1 第一章 序论

量子场论=狭义相对论+量子力学=无穷个数谐振子

1.1 相对论量子力学

射散关系

$$E = \sqrt{m^2c^4+p^2c^2}$$

薛定谔方程

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle &= H|\psi\rangle \\ \text{因此：}H &= \sqrt{m^2c^4-\nabla^2}? \end{aligned}$$

1.1.1 尝试1

结合两者运动方程为

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \sqrt{m^2-\nabla^2}\psi$$

波函数表象变换 $\hbar=c=1$,来解方程

$$\psi(t,\vec{x}) = \int\frac{\mathrm{d}^3\vec{p}}{(2\pi)^3}e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}\phi(t,\vec{p})$$

则

$$\begin{aligned} i\partial_t\psi &= \int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}\sqrt{m^2+p^2}\int\mathrm{d}^3x'\,e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}'}\psi(t,\vec{x}') \\ &= \int\mathrm{d}^3\vec{x}'\{K(\vec{x},\vec{x}')\psi(t,\vec{x}')\} \\ \text{其中：}K(\vec{x},\vec{x}') &= \int\frac{\mathrm{d}^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\left\{e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}\sqrt{m^2+p^2}\right\} \end{aligned}$$

当$|\vec{x}-\vec{x}'|\leqslant\lambda_{\mathrm{compton}}$时, K显著非0

这一思路和推导没有问题，但是它违背了因果律。这是这个思路没有被采纳的原因。

在微小时间段的演化

$$\begin{aligned} \psi(t+\delta t,\vec{x}) &= \psi(t,\vec{x})+\delta t\partial_t\psi(t,\vec{x}) \\ &= \psi(t,\vec{x})-i\delta t\int\mathrm{d}^3x\{K(\vec{x},\vec{x}')\psi(t,\vec{x}')\} \end{aligned}$$

$(\delta t)^2-\lambda^2<0$选择使光锥$\psi(t,\vec{x}+\lambda)$不包含$(t+\delta t,\vec{x})$事件，而不应通过类空来影响
而实际上$\psi(t+\delta t,\vec{x})$由$\psi(t,\vec{x}+\lambda)$作为积分量，因此有因果关联。这是矛盾

1.1.2 尝试2

考虑:$E^2=m^2c^4+\vec{p}^2c^2$

$$\begin{aligned} E &\to i\hbar\partial_t \\ \vec{p} &\to i\hbar\nabla \end{aligned}$$

尝试运动方程为

$$E^2\psi(t,\vec{x}) = (m^2c^4+\vec{p}^2c^2)\psi(t,\vec{x})$$

运动微分方程为

$$-\hbar^2\partial_t^2\psi = m^2c^4-\hbar^2c^2\nabla^2\psi$$

进一步化简

$$\begin{aligned}\Rightarrow -\hbar^2c^2\left[\frac{1}{c^2}\partial_t^2-\partial_\mu^2\right]\psi+m^2c^4\psi &= 0\\ \left(\Box+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi(t,\vec{x}) &= 0\end{aligned}$$

平面波解：$\psi=e^{-\frac{i}{\hbar}xp}$，

弊病

1. 负能量 $E=\pm\sqrt{\vec{p}^2+m^2}$的困扰

2. 构造连的续性方程不让人满意

对应连续性方程：$\partial_t\rho+\nabla\cdot\vec{j}=0$

$$\begin{aligned}\rho &= i(\psi^*\partial_t\psi-\psi\partial_t\psi^*)\\ \vec{j} &= i(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)\end{aligned}$$

不满在于ρ不正定，这样就衍生出了狄拉克方程。

相比以薛定谔方程为列子

$$i\hbar\psi^*\partial_t\psi = \psi^*\frac{1}{2m}\nabla^2\psi+\psi$$

$$\partial_t|\psi|^2-\frac{i\hbar}{2\mu}\nabla(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*) = 0$$

1.1.3 狄拉克的尝试

出发点同尝试1，得到狄拉克方程

$$\begin{aligned}i\hbar\partial_t\psi &= \sqrt{\vec{p}^2c^2+m^2c^4}\,\psi\overset{\text{假设}}{=\!=}(\vec{\alpha}\cdot\vec{p}+\beta m)\psi\\ i\hbar\partial_t\psi &= (-i\hbar\vec{\alpha}\cdot\nabla+\beta m)\psi\end{aligned}$$

其中，

$$\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}0 & \vec{\sigma}\\ \vec{\sigma} & 0\end{pmatrix};\beta=\begin{pmatrix}\mathbb{I} & 0\\ 0 & -\mathbb{I}\end{pmatrix};\psi=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}$$

