

Studio della rete di Trenord

STEFANO ZUCCARELLA 816482

MATTEO PAOLELLA 816933

Indice

1	Introduzione	1
2	Descrizione dei dati	1
3	Studio preliminare della rete	2
4	Studio dei carichi	5
5	Studio sui cammini minimi	8
	5.1 Studio sul grafo dei cambi	8
	5.2 Studio sul grafo dei cammini minimi	10
6	Studio sulla resistenza ai guasti	14
7	Conclusioni	21

1 Introduzione

Una rete complessa è una rete che presenta una struttura topologica non banale. Data la natura particolare di questa tipologia di rete, infatti, non è sufficiente la visione grafica per ottenere delle informazioni sulle sue caratteristiche, ma è necessario utilizzare delle tecniche che permettano di descriverla. L'insieme di queste tecniche si può riassumere nella **network analysis**, un ramo della scienza che si occupa dello studio delle reti complesse.

L'importanza di questa disciplina deriva dal fatto che può essere applicata a molti contesti che possono essere modellati come reti complesse. Alcuni esempi sono Internet, le reti telefoniche, i social networks, le strutture biologiche o il sistema di trasporti pubblici.

In questo progetto è stato scelto di studiare la rete di Trenord, l'azienda che gestisce le ferrovie di Lombardia e dintorni. In particolare, è stato fatto uno studio sui **carichi** gestiti dalle stazioni, sui **cammini minimi** possibili e sulla **resistenza ai guasti** nel caso di malfunzionamento o attacco a particolari fermate.

Per svolgere questo progetto, è stato utilizzato come linguaggio di programmazione Python, e in particolare per la gestione dei grafi è stato utilizzato il modulo iGraph[4]. Per quanto riguarda la visualizzazione, invece, è stato utilizzato il software Cytoscape[3]. Il codice relativo è disponibile al seguente [link](#).

2 Descrizione dei dati

Per analizzare la rete ferroviaria di Trenord, sono stati utilizzati dei dati relativi al periodo da Dicembre 2018 a Dicembre 2019, reperibili al seguente [link](#). Il dataset è composto dalle seguenti tabelle:

- *agency*: contiene informazioni relative all'azienda (non utilizzato);

- *calendar*: contiene i giorni della settimana in cui vengono erogate le tratte;
- *calendar_dates*: contiene i giorni eccezionali in cui le tratte non sono disponibili;
- *routes*: contiene le informazioni relative alle linee;
- *stop_times*: contiene le informazioni riguardanti il tragitto di ogni tratta, con annessi orari di partenza e arrivo;
- *stops*: contiene le informazioni relative alle stazioni;
- *trips*: contiene le informazioni che associano ad ogni tratta la linea relativa.

Inoltre, quasi tutte le tabelle sono di buona qualità, in considerazione ai soli attributi di interesse. L'unico attributo su cui è stata fatta una modifica è quello che indica la direzione della tratta nella tabella *trips*, che è uguale a 0 per ogni record. In questo stato, non è possibile identificare la direzione corretta delle varie tratte. Per questo motivo, è stata creata una funzione che ha corretto i valori di questo attributo grazie all'analisi della sequenza di stazioni delle singole tratte.

Durante il lavoro, inoltre, sono state create altre tabelle che contengono diverse rappresentazioni degli stessi dati per diminuire il costo computazionale di varie parti del progetto.

3 Studio preliminare della rete

La rete di Trenord è stata modellata con diversi tipi di grafo, in base al tipo di studio effettuato. Nonostante ciò, tutti hanno come caratteristica comune quella di avere le 428 stazioni come nodi. Gli archi invece rappresentano le differenti interazioni possibili tra i vari nodi.

Una delle possibili rappresentazioni di questa rete è quella in cui nel

grafo viene creato un arco che indica una linea che collega due stazioni differenti. Questo grafo è indiretto, composto da un'unica componente connessa, e potrebbe avere più di un arco per una stessa coppia di nodi (uno per ogni linea che li collega). Esso viene illustrato in figura 1.



Figura 1: Grafo che illustra la rete ferroviaria di Trenord: i nodi rappresentano le stazioni mentre gli archi indicano le linee. I nodi sono stati posizionati in base alle coordinate geografiche delle stazioni.

Su questo grafo, è stato fatto uno studio preliminare per capire le caratteristiche generali della rete.

In figura 2 viene illustrata la distribuzione del grado dei nodi. Si può notare come la maggior parte dei nodi abbia grado ≤ 6 , ed in particolare l'apice è presente con i nodi di grado 2.

È stato deciso di verificare, inoltre, se la rete sia assortativa, neutrale o disassortativa. Per fare ciò, è stata calcolata la *matrice di correlazione dei gradi*, che contiene la probabilità di trovare dei nodi di grado i e j agli estremi di un arco scelto casualmente. Il contenuto della matrice è illustrato in figura 3.

Si può notare che i nodi con grado simile tendono a collegarsi fra di loro. Inoltre, le probabilità maggiori si trovano sulla diagonale principale della matrice. Ciò implica che la rete sia di tipo **assortativo**.

