总参数线性时不变系统。

时变 & 时不变　　零初始状态下 响应与激励与时间起点是否无关

元器参数不变　系统参数变.

线性&非线性　　均匀性　叠加性

因果性 ⇒ $r(t)$ 只与 $t\le t_0$ 时的 $e(t)$ 有关

§ 二　连续时间系统的时域分析

列写微分方程

解方程
- 经典法
- 双零法
  - 零输入 — 经典法
  - 零状态 — 卷积积分
- 变换域

对 LTI 系统　系数不随时间改变　线性常系数微分方程

n 阶线性时不变系统

$$\sum_{k=0}^{n} C_k \left(\frac{d}{dt}\right)^k r(t) = \sum_{k=0}^{m} E_k \left(\frac{d}{dt}\right)^k e(t) \qquad (C_n \neq 0)$$

经典求解：　1. 求齐次解 $r_h(t)$　即求 $\sum_{k=0}^{n} C_k \left(\frac{d}{dt}\right)^k r(t) = 0$

取 $\sum_{k=0}^{n} C_k \alpha^k = 0$ 的根　$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$

齐次解为　$r_h(t) = \sum_{k=0}^{n} A_k e^{\alpha_k t}$　A_k 任意

若 α_k 为 s 重根　$\left(\sum_{j=1}^{s} A_{kj} t^{j-1}\right) e^{\alpha_k t}$　A_{kj} 任意

2. 求特解　根右端 $\sum_{k=0}^{m} E_k \left(\frac{d}{dt}\right)^k e(t)$ 的具体形势

假特定函数式 代入 求解

3. 全解　由初始条件 求出 $\{A_k\}$　如：代入 $\frac{d}{dt} r(t) \Big|_{t=0^+}$

→ 齐次解 + 特解

起始点的跳变 0^- 到 0^+

利用冲击函数匹配

$$\frac{d}{dt}r(t) = k\delta(t) + f(t) \xrightarrow{} \text{有界} f \quad \Rightarrow r(t)\Big|_{0^-}^{0^+} = \int k\delta(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \quad r(0_+) - r(0_-) = k$$

自由 + 强迫
natural　force

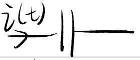
暂态 + 稳态

零输入 + 零状态
zero-input　zero-states $\to r^{(k)}(0_-)=0$

$\Downarrow$

$r^{(k)}(0_+) = r^{(k)}(0_-)$

等效



$i(t)$

$+\ v_C(t)\ -$

$v_C(0_-) \neq 0$

$\Downarrow$

$U_s = v_C(0_-)$

i

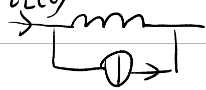
$v_C(0_-) = 0$

i

$+\ v_L(t)\ -$　$v_L(0_-) \neq 0$

$\Downarrow$

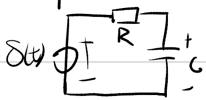
$i_L(t)$



$I_s = i_L(0_-)$

冲激 & 阶跃响应

冲激响应 $h(t)$ $e(t)=\delta(t)$



$$RC\frac{dv_C}{dt}+v_C=\delta(t)$$

$$v_C=\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)$$

n阶系统 则 $\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{d^k h(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{m} b_k \frac{d^m \delta(t)}{dt^m}$

$n>m$. $h(t)$ 无 $\delta(t)$ 及其各阶导数

$n=m$ $h(t)$ 含 $\delta(t)$，无其各阶导数

$n<m$ $h(t)$ 含 $\delta(t)$ 及其各阶导数

卷积

$h(t)$ 为单位冲激响应

$$r(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

记为 $r(t)=e(t) * h(t)$

性质

一、(1) $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$ 交换律

(2) $f_1 * (f_2+f_3) = f_1 * f_2 + f_1 * f_3$ 分配律

(3) $f_1 * (f_2 * f_3) = (f_1 * f_2) * f_3$ 结合律

二、微分&积分 记 $p: \frac{d}{dt}$ $\frac{1}{p}: \int dt$

$$p^{(n)}(f_1 * f_2) = (p^{(n-m)} f_1) * (p^{(m)} f_2)$$

$(n, m \in \mathbb{Z})$

$(f_1 * f_2)^{(n)} = f_1^{(n-k)} * f_2^{(k)}$

$(\int f_1) * f_2 = \int (f_1 * f_2)$

三、$f(t) * \delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cdot\delta(t-t_0-\tau)\,d\tau = f(t-t_0)$

$f(t-t_1) * \delta(t-t_2) = f(t-t_1-t_2)$

$f(t) * \delta'(t) = f'(t) * \delta(t) = f'(t)$

$f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\lambda)\,d\lambda$

$$F(t) = f(x-t_1) * g(t-t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau - t_1) \cdot g(t - t_2 - \tau)\, d\tau$$

$$H(x) = g(t-t_2) * f(x-t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(m-t_2) \cdot f(x - t_1 - m)\, dm$$

令 $m - \cancel{t_2} = x - \cancel{t_2} - \tau$ $\quad dm = -d\tau \quad m = x - \tau$

$$\therefore = -\int_{+\infty}^{-\infty} g(x - t_2 - \tau) \cdot f(\tau - t_1)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau - t_1) \cdot g(x - t_2 - \tau)\, d\tau$$

$$= F(x)$$

§三 傅里叶变换 Fourier Transform.

一. 三角函数形式 级数

$\{\cos(n\omega t), \sin(n\omega t)\}$ 是一个完备正交函数集. $n=0,1,2,\cdots$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ 基波角频率

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega t)\sin(m\omega t)\,dt = 0$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)\,dt = \begin{cases} \frac{T}{2} & n=m \\ 0 & n\neq m \end{cases}$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)\,dt = \begin{cases} \frac{T}{2} & n=m \\ 0 & n\neq m \end{cases}$$

由完备性. 若 $f(t)$ 满足 Dirichlet 条件

则 $f(t)$ 可写为 $$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin(n\omega t)\,dt$$

或另一种形式 $$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos(n\omega t + \varphi_n)$$
$$= d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n\sin(n\omega t + \theta_n)$$

$$\begin{cases} a_0 = c_0 = d_0 \\ c_n = d_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \end{cases} \quad \begin{cases} a_n = c_n\cos\varphi_n = d_n\sin\theta_n \\ b_n = -c_n\sin\varphi_n = d_n\cos\theta_n \end{cases} \quad \begin{cases} \tan\theta_n = \frac{a_n}{b_n} \\ \tan\varphi_n = -\frac{b_n}{a_n} \end{cases}$$

二、指数形式级数

复指数 完备正交集 $\{e^{jn\omega t}\}$ $n=0,1,2,\cdots$

类似 有 $f(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}F(n\omega)\,e^{jn\omega t}$

系数 $F(n\omega)=F_n=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)e^{-jn\omega t}\,dt$

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-jb_n}{2}e^{j\omega nt}+\frac{a_n+jb_n}{2}e^{-j\omega nt}\right)$$

$$=a_0+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{a_n-jb_n}{2}e^{j\omega nt}=a_0+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n\omega)\,e^{j\omega nt}$$

令 $F(0)=a_0$ $\qquad f(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}F(n\omega)\,e^{jn\omega t}$

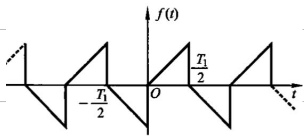
$F_0=c_0=a_0=d_0$ $\qquad F_n+F_{-n}=a_n$

$|F_n|=|F_{-n}|=\frac{1}{2}c_n=\frac{1}{2}d_n$ $\qquad F_n-F_{-n}=\frac{b_n}{j}$

$F_n=|F_n|e^{j\varphi_n}=\frac{1}{2}(a_n-jb_n)$ $\qquad F_nF_{-n}=\frac{a_n^2+b_n^2}{4}$

三、>奇谐函数

示例图如右



a_n	b_n	c_n
$\frac{4}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}}f(t)\cos(n\omega_1 t)\,dt$ $(n=1,3,\cdots)$	$\frac{4}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}}f(t)\sin(n\omega_1 t)\,dt$ $(n=1,3,\cdots)$	$\frac{a_n-jb_n}{2}$ (复数) $(n=1,3,\cdots)$

>偶谐函数 $(T\to\frac{T}{2})$

四.有限级数与最小方根误差

取(2N+1)项 来逼近 $f(t)$

$$S_N(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

则误差 $\varepsilon_N(t) = f(t) - S_N(t)$ （ε_N一定与S_N误）

则方均误差 $\overline{\varepsilon_N^2(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon_N^2(t)\,dt = \overline{f^2(t)} - \left[a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)\right]$

傅立叶变换　考虑 $T_1 \to \infty$　$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \to \infty$

周期→非周期　　频谱密度

$$F(n\omega_1) = \frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)\, e^{-jn\omega t}\, dt \qquad T_1 \to \infty$$

$$\lim_{T_1\to\infty} T_1 F(n\omega_1) = \lim_{T_1\to\infty} \frac{2\pi F(n\omega_1)}{\omega_1} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

正变换　$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$

而 $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n\omega_1)\, e^{jn\omega_1 t}$　　$\omega_1 \to 0$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi F(n\omega_1)}{\omega_1}\, e^{jn\omega_1 t}\, \Delta(n\omega_1)$$