连续性方程

$$\begin{aligned}\rho &= \psi^\dagger\psi\\ \vec{j} &= c\psi^\dagger\vec{\alpha}\psi\end{aligned}$$

额外的问题：狄拉克海

自旋的引入

从引入电磁相互作用开始

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t &\rightarrow i\hbar\partial_t + e\phi \\ -i\hbar\nabla &\rightarrow i\hbar\nabla + \frac{e}{c}\vec{A} \end{aligned}$$

此时方程变换为

$$(i\hbar\partial_t + e\phi)\psi = \left(-i\hbar\nabla + \frac{e}{c}\vec{A}\right)\vec{\alpha}\psi + m\beta\psi$$

将 $\psi = \begin{pmatrix} \psi_t \\ \psi_\alpha \end{pmatrix}$得到 场的相互作用 $[-e\hbar c\vec{\sigma}\cdot\vec{B} - ie\hbar c\vec{\alpha}\cdot\vec{E}]\psi$

电子的自旋$\frac{\hbar}{2}$, $\mu_e = \frac{e\hbar}{2mc}$

1.1.4 辐射的微观理论

黑体辐射 黑体——自身不放光的物体

理解黑体辐射一定要光量子化

$$I(w) = \frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}E(w)}{\mathrm{d}w} = \frac{\hbar}{\pi^2}\frac{w^3}{e^{\frac{\hbar w}{k_B T}} - 1}$$

普朗克分布

对于光子在固定大小的腔体内，有分立的模式。有分立的能量

则平均能量为

$$\begin{aligned} \langle E_n\rangle &= \frac{\sum_j (jE_n)e^{-(jE_n)\beta}}{\sum_j e^{-(jE_n)\beta}} \\ &= \frac{-\frac{d}{\alpha\beta}\frac{1}{1-e^{-E_n\beta}}}{\frac{1}{1-e^{-E_n\beta}}} = \frac{E_n}{e^{E_n\beta} - 1} \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} E(w) &= \sum_n \langle E_n\rangle = \int \mathrm{d}^3 n \frac{\hbar w_n}{e^{\hbar w_n} - 1} \\ &= 4\pi\hbar\frac{L^3}{8\pi^3}\int_0^w \mathrm{d}w' \frac{w'^3}{e^{\hbar w'\beta} - 1} \end{aligned}$$

最后微分即可

$$\begin{aligned} I(w) &= \frac{\hbar}{2\pi^2}\frac{w^3}{e^{\hbar w\beta} - 1} \times g_{\text{photon}} \\ &= \frac{\hbar}{\pi^2}\frac{w^3}{e^{\hbar w\beta} - 1} \end{aligned}$$

光子之间有很微弱的相互作用，可以从费曼图计算。所以在黑体中光子符合平衡态统计

1.1.5 自发辐射-爱因斯坦系数

原子的自发辐射，它是一个单原子无外界作用理想情况

$$\hbar w = E_2 - E_1$$

量子力学无法理解自发辐射这个过程。

1916年Einstein：受激(stimalated)辐射，吸收越迁

A系数 – 自发辐射
B系数 – 受激辐射
B'系数 – 吸收越迁

1. 考虑一个热平衡系统(这里是用的一个假设$\mathrm{d}n_1=0, \mathrm{d}n_2=0$)，$n_1$个原子处于$E_1$,$n_2$和原子处于$E_1$

$$-\mathrm{d}n_1 = \mathrm{d}n_2 = -(A + BI(w))n_2 + B'I(w)n_1 = 0$$

粒子数服从波尔兹曼分布

$$\begin{aligned} n_1 &= Ne^{-\beta E_1} \\ n_2 &= Ne^{-\beta E_2} \end{aligned}$$

则代入

$$\begin{aligned} -An_2 + (B'n_1 + Bn_2)I(w) &= 0 \\ I(w) &= \frac{An_2}{B'n_1 + Bn_2} \\ &= \frac{A}{B'\frac{n_1}{n_2} + B} \\ &= \frac{A}{B'e^{-\beta(E_1 - E_2)} + B} \\ &= \frac{A}{B'e^{-\beta\hbar w} - B} \\ &= \frac{\frac{A}{B}}{\frac{B'}{B}e^{-\beta\hbar w} - 1} \end{aligned}$$

2. 这时对应普朗克黑体辐射的态密度

$$\begin{aligned} \frac{\frac{A}{B}}{\frac{B'}{B}e^{-\beta\hbar w} - 1} &= \frac{\hbar}{\pi^2}\frac{w^3}{e^{\hbar w\beta} - 1} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \frac{A}{B} = \frac{\hbar w^3}{\pi^2} \\ B' = B \end{cases} \end{aligned}$$

