1 引言

1.1 狭义相对论

1.1.1 等效原理

惯性质量和引力质量

$$\begin{aligned} \text{惯性质量}, m_I \quad & F = m_I a \\ \text{引力质量}, m_G, M_G \quad & F = -G\frac{m_G M_G}{r^3}\boldsymbol{r} \end{aligned}$$

则联系等式

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{m_G}{m_I}\right)\left(\frac{GM_G}{r^2}\right)\left(-\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) \\ \alpha &:= \frac{m_G}{m_I} \end{aligned}$$

实验检验:

1. 比萨斜塔实验：不同质量的球下落时间一致

2. Eotvos实验：

$$\begin{aligned} F_G &= m_G\frac{GM}{R} \\ F_I &= m_I R\cos\theta_L(\text{纬度})w_s^2(\text{自转角速度}) \end{aligned}$$

得到

$$\frac{F_G}{F_I} = \alpha\text{Constant}$$

测不同的材料 得到的α的差

弱等效原理：引力场=惯性力场，该两种场局域力学效应不可分辨
因为实验是局域做的，在非局域这种两种是可分辩的。

强等效原理：力学效应$\longrightarrow$所有物理效应
它还没有很好的实验检验

等效原理的重要意义：引力一定可以几何化

两种力场的差别：

引力	惯性力
有反作用力	无
使时空弯曲	不改变
只能在一条世界线上被消除	可以通过坐标变换消除

1.1.2 广义协变原理

陈述：在任何坐标变换下，物理定律具有相同的形式

但是这里有一些问题：这里似乎总能人为的使理论具有协变原理。

1.1.3 狭义相对论复习

物理规律满足：彭加莱变换

$$x'^{\mu} \;=\; \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}+a^{\nu}$$

洛伦兹变换的种类

proper: 齐次洛伦兹变换，$\det(\Lambda)=1$

improper：非其次洛伦兹变换，$\det(\Lambda)=1$

1.1.4 粒子运动学

参考系：分布在全部空间携带标准钟的所有观者观察事件的数据库

惯性坐标系=洛伦兹坐标系

惯性系下可以定义速率：

$$u \;:=\; \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

4-速度定义：

$$u^{\mu} \;:=\; \frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t}$$

自然得到：对于类时粒子，$\eta_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu}=-1$

可以在这一个定义下来区分类光，类时，类空。当然我们还有更严格的划分办法比如，讨论$\mathrm{d}s^2$

惯性观者：对应类时测地线，

物理表速为，改观者可以在一个惯性坐标系下的速度$u=0$。或者说惯性坐标系的t-坐标线

惯性参考系：全体t坐标线组成的参考系

很多时候惯性坐标系和惯性参考系并没有什么区别，不加区分

PS: 惯性参考系的区分在于他们的惯性观者

只对空间微分同胚变换，改变了惯性坐标系，而不改变惯性参考系，他们共用惯性观者

连带时间的变换(洛伦兹变换)，改变了关系参考系

能动张量：性质

只有4维的时候才成立：肯定吧！？

$$\eta_{\mu\nu}T^{\mu\nu} \;=\; 0$$

这里联合考虑麦克斯韦方程：

$$\partial_{\mu}T^{\mu\nu} \;=\; F^{\nu}{}_{\sigma}J^{\sigma}$$

1.1.5 相对论流体力学

理想流体： 无粘滞、耗散、压缩、剪切

$$T^{\mu\nu} = p\eta^{\mu\nu} + (\rho(\text{固有能量密度}) + p(\text{压强}))U^\mu U^\nu$$

理想流体的粒子流：

$$N^\mu = n(\text{惯性系下粒子数的密度})U^\mu$$

联系上面能动张量的性质可以建立 能动守恒方程

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}\partial_\nu p + \partial_\nu([\rho + p]U^\mu U^\nu) = 0$$

当$u = 0$时，该方程为欧拉方程[流体力学知识点-不知道没关系]
另外粒子流守恒方程

$$\begin{aligned} \partial_\mu(nU^\mu) &= 0 \\ \Rightarrow \partial_t(\gamma n) + \nabla\cdot(\gamma n\boldsymbol{v}) &= 0 \end{aligned}$$