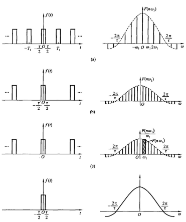
$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty} F(\omega)\, e^{jn\omega_1 t}\, \Delta\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{jn\omega_1 t}\, d\omega$$

负变换　$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$

条件　绝对可积　$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < +\infty$

$\frac{1}{2\pi}F(\omega)d\omega$ 对应 频谱密度



若 $f(t)$ 为实函数，$f(t) = \int_0^{\infty} \frac{|F(\omega)|}{\pi} \mathrm{d}\omega \cos[\omega t + \varphi(\omega)]$

求和　振幅　余弦信号

- 无穷多个、振幅为无穷小 $\left(\frac{1}{\pi}|F(\omega)|\mathrm{d}\omega\right)$ 的连续余弦信号之和,频域范围：$\mathbf{0} \to \infty$

一般的 $f(t)$　$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \mathrm{e}^{i\omega t}\, \mathrm{d}\,\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega)}{2\pi}\, \mathrm{d}\,\omega \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$

- 无穷多个幅度为无穷小 $\left(\frac{1}{2\pi}|F(\omega)|\mathrm{d}\omega\right)$ 的连续指数信号和，占据整个频域，ω ：$-\infty \to \infty$。

考虑 $w_n = n w_0 = n\frac{2\pi}{T_0}$ $\quad T_0 \to +\infty$ 则 $w_0 \to 0$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(w_n)\, e^{j w_n t} \qquad f(t) \in f_R$$

其中 $F(w_n) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\, e^{-j w_n t} dt$

考虑 $T \to +\infty$

$$f(t) = \lim_{T_0 \to +\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(\xi)\, e^{-j w_n \xi} d\xi\right] e^{j w_n t}$$

$$= \lim_{T_0 \to +\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(\xi)\, e^{-j w_n \xi} d\xi\right] e^{j w_n t}\, w_0 \quad w_0 \to \Delta w_n$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, e^{-j w \xi} d\xi\right] e^{j w t}\, dw$$

令 $F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j w t} dt$ 为正变换

则 $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(w)\, e^{j w t} dw$ 为逆变换

一般 $F(w) \in \mathbb{C} \Rightarrow F(w) = |F(w)|\, e^{j\varphi(w)}$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(w)\, e^{j w t} dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(w)|\, e^{j[wt + \varphi(w)]} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(w)| \overbrace{\cos[wt+\varphi(w)]}^{关于w偶} dw + \frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(w)| \overbrace{\sin[wt+\varphi(w)]}^{关于w奇} dw$$

若 $F(w) \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(w)| \cos[wt + \varphi(w)]\, dw$

典型信号的 Fourier Transform

一、单边指数 $f(t)=e^{-at}u(t)$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{+\infty}e^{-(a+j\omega)t}dt$$

$$=\frac{1}{a+j\omega}\int_{0}^{+\infty}e^{-(a+j\omega)t}d(a+j\omega)t=\frac{1}{a+j\omega}$$

$$|F(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}\qquad \varphi(\omega)=\arctan\left(-\frac{\omega}{a}\right)$$

二、双边指数 $f(t)=e^{-a|t|}$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a|t|}e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{0}^{+\infty}e^{-at}\left(e^{-j\omega t}+e^{j\omega t}\right)dt=\frac{1}{a+j\omega}+\frac{1}{a-j\omega}=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

三、矩形脉冲 $f(t)=E\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$

$$F(\omega)=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}}Ee^{-j\omega t}dt=j\frac{E}{\omega}\left(e^{-\frac{j\omega\tau}{2}}-e^{\frac{j\omega\tau}{2}}\right)=\frac{2E}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}=E\tau\,Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

四 符号函数 $f(t)=\mathrm{sgn}(t)$ （不满足绝对可积）

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\lim_{a\to0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-a|t|}e^{-j\omega t}dt$$

$$=\lim_{a\to0^+}\left[\int_{-\infty}^{0}\left(-e^{at}\right)e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{+\infty}e^{-at}\cdot e^{-j\omega t}dt\right]$$

$$=\lim_{a\to0^+}\frac{-2j\omega}{a^2+\omega^2}=\frac{2j}{\omega}$$

$$|F(\omega)|=\lim_{a\to0^+}\frac{2|\omega|}{a^2+\omega^2}=\frac{2}{|\omega|}\qquad \varphi(\omega)=\frac{\pi}{2}f(\omega)$$

五、冲激函数 $f(t)=\delta(t)$

$$F(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-jwt}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\delta(w)]=\frac{1}{2\pi}$$

实际上 $\mathcal{F}[E]=\lim_{\tau\to+\infty}E\tau\, Sa(t)=2\pi E\delta(t)$

$\because \frac{d\delta(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jwt}dw\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}jw\,e^{jwt}dw$

$\therefore \mathcal{F}[\delta'(t)]=jw$

$$\frac{d^n\delta(t)}{dt^n}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(jw)^n e^{jwt}dt \Rightarrow \mathcal{F}(\delta^{(n)}(t))=(jw)^n$$

六、阶跃函数 $f(t)=u(t)=\frac{1}{2}+sgn(t)$

$$F(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}+sgn(t)\right)e^{-jwt}dt=\pi\delta(t)+\frac{1}{jw}$$

§3.7 傅立叶变换基本性质

$$\begin{cases} f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(w)\,e^{jwt}\,dw = \mathcal{F}^{-1}[F(w)] \\ F(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{-jwt}\,dt = \mathcal{F}[f(t)] \end{cases}$$

(一) 对称性.

$F(w)=\mathcal{F}[f(t)] \Rightarrow \mathcal{F}[F(t)]=2\pi f(-w)$

Proof: $F(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{-jwt}\,dt$

$$2\pi f(-w)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)\,e^{-jwt}\,dt$$

$$F(-t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi f(-w)\,e^{jwt}\,dw$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(-w)\,e^{jwt}\,dw$$

$$F(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(w)\,e^{-jwt}\,dw$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi f(-m)\,e^{jmt}\,d(-m)$$

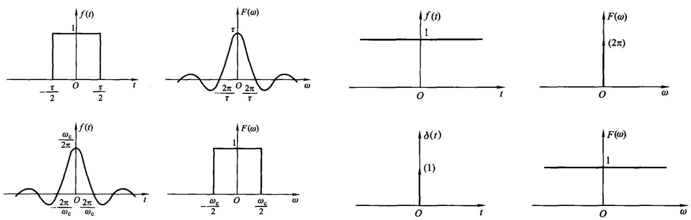
$$=\frac{-1}{2\pi}\int_{+\infty}^{-\infty}2\pi f(-w)\,e^{jwt}\,dw$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi f(-w)\,e^{jwt}\,dw$$

则 $F(t)=\mathcal{F}^{-1}[2\pi f(-w)]$ 或 $2\pi f(-w)=\mathcal{F}[F(t)]$

如果 $f(t)$ 是偶函数 则 $\mathcal{F}[F(t)]=2\pi f(-w)$

eg. $\mathcal{F}[\delta(t)]=1$ $\mathcal{F}[1]=2\pi\delta(t)$



(二) 线性 $\mathcal{F}[\sum_i a_i f_i(t)] = \sum_i a_i \mathcal{F}[f_i(t)]$

积分线性 ⇒ 傅里叶变换亦线性

$\mathcal{F}[f_i(w)] = F_i(w) \quad (i=1,2,3,\cdots,n)$

(三) 奇偶虚实性

$$F(w) = |F(w)| e^{j\varphi(w)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-jwt} dt$$

$$F(w) = R(w) + jX(w)$$

则 $|F(w)| = \sqrt{R^2(w) + X^2(w)} \quad \varphi(w) = \arctan \frac{X(w)}{R(w)}$

1、$f(t) \in \mathbb{R}$

则 $R(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(wt) dt \quad X(w) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(wt) dt$

易知 $R(-w) = R(w) \quad X(-w) = -X(w) \quad F(-w) = -F^*(w)$

则 $|F(w)|$ 偶 $\varphi(w)$ 奇

而若 1° $f(t)$ 实偶 则 $X(w) = 0$，$F(w) = R(w) = 2\int_0^{+\infty} f(t) \cos(wt) dt$

⇓

$F(w)$ 实偶

2° $f(t)$ 实奇 则 $R(w) = 0$，$F(w) = jX(w) = -2j\int_0^{+\infty} f(t) \sin(wt) dt$

⇓

$F(w)$ 虚奇

2、i $f(t)\in \mathbb{R}$

则易知 $R(w) = -\int_{-\infty}^{+\infty} j f(t) \sin wt \, dt = -R(-w)$

$X(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos wt \, dt = X(-w)$

实际上

$\mathcal{F}[f(-t)] = F(-w)$

$\mathcal{F}[f^*(t)] = F^*(-w)$

$\mathcal{F}[f^*(-t)] = F^*(w)$

（四） 尺度变换 $\mathcal{F}[f(t)] = F(w) \Rightarrow \mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{w}{a}\right)$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