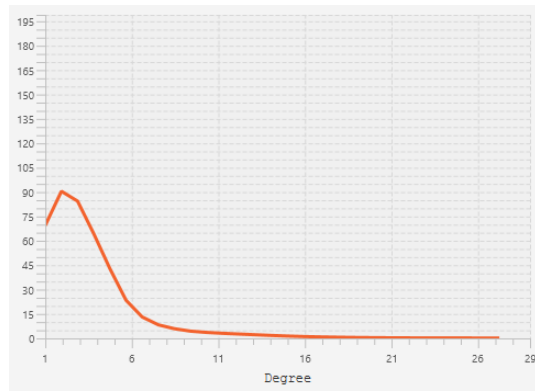


Figura 2: Distribuzione del grado dei nodi della rete di Trenord

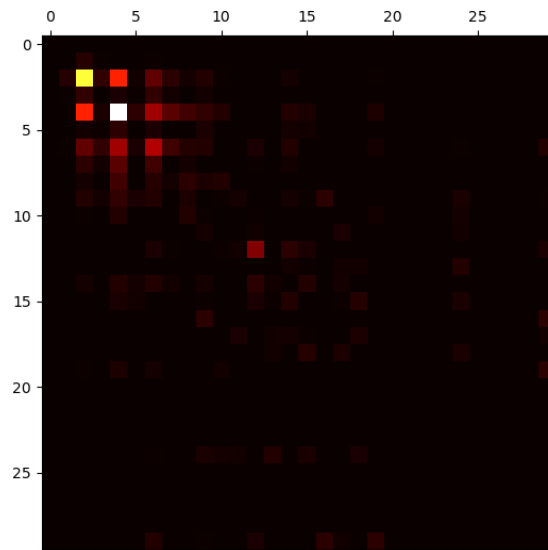


Figura 3: Matrice di correlazione dei gradi

4 Studio dei carichi

In questa prima fase sono stati studiati i carichi a cui sono sottoposte le stazioni. Considerando i dati a disposizione, le principali attività che sono state svolte sono incentrate nel calcolo della quantità di treni che transitano in una stazione in un dato periodo di tempo.

Il lavoro eseguito si può suddividere in due parti:

- in un primo momento, è stato deciso di quantificare il numero di treni che gestisce ogni stazione in una giornata “ideale”, ossia senza potenziali cancellazioni;
- successivamente, è stato fatto il calcolo del carico di una giornata caratterizzata dalle eccezioni per le stazioni che, nella fase precedente, hanno dovuto gestire il maggior numero di treni.

Carico giornaliero di tutte le stazioni Per quanto riguarda la prima fase, è stato necessario creare un grafo diretto che rappresenti tutte le possibili tratte, in cui gli archi rappresentano due stazioni consecutive all'interno di una stessa tratta. Ogni arco viene descritto con gli attributi relativi al giorno in cui la tratta è disponibile, e con gli orari di partenza e arrivo tra le stazioni.

Successivamente, questa rete è stata filtrata considerando separatamente giorni e orari della settimana. Per calcolare il carico di ciascuna stazione, è stato considerato il numero di archi entranti ed uscenti all'interno di ogni nodo. In tabella 1 sono illustrati i primi risultati relativi alla sola giornata di lunedì.

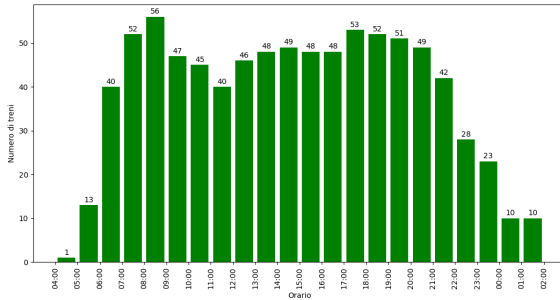
Analizzando i risultati ottenuti, si può osservare come la maggior parte delle stazioni che gestiscono i carichi maggiori siano situate nella zona di Milano.

Carico orario delle stazioni più rilevanti Dopo questa fase, sono state analizzate nel dettaglio le differenze in diversi periodi dell'anno

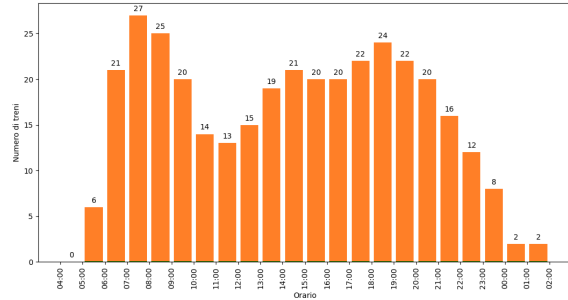
ID	Stazione	In arrivo	In partenza
1707	Milano Bovisa FNM	768	727
5048	Saronno	462	476
1713	Milano Lancetti	419	419
1714	Milano Porta Garibaldi Sot.	419	419
1719	Milano Repubblica	419	418
1718	Milano Porta Vittoria	418	418
3468	Milano Dateo	418	418
1723	Milano Porta Venezia	418	418
5054	Milano Domodossola	384	384
1720	Milano Rogoredo	351	354
1841	Monza	344	343
...

Tabella 1: Carichi di un lunedì senza tratte cancellate

(giornata feriale, festiva ed estiva) di alcune delle stazioni con maggior carico. In questa analisi sono state considerate anche le soppressioni pianificate delle tratte, poiché esse permettono di discriminare gli orari stagionali. I risultati sono riportati nelle figure 4, 5, 6, dove si può notare che i carichi sono stati anche suddivisi per fasce orarie.