即连续性方程
考虑指标求和,

$$U_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

计算

$$\begin{aligned} U_\nu\partial_\mu T^{\mu\nu} &= U_\nu\partial_\mu(p\eta^{\mu\nu} + (p+\rho)U^\mu U^\nu) \\ &= U_\nu\eta^{\mu\nu}\partial_\mu p + U_\nu\partial_\mu(\rho+p)U^\mu U^\nu + U_\nu(\rho+p)\partial_\mu(U^\mu U^\nu) \\ &= U^\mu\partial_\mu p + (U_\nu U^\nu)U^\mu\partial_\mu(\rho+p) + (\rho+p)U_\nu U^\nu\partial_\mu U^\mu + (\rho+p)U_\nu U^\mu\partial_\mu U^\nu \\ &= U^\mu\partial_\mu p - U^\mu\partial_\mu p - U^\mu\partial_\mu\rho - (\rho+p)\partial_\mu U^\mu + (\rho+p)U^\mu U_\nu\partial_\mu U^\nu \\ &= -U^\mu\partial_\mu\rho - (\rho+p)\partial_\mu U^\mu + (\rho+p)U^\mu\partial\mu(U_\nu U^\nu)\times\frac{1}{2} \\ &= -U^\mu\partial_\mu\rho - (\rho+p)\partial_\mu U^\mu \\ &= -U^\mu\partial_\mu\rho - (\rho+p)\partial_\mu\left(\frac{1}{n}nU^\mu\right) \\ &= -U^\mu\partial_\mu\rho - (\rho+p)nU^\mu\partial_\mu\frac{1}{n} \\ &= -nU^\mu\left(\frac{1}{n}\partial_\mu\rho + \rho\partial_\mu\frac{1}{n} + p\partial_\mu\frac{1}{n}\right) \\ &= -nU^\mu\left(\partial_\mu\left(\frac{\rho}{n}\right) + p\partial_\mu\left(\frac{1}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad -nU^\mu\left(p\partial_\mu\left(\frac{1}{n}\right) + \partial_\mu\left(\frac{\rho}{n}\right)\right)$$

从物理上理解

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{n}, \\ \varepsilon &= \frac{p}{n}, \end{aligned}$$

结合热力学公式

$$\mathrm{d}\varepsilon = T\mathrm{d}s - p\mathrm{d}v$$

设沿着参数为λ的曲线方向，则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\lambda} &= \frac{T\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\lambda} - p\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}\lambda} \\ \frac{T\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\lambda} = T\partial_\mu s\frac{\mathrm{d}x^\mu(r)}{\mathrm{d}\lambda} &= \partial_\mu\varepsilon\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} + p\partial_\mu\upsilon\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} \\ TU^\mu\partial_\mu s &= U^\mu(\partial_\mu\varepsilon + p\partial_\mu\upsilon) \\ &= -\frac{1}{n}\left(-nU^\mu\left(\partial_\mu\left(\frac{\rho}{n}\right) + p\partial_\mu\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

得到

$$U^\mu\partial_\mu s = 0$$

即物质的比熵在U^μ方向上是不变的

1.2 经典引力理论

理论运用尺度：$10^{-1}m \sim 1.5\times10^{17}m(1.6\times10^7\mathrm{ly})$
这是牛顿力学理论上对比广义相对论可以运用的范围。但是在这一尺度内在实际上仍有很多问题（因为广义相对论也有同样的问题）比如暗物质等问题。

实际运用尺度：上限为10^5ly

引力场方程

$$\nabla^2\phi = 2\pi\mu$$

这是一个泊松方程

存在问题：

1. 不符合洛伦兹协变，而且引力相互作用是超距的

2. 水星进动

2 张量分析基础

2.1 张量分析

这一部分总是觉得自己知道一些，要理清又里不清楚orz

2.1.1 张量的定义：

即满足这样的变换的物理量

$$T^{\kappa}{}_{\rho}{}^{\sigma} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma}T^{\kappa}{}_{\rho}{}^{\sigma}$$

下指标的为逆变指标、上指标的为协变指标

——张量的例子——

度规： 他是一个而阶的逆变张量
Kronecker符号： 是一个混合张量

————————

2.1.2 张量代数

线性性： 张量的线性叠加仍然是张量

张量积： 张量作张量积仍然是张量

指标收缩： 张量...应该都知道了

***指标的升降：** 根据指标缩并的规则来说，任意一个张量与一个二阶张量(协变或逆变)缩并，结果都是使得到的新张量，相对原来的任意张量指标(降下或上升)一个。
而我们通常选取度规缩并运算称为升降指标的运算则另有原因
1. 一个具有物理意义的张量与度规缩并，其物理意义认为不变
2. 似乎只有度规定义了它的逆张量

2.1.3 张量密度

对于某些一些量，它的它满足这样的坐标的变换

$$T'^{\mu}{}_{\nu}{}^{\lambda} = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^{W}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\kappa}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}}T^{\kappa}{}_{\rho}{}^{\sigma}$$

这里可以通过替换掉$\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^{W}$来引入权重因子，使得它成为一个真正的张量

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^{2} &= \frac{g}{g'}\\ &\text{这里}\ \ g=\det(g_{\mu\nu})\end{aligned}$$

