代数结构：

群的定义：它是一个定义了二元运算的集合，运算满足：封闭性，结合律，恒元，逆元

$(\mathbb{R},\times)$不够成群，但是$(\mathbb{R}P^1,\times)$呢?

对称性：体系的独立对称变换的个数or对称变换的个数

n维空间反射 $\approx$ n+1维空间转动？！

运用：诺特定理(主要关注平移和转动不变性，反射对应什么守恒？)；Wigner分类原则

特点：能给出一些不关体系的细节的性质；化简：变量分离，消除多于自由度

一般思路：

1. 确定体系的对称性，提炼出对称变换群
2. 通过这个群性质的研究来反应原来体系的性质

1 数学准备

1.1 集合论[3]

集合的运算：并集，交集，直积(一般没有交换律)，

集合的对等：集合之间有一一对应的关系，按照某种等价关系

逆映射的条件：首先必须是一一映射

复合映射：

$$(f\circ g)(u) \;=\; f(g(u)), \forall u$$

映射具有结合律，这本身是由复合映射的定义衍生而来。参考中将结合律作为定理证明了

一一映射的充要条件：$g\circ f = f\circ g = \mathbb{I}$

二元关系：

即两个变量之间的关系，满足它们构成的有序数对取值范围不为一个二维的全平面

等价关系：

一个同一集合中的两个元素的二元关系，满足反身性，对称性，传递性

$$\text{等价类：}[a] \;=\; \{x\in A|x\sim a\}$$

划分：

对于一个集合X的划分，它由一系列不相交的子集合构成 $\{X_i\}$，他们的并又可以构成X

这里的X_i称为块

3. 代数学引论上册

性质：

(1) 在集合上定义一个等价关系，这等价类构成这个集合的划分

(2) 在集合中给出一个划分，它形成的等价类也就确定了一个等价关系

1.2 抽象代数

1.2.1 半群

定义： 她是定义了二元运算的集合，满足封闭性，结合律

交换半群：满足交换律

含幺半群：带有单位元，比如非负整数的乘法集合

1.2.2 环

定义： 是一个定义了两个二元运算的集合，
满足$(G,+)$有交换群，$(G,\times)$构成半群，$(+,\times)$有分配率

交换环：要求乘法满足交换律

含幺环：对于乘法有单位元

1.2.3 域

定义： 即交换含幺环，但是加法的恒元和乘法恒元不同，除加法恒元的元素都有乘法逆元

总结来说：

1. $+\times$: 封闭性、结合律、交换律(对乘法不一定三交换群)，两者分配率
2. 恒元：加法-0 乘法-1
3. 有逆元：除去0

1.3 线性代数[6]

1.3.1 线性空间

线性空间： 运算中满足：加法相关5条、乘法相关4条

对于数乘的数取值空间不同，分实、复线性空间

线性子空间： 一个线性空间的子集，满足加法和数乘的封闭性

例子

$$H\psi_\mu(x) = E\psi_\mu(x)$$

能量为E的本征函数

$$\phi(x) = \sum_\mu^m a_\mu\psi_\mu(x)$$

6. 线性代数应该这样学

这里ψ_μ可以张成一个线性空间，$\phi(x)$为该线性空间里的元素

线性空间的张成： $L=\{\sum_{\mu=1}^{n} e_\mu a_\mu | e_\mu \in K\}$

算子： 一个向量空间到自身的线性映射

$$R[\lambda_1 f(b)+\lambda_2 f(b)] \;=\; \lambda_1 Rf(a)+\lambda_2 Rf(b)$$

1.3.2 线性空间的直和和直积

和： 对于作和的线性空间U_i，他们任意元素之和$u_1+\cdots+u_i$得到的新的元素构成的新的线性空间。

对于两个线性空间L_1, L_2

$$L_1+L_2 \;=\; \{\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}|\forall\vec{a}\in L_1\forall\vec{b}\in L_2, \lambda_1, \lambda_2\in K\}$$