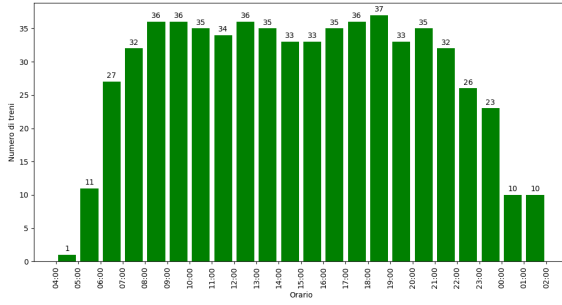


(a) Milano Bovisa FNM

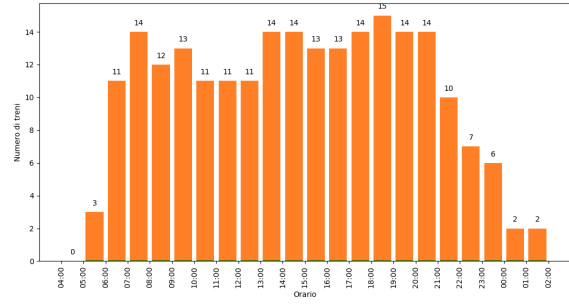


(b) Monza

Figura 4: Carichi di lunedì 4 marzo (giornata feriale)

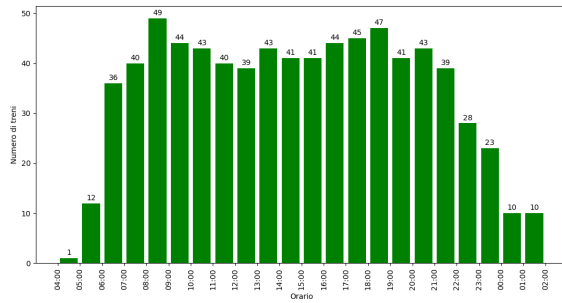


(a) Milano Bovisa FNM

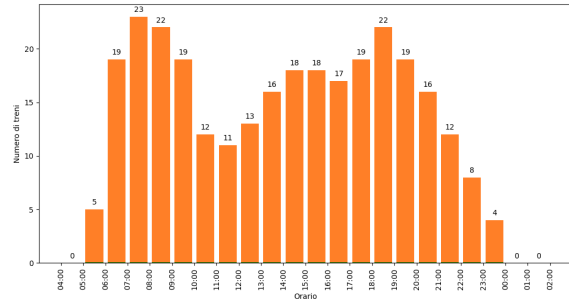


(b) Monza

Figura 5: Carichi di domenica 10 marzo (giornata festiva)



(a) Milano Bovisa FNM



(b) Monza

Figura 6: Carichi di lunedì 19 agosto (giornata estiva)

Dai risultati ottenuti, si può notare nei giorni feriali che c'è un maggiore carico nei periodi mattutini, in particolare nelle fasce orarie dalle 7 alle 8 e dalle 8 alle 9. Il carico, inoltre, diminuisce verso il suo minimo nelle fasce orarie comprese tra le 10 e le 13 (escludendo ovviamente gli orari notturni).

Nei giorni festivi, invece, si può notare un minor numero di treni nelle stazioni e il carico viene distribuito in maniera più uniforme nell'arco della giornata.

Infine, per quanto riguarda una giornata estiva (feriale), si nota una leggera diminuzione del carico lungo tutta la giornata. Tuttavia, la distribuzione di carico è simile a quella di una giornata feriale qualunque.

5 Studio sui cammini minimi

Nella seconda fase del progetto, sono stati studiati i cammini minimi nella rete. Questo lavoro è stato suddiviso in due parti:

- in un primo momento, è stato creato un grafo che illustra il numero minimo di cambi da effettuare a partire da una stazione di riferimento per raggiungere tutte le altre stazioni;
- successivamente, è stato creato un algoritmo che crea un grafo diretto contenente i primi cammini disponibili per raggiungere una particolare fermata da una stazione di partenza, considerando le varie coincidenze ed un limite massimo di cambi effettuabili.

5.1 Studio sul grafo dei cambi

Questa fase si è incentrata sulla creazione di un grafo che illustri, a partire da una stazione, il minimo numero di cambi necessari per poter raggiungere tutte le altre fermate.

Creazione del grafo Il grafo che è stato utilizzato ha un singolo arco fra due nodi, ed esso indica che esiste almeno una linea che collega le due stazioni. Per crearlo, sono stati rielaborati alcuni dei dati del dataset originale. In particolare, è stato deciso di creare 3 differenti dizionari Python, ossia degli oggetti composti da coppie chiave (univoca) - valore:

- **A**: dizionario che ha come chiave la stazione e come valori le linee che transitano per essa;
- **B**: dizionario che ha come chiave la linea e come valori le stazioni che la compongono;
- **C**: dizionario che ha come chiave la linea e come valori tutte le linee che si incrociano con essa;

Partendo dalla stazione scelta, vengono individuate tutte le sue linee da A e le stazioni che le compongono da B. Queste stazioni vengono etichettate con 0, in quanto raggiungibili senza cambi. Successivamente, viene ripetuto il procedimento utilizzando le linee (non ancora analizzate) che incrociano quelle precedenti, prese da C. Ad ogni iterazione, il valore dell'etichetta dei cambi necessari viene incrementato di 1. Così facendo, ad ogni nodo può essere aggiunta questa informazione.

Un esempio di grafo creato è rappresentato in figura 7, in cui in rosso è evidenziata la stazione di partenza, in giallo sono evidenziate le stazioni raggiungibili con 0 cambi, in blu sono evidenziate quelle raggiungibili con 1 cambio, in verde sono evidenziate quelle raggiungibili con 2 cambi e infine in viola sono evidenziate quelle raggiungibili con 3 cambi.