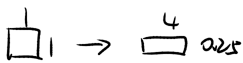
Proof: $\mathcal{F}[f(at)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{-jwt} dt$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-j\frac{w}{a}u} d\frac{u}{a} = \begin{cases} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-j\frac{w}{a}u} du & a>0 \\ \frac{1}{a} \int_{+\infty}^{-\infty} f(u) e^{-j\frac{w}{a}u} du & a<0 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-j\frac{w}{a}u} du = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{w}{a}\right)$$

eg. $F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ 发生伸缩时 $F(0)$ 变化

但 $f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(w) dt$ 不变



(五)、时移特性 $\mathcal{F}[f(t)]=F(w) \Rightarrow \mathcal{F}[f(t-t_0)]=F(w)e^{-jwt_0}$

Proof: $\mathcal{F}[f(t-t_0)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-t_0)e^{-jwt}dt=\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-jwu}e^{-jwt_0}du$

$$=e^{-jwt_0}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-jwt}dt=F(w)\cdot e^{-jwt_0}$$

☆ $\mathcal{F}[f(at-t_0)]=\mathcal{F}[f(a(t-\frac{t_0}{a}))]=\frac{1}{|a|}F(\frac{w}{a})e^{-jw\frac{t_0}{a}}$

(六)、频移特性 $\mathcal{F}[f(t)]=F(w) \Rightarrow \mathcal{F}[f(t)e^{jw_0t}]=F(w-w_0)$

Proof: $\mathcal{F}[f(t)e^{jw_0t}]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{jw_0t}\cdot e^{-jwt}dt$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{j(w-w_0)t}dt=F(w-w_0)$$

乘因子 e^{jw_0t} 对频谱相当于右移 w_0

$$\begin{cases}\cos(w_0t)=\frac{1}{2}(e^{jw_0t}+e^{-jw_0t})\\ \sin(w_0t)=\frac{1}{2}(e^{jw_0t}-e^{-jw_0t})\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mathcal{F}[f(t)\cos w_0t]=\frac{1}{2}[F(w+w_0)+F(w-w_0)]\\ \mathcal{F}[f(t)\sin w_0t]=\frac{1}{2}[F(w+w_0)-F(w-w_0)]\end{cases}$$

$$f(t-t_0) \leftrightarrow F(w)e^{-jwt_0}$$

$$f(at-t_0) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}F(\frac{w}{a})e^{-j\frac{w}{a}t_0}$$

$$e^{jw_0t}f(at-t_0) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}F(\frac{w-w_0}{a})e^{-j\frac{w-w_0}{a}t_0}$$

(七) 微分特性 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega) \Rightarrow \mathscr{F}\left[\frac{d^n f(t)}{dt}\right]=(j\omega)^n F(\omega)$

Proof: $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega$

即证 $\frac{df(t)}{dt}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} j\omega F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$

令 $H(\omega,t)=F(\omega)e^{j\omega t}$ $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega,t)\, d\omega$

$$\frac{df}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(H(\omega,t)-H(\omega,t_0)\right) d\omega$$

$$=\frac{d}{dt}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{t_0}^{t}\frac{\partial H(\omega,t)}{\partial t} dt\, d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial H(\omega,t)}{\partial t} d\omega\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial H(\omega,t)}{\partial t} d\omega dt$$

$$\therefore \frac{df(t)}{dt}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t}\left[F(\omega)e^{j\omega t}\right] d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} j\omega F(\omega)\, e^{j\omega t} dt \quad \square$$

(八) 积分特性 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega) \Rightarrow \mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right]=\frac{F(\omega)}{j\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)$

proof: $\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right] e^{-j\omega t} dt$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)u(t-\tau)d\tau\right] e^{-j\omega t} dt$$

$\mathscr{F}[u(t-\tau)]=[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}]e^{-j\omega\tau}$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} u(t-\tau)e^{-j\omega t}dt\right] f(\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right]e^{-j\omega\tau} f(\tau)d\tau$$

$F(0)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$

$$=\left[\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right]\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau} f(\tau)d\tau=\left[\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right]F(\omega)$$

$$=\frac{1}{j\omega}F(\omega)+\pi\delta(\omega)F(0)$$

3.7 卷积特性.

若 $\mathscr{F}[f_k(t)]=F_k(\omega)\quad(k=1,2)$ 则 $\begin{cases}\mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)\\ \mathscr{F}[f_1(t)\cdot f_2(t)]=\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)\end{cases}$

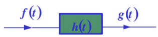
①用时域卷积定理求频谱密度函数。

② 求 $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau$ 的傅里叶变换。

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau \quad = f(t)*u(t)$$

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau \leftrightarrow F(\omega)\cdot\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\right]=\pi\, F(0)\delta(\omega)+\frac{F(\omega)}{\mathrm{j}\omega}$$

③求系统的响应。



$$g(t)=f(t)*h(t)\quad G(\omega)=F(\omega)H(\omega)\leftrightarrow g(t)=\mathscr{F}^{-1}[G(\omega)]$$

将时域求响应，转化为频域求响应。

性质	时域 $f(t)$	频域 $F(\omega)$	时域频域对应关系
1. 线性	$\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(t)$	$\sum_{i=1}^{n} a_i F_i(\omega)$	线性叠加
2. 对称性	$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$	对称
3. 尺度变换	$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$	压缩与扩展
	$f(-t)$	$F(-\omega)$	反褶
4. 时移	$f(t-t_0)$	$F(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$	时移与相移
	$f(at-t_0)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{\omega}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega t_0}{a}}$	
5. 频移	$f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$	$F(\omega-\omega_0)$	调制与频移
	$f(t)\cos(\omega_0 t)$	$\frac{1}{2}[F(\omega+\omega_0)+F(\omega-\omega_0)]$	
	$f(t)\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\mathrm{j}}{2}[F(\omega+\omega_0)-F(\omega-\omega_0)]$	
6. 时域微分	$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$	$\mathrm{j}\omega F(\omega)$	
	$\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}$	$(\mathrm{j}\omega)^n F(\omega)$	

性质	时域 $f(t)$	频域 $F(\omega)$	时域频域对应关系
7. 频域微分	$-\mathrm{j}tf(t)$	$\dfrac{\mathrm{d}F(\omega)}{\mathrm{d}\omega}$	
	$(-\mathrm{j}t)^n f(t)$	$\dfrac{\mathrm{d}^n F(\omega)}{\mathrm{d}\omega^n}$	
8. 时域积分	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau$	$\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}F(\omega)+\pi F(0)\delta(\omega)$	
9. 时域卷积	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(\omega)F_2(\omega)$	乘积与卷积
10. 频域卷积	$f_1(t)f_2(t)$	$\dfrac{1}{2\pi}F_1(\omega) * F_2(\omega)$	
11. 时域抽样	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-nT_s)$	$\dfrac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\omega-\dfrac{2\pi n}{T_s}\right)$	抽样与重复
12. 频域抽样	$\dfrac{1}{\omega_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(t-\dfrac{2\pi n}{\omega_s}\right)$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega)\delta(\omega-n\omega_s)$	
13. 相关	$R_{12}(\tau)$ $R_{21}(\tau)$	$F_1(\omega)F_2^*(\omega)$ $F_1^*(\omega)F_2(\omega)$	
14. 自相关	$R(\tau)$	$\|F(\omega)\|^2$	

3.9 周期信号傅立叶变换

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

$$\begin{cases}\mathcal{F}[\cos\omega_0 t] = \pi[\delta(\omega+\omega_1)+\delta(\omega-\omega_1)] \\ \mathcal{F}[\sin\omega_0 t] = j\pi[\delta(\omega+\omega_1)-\delta(\omega-\omega_1)]\end{cases}$$

从傅立叶级数可知. 对 $e^{j\omega_0 t}$ ($\cos\omega_0 t$, $\sin\omega_0 t$) 系数为1

即频谱密度在 ω_0 处积分得到 1 $\Rightarrow$ $F(\omega)$ 为一冲激

一般周期信号　　设周期 T_1　对应 $\omega_1 = 2\pi f_1 = \frac{2\pi}{T_1}$

$\hookrightarrow$ $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$

则 $\mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \mathcal{F}[e^{jn\omega_1 t}]$

∴ $\mathcal{F}[f(t)] = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \delta(\omega-n\omega_1)$ → 每分量频谱密度是无穷大的

一定是冲激序列

离散谱. 强度 $2\pi F_0(n\omega_1)$

其中 $F_n = \frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$

考虑 $f(t)$ 截取一个在周期内的函数 $g(t) = f(t)$ $|t| \le \frac{T}{2}$

有 $\mathcal{F}[g(t)] = F_0(\omega) = \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-j\omega t} dt$

不难发现　　$F_n = \frac{1}{T_1} F_0(n\omega_1)$

3.10 抽样信号的傅立叶变换

(一) 时域抽样

设 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ 　抽样脉冲序列 $p(t) \leftrightarrow P(\omega)$ 　周期信号 → 离散冲激谱

则抽样后 $f_s(t) = f(t)\,p(t) \Rightarrow \mathcal{F}[f_s(t)] = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * P(\omega)$

∵ $p(t)$ 周期 ∴ $P(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_n \delta(\omega - n\omega_s)$ 其中 $P_n = \frac{1}{T_s}\int_0^{T_s} f(t) e^{-jn\omega t} dt$