直和： 在和的基础上要求：

(0) 新线性空间的元素只能有唯一一组$\{u_i\}$之和得到

(1) $L_1\bigcap L_2=\varnothing$

(2) L的维数等于L_1和L_2的维数之和

直积： 如果是张量的话就是，自由度加成的运算
比如对于矩阵的直积 $A_\mu\otimes B_\nu=(AB)_{\mu\nu}$。

向量空间的直积是两个向量空间的任意矩阵作做直积构成的空间。形如

$$L_1\otimes L_2 \;=\; \{\sum \vec{a}_i\vec{b}_j c_{ij}|c_{ij}\in K\}$$

线性变换： 对线性空间V

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 a+\lambda_2 b) \;&=\; \lambda_1 f(a)+\lambda_2 f(b) \\ &\quad\;\; \forall\lambda_1\lambda_2\in K, a, b\in V \end{aligned}$$

1.3.3 不变子空间

定义：对于向量空间中的算子T和子集U，如果$T:U\rightarrow U$,则U为相对于T的不变子集

一维不变子空间：等价与考虑本征值问题，因为

$$\begin{aligned} Tu \;&=\; \lambda u \\ &\quad\;\; \text{其中，}\lambda u\in U \end{aligned}$$

考虑到本征值问题在量子力学中的应用，可见更高维度的不变子空间也可能很具有物理意义

1.3.4 线性表示

$$Re_\mu \;=\; \sum_\nu e_\nu D_{\nu\mu}(R)$$

对于线性算符R,的线性表示$D_{\mu\nu}$,

例子：算子最向量的作用

1.3.5 矩阵运算性质

行列式：

$$X=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{1N} \\ & X_{\mathrm{mN}} \end{pmatrix}$$

$$\det X = \sum_{\{\mu_i\}} \varepsilon_{\mu_1\mu_2\dots\mu_m} X_{1\mu_1} X_{2\mu_2} \dots X_{m\mu_m}$$

常用公式

$$\frac{1}{(m-n)!}\sum_{a_{n_1}\dots a_m} \epsilon_{a_1\dots a_n a_{n+1}\dots a_m}\epsilon_{b_1\dots b_n a_{n+1} a_m} = \sum_{p_1\dots p_n} \epsilon_{p_1\dots p_n}\delta_{a_1 b_{p_2}}\delta_{a_2 b_{p_2}}\dots\delta_{a_n b_{p_n}}$$

例子

$$\sum_d \epsilon_{abd}\epsilon_{rsd} = \epsilon_{12}\delta_{ar}\delta_{bs} + \epsilon_{21}\delta_{as}\delta_{br}$$

转，共轭，逆，迹，秩

直积的运算性质

1. $\dim(X\otimes Y)=\dim(X)\dim(Y)$
2. $\mathrm{Tr}(X\otimes Y)=\mathrm{Tr}(X)\mathrm{Tr}(Y)$
3. $(X_1\otimes Y_1)(X_2\otimes Y_2)=(X_1X_2)\otimes(Y_1Y_2)$

这里我希望确认下后面那个是不是矩阵的乘积

$$\begin{aligned}
\text{右式子} &= \left(\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ & \end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} B_1 & \\ B_2 & \end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ & \end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} D_1 & \\ D_2 & \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} A_1B_1 & & A_2B_1 & \\ A_1B_2 & 0 & A_2B_2 & \\ & & & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1D_1 & & C_2D_1 & \\ C_1D_2 & 0 & C_2D_2 & \\ & & & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_1B_1C_1D_1 & 0 & A_1B_1C_2D_2 & 0 \\ A_1B_2C_1D_1 & 0 & A_1B_2C_2D_1 & \\ & & & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \\
\text{左式子} &= \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ & \end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} B_1 & \\ B_2 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_1 & \\ D_2 & \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_1C_1 & A_1C_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} B_1D_1 & 0 \\ B_2D_1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_1C_1\begin{pmatrix} B_1D_1 & 0 \\ B_2D_1 & 0 \end{pmatrix} & A_1C_2\begin{pmatrix} B_1D_1 & 0 \\ B_2D_1 & 0 \end{pmatrix} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_1B_1C_1D_1 & A_1B_1C_2D_1 \\ A_1B_2C_1D_1 & A_1B_2C_2D_1 \\ & \\ & \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