Con queste informazioni, si conosce il limite minimo di cambi necessari da fare per spostarsi da una stazione a tutte le altre. In particolare, è stato notato che 3 cambi sono sufficienti per raggiungere qualsiasi fermata indipendentemente dalla stazione di partenza.

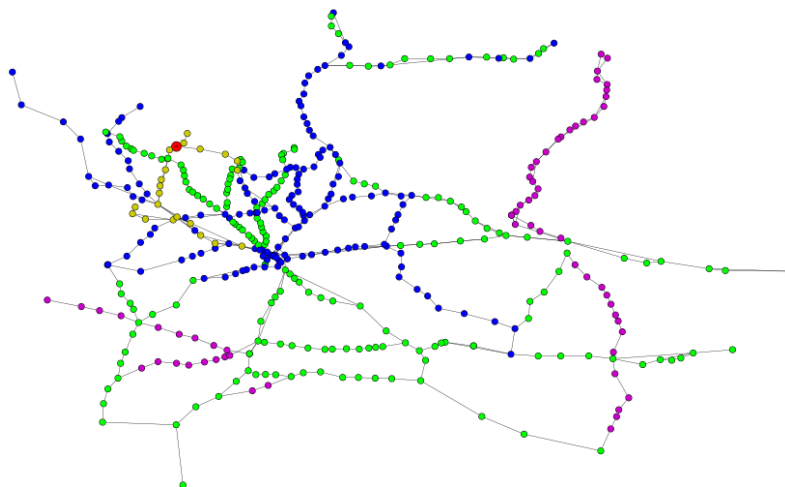


Figura 7: Grafo dei cambi a partire da Arcinate

Correlazione tra closeness e cambi In questa fase, è stato osservato come la **closeness centrality** di un nodo è correlata al numero di cambi

necessari per raggiungere tutte le altre stazioni. Questa metrica viene definita come:

$$c_c(i) = \left[\sum_{j=1}^N d(i, j) \right]^{-1} \quad (1)$$

dove N è il numero di nodi e $d(i, j)$ è la lunghezza media dei cammini che collega i nodi i e j . La versione normalizzata è ottenibile dividendo la metrica per $(N - 1)$.

La closeness centrality normalizzata è stata calcolata analizzando i nodi del grafo già illustrato in immagine 1. Generalmente, è stato notato che ad un valore alto corrisponde un basso numero di cambi medio, viceversa ad un valore basso corrisponde un elevato numero di cambi medio. Alcuni risultati sono illustrati in tabella 2.

ID	Stazione	Closeness	Media cambi
1728	Milano Centrale	0.116	0.705
1712	Milano Lambrate	0.116	0.798
...
451	Arcisate	0.076	1.677
5319	Varese FN	0.076	1.864
...
2275	Prata Campportaccio	0.037	2.306
3071	Villa di Tirano	0.036	2.304

Tabella 2: Closeness e cambi

5.2 Studio sul grafo dei cammini minimi

Questa fase si è incentrata sulla creazione di un grafo che illustri i possibili cammini per spostarsi da una stazione all'altra entro un limite di cambi.

Creazione del grafo In questo caso, il grafo utilizzato è diretto e pesato. Per individuare i differenti cammini tra la stazione di partenza

e quella d'arrivo, è stata utilizzata una funzione ricorsiva limitata dal numero di cambi resi disponibili. Per ogni linea passante dalla stazione di partenza è stata seguita questa procedura:

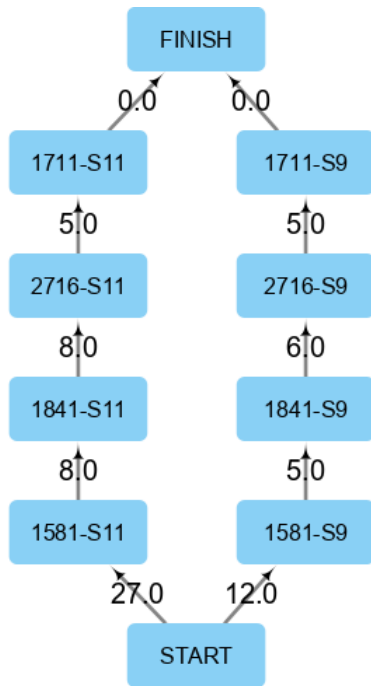
- se esiste un viaggio diretto che collega le due stazioni, il relativo percorso viene aggiunto al grafo;
- altrimenti, se si hanno ancora cambi disponibili, per ogni stazione intermedia viene chiamata ricorsivamente la funzione fornendo un cambio in meno.

Il grafo finale è così caratterizzato:

- i nodi rappresentano ciascuno una coppia univoca stazione-tratta;
- gli archi uscenti dai nodi sono di due tipi, in base al nodo al quale si collegano:
 - *arco di proseguimento* se il nodo target indica la stazione successiva della stessa tratta;
 - *arco di cambio* se il nodo target indica la stessa stazione ma su una tratta differente;

ad ogni arco, viene associato un peso che rappresenta il tempo di percorrenza (nel caso dell'arco di proseguimento) o il tempo di attesa (nel caso dell'arco di cambio);

- un nodo *START* che si collega a tutti i nodi che indicano le diverse tratte che si possono prendere dalla stazione di partenza. Gli archi ottenuti hanno come peso il tempo di attesa a partire dall'arrivo alla stazione;
- un nodo *FINISH* a cui sono collegati tutti i nodi che indicano le diverse tratte che si possono prendere per arrivare alla stazione d'arrivo. Gli archi ottenuti hanno peso 0.