有两点疑虑：1. 热平衡假设。2. 黑体的模型

1927年Dirac：第一个量子场论的运用(微观原理)

考虑谐振子模型

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m^2 w^2 x^2$$

升降算符

$$
\begin{aligned}
a &= \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(x+\frac{ip}{mw}\right) \\
a^{\dagger} &= \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(x-\frac{ip}{mw}\right)
\end{aligned}
$$

升降算符的对易关系

$$
\begin{aligned}
[a,a^{\dagger}] &= 1 \\
\text{其他} &= 0
\end{aligned}
$$

定义粒子数算符

$$
\hat{N} = a^{\dagger}a
$$

可以看到实际上$\hat{N}$是能级数的算符

$$
\hat{H} = \hbar w\left(\hat{N}+\frac{1}{2}\right)
$$

确定$a^{\dagger}$作用于$|n\rangle$增加一个粒子

$$
\begin{aligned}
\hat{H}a^{\dagger}|n\rangle &= a^{\dagger}aa^{\dagger}|n\rangle \\
&= a^{\dagger}(1+a^{\dagger}a)|n\rangle \\
&= a^{\dagger}(1+\hat{N})|n\rangle \\
&= (1+n)a^{\dagger}|n\rangle
\end{aligned}
$$

进一步求C

$$
a^{\dagger}|n\rangle = C|n+1\rangle
$$

$$
\begin{aligned}
\langle n|aa^{\dagger}|n\rangle &= \langle n+1|C^{*}C|n+1\rangle \\
\langle n|1+\hat{N}|n\rangle &= |C|^2 \\
1+n &= |C|^2 \\
C &= \sqrt{1+n}
\end{aligned}
$$

类似对于a有$C=\sqrt{n}$

现在考虑光子的自发辐射问题

Fermi's Golden规则

$$
\Gamma(\text{越迁几率}) = M_{f\to i}\delta(E_i-E_f) = \langle f|H_{\mathrm{Int}}|i\rangle\delta(E_i-E_f)
$$

这里可从一阶微扰论得到

对于自发辐射

$$
\begin{aligned}
|i\rangle &= |2\rangle \\
|f\rangle &= |1\rangle,|\hbar w\rangle
\end{aligned}
$$

低一个态之后，会多出一个光子

最简单的物质与光量子耦合

$$
\begin{aligned}
\text{系统的哈密顿量：} \hat{H} &= \frac{(\vec{p}+e\vec{A})}{2m} \\
\text{此时相互作用部分：} \hat{H}_{\text{Int}} &= \frac{e\vec{p}\cdot\vec{A}}{m}
\end{aligned}
$$

当然一般我们设

这里理解性地说明，比如上面提到耦合$\vec{p}$对应物质、$\vec{A}$对应于光子作用部分，他们分别都是一阶的。

$$
H_{\text{int}} = H_I^\dagger a^\dagger + H_I a
$$

如果我这里假设相互作用量

$$
H_{\text{int}} = \alpha H_I^\dagger a^\dagger + \beta H_I a
$$

根据厄米性要求，这里必须$\alpha=\beta$

计算$\mathrm{d}n_2, \mathrm{d}n_1$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}n_2 = -\mathrm{d}n_1 &= -|M_{2\to 1}|^2 n_2 + |M_{1\to 2}|^2 n_1 \\
&= -\langle 2, n_w | H_{\text{int}} | 1, n_w + 1\rangle^2 n_2 + \langle 1, n_w + 1 | H_{\text{int}} | 2, n_w\rangle^2 n_1 \\
&= -\langle 2, n_w | H_I a | 1, n_w + 1\rangle^2 n_2 + \langle 1, n_w + 1 | H_I^\dagger a^\dagger | 2, n_w\rangle^2 n_1 \\
&= -\langle 2, n_w | H_I \sqrt{n_w + 1} | 1, n_w\rangle^2 n_2 + \langle 1, n_w + 1 | H_I^\dagger \sqrt{n_w} | 2, n_w + 1\rangle^2 n_1 \\
&= -\langle 2, n_w | H_I | 1, n_w\rangle^2 (n_w+1) n_2 + \langle 1, n_{w+1} | H_I^\dagger | 2, n_w + 1\rangle^2 n_w n_1 \\
&= -\langle 1, n_w | H_I^\dagger | 2, n_w\rangle^2 (n_w+1) n_2 + \langle 1, n_{w+1} | H_I^\dagger | 2, n_w + 1\rangle^2 n_w n_1 \\
&= -\langle 1, n_w | H_I^\dagger | 2, n_w\rangle^2 (n_w+1) n_2 + \langle 1, n_{w+1} | H_I^\dagger | 2, n_w + 1\rangle^2 n_w n_1 \\
&= |M_0|^2 (-(n_w + 1) n_2 + n_w n_1)
\end{aligned}
$$