得验证，的确是矩阵的乘

4. $(X \otimes Y)^{-1} = X^{-1} \otimes Y^{-1}; (X \otimes Y)^T = X^T \otimes Y^T; (X \otimes Y)^* = X^* \otimes Y^*$

5. $\det(X \otimes Y) = (\det X)^n (\det Y)^n$

1.3.6 从相似变换开始

相似变换： $\mathcal{P}A = B$,此时也称A, B具有相似关系

$$
\begin{aligned}
P^{-1}AP &= B \\
& \text{其中，} P\text{可逆}
\end{aligned}
$$

不同矢量基的关系

$$
e'_\nu = \sum_\mu e_\mu S_{\mu\nu}
$$

矢量分量的关系

$$
a'_\nu = \sum_\mu (S^{-1})_{\nu\mu} a_\mu
$$

同一算子在不同表示下关系

这里的思路是用Re'_ν而取表示的时候分别作用于e_ν和e'_ν的两个结果相等

$$
\begin{aligned}
\sum_\rho S_{\mu\rho} D'_{\rho\nu}(R) &= \sum_\rho D_{\mu\rho}(R) S_{\rho\nu} \\
SD' &= DS \\
D' &= S^{-1}DS
\end{aligned}
$$

性质：XS或SX也是同样于S的相似变换，只要X与D对易

$$
\begin{aligned}
D' &= S^{-1}DS \\
&= S^{-1}X^{-1}XDS \\
&= (XS)^{-1}D(XS)
\end{aligned}
$$

说明相似变换不唯一，不过有这限制看起来找到所有相似变换看起来也不难哈。

1.3.7 内积空间

对于一个线性空间，定义了这样内积有：共轭对称性、线性共轭、正定性

希尔伯特空间⊂内积空间

矢量基的内积:

$$
\begin{aligned}
\langle e_\mu | e_\nu \rangle &= \Omega_{\mu\nu} \\
& \text{其中，} \Omega_{\mu\nu}\text{是厄米的 —— 由于共轭对称性的满足要求}
\end{aligned}
$$

基的种类:
正交：$\Omega_{\mu\nu}(\mu \neq \nu) = 0$，正交归一：$\Omega_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$，
非奇对称：$\Omega_{\mu\nu} = \Omega_{\nu\mu}$，非奇反对称：$\Omega_{\mu\nu} = -\Omega_{\mu\nu}$

PS:如果不是正交归一基，这里就几点比较有意思：之前都没注意到

1. 关于算符的矩阵元表示，这里都用了求和约定

我们通常量子力学的定义的是

$$R_{\mu\nu} = \langle e_\mu|\hat{R}|e_\nu\rangle = D_{\mu\nu}(\hat{R})$$

然而涉及群表示理论的时候这里就

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \langle e_\mu|\hat{R}|e_\nu\rangle \\ &= \langle e_\mu|e_\sigma\rangle D_{\sigma\nu}(\hat{R}) \\ &= \Omega_{\mu\sigma} D_{\sigma\nu}(\hat{R}) \end{aligned}$$

难道说量子力学是默认了正交归一基，而没有深入计算的手段?

2. 关于互为共轭的算符与与他们矩阵共轭不再对应

$$\begin{aligned} \hat{R}|e_\mu\rangle &= |e_\rho\rangle D_{\rho\mu}(\hat{R}) \\ \hat{R}^\dagger|e_\mu\rangle &= |e_\rho\rangle X_{\rho\mu}(\hat{R}) \end{aligned}$$

可以计算得到

$$\begin{aligned} D &= \Omega X^\dagger \Omega^{-1} \\ X &= \Omega^{-1} D^\dagger \Omega \end{aligned}$$