(a) Grafo originale (la tratta del nodo è stata sostituita con la linea per migliore visualizzazione)

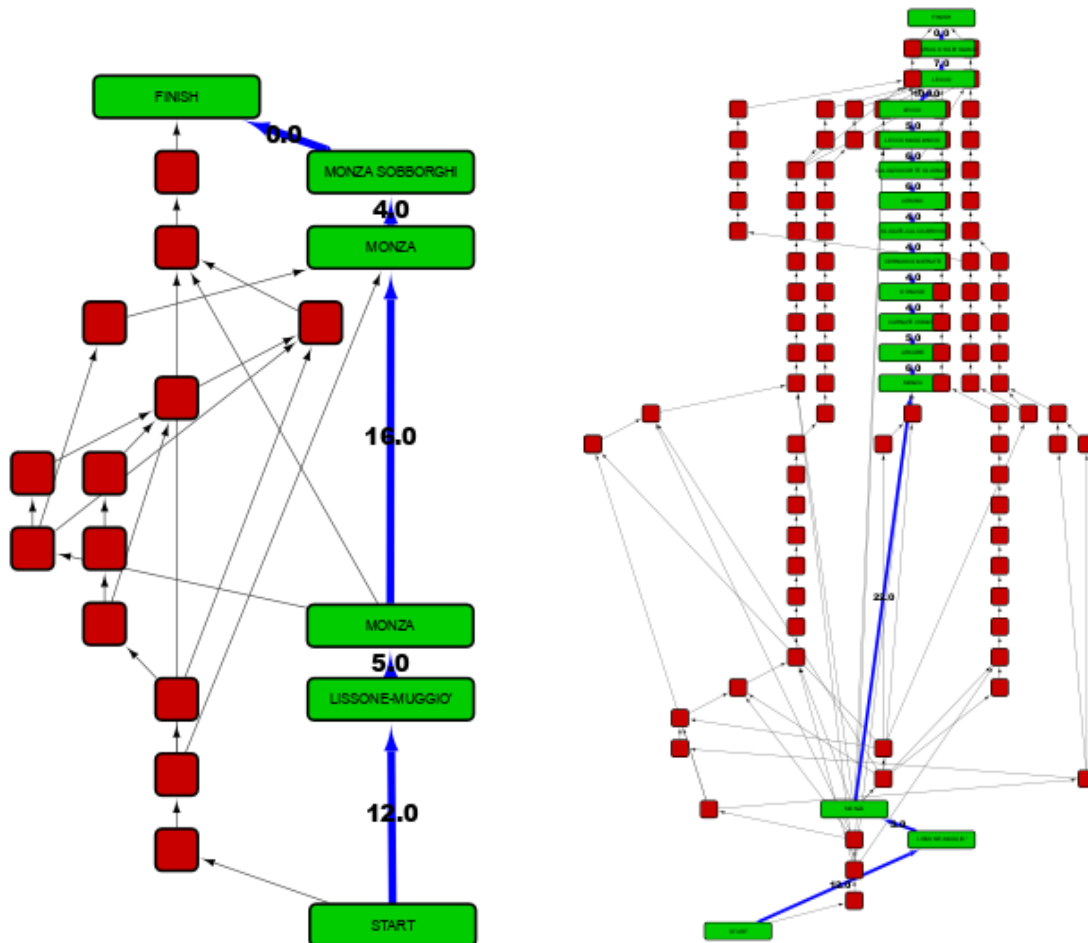


(b) Grafo che evidenzia il cammino minimo

Figura 8: Cammini disponibili tra Lissone-Muggiò e Milano Greco Pirelli

Calcolando il cammino minimo di questo grafo, si può ottenere l'effettiva sequenza di stazioni che collega le fermate di partenza e d'arrivo nel minore tempo possibile.

In figura 8 viene illustrato un esempio di grafo ottenuto calcolando i cammini possibili per il viaggio da Lissone-Muggiò a Milano Greco Pirelli con 0 cambi alle 7 di mattina. In figura 9 sono illustrati invece i grafi di altri viaggi che hanno come limite rispettivamente 1 (9a) e 2 (9b) cambi. Si può notare come, all'aumentare dei cambi disponibili, si ha un incremento esponenziale dei possibili cammini tra le due stazioni.



(a) Cammini tra Lissone-Muggiò e Monza Sobborgi (1 cambio)

(b) Cammini tra Lissone-Muggiò e Vercuro San Girolamo (2 cambi)

Figura 9: Esempi di grafi con il cammino minimo evidenziato

6 Studio sulla resistenza ai guasti

L'ultima parte del lavoro è stata quella di studiare il comportamento della rete nel caso di fallimenti e/o guasti. In particolare, lavorando sul grafo della rete di Trenord presentato in figura 1, sono stati simulati dei fallimenti/guasti andando a rimuovere dei nodi con certe caratteristiche. Per dedurre quanto questa rete sia vulnerabile ad una rimozione dei nodi, si può osservare la sua *densità*, che viene definita come rapporto tra numero di archi della rete e il numero di archi del suo corrispettivo grafo completo. In questa rete, la densità ha valore < 0.01 , e perciò, nonostante sia un'unica componente connessa, risulterà poco resistente ad attacchi ai suoi nodi.