需要指出 T_s 为抽样序列的周期 对应 $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$

则 $\mathcal{F}[f_s(\omega)] = F_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_n F(\omega) * \delta(\omega - n\omega_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_n F(\omega - n\omega_s)$

把 $F(\omega)$ 形状原封不动地，但乘系数 P_n 搬到 $n\omega_s$ 处

① 矩形脉冲抽样 → 自然抽样

$$P_n = \frac{1}{T_s}\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} p(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{E}{T_s}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \cos n\omega_s t\, dt$$

$$= \frac{E}{T_s}\, 2\, \frac{\sin \frac{n\omega_s \tau}{2}}{n\omega_s} = \frac{E\tau}{T_s} Sa\left(\frac{n\omega_s \tau}{2}\right) = \frac{1}{T_s} P_0(n\omega_s)$$

$$\Rightarrow F_s(\omega) = \frac{E\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Sa\left(\frac{n\omega_s \tau}{2}\right) F(\omega - n\omega_s)$$

② 冲激序列 → 理想抽样 $p(t) = \delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s)$

$$P_n = \frac{1}{T_s}\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} p(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T_s}\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} \delta(t)\, dt = \frac{1}{T_s}$$

系数 P_n 为常数 ⇒ 无形状压缩 $F_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - n\omega_s)$

若对时域做冲激抽样 T_s 则 频域上以 $w_s=\frac{2\pi}{T_s}$ 延拓

反之. 若对频域做冲激抽样 w 则 时域上以 $T_1=\frac{2\pi}{w_1}$ 延拓

并乘以系数 $\frac{1}{T_s}$, $\frac{1}{w_1}$ $\Rightarrow$ 区间内积分量则由 $T_s f$ 变成 $1\cdot f$

$$f_1(t)=\frac{1}{w_1}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(t-nT_1)=\mathcal{F}^{-1}[F(w)*\delta_{w_1}(w)]$$

$\rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(w-nw_1)$

§4 拉普拉斯变换

显然也是线性的

$f(t)$ 乘 $e^{-\sigma t}$ 后 绝对可积

$$\mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-(j\omega+\sigma)t}dt = F(j\omega+\sigma)$$

而 $\mathcal{F}^{-1}[F(j\omega+\sigma)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega+\sigma)e^{j\omega t}d\omega = f(t)e^{-\sigma t}$

令 $s = j\omega+\sigma$ $\quad F(j\omega+\sigma) = F(s)$ $\quad ds = j\,d\omega$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega+\sigma)e^{(j\omega+\sigma)t}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F(s)e^{st}\,d\omega$$

> 拉氏变换对 $\begin{cases} F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \\ f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}dt \end{cases}$

单边拉氏变换 $\begin{cases} F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \\ f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}dt \end{cases}$

默认为0^-系统

> 单边拉氏变换收敛

要求 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|e^{-\sigma t}dt < \infty$ 绝对可积

一般情况、满足其必要条件 $\lim_{t\to+\infty} f(t)e^{-\sigma t} = 0$ 即可

不考虑 e^{-t^2} 等一些不满足条件的信号、则一般 σ 足够大即可

一些 Laplace 变换

1、阶跃 $\mathcal{L}[u(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}$

2. 冲激 $\mathcal{L}[\delta(t-t_0)] = \int_0^{+\infty} \delta(t-t_0) e^{-st} dt = e^{-st_0}$ $t_0 \geq 0$ ($t_0=0$ 为1)

3. $e^{-\alpha t}$ $\mathcal{L}[e^{-\alpha t}] = \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+s)t} dt = \frac{1}{\alpha+s}$ $(\sigma > -\alpha)$

3.指数函数

$$L\left[e^{-\alpha t}\right] = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} dt = \left.\frac{e^{-(\alpha+s)t}}{-(\alpha+s)}\right|_0^{\infty} = \frac{1}{s+\alpha} \quad (\sigma > -\alpha)$$

$$L\left[e^{\alpha t}\right] = \frac{1}{s-\alpha} \quad (\sigma > \alpha)$$

$$L\left[e^{j\omega t}\right] = \frac{1}{s-j\omega} \quad (\sigma > 0), \quad L\left[e^{-j\omega t}\right] = \frac{1}{s+j\omega} \quad (\sigma > 0)$$

$$L\left[e^{(\sigma_0+j\omega)t}\right] = \frac{1}{s-\sigma_0-j\omega} \quad (\sigma > \sigma_0)$$

$$L\left[\sin\omega t\right] = L\left[\frac{1}{2j}(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t})\right] = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}\right] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$L\left[\cos\omega t\right] = L\left[\frac{1}{2}(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t})\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-j\omega}+\frac{1}{s+j\omega}\right] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$L\left[e^{-\alpha t}\sin\omega t\right] = L\left[e^{-\alpha t}\frac{1}{2j}(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t})\right] = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s-(-\alpha+j\omega)}-\frac{1}{s+(\alpha+j\omega)}\right] = \frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega}$$

$$L\left[e^{-\alpha t}\cos\omega t\right] = L\left[e^{-\alpha t}\frac{1}{2}(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t})\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-(-\alpha+j\omega)}+\frac{1}{s+(\alpha+j\omega)}\right] = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$$

4、$t^n u(t)$ $\mathcal{L}[t^n u(t)] = \int_0^{+\infty} t^n e^{-st} dt = \frac{1}{-s}\int_0^{+\infty} t^n de^{-st}$

$$= \left.\frac{t^n e^{-st}}{-s}\right|_0^{+\infty} + \frac{n}{s}\int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-st} dt = \frac{n}{s}\mathcal{L}[t^{n-1}u(t)]$$

而 $\mathcal{L}[tu(t)] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s^2}$

$\therefore \mathcal{L}[t^n u(t)] = \frac{n!}{s^{n+1}}$

性质. 线性 微分/积分 时移 s域平移 尺度 初值/终值 卷积 s域微分/积分

一、线性 $\mathcal{L}[k_1 f_1 + k_2 f_2] = k_1\mathcal{L}[f_1] + k_2\mathcal{L}[f_2]$

二、时域微分 $f(t) \leftrightarrow F(s)$ 则 $\frac{df(t)}{dt} = sF(s) - f(0)$ $(f(0_-))$

prf: $\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt = f(t)e^{-st}\Big|_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$

$= -f(0) + sF(s)$

推广 $\frac{d^2f(t)}{dt^2} \leftrightarrow s(sF(s)-f(0)) - f'(0)$

$\frac{d^3f(t)}{dt^3} \leftrightarrow s\left[s(sF(s)-f(0)) - f'(0)\right] - f''(0)$

eg. $\frac{d}{dt}(\cos w_0 t) \leftrightarrow s\frac{s}{s^2+w_0^2} - 1 = -\frac{w_0^2}{w_0^2+s^2}$

$\|$

$-w_0 \sin w_0 t \leftrightarrow -\frac{w_0^2}{s^2+w_0^2}$

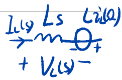
$\frac{d}{dt}(\cos w_0 t \cdot u(t)) \leftrightarrow s\frac{s}{s^2+w_0^2} - 0 = \frac{s^2}{w_0^2+s^2}$

$\|$

$-w_0 \sin w_0 t \cdot u(t) + \delta(t) \leftrightarrow -\frac{w_0^2}{s^2+w_0^2} + 1 = \frac{s^2}{w_0^2+s^2}$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - \sum_{r=0}^{n-1} s^{n-r-1} f^{(r)}(0)$$

对电感 $v_L(t) = L\frac{d}{dt}i_L(t)$ 则 $V_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0)$ 等效阻抗 sL

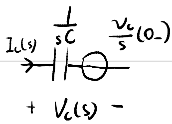


三、积分 $f(t) \leftrightarrow F(s) \Rightarrow \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0)}{s} = \frac{F(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^{0} f(\tau)d\tau}{s}$

对电容 $v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)d\tau$ 则 $V(s) = \frac{1}{C}\left(\frac{I_C(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^{0_-} i_C(t)dt}{s}\right) = \frac{I_C(s)}{Cs} + \frac{v_C(0_-)}{s}$

等效阻抗 $\frac{1}{Cs}$

$\begin{cases} \dot{V}_L = jwL\dot{I}_L \\ \dot{V}_C = \frac{\dot{I}_C}{jwC} \end{cases}$ s与jw对应



四. 时移 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s) \Rightarrow \mathscr{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)]=e^{-st_0}F(s)$

prf: $\mathscr{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)]=\int_0^{+\infty} f(t-t_0)u(t-t_0)e^{-st}dt=\int_{t_0}^{+\infty} f(t-t_0)e^{-st}dt$

$=\int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-s(t_0+\tau)}d\tau = e^{-st_0}\int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^{-st_0}F(s)$

$$\mathscr{L}[f(t-t_0)u(t)]=e^{-st_0}[F(s)+\int_{-t_0}^{0} f(t)e^{-st}dt] \quad \text{右移}$$

$$\mathscr{L}[f(t+t_0)u(t)]=e^{st_0}[F(s)-\int_{0}^{t_0} f(t)e^{-st}dt] \quad \text{左移}$$