则,具体地

$$\begin{aligned} \langle e_\nu|\hat{R}|e_\mu\rangle &\overset{1}{=} \langle e_\mu|\hat{R}^\dagger|e_\nu\rangle^* \\ &= (\langle e_\mu|e_\rho\rangle X_{\rho\nu})^* \\ &= \Omega^*_{\mu\rho} X^*_{\rho\nu} \\ &= \Omega_{\mu\rho} X^*_{\rho\nu} \text{（这里}\Omega_{\mu\nu}\text{是厄米的} \\ &\overset{2}{=} \Omega_{\nu\rho} D_{\rho\mu} \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \Omega_{\nu\rho} D_{\rho\mu} &= \Omega_{\mu\rho} X^*_{\rho\nu} \\ (\Omega^{-1})_{\sigma\nu} \Omega_{\nu\rho} D_{\rho\mu} &= (\Omega^{-1})_{\sigma\nu} \Omega_{\mu\rho} X^*_{\rho\nu} \\ \delta_{\sigma\rho} D_{\rho\mu} &= (\Omega^{-1})_{\sigma\nu} \Omega_{\mu\rho} X^*_{\rho\nu} \\ D_{\sigma\mu} &= \Omega_{\mu\rho} X^*_{\rho\nu} ((\Omega^{-1})^T)_{\nu\sigma} \\ &= (\Omega^{-1})_{\sigma\nu} (X^\dagger)_{\nu\rho} (\Omega^{-T})_{\mu\nu} \end{aligned}$$

差不多，老师的有问题?

2 群的基本概念

2.1

定义：

注意第二条和第三条的局限严格性
3. $ER = R$ 这里左右乘不能换
4. $R^{-1}R = E$ 同上

可推导的性质

1. $RR^{-1}=E; RE=R$ [似乎因为群定义中只有，$R^{-1}R=E, ER=R$]

$$\text{设：} SR^{-1} = E$$

则

$$\begin{aligned} RR^{-1} &= E(RR^{-1})=ERR^{-1} \\ &= SR^{-1}RR^{-1} \\ &= S(R^{-1}R)R^{-1}=SER^{-1} \\ &= S(ER^{-1}) \\ &= SR^{-1} \\ &= E \end{aligned}$$

□

则

$$\begin{aligned} RE &= R(R^{-1}R)=(RR^{-1})R \\ &= ER \\ &= R \end{aligned}$$

□

2. 若 $TR=R$, 则$T=E$

这里证明用到了1中的两条

$$\begin{aligned} T &= TE \\ &= T(RR^{-1})=(TR)R^{-1} \\ &= RR^{-1} \\ &= E \end{aligned}$$

3. $TR=E$，则$T=R^{-1}$

$$\begin{aligned} T &= TE \\ &= T(RR^{-1})=(TR)R^{-1} \\ &= ER^{-1} \\ &= R^{-1} \end{aligned}$$

4. $(RS)^{-1}=S^{-1}R^{-1}; R^mR^n=R^{m+n}; (R^m)^n=R^{mn}$

$$\begin{aligned} (RS)^{-1} &= S^{-1}S(RS)^{-1} \\ &= S^{-1}R^{-1}RS(RS)^{-1} \\ &= S^{-1}R^{-1} \end{aligned}$$

群的大概分类：(非)阿贝尔群、(有/无)限群、连续群。

例子.1

D_3: E: 恒等变换，D: 绕z轴转120°，F: 绕z转120°，A：1角转π, B: 2角轴π, C...