Metriche La selezione dei nodi da eliminare è stata effettuata andando a considerare le metriche di *betweenness*, *degree* e *closeness* centrality. La *betweenness* centrality quantifica quante volte un nodo funziona da “intermediario” tra tutti i cammini possibili tra due nodi. Essa è definita come:

$$C_B(i) = \sum_{j < k} \frac{g_{jk}(i)}{g_{jk}} \quad (2)$$

dove $g_{jk}(i)$ è il numero di cammini tra i nodi j e k che passano dal nodo i mentre g_{jk} è il numero di tutti i cammini possibili tra i nodi j e k . La versione normalizzata è invece la seguente:

$$C'_B(i) = \frac{C_B(i)}{\frac{(N-1)(N-2)}{2}} \quad (3)$$

dove il denominatore rappresenta il numero di coppie di vertici escludendo il nodo i .

La *degree* centrality invece indica il numero di connessioni di un nodo. Essa è definita come:

$$C_D(i) = \sum_j x_{ij} \quad (4)$$

dove x_{ij} indica il numero di archi che collegano i nodi i e j . Dividendo per $(N - 1)$ si può ottenere la metrica normalizzata, ossia dividendo per il numero di nodi senza i .

Infine, per quanto riguarda la closeness centrality, rifarsi all'equazione 1.

Rimozione dei nodi statica Per ogni nodo, sono state calcolate le 3 metriche appena descritte, e, per ciascuna centrality, è stata selezionata la prima metà dei vertici con valore maggiore. Questo approccio viene definito *statico*, poiché la selezione dei nodi viene fatta antecedentemente alla loro rimozione.

Per misurare la resistenza della rete, sono state calcolate la *dimensione relativa della componente maggiore della rete* (S), e l'*efficienza del grafo* (E). La prima viene definita così:

$$S = \frac{N_1}{N} \quad (5)$$

dove N_1 e N indicano rispettivamente il numero di nodi nella componente principale e nella rete originale, mentre la seconda è definita nel seguente modo:

$$E = \sum_{i,j \in V, i \neq j} \frac{1}{d_{ij}} \quad (6)$$

dove d_{ij} è la distanza tra i nodi i e j . Quest'ultima metrica può anche essere normalizzata dividendola per $N(N - 1)$ per garantire che $E \leq 1$.

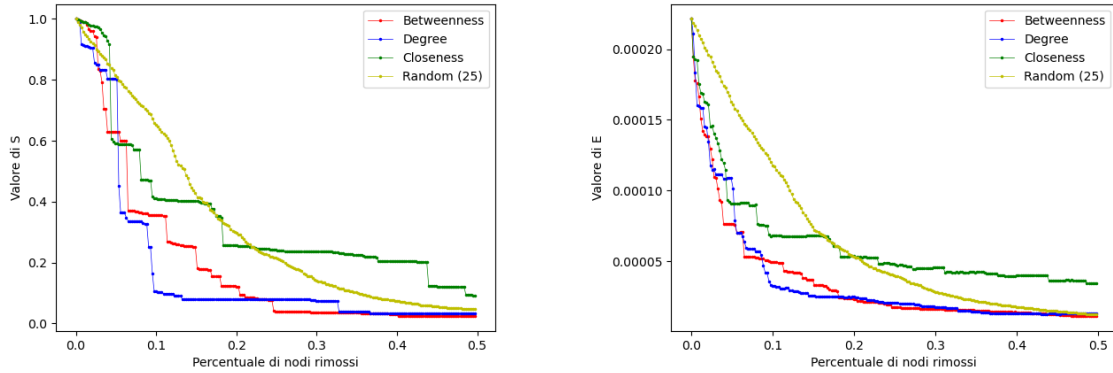
Una significativa diminuzione di questi due valori durante la rimozione dei nodi indica che la rete è particolarmente vulnerabile[1][2].

Per calcolare la resistenza della rete, dunque, è stato seguito questo procedimento:

1. il nodo con il valore più alto viene rimosso dal grafo insieme a tutti i suoi archi;
2. viene calcolato il nuovo valore di S e di E ;

3. si procede iterativamente finché tutti i nodi selezionati non vengono rimossi.

Questo algoritmo viene eseguito per tutte e 3 le metriche scelte. I risultati sono illustrati in figura 10, dove si può notare anche il confronto rispetto alla rimozione casuale dei nodi (mediata su 25 iterazioni).



(a) Relazione tra S e percentuale di nodi rimossi (b) Relazione tra E e percentuale di nodi rimossi

Figura 10: Risultati ottenuti con la rimozione statica dei nodi

Osservando entrambi i grafici, si può notare un andamento a “gradini” nel caso di rimozione mirata dei nodi, ossia vengono alternati andamenti costanti a cali drastici. Nel caso di S , dove questo comportamento è più accentuato, ciò avviene perché la rimozione di un nodo può provocare la divisione della componente principale in più parti di dimensione minore. Nel caso di E , invece, il comportamento è meno evidente perché la rimozione di un nodo causa un aumento generale di tutte le distanze percorribili nel grafo. Per entrambe le metriche, la rimozione casuale dei nodi, invece, assume un andamento a discesa più regolare.