结合下面的n_w表达式和爱因斯坦系数的代入

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}n_2 = -\mathrm{d}n_1 &= |M_0|^2 \left(-\left(\frac{I(w)\pi^2}{\hbar w^3} + 1 \right) n_2 + \frac{I(w)\pi^2}{\hbar w^3} n_1 \right) \\
&= |M_0|^2 \left(-\left(\frac{B}{A} I(w) + 1 \right) n_2 + \frac{B}{A} n_1 \right) \\
&= \frac{|M_0|^2}{A} (-(A + BI(w)) n_2 + B' n_1)
\end{aligned}
$$

除了比例系数其他完全一样

$$
\begin{aligned}
E(w) &= \int^w \mathrm{d}^3\vec{n} (\hbar w) n_w \overset{\text{参数变换}}{=\!=} \int^w 4\pi w^2 \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 \mathrm{d}w \{\hbar w n_w\} \\
&= (4\pi) \hbar L^3 \int^w \frac{\mathrm{d}w}{(2\pi)^3} w^3 n_w \\
\text{得到，} I(w) &= \frac{1}{V} \frac{\mathrm{d}E(w)}{\mathrm{d}w} \\
&= \frac{\hbar}{2\pi^2} w^3 n_w \times g_{\text{photo}} = \frac{\hbar w^3}{\pi^2} n_w \\
n_w &= \frac{I(w)\pi^2}{\hbar w^3}
\end{aligned}
$$

薛定谔方程不能解释在粒子数变换的物理过程，比如粒子碰撞

量子场论：自恰地处理发散是量子场论重要的一部分，没了就完蛋

1.1.6 经典场论-电磁场

$$
\begin{aligned}
L &= \int \mathrm{d}^3 x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) \right\} \\
& \text{其中：} F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu
\end{aligned}
$$

光子的0质量给它的量子化带来一些困难

1.2 定域场，运动方程与场的哈密顿形式

1.2.1 定域场

定域场从字面上来说是满足定域性的场，然而这样还是不知道是什么鬼。总觉的和束缚态有联系

1.2.2 运动方程

关于拉格朗日量的运动方程

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \delta \int \mathrm{d}t\, L[\phi, \dot{\phi}] \\
&= \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3 x \left(\frac{\delta L}{\delta \phi(\boldsymbol{x},t)} \delta\phi(\boldsymbol{x},t) + \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(\boldsymbol{x},t)} \delta\dot{\phi}(\boldsymbol{x},t) \right) \\
&= \int \mathrm{d}t \mathrm{d}^3 x \left(\frac{\delta L}{\delta \phi(\boldsymbol{x},t)} \delta\phi(\boldsymbol{x},t) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(\boldsymbol{x},t)} \delta\phi(\boldsymbol{x},t) \right) - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(\boldsymbol{x},t)} \delta\phi(\boldsymbol{x},t) \right) \\
&= \int \mathrm{d}t \mathrm{d}^3 x \left(\frac{\delta L}{\delta \phi(\boldsymbol{x},t)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(\boldsymbol{x},t)} \right) \delta\phi(\boldsymbol{x},t) + \int \mathrm{d}t \mathrm{d}^3 x \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(\boldsymbol{x},t)} \delta\phi(\boldsymbol{x},t) \right) \\
&= \int \mathrm{d}t \mathrm{d}^3 x \left(\frac{\delta L}{\delta \phi(\boldsymbol{x},t)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(\boldsymbol{x},t)} \right) \delta\phi(\boldsymbol{x},t)
\end{aligned}
$$

根据最小作用原理，$\delta S = 0$ 则运动方程为

$$
\frac{\delta L}{\delta \phi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} = 0
$$

关于拉格朗日量密度的运动方程

拉格朗日量密度的引入

$$
L(t) = L[\phi, \dot{\phi}] = \int \mathrm{d}^3 x \mathcal{L}(\phi(\boldsymbol{x},t), \nabla\phi(\boldsymbol{x},t), \dot{\phi}(\boldsymbol{x},t))
$$