五. s域平移 $f(t) \leftrightarrow F(s) \Rightarrow f(t)e^{-at}=F(s+a)$

prf: $\mathscr{L}[f(t)e^{-at}]=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-(s+a)t}dt=F(s+a)$

eg. $e^{-at}\sin(wt)=e^{-at}\frac{1}{2j}(e^{jwt}-e^{-jwt})=\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s+a-jw}-\frac{1}{s+a+jw}\right)=\frac{w}{(s+a)^2+w^2}$

六. 尺度变换 $f(t) \leftrightarrow F(s) \Rightarrow f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$

prf: $\mathscr{L}[f(at)]=\int_0^{+\infty} f(at)e^{-\frac{s}{a}at}dt=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-\frac{s}{a}\tau}d\tau=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$

eg. $f(t) \leftrightarrow F(s) \Rightarrow f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a}F(\frac{s}{a}) \Rightarrow f(a(t-\frac{b}{a}))=\frac{e^{-s\frac{b}{a}}}{a}F(\frac{s}{a})$

$\Downarrow$

$f(t-b) \leftrightarrow F(s)e^{-bs} \Rightarrow f(at-b)=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})e^{-bs}$

七、初值（f与f'均可作Laplace变换）

$$\lim_{t\to 0_+} f(t) = f(0_+) = \lim_{s\to\infty} s\left(F(s)-k\right) \quad k\in\mathbb{R}$$

prf：$f(t)$含$k\delta(t)$冲激，$sF(s)-f(0_-) = \mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_{0_-}^{0_+} f'(t)e^{-st}dt + \int_{0_+}^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt$

$$\therefore sF(s)-f(0_-) = e^{-st}f(t)\Big|_{0^-}^{0^+} + s\int_{0^-}^{0^+} f(t)e^{-st}dt + \int_{0^+}^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt$$

$$= f(0^+)-f(0_-) + s\int_{0^-}^{0^+} k\delta(t)e^{-st}dt + \int_{0^+}^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt$$

$\lim_{s\to\infty}\int_{0^+}^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt = 0$ 　$s\int_{0^-}^{0^+} f(t)e^{-st}dt = ks$ $\therefore f(0_+) = \lim_{s\to\infty} s\left(F(s)-k\right) = f(0^+)$

若$f(t)$中含冲激$k\delta(t)$ → $\mathcal{L}[k\delta(t)] = k$
则 $F(s)-k = F_1(s)$ 为真分式 → 一般的$F(s)$为真分式

八　终值（同样要求f与f'可作Laplace变换）

$f(+\infty)$存在，即$|f(+\infty)|<+\infty$

$$f(t) \leftrightarrow F(s) \Rightarrow f(+\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

prf：$sF(s) - f(0_-) = \int_{0_-}^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt$

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = f(0_-) + \lim_{s\to 0}\int_{0_-}^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt = f(0_-) + \int_{0^-}^{+\infty} f'(t)dt$$

$$= f(0_-) + f(+\infty) - f(0_-) = f(+\infty)$$

$f(t)\to+\infty$ 存在 $\Leftrightarrow$ s域内 $F(s)$ 在 $\mathrm{Re}\{s\}\geq 0$ 部分内解析

九、卷积

$$\mathcal{L}[f_1(t)*f_2(t)] = F_1(s)\cdot F_2(s)$$

$$\mathcal{L}[f_1(t)\cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi j}F_1(s)*F_2(s)$$

十. 对s域微分 $f(t) \leftrightarrow F(s) \Rightarrow -tf(t) = \frac{dF(s)}{ds}$

prf: $\frac{dF(s)}{ds} = \int_0^{+\infty} f(t) \frac{de^{-st}}{dt} dt = \int_0^{+\infty} (-tf(t))\, e^{-st}\, dt$

十一. 对 s域积分 $f(t) \leftrightarrow F(s) \Rightarrow \frac{f(t)}{t} = \int_s^{\infty} F(s)\, ds$

prf: $\int_s^{\infty} F(s)\, ds = \int_s^{\infty} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt)\, ds$

$$= \int_0^{+\infty} f(t) \left(\int_s^{\infty} e^{-st} ds \right) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-st}\, dt$$

Laplace 逆变换

考虑 $F(s)=\dfrac{A(s)}{B(s)}$　A.B为实数系多项式

$$=\frac{a_n\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{b_n\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

p_i为极点　z_i为零点

考虑 $m<n$

① 单阶实数极点 $\Rightarrow$ p_i不重根

$$F(s)=\frac{K_1}{s-p_1}+\frac{K_2}{s-p_2}+\frac{K_3}{s-p_3}+\cdots+\frac{K_n}{s-p_n}$$

$$K_1=(s-p_1)F(s)\Big|_{s=p_1}\ \cdots\quad K_i=(s-p_i)F(s)\Big|_{s=p_i}$$

eg. $F(s)=\dfrac{10(s+2)(s+5)}{s(s+1)(s+3)}$　$F(s)=\dfrac{K_1}{s}+\dfrac{K_2}{s+1}+\dfrac{K_3}{s+3}$

而 $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{K_i}{s-p_i}\right]=K_i e^{p_i t}$

$\therefore f(t)=\left(\sum_{i=1}^{n}k_i e^{p_i t}\right)u(t)$

② 存在复极点 $\Rightarrow$ 一定成对存在且为复共轭

实际上一定可作因式分解: $B(s)=[(s+\alpha)^2+\beta^2]D(s)$

则 $F(s)=\dfrac{A(s)}{[(s+\alpha)^2+\beta^2]D(s)}=\dfrac{K_1}{s-p}+\dfrac{K_2}{s-p^*}+\cdots$

$$K_1=(s-p)F(s)\Big|_{s=p}\quad K_2=(s-p^*)F(s)\Big|_{s=p^*}\Rightarrow K_1=K_2^*=K$$

(或由 $\dfrac{K_1}{s-p}+\dfrac{K_2}{s-p^*}=\dfrac{(K_1+K_2)s-K_1p-K_2p^*}{s^2-(p+p^*)s+|p|^2}\in\mathbb{R},\ \forall s\in\mathbb{R}$ 得到)

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s-p}+\frac{K^*}{s-p^*}\right] = Ke^{pt}+K^*e^{p^*t}$$ 取 $p=-\alpha+j\beta$

$$= e^{-\alpha t}\left(Ke^{j\beta t}+K^*e^{-j\beta t}\right)$$ 令 $K=A+jB$

$$=2e^{-\alpha t}\left(A\cos\beta t - B\sin\beta t\right)$$

③ 多重极点 $F(s)=\dfrac{A(s)}{(s-p_1)^k D(s)}$

$$=\frac{K_{11}}{(s-p_1)^k}+\frac{K_{12}}{(s-p_1)^{k-1}}+\frac{K_{13}}{(s-p_1)^{k-2}}+\cdots+\frac{K_{1k}}{s-p_1}+\cdots$$

令 $F_1(s)=(s-p_1)^k F(s) = K_{11}+(s-p_1)K_{12}+\cdots+(s-p_1)^{k-1}K_{1k}+(s-p_1)^{k-1}G(s)$

$$K_{11}=\frac{1}{0!}F_1(s)\Big|_{s=p_1} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K_{11}}{(s-p_1)^k}\right]=\frac{F^{(1-1)}(p_1)}{(k-1)!\,0!}t^{k-1}e^{p_1t}$$

$$K_{12}=\frac{1}{1!}\frac{dF_1(s)}{ds}\Big|_{s=p_1} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K_{12}}{(s-p_1)^{k-1}}\right]=\frac{F^{(2-1)}(p_1)}{(k-2)!\cdot 1!}t^{k-2}e^{p_1t}$$

$$K_{13}=\frac{1}{2!}\cdot\frac{d^2F_1(s)}{ds^2}\Big|_{s=p_1}$$

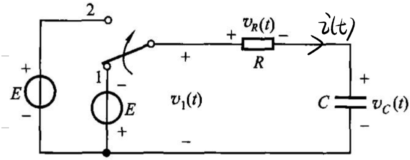
$$\vdots$$

$$K_{1k}=\frac{1}{(k-1)!}\cdot\frac{d^{k-1}F_1(s)}{ds^{k-1}}\Big|_{s=p_1} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K_{1k}}{s-p_1}\right]=\frac{F^{(k-1)}(p_1)}{0!(k-1)!}e^{p_1t}$$

$$\mathcal{L}\left[t^n e^{-at}\right]=\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$$

$m>n$ 时 ⇒ 长除法　含 e^{-s} 项 ⇒ 时移

Laplace 法分析电路 & s 域模型



$$Ri + v_c = E$$

$$RC\frac{dv_c}{dt} + v_c = E$$

$$v_c(0_-) = -E$$

则 $\mathcal{L}[LHS-RHS] = RC(sV_c(s) - v_c(0_-)) + V_c(s) - \frac{E}{s} = 0$

$$(RCs+1)V_c(s) = E\left(\frac{1}{s} - RC\right) \Rightarrow V_c(s) = \frac{E(\frac{1}{RC} - s)}{s(s+\frac{1}{RC})}$$

$$= E\left(\frac{1}{s} - \frac{2}{s+\frac{1}{RC}}\right)$$

$\therefore v_c(t) = E(1-2e^{-\frac{t}{RC}})u(t)$

变量 v_c $\Rightarrow$ 存在对变量的导数 $\Big\}\Rightarrow$ 代数求解 $V_c(s)$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad$ $\Downarrow$ $\qquad\qquad$ $\Downarrow$

