Tutorial: Transformational Proofs: SOLUTION

1. George Boole (1815-1864)

2. (a)

p	$\neg$ p	$\neg$ ($\neg$ p)	$\neg$ ($\neg$ p) $\Leftrightarrow$ p
T	F	T	T
F	T	F	T

(b)

p	$\neg$ p	q	$\neg$ q	p $\Rightarrow$ q	$\neg$ q $\Rightarrow$ $\neg$ p	p $\Rightarrow$ q $\Leftrightarrow$ $\neg$ q $\Rightarrow$ $\neg$ p
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T

3. p $\wedge$ (q $\wedge$ r)

$\equiv$ p $\wedge$ $\neg$ $\neg$ (q $\wedge$ r)	Law of negation
$\equiv$ p $\wedge$ $\neg$ ($\neg$ q $\vee$ $\neg$ r)	De Morgan's law
$\equiv$ $\neg$ $\neg$ (p $\wedge$ ($\neg$ ($\neg$ q $\vee$ $\neg$ r)))	Law of negation and added a pair of brackets.
$\equiv$ $\neg$ ($\neg$ p $\vee$ $\neg$ ($\neg$ ($\neg$ q $\vee$ $\neg$ r)))	De Morgan's Law
$\equiv$ $\neg$ ($\neg$ p $\vee$ ($\neg$ q $\vee$ $\neg$ r))	Law of negation
$\equiv$ $\neg$ (($\neg$ p $\vee$ $\neg$ q) $\vee$ $\neg$ r)	Associativity
$\equiv$ $\neg$ ($\neg$ (p $\wedge$ q) $\vee$ $\neg$ r)	De Morgan's Law
$\equiv$ $\neg$ $\neg$ (p $\wedge$ q) $\wedge$ $\neg$ $\neg$ r	De Morgan's Law
$\equiv$ (p $\wedge$ q) $\wedge$ r	Law of negation (twice)

4.

Symbol	Meaning
p	It rains.
q	The crops grow.

$p \Rightarrow q$	
$\equiv (\neg\ p) \vee q$	Law of implication
$\equiv q \vee\ (\neg\ p)$	Commutative Law
$\equiv \neg\ (\neg\ q) \vee (\neg\ p)$	Law of negation
$\equiv (\neg\ q) \Rightarrow (\neg\ p)$	Law of implication
$\equiv \neg\ q \Rightarrow \neg\ p$	Removed pair of brackets (twice)

5.

Symbol	Meaning
L	You are lazy.
W	You work hard.
C	You are clever.

$(\neg L \Rightarrow W) \vee (C \wedge L)$	
$\equiv (\neg \neg L \vee W) \vee (C \wedge L)$	Law of implication
$\equiv \neg \neg L \vee W \vee (C \wedge L)$	Removed first pair of brackets
$\equiv L \vee W \vee (C \wedge L)$	Law of negation
$\equiv W \vee L \vee (C \wedge L)$	Commutative Law
$\equiv W \vee L$	Simplification

6.

p	q	r	$p \Leftrightarrow q$	$q \Leftrightarrow r$	$p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r$	$p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	F	F	F	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	T	F	F	T
F	T	F	F	F	T	T	T
F	F	T	T	F	T	T	T
F	F	F	T	T	F	F	T