Per quanto riguarda il grafico relativo a S (figura 10a), è osservabile che, rimuovendo solamente circa il 5% dei nodi (circa 20 stazioni), l’efficienza della rete non viene particolarmente alterata. Cala notevolmente, invece,

nel caso vengano rimossi circa il 10% dei nodi per ogni tipologia di attacco mirato (specialmente quando la selezione dei vertici viene effettuata in base alla degree centrality).

Relativamente al grafico di E (figura 10b), invece, si nota sin da subito che, rimuovendo gli stessi nodi, la metrica valuta in maniera più negativa la capacità di resistenza ai guasti della rete.

Infine, in entrambi i casi, si può notare che l'attacco mirato basato sulla closeness centrality risulta essere quello meno efficace.

I grafi che illustrano gli attacchi mirati sono rappresentati nelle figure 11, 12 e 13, rispettivamente nel caso di attacchi basati sulla betweenness, sulla degree e sulla closeness centrality. Per ciascuno di essi, i nodi in rosso sono quelli che sono stati rimossi durante il procedimento, quelli in nero sono quelli che non sono stati rimossi mentre quelli in verde sono quelli che fanno parte della principale componente connessa a fine ciclo.

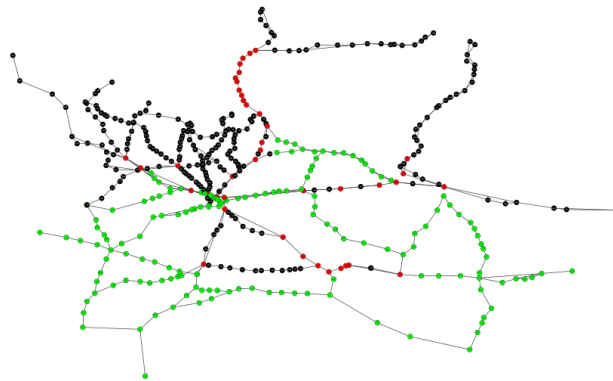


Figura 11: Grafo relativo all'attacco di nodi in base alla loro betweenness centrality con un approccio statico (10% di nodi rimossi)

Osservando i grafi, si può notare che nel caso di attacco basato sulla betweenness centrality, dopo il 10% di nodi rimossi si ha una grande componente connessa nella zona centrale e meridionale della rete; viceversa per il caso di attacco basato sulla closeness centrality. Per quanto riguarda, invece, quello basato sulla degree centrality, si nota che la com-

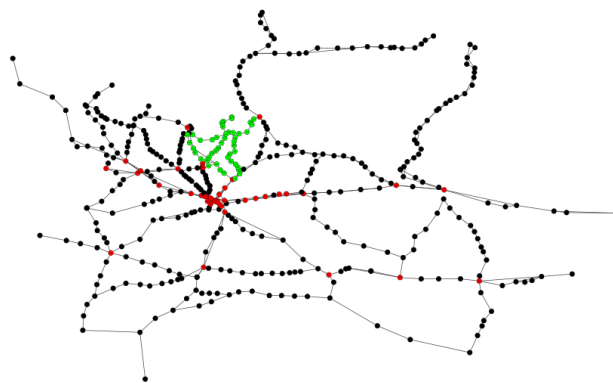


Figura 12: Grafo relativo all'attacco di nodi in base alla loro degree centrality con un approccio statico (10% di nodi rimossi)

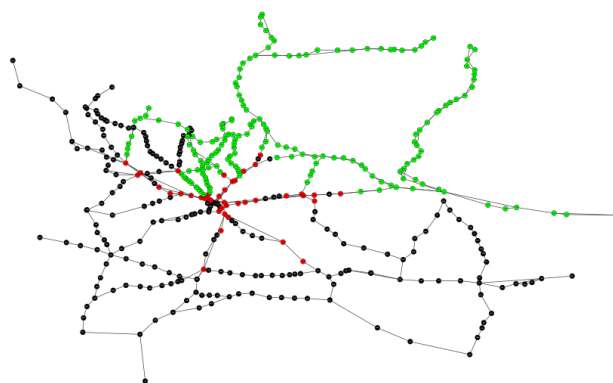


Figura 13: Grafo relativo all'attacco di nodi in base alla loro closeness centrality con un approccio statico (10% di nodi rimossi)

ponente connessa principale è molto più piccola rispetto a quella degli altri casi. Dunque, è osservabile che nel grafo ci sono tante componenti connesse di dimensioni simili.

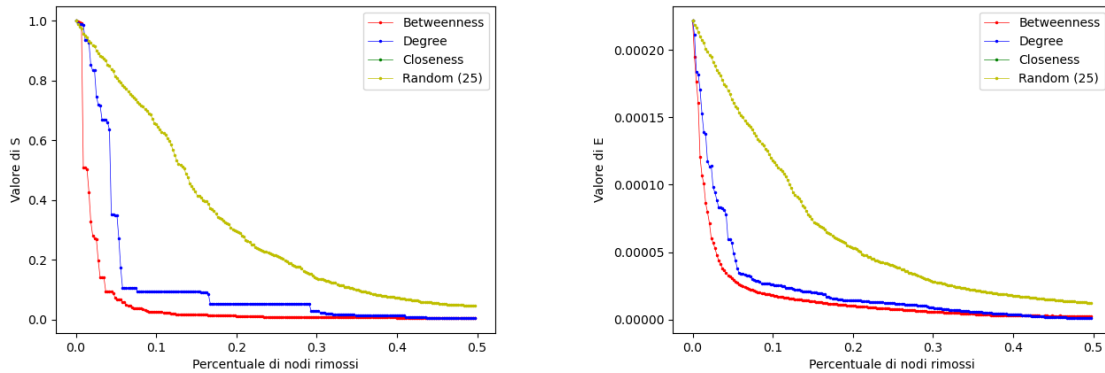
Rimozione dei nodi dinamica Successivamente, è stato ripetuto l'algoritmo di rimozione dei nodi applicando un approccio *dinamico*, in quanto il nodo da rimuovere viene selezionato ricalcolando le metriche all'inizio di ogni iterazione. Questa strategia permette di individuare sempre il nodo più importante su ogni nuova configurazione della rete.