$V_c(s)$ $\Rightarrow$ $sV(s) - v_c(0_-)$ $\qquad$ $v_c(t) = \mathcal{L}^{-1}[V_c(s)]$

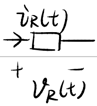
为了进一步简化 考虑 s 域元件模型

电阻R: $v_R(t) = R\, i_R(t) \Rightarrow V_R(s) = R\, I_R(s)$

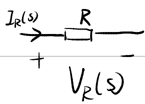
电感L: $v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$, $i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v_L(\tau)d\tau$ $\Rightarrow \begin{cases} V_L(s) = L[sI_L(s) - i_L(0_-)] \\ I_L(s) = \frac{1}{sL}\left(V_L(s) + \int_{-\infty}^{0_-} v_L(\tau)d\tau\right) = \frac{V_L(s)}{sL} + \frac{i_L(0_-)}{s} \end{cases}$

电容C: $v_c(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_c(\tau)d\tau$, $i_c(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt}$ $\Rightarrow \begin{cases} V_c(s) = \frac{1}{sC}\left(I_c(s) + \int_{-\infty}^{0_-} i_c(\tau)d\tau\right) = \frac{I_c(s)}{sC} + \frac{v_c(0_-)}{s} \\ I_c(s) = C[sV_c(s) - v_c(0_-)] \end{cases}$

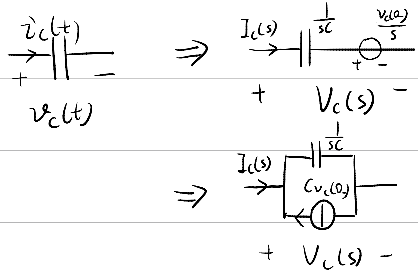
那么 R:



$\Rightarrow$

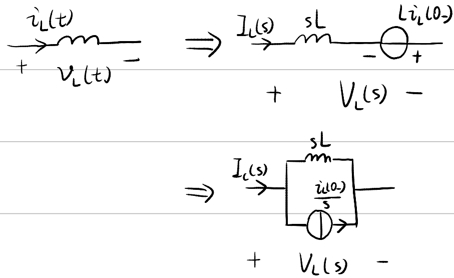


C :



$i_C(t)$
$+$ $v_C(t)$ $-$
$\Rightarrow$
$I_C(s)$
$\frac{1}{sC}$
$\frac{v_C(0_-)}{s}$
$+$ $-$
$+$ $V_C(s)$ $-$
$\Rightarrow$
$I_C(s)$
$\frac{1}{sC}$
$Cv_C(0_-)$
$+$ $V_C(s)$ $-$

L :



$i_L(t)$
$+$ $v_L(t)$ $-$
$\Rightarrow$
$I_L(s)$
sL
$Li_L(0_-)$
$-$ $+$
$+$ $V_L(s)$ $-$
$\Rightarrow$
$I_L(s)$
sL
$\frac{i_L(0_-)}{s}$
$+$ $V_L(s)$ $-$

系统函数（网络函数）$H(s)$

$$\left.\begin{matrix} V(s) \\ I(s) \end{matrix}\right\} \to E(s) \xrightarrow{H(s)} R(s) \left\{\begin{matrix} V(s) \\ I(s) \end{matrix}\right.$$

找到 $H(s)$, s.t. $R(s) = H(s)\,E(s)$

取 $E(s) = 1$ 即有 $R(s) = H(s)$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$e(t) = \delta(t) \to h(t)$ $r(t) = h(t)$

故 $h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$

H(s) 零点&极点，与 h(t) 波形特性

$\{z_i \mid H(z_i)=0\}$ 为 H(s) 零点集合

$\{z_i \mid \frac{1}{H(z_i)}=0\}$ 为 H(s) 极点集合

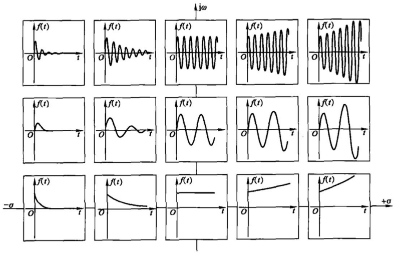
一阶极点 ⇒ 不重根

$$F(s)=\int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$f(t)\leftrightarrow F(s) \Rightarrow f(t)e^{-at}\leftrightarrow F(s+a)$$

一阶极点

$H(s)=\frac{1}{s}$， $p_1=0$在原点， $h(t)=\mathcal{L}^{-1}[H(s)]=u(t)$	
$H(s)=\frac{1}{s+a}$， $p_1=-a$ $a>0$,在左实轴上， $h(t)=e^{-at}u(t)$,指数衰减 $a<0$,在右实轴上， $h(t)=e^{-at}u(t)$,$-a>0$,指数增加	
$H(s)=\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$， $p_1=j\omega_0, p_2=-j\omega_0$,在虚轴 $h(t)=\sin(\omega_0 t)u(t)$，等幅振荡	
$H(s)=\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$ $p_1=-\alpha+j\omega_0, p_2=-\alpha-j\omega_0$，共轭根 $h(t)=e^{-\alpha t}\sin(\omega_0 t)u(t)$，当$\alpha>0$，极点在左半平面，衰减振荡 当 $\alpha<0$，极点在右半平面，增幅振荡	



可能为t与指数作乘法 二阶极点 ⇒ 类似均乘了t作一个线性增长

$$t f(t) = -\frac{dF(s)}{ds}$$

$H(s)=\frac{1}{s^2}$,极点在原点, $h(t)=tu(t), t\to\infty, h(t)\to\infty$	
$H(s)=\frac{1}{(s+a)^2}$,极点在实轴上, $h(t)=t e^{-\alpha t}u(t), \alpha>0, t\to\infty, h(t)\to 0; \alpha<0, t\to\infty, h(t)\to\infty$	
$H(s)=\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$, 极点在虚轴上, $h(t)=t\sin(\omega t)u(t), t\to\infty, h(t)$增幅振荡	

激励：$e(t) \leftrightarrow E(s)$ 系统函数：$h(t) \leftrightarrow H(s)$

$$E(s)=\frac{\prod_{l=1}^{u}(s-z_l)}{\prod_{k=1}^{v}(s-p_k)} \qquad H(s)=\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

P_i：固有频率

响应：$r(t) \leftrightarrow R(s)$

$$R(s)=\frac{\prod_{l=1}^{u}(s-z_l)}{\prod_{k=1}^{v}(s-p_k)} \bullet \frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)} \Longrightarrow R(s)=\sum_{k=1}^{v}\frac{K_k}{s-p_k}+\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i}{s-p_i}$$

$$r(t)=L^{-1}\left[R(s)\right]=\sum_{k=1}^{\nu}K_k e^{p_k t}u(t)+\sum_{i=1}^{n}K_i e^{p_i t}u(t)$$

强迫响应分量 + 自由响应分量

• 响应函数r(t)由两部分组成：

系统函数的极点--自由响应分量；

激励函数的极点--强迫响应分量。

• 定义：系统行列式（特征方程）的根为系统的固有频率（或称“自然频率”、“自由频率”）。

H(s)的分母为行列式，因此H(s)的极点都是系统的固有频率，决定了自由响应的函数形式；

但是，当H(s)零、极点相消时，某些固有频率将丢失，因此，H(s)只能用于研究零状态响应，不包含零输入响应的全部信息，零输入响应需要所有极点即固有频率。

• 自由响应的极点只由系统本身的特性所决定，与激励函数的形式无关，然而系数（幅度和相位）K_i, K_k和$H(s)$, $E(s)$ 都有关系。

暂态响应和稳态响应

瞬态（暂态）响应：是指激励信号接入以后，完全响应中瞬时出现的有关成分，随着t增大，将消失。

稳态响应：完全响应 - 瞬态（暂态）响应

左半平面的极点产生的函数项和瞬态（暂态）响应对应。

$$R(s)=E(s)H(s)=\frac{\prod_{l=1}^{u}(s-z_l)}{\prod_{k=1}^{v}(s-p_k)} \bullet \frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

一般对于稳定系统，$H(s)$极点的实部小于零，位于左半平面，

即$\mathrm{Re}[p_i]<0$，故自由响应函数为衰减形式，此时“自由响应 = 暂态响应”

若$E(s)$极点的实部大于等于零，即$\mathrm{Re}[p_k]\geq 0$，则“强迫响应 = 稳态响应”

当$E(s)$极点和$H(s)$零点相同时，即$p_k=z_j$，对应因子相消，因此p_k对应的稳态响应不再存在。特殊情况（一般不在实际问题出现）：

(1)$\mathrm{Re}[p_i]=0$，对应的自由响应为等幅振荡，即自由响应也成为稳态响应（边界稳定系统）

(2)$\mathrm{Re}[p_i]>0$，对应的自由响应为增幅振荡（不稳定系统）

(3)$\mathrm{Re}[p_k]<0$，即激励信号自身为衰减函数，此时强迫响应随时间也衰减到零，和自由响应一起构成暂态响应，而稳态响应为零。

频响特性

$e(t) = E_m \sin(w_0 t)$ $\quad E(s) = \dfrac{E_m w_0}{s^2+w_0^2}$

则 $R(s) = \dfrac{E_m w_0}{s^2+w_0^2} H(s)$

$$= \frac{K_{-jw_0}}{s+jw_0} + \frac{K_{jw_0}}{s-jw_0} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{s-P_i}}$$ $\to$ 自由响应. 暂态