有限群的阶：有限群元素个数

复元素： 群的子集

复元素乘积：这个有点像直积

例子：$\{\{E,F,D\},\{A,B,C\}\}$构成群，等乘法表出炉了再来验证的个群。

同构： 对与两个群，如果存在群元素和运算规则都可以一一对应，就是同构

$$\text{记：} G' \ \approx \ G$$

重排定理： 对**有限群**的所有群元素同作一个群运算后，这个群是不变的

$$G \ = \ G^{-1} = TG = GT$$

用乘法表对一个群的所有元素做群运算看起来还是不错的。

有限群的阶： $\forall R \in G$,最存在最小的正整数n，使得$R^n = E$,这里R的n为元素R的阶

周期： $\{R^m\}$在群中所有关于R的幂次的集合

n阶循环群： 一个元素R和它的幂次从2到$n-1$作为元素构成的群

$$C_n \ = \ \{E,R,R^2,...,R^{n-1}\},\text{其中}R^n = E$$

这样的R是循环群的生成元，n叫循环群的阶，元素的阶是个什么鬼

循环群的性质：1. 阿贝尔群 2. 生成元可能不唯一 3.它的生成元的阶等于循环群的阶

有限群的生成元(有限群的秩)： 对于群G中的任意元素T，可同意如下表出

$$T \ = \ R_1^{n_1} \boxtimes R_2^{n_2} \boxtimes ... \boxtimes R_k^{n_k}$$

这里定义的乘积表示：n_1个R_1、n_2个R_2等等的$\frac{A^{\prod_i^k n_k}_{\prod_i^k n_k}}{\prod_i^k A_i^i}$的排列可能的行一种，作为乘积

则此时的最小个数的一组R_i称为这个群生成元，这里的k叫秩。PS：这里的n_i是幂次不是指标

有意思的是将其与线性空间基矢作个类比：
如果这时的运算被定义为加法，这上面这个等式就直接是线性组合。上式子难道更高更抽象？
不过这里也有一些差别：幂次的选取一般不是连续的吧

貌似生成元的周期一定是循环子群，

寻找生成元：
1）一个元素的周期中，最多只有除单位元外的一个生成元
2）对两个待定生成元，若要**张成**的一个群：则用他们的周期做复元素乘积,还要做一个全对称变换
再要加上更多元因子乘积。

例子：A,B张成一个群G,而且$A^2 = B^3 = (AB)^2 = E$

A的周期$= \{E,A\}$,B的周期$= \{E,B,B^2\}$

$$\begin{aligned} G \ &= \ \{E,A\}\{E,B,B^2\} + \{E,B,B^2\}\{E,A\} \\ &= \ \{E,B,B^2,A,AB,AB^2\} + \{E,A,B,BA,B^2,B^2A\} \\ &= \ \{E,A,B,B^2,AB,BA\} \end{aligned}$$

当然，按道理说，还有更多复元素，形如$\{E,A\}\{E,B,B^2\}\{E,A\}$等等，这里只是就题论题，所以没有考虑一般情况。

这里类似的一个例子，A,B^2张成一个群G,而且$A^2=B^3=(AB)^2=E$,结果一样

例子： 对称的群的乘法表和矩阵表示

1）一般行列元素排列顺序一致

2.2 各种子群

子群： 即对于一个群的子集，若还能构成群，则是子群
对于有限群：我们通常只用封闭性来判定子群
对于无限群：则还要判定恒元、逆元（为什么?

子群的陪集： 对于子群$H\subset G$,群元素$R\in G\wedge R\notin H$

$$\begin{aligned} \text{左陪集：} RH &= \{Rh|h\in H\} \\ \text{右陪集：} HR &= \{hR|h\in H\} \end{aligned}$$

特性:
1. 没有重复元素
2. $RH\cap H=\varnothing$
3. $G=H\cup R_2H...\cup R_dH$，阶数$g=dh$[h为H的阶数]，整数d为指数
4. 判定同一陪集：对于RH,TH仅仅要求$R^{-1}T\in H$

2.2.1 子群的类种类

循环子群： 由一元素的周期构成的子群，记作C_n
它们的并构成子群的概率也很高

不变子群： 对于群里的一个元素R, 子群H，左陪集等同于右陪集[这里是任意，还是存在R?

商群： 即由一个群G的复元素构成的群，复元素一般为不变子群H及其所有陪集,因此记为G/H
它的阶数是子群指数、它的恒元是H

2.2.2 共轭元素和类

共轭： 对于群中的两个元素S,R,R'，若$R'=SRS^{-1}$,则称R',R共轭

类： 相互共轭的元素构成的一个划分
能够构成群的类，一定是不变子群。

自逆类：