按道理说这里不一定使用度规张量，虽然它的确是一个很常见的张量。但理由是什么呢
构成张量的形式，形如

$$\mathcal{T}^{\mu}{}_{\nu}{}^{\lambda} = gT^{\mu}{}_{\nu}{}^{\lambda}$$

2.1.4 仿射联络

这里Weinberg讲的有意思的是：仿射联络原本是一个关于曲线坐标系变换过程中的一个量，但是在这里它又与度规所定义的这个联络相等。

$$\begin{aligned}\text{原本：}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{a}}\frac{\partial^{2}\xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}\\ \text{然而：}\qquad &= \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\partial_{\mu}g_{\nu\rho}+\partial_{\nu}g_{\mu\rho}-\partial_{\rho}g_{\mu\nu})\end{aligned}$$

但是说明等同的时候，有些不明白：1. 基于两者的在不同坐标系下的变换相同。2. 诡异的vanish

2.1.5 协变导数

形式如下

$$\begin{aligned}\nabla_{\lambda}V^{\mu} &= \partial_{\lambda}V^{\mu}+\Gamma^{\mu}_{\lambda\kappa}V^{\kappa}\\ \nabla_{\lambda}U_{\nu} &= \partial_{\lambda}U_{\nu}-\Gamma^{\kappa}_{\lambda\nu}U_{\kappa}\end{aligned}$$

它们是以保持变换为动机的。

更一般的形式，例如

$$\nabla_\lambda T^{\mu\nu}{}_\sigma \;=\; \partial_\lambda T^{\mu\nu}{}_\sigma + \Gamma^\mu_{\lambda\kappa} T^{\kappa\nu}{}_\sigma + \Gamma^\nu_{\lambda\kappa} T^{\mu\kappa}{}_\sigma - \Gamma^\kappa_{\lambda\sigma} T^{\mu\nu}{}_\kappa$$

性质
1）线性性。2）莱布尼茨法则
3）不对哑指标作用
4）$\nabla_\lambda g_{\mu\nu}=0$，这一点的解释为"等效原理"

2.1.6 平行移动

这里的问题源于，对一个张量场的位置参数求导

这一想法与之前的协变导数是有联系的——前者是的偏微分的推广，后者是全微分的推广
所以这里尽量一般地讨论一下

即定义

$$DT^{\mu\nu}{}_\sigma \;=\; \mathrm{d}T^{\mu\nu}{}_\sigma + \Gamma^\mu_{\lambda\kappa} T^{\kappa\nu}{}_\sigma \mathrm{d}x^\lambda + \Gamma^\nu_{\lambda\kappa} T^{\mu\kappa}{}_\sigma \mathrm{d}x^\lambda - \Gamma^\kappa_{\lambda\sigma} T^{\mu\nu}{}_\kappa \mathrm{d}x^\lambda$$

那么这里可以套一下

1）

$$\frac{DT^{\mu\nu}{}_\sigma}{\mathrm{d}\tau} \;=\; \frac{\mathrm{d}T^{\mu\nu}{}_\sigma}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma^\mu_{\lambda\kappa} T^{\kappa\nu}{}_\sigma \frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma^\nu_{\lambda\kappa} T^{\mu\kappa}{}_\sigma \frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}\tau} - \Gamma^\kappa_{\lambda\sigma} T^{\mu\nu}{}_\kappa \frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}\tau}$$

2）

$$\begin{aligned}
\frac{DT^{\mu\nu}{}_\sigma}{\mathrm{d}x^\rho} &= \frac{\mathrm{d}T^{\mu\nu}{}_\sigma}{\mathrm{d}x^\rho} + (\Gamma^\mu_{\lambda\kappa} T^{\kappa\nu}{}_\sigma + \Gamma^\nu_{\lambda\kappa} T^{\mu\kappa}{}_\sigma - \Gamma^\kappa_{\lambda\sigma} T^{\mu\nu}{}_\kappa) \frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}x^\rho} \\
&= \partial_\rho T^{\mu\nu}{}_\sigma + \delta^\lambda_\rho (\Gamma^\mu_{\lambda\kappa} T^{\kappa\nu}{}_\sigma + \Gamma^\nu_{\lambda\kappa} T^{\mu\kappa}{}_\sigma - \Gamma^\kappa_{\lambda\sigma} T^{\mu\nu}{}_\kappa) \\
\nabla_\rho T^{\mu\nu}{}_\sigma &= \partial_\rho T^{\mu\nu}{}_\sigma + \Gamma^\mu_{\rho\kappa} T^{\kappa\nu}{}_\sigma + \Gamma^\nu_{\rho\kappa} T^{\mu\kappa}{}_\sigma - \Gamma^\kappa_{\rho\sigma} T^{\mu\nu}{}_\kappa
\end{aligned}$$