则 $K_{-jw_0} = \dfrac{E_m w_0}{s-jw_0} H(s)\Big|_{s=-jw_0}$

$$= \frac{E_m w_0}{-2jw_0} H(-jw_0) = \frac{E_m}{-2j} H(-jw_0)$$

$$K_{jw_0} = K_{-jw_0}^{*} = \frac{E_m w_0}{2jw_0} H(jw_0) = \frac{E_m}{2j} H(jw_0)$$

$H(x) \in \mathbb{R}$ $(x \in \mathbb{R})$ $\quad$ 则 $H(jw_0) + H(-jw_0) \in \mathbb{R}$

令 $H(jw_0) = H_0 e^{j\varphi_0}$

对应 $\dfrac{E_m}{2} \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{H(-jw_0)}{-j(s-jw_0)} + \dfrac{H(jw_0)}{j(s+jw_0)}\right] = \dfrac{E_m H_0}{2}\left(\dfrac{e^{-j(\varphi_0+w_0 t)}}{-j} + \dfrac{e^{j(\varphi_0+w_0 t)}}{j}\right) = E_m H_0 \sin(w_0 t + \varphi_0)$

稳定系统 → $\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty \\ H(s)\text{ 极点在虚轴左侧} \end{cases}$

$H(s)$ 极点位于虚轴 → 临界

双边 Laplace

$F_B(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$ 存在 ⇒ 指出收敛域

设 $f(t)= e^{\alpha t} u(t) + e^{\beta t} u(-t)$ $s=\sigma+j\omega$

$F_B(s)=\int_{0}^{+\infty} e^{\alpha t} e^{-st} dt + \int_{-\infty}^{0} e^{\beta t} e^{-st} dt$

则 $\sigma > \alpha$ $\sigma < \beta$ ∴ 要求 $\beta > \alpha$

($\beta \le \alpha$ 无收敛带，变换不存在)

$f(t) = f_1(t) u(t) + f_2(t) u(-t)$ → 非因果部分

$f_1(t)$ ⇓ 因果部分 $F_1(s)=\mathcal{L}[f_1(t)]$

若 $L(s)=\mathcal{L}[f_2(-t)]$

则 $F_2(s)=L(-s)$

(单边) Laplace 变换 $\Leftrightarrow$ Fourier 变换

若单边 Laplace 变换收敛域 $\sigma_0 > 0$ 则无 Fourier 变换

$\sigma_0 < 0$ 则 $\mathcal{F}[f(t)] = F(s)\big|_{s=j\omega}$

$\sigma_0 = 0$ 即 $F(s) = F_a(s) + \sum_{n=1}^{N} \frac{k_n}{s - j\omega_n}$

则 $\mathcal{F}[f(t)] = F_a(j\omega) + \sum_{n=1}^{N} k_n \pi \delta(\omega - \omega_n)$

$H(s)$: $R(s)=H(s)\,E(s)$

取傅式 $h(t)\to H(w)\,/\,H(jw)$

则 $R(jw)=H(jw)\cdot R(jw)$

则 $r(t)=h(t)*e(t)$ $h(t)$实际为冲激响应

对稳定系统 $H(jw)=H(s)\big|_{s=jw}$

故 $\mathcal{F}[h(t)]=H(s)\big|_{s=jw}$

$$H(jw)=|H(jw)|e^{j\varphi(w)} \quad \begin{cases} |H(jw)| & \text{幅频} \\ \varphi(w) & \text{相频} \end{cases}$$

考虑频响特性

设 $e(t)=e^{jw_0t}$

稳定状态下

则 $r(t)=h(t)*e(t)=H(jw_0)e^{jw_0t}$

prf: $r(t)=h(t)*e(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e^{jw_0(t-\tau)}d\tau$

$$=e^{jw_0t}\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e^{-jw_0\tau}d\tau$$

$$=e^{jw_0t}H(jw_0)$$

系统函数的物理意义

系统可以看作是一个信号处理器

激励：$E(j\omega)$

响应：$H(j\omega)\cdot E(j\omega)$

对信号各频率分量进行加权

$$E(j\omega)=|E(j\omega)|\cdot e^{j\varphi_e(\omega)}$$

$$H(j\omega)=|H(j\omega)|\cdot e^{j\varphi_h(\omega)}$$

$$|R(j\omega)|=|E(j\omega)|\cdot|H(j\omega)|$$

$$\varphi_r(\omega)=\varphi_e(\omega)+\varphi_h(\omega)$$

$E(\omega)$的幅度由$|H(\omega)|$加权

$E(\omega)$的相位由$\varphi(\omega)$修正

对于不同的频率ω，有不同的加权作用，这也是信号分解、求响应再叠加的过程。

当然 对 $H(j\omega)=H(s)\big|_{s=j\omega}$

成立条件 虚轴上及右半平面无极点

若有极点 (一定在虚轴上)

$$\mathcal{L}[h(t)]=H(s)=\sum_n\frac{k_n}{s-j\omega_n}\quad (j\omega_n\text{为极点})$$

$$\mathcal{F}[h(t)]=H(s)\big|_{s=j\omega}+\pi\sum_n k_n\delta(\omega-\omega_n)$$

对 $e(t)=E_m\sin(\omega_0 t+\varphi_0)$ 经 $H(j\omega)=|H(j\omega)|\varphi(\omega)$

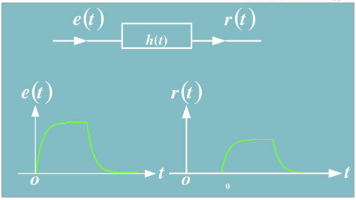
有 $r(t)=E_m|H(j\omega_0)|\sin(\omega_0 t+\varphi_0+\varphi(\omega_0))$

二．无失真传输条件

已知系统$h(t) \leftrightarrow H(j\omega)$，若激励为 $e(t)$,响应为 $r(t)$,

那么$r(t) = Ke(t-t_0)$时，为不失真

波形形状不变 $\begin{cases} \text{幅度可以比例增加} \\ \text{可以有时移} \end{cases}$



对系统函数的要求：

$r(t) = Ke(t-t_0)$

$\therefore R(j\omega) = KE(j\omega)e^{-j\omega t_0}$

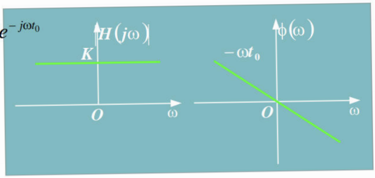
$\therefore H(j\omega) = \dfrac{R(j\omega)}{E(j\omega)}$

$= Ke^{-j\omega t_0}$

频谱图

$$H(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{E(j\omega)} = Ke^{-j\omega t_0}$$

即：$\begin{cases} |H(j\omega)| = K \\ \varphi(\omega) = -\omega t_0 \end{cases}$

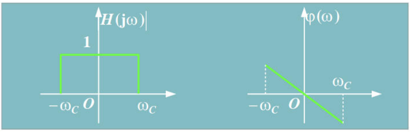


几点认识：

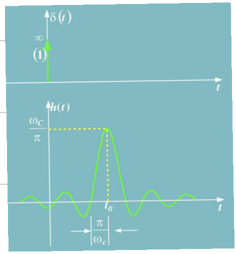
- 要求幅度为与频率无关的常数K，系统的通频带为无限宽。
- 相位特性与$|\omega|$成正比，是一条过原点的负斜率直线。
- 不失真的线性系统其冲激响应也是冲激函数。

$$H(j\omega) = Ke^{-j\omega t_0} \xrightarrow{\text{逆变换}} h(t) = K\delta(t-t_0)$$

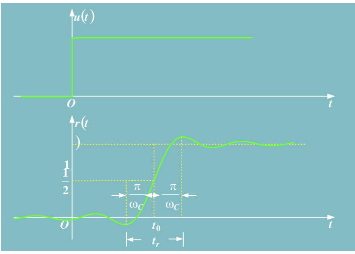
理想低通滤波器



$$H(j\omega)=\begin{cases}1\cdot e^{-j\omega_0} & |\omega|<\omega_c\\ 0 & |\omega|>\omega_c\end{cases}$$ 即 $$\begin{cases}|H(j\omega)|=\begin{cases}1 & |\omega|<\omega_c\\ 0 & |\omega|>\omega_c\end{cases}\\ \phi(\omega)=-\omega t_0\end{cases}$$



$$h(t)=\frac{w_c}{\pi}Sa[w_c(t-t_0)]$$



$$g(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{w_c(t-t_0)}\frac{\sin x}{x}dx\right]$$