L'algoritmo seguito in questo caso è una variante del precedente ed è così definito:

1. viene calcolata la metrica per ogni nodo e viene rimosso il nodo con il valore maggiore;
2. viene calcolato il nuovo valore di S e di E ;
3. si procede iterativamente finché non viene rimossa dal grafo la percentuale desiderata di nodi.

Le metriche calcolate sono la betweenness e la degree centrality. La closeness centrality non è stata calcolata in quanto impossibile da computare su un grafo che è composto da più componenti connesse.

I grafici contenenti i risultati ottenuti sono illustrati in figura 14.



(a) Relazione tra S e percentuale di nodi rimossi

(b) Relazione tra E e percentuale di nodi rimossi

Figura 14: Risultati ottenuti con la rimozione dinamica dei nodi

In questo caso, si nota subito come i valori delle due metriche di valutazione subiscano un deciso calo sin dall'inizio (specialmente nel caso di S relativamente all'approccio statico). Ciò è dovuto al fatto che, con l'approccio dinamico, si è sicuri di rimuovere sempre i nodi più importanti

ad ogni iterazione.

Grafi analoghi a quelli del precedente approccio sono illustrati nelle figure 15 e 16.

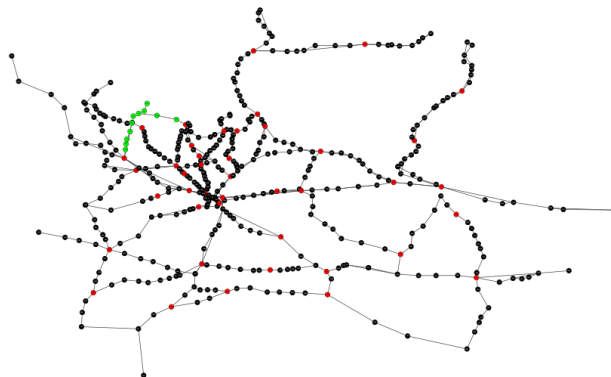


Figura 15: Grafo relativo all'attacco di nodi in base alla loro betweenness centrality con un approccio dinamico (10% di nodi rimossi)

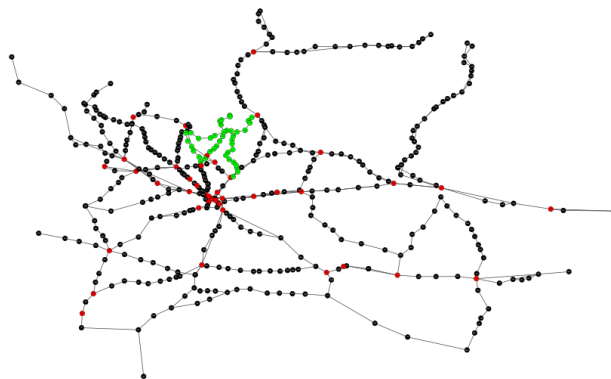


Figura 16: Grafo relativo all'attacco di nodi in base alla loro degree centrality con un approccio dinamico (10% di nodi rimossi)

Risalta subito che i nodi rimossi in entrambi i casi sono più sparsi nella rete e essi la dividono in tante componenti connesse più piccole. Ciò risulta più evidente nella selezione dei nodi basata sulla betweenness centrality, che dunque risulta essere molto più efficace con questa tipologia d'approccio.

7 Conclusioni

Gli strumenti della network analysis permettono di studiare ogni tipo di rete complessa. Per questo progetto, si è deciso di analizzare la rete ferroviaria di Trenord per quanto riguarda gli aspetti di carico, cammini minimi e resistenza ai guasti.

Nella prima fase, è stato notato che il carico maggiore viene gestito principalmente dalle fermate centrali della rete, in zona Milano. Inoltre, si sono osservate delle differenze di carico in base alla tipologia di giornata (feriale, festiva ed estiva).

Nella seconda fase, sono stati creati due tipologie di grafi: uno illustra il numero di cambi necessari per raggiungere ogni fermata a partire da una stazione di partenza, evidenziando che non è mai necessario fare più di 3 cambi. L'altro, invece, illustra i possibili cammini che collegano due stazioni pesando gli archi in base al tempo di percorrenza.

Nella terza ed ultima fase, infine, sono stati applicati due approcci differenti (statico e dinamico) per selezionare i nodi da rimuovere nella rete. E' stato notato che quello dinamico, indipendentemente dalla metrica di riferimento, risulta essere più efficace rispetto alla controparte statica.

Bibliografia

- [1] Bertrand Berche et al. «Public Transport Networks under Random Failure and Directed Attack». In: (2009).
- [2] Antonio Candelieri et al. «Vulnerability of public transportation networks against directed attacks and cascading failures». In: (2019).
- [3] *Cytoscape*. <https://cytoscape.org/>.
- [4] *iGraph*. <https://igraph.org/python/>.