$Si(y)$ 奇函数

离散时间信号 $x[n]=C\cdot\alpha^n = Ce^{\beta n}$ $\quad(\alpha=e^{\beta n})$

$C,\alpha,\beta\in\mathbb{C}$

实指数信号 $x[n]=k\cdot r^n$ $\quad k,r\in\mathbb{R}$

具有周期性

正弦信号 若 $|\alpha|=1$ $\Rightarrow$ 复指数序列 $x[n]=e^{j\omega_0 n}$

$x[n]=e^{j\omega_0 n} = \cos(\omega_0 n)+j\sin(\omega_0 n)$

$A\cos(\omega_0 n+\phi)=\frac{A}{2}(e^{j\phi}e^{j\omega_0 n}+e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n})$

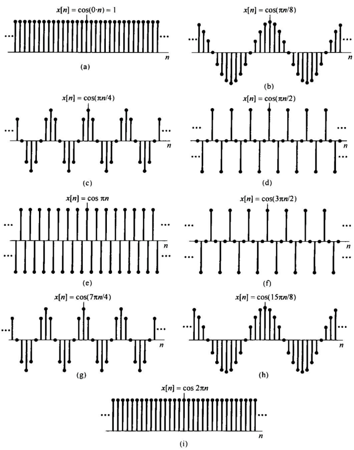
一般离散时间复指数信号 $x[n]=C\alpha^n$

$C=|C|e^{j\theta}$ $\quad \alpha=|\alpha|e^{j\omega_0}$

则 $x[n]=|C||\alpha|^n(\cos(\omega_0 n+\theta)+j\sin(\omega_0 n+\theta))$

周期性 ① $\forall n\in\mathbb{N}$, $e^{j(\omega_0+2\pi)n}=e^{j\omega_0 n}$ $\quad k\in\mathbb{Z}$

说明离散时间复指数信号 (ω_0) 与 $\omega_0\pm2k\pi$ 是一致的



振荡速率

ω 从 $0\to\pi$ 时 ↗

从 $\pi\to2\pi$ 时 ↘

如果周期 则 $\exists N\in\mathbb{N}$, s.t.

$e^{j\omega_0(n+N)}=e^{j\omega_0 n}$

$\Rightarrow e^{j\omega_0 N}=1$

$\Rightarrow \omega_0 N=2\pi m \quad (m\in\mathbb{Z})$

$\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{m}{N}\in\mathbb{Q}$

↳ 有理数

基波频率：$\frac{2\pi}{N}=\frac{\omega_0}{m}$　　基波周期：$N=m\frac{2\pi}{\omega_0}$

表 1.1　信号 $e^{j\omega_0 t}$ 和 $e^{j\omega_0 n}$ 的比较

$e^{j\omega_0 t}$	$e^{j\omega_0 n}$
ω_0 不同，信号不同	频率相差 2π 的整倍数，信号相同
对任何 ω_0 值都是周期的	仅当 $\omega_0=2\pi m/N$ 时才是周期的，这里 N(大于0)和 m 均为整数
基波频率为 ω_0	基波频率* ω_0/m
基波周期：$\begin{cases}\omega_0=0 \text{ 时无定义} \\ \omega_0\neq 0 \text{ 时 } 2\pi/\omega_0\end{cases}$	基波周期：$\begin{cases}\omega_0=0 \text{ 时无定义} \\ \omega_0\neq 0 \text{ 时 } m\left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right)\end{cases}$

* 这里假设 m 和 N 无任何公因子。

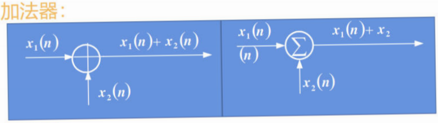
对离散时间信号，有公共周期 ⇒ 构成谐波

$N=\frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow \omega=k\cdot\omega_0=k\frac{2\pi}{N}$

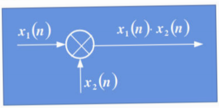
∴ $x_k[n]=e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$　然而　$x_{k+N}[n]=e^{j(k+N)\frac{2\pi}{N}n}=x_k[n]\cdot \cancel{e^{j2\pi n}}$

∴ 最多只有 N 个周期不同的复指数信号

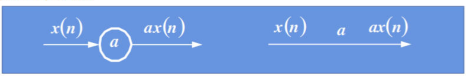
加法器：



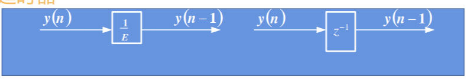
乘法器：



标量乘法器



延时器



前向差分 向右移序 $(y[n], y[n+1], \cdots, y[n+N])$

eg. $y[n+2] + y[n+1] - y[n] = n^2$ 2阶

后向差分 向右移序 $(y[n], y[n-1], \cdots y[n-N])$

eg $y[n] - y[n-3] = n$ 3阶

常系数线性差分方程

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r]$$

齐次形式 $\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = 0$

特征方程 $\sum_{k=0}^{N} a_k \alpha^k = 0$ $\Rightarrow$ 解出 $\alpha_0, \cdots, \alpha_N$

通解为 $\sum_{k=0}^{N} C_k \alpha_k^n$

若 α_t 为 s 重根 $\overset{对应}{\Rightarrow}$ $C_{t,1} \alpha^n + C_{t,2} n \alpha^n + \cdots + C_{t,s} n^{s-1} \alpha^n$

非齐次部分 $\sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r]$ 依据具体形式设特解形式

非齐次 通解 + 特解

零输入响应 & 零状态响应

eg. $y(n)-0.9y(n-1)=0.05u(n)$ $\quad y(-1)=1$

① 求 y_{zs}, y_{zi} $\quad y(1)=0.05$ $\quad \alpha-0.9=0$ $\quad \alpha=0.9$

$$D-0.9D=0.05 \Rightarrow D=0.5$$

$$y_{zs}(n)=C_{zs}(0.9)^n+0.5$$

$$y_{zs}(0)=0.05 \Rightarrow C=-0.45$$

$y_{zi}=C_{zi}(0.9)^n$ $\quad y(0)=0.9y(-1)=0.9$

$\therefore C_{zi}=0.9$ $\quad \therefore y_{zi}(0)=0.9^{n+1}$

$\therefore y=y_{zi}+y_{zs}=0.45\cdot(0.9)^n+0.5$

② **零输入响应 + 零状态响应 = 自由响应 + 强迫响应**

$$y(n)=\underbrace{\sum_{k=1}^{N}C_k\alpha_k^n}_{\text{自由响应}}+\underbrace{D(n)}_{\text{强迫响应}}$$

$$=\underbrace{\sum_{z=1}^{N}C_{zik}\alpha_k^n}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{N}C_{zsk}\alpha_k^n+D(n)}_{\text{零状态响应}}$$

$\alpha=0.9$ $\quad D=0.5$

$y(0)-y(-1)=0.05$

$\therefore y(0)=0.9y(-1)+0.05=0.95$

$$y(n)=C\,0.9^n+0.5 \Rightarrow C=0.45$$

注：零状态指 $\forall m<0$ $(m=-1,-2,-3,\cdots,-N)$ 均有 $y(m)=0$

单位样值响应

即$\delta(n)$作用下，系统的零状态响应，表示为$h(n)$

因果系统：输出变化不领先于输入变化的系统。

对于线性时不变系统是因果系统的充要条件：

$$n<0 \quad h(n)=0$$

稳定性的充要条件

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=P<\infty$$

单位样值响应绝对和为有限值（绝对可和）收敛。

卷积、

$$x(n)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)\cdot\delta(n-m)$$

则 $y(n)=H[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)H[\delta(n-m)]$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)\cdot h(n-m)$$

即 $y(n)=x(n)*h(n)$ $\left(=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h(n)x(n-m)\right)$

时不变 $\delta(n-m)\to h(n-m)$

均匀性 $x(m)\delta(n-m)\to x(m)h(n-m)$

可加性 $x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$

输出 $y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)=x(n)*h(n)$

系统对 $x(n)$的响应＝每一样值产生的响应之和，在各 处由 $x(m)$加权。

卷积和的公式表明：

$h(n)$将输入输出联系起来，即零状态响应＝$x(n)*h(n)$。

三．卷积的计算

$$x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

m范围由$x(n)$,$h(n)$范围共同决定。

离散卷积过程：序列倒置→移位→相乘→取和

1.解析式法

2.图解法

3.对位相乘求和法

4.利用性质

对因果系统 $y(n)=\sum_{m=0}^{m}x(m)h(n-m)$

反卷积　　对 $y(n)=x(n)*h(n)$

利用 $y(n)$ 与 $x(n)$ 或 $h(n)$ 求 $h(n)$ 或 $x(n)$

以求 $x(n)$ 为例

$y(n)=\sum_{m=0}^{n} x(m)h(n-m)$ 写为矩阵运算形式

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \cdots \\ y(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h(1) & h(0) & 0 & \cdots & 0 \\ h(2) & h(1) & h(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h(n) & h(n-1) & h(n-2) & \cdots & h(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \cdots \\ x(n) \end{bmatrix}$$

依次求出 $x(n)$

$$x(0)=y(0)/h(0)$$

$$x(1)=[y(1)-x(0)h(1)]/h(0)$$
$$x(2)=[y(2)-x(0)h(2)-x(1)h(1)]/h(0)$$
$$\ddot{x}(n)=\left[y(n)-\sum_{m=0}^{n-1} x(m)h(n-m)\right]/h(0)$$

同理

$$h(n)=\left[y(n)-\sum_{m=0}^{n-1} h(m)x(n-m)\right]/x(0)$$