这里感觉上是很有道理的，但是有点说不清楚$\nabla\phi(\boldsymbol{x},t)$是怎么出现的。

另外关于拉格朗日量密度是怎么样转变为ϕ的相关函数而不是泛函，也有写弄不清楚。

同样根据变分原理

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \delta\int \mathrm{d}t\int \mathrm{d}^3x\mathcal{L}(\phi(\boldsymbol{x},t),\nabla\phi(\boldsymbol{x},t),\dot{\phi}(\boldsymbol{x},t)) \\
&= \int \mathrm{d}t\mathrm{d}^3x\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi(\boldsymbol{x},t)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\phi)}\delta(\nabla\phi(\boldsymbol{x},t))+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\delta\dot{\phi}(\boldsymbol{x},t)\right) \\
&= \int \mathrm{d}t\mathrm{d}^3x\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi(\boldsymbol{x},t)-\nabla\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\phi)}\right)\delta\phi(\boldsymbol{x},t)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\right)\delta\dot{\phi}(\boldsymbol{x},t)\right) \\
&\quad +\int \mathrm{d}t\mathrm{d}^3x\nabla\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\phi)}\delta\phi(\boldsymbol{x},t)\right)+\int \mathrm{d}t\mathrm{d}^3x\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\delta\phi(\boldsymbol{x},t)\right) \\
&= \int \mathrm{d}t\mathrm{d}^3x\delta\phi(\boldsymbol{x},t)\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)
\end{aligned}
$$

即，运动方程

$$
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = 0
$$

1.2.3 场的哈密顿形式

定义正则共轭场

$$
\pi(\boldsymbol{x},t) = \frac{\delta L(t)}{\delta\dot{\phi}(\boldsymbol{x},t)}
$$

它是一个由泛函微分定义出来的量，这里再做一点演算

$$
\begin{aligned}
\pi(\boldsymbol{x},t) &= \frac{\delta}{\delta\dot{\phi}(\boldsymbol{x},t)}\int \mathrm{d}^3y\mathcal{L}(\phi(\boldsymbol{y},t),\nabla\phi(\boldsymbol{y},t),\dot{\phi}(\boldsymbol{y},t)) \\
&= \int \mathrm{d}^3y\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(\boldsymbol{y},t)}\frac{\delta\phi(\boldsymbol{y},t)}{\delta\dot{\phi}(\boldsymbol{x},t)}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\phi(\boldsymbol{y},t))}\frac{\delta(\nabla\phi(\boldsymbol{y},t))}{\delta\dot{\phi}(\boldsymbol{x},t)}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}(\boldsymbol{y},t)}\frac{\delta\dot{\phi}(\boldsymbol{y},t)}{\delta\dot{\phi}(\boldsymbol{x},t)}\right) \\
&= \int \mathrm{d}^3y\left(0+0+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}(\boldsymbol{y},t)}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\right) \\
&= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}(\boldsymbol{x},t)}
\end{aligned}
$$

另外由

$$
\begin{cases}
\pi(\boldsymbol{x},t)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}(\boldsymbol{x},t)} \\
\frac{\delta L}{\delta\phi}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}}=0
\end{cases}
$$

可以得到

$$
\dot{\pi}(\boldsymbol{x},t) = \frac{\delta L}{\delta\phi(\boldsymbol{x},t)}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(\boldsymbol{x},t)}
$$

由π和$\dot{\pi}$的变分定义可以看到

$$
\delta L = \int \mathrm{d}^3x\left\{\frac{\delta L}{\delta\phi}\delta\phi+\frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}}\delta\dot{\phi}\right\}=\int \mathrm{d}^3x\,\{\dot{\pi}\delta\phi+\pi\delta\dot{\phi}\}
$$

哈密顿形式

哈密顿量

$$H(t)=H[\phi(\boldsymbol{x},t),\pi(\boldsymbol{x},t)] \;=\; \int \mathrm{d}^3x\pi(\boldsymbol{x},t)\dot{\phi}(\boldsymbol{x},t)-L(t)$$

哈密顿量密度

$$\begin{aligned}H(t) &= \int \mathrm{d}^3x\mathcal{H} \\ &= \int \mathrm{d}^3x\{\pi(\boldsymbol{x},t)\dot{\phi}(\boldsymbol{x},t)-\mathcal{L}\}\end{aligned}$$

$$\mathcal{H} = \pi(\boldsymbol{x},t)\dot{\phi}(\boldsymbol{x},t)-\mathcal{L}$$

于是关于场的哈密顿运动方程

$$\begin{aligned}\delta H &= \int \mathrm{d}^3x\{\delta\pi(\boldsymbol{x},t)\dot{\phi}(\boldsymbol{x},t)+\pi(\boldsymbol{x},t)\delta\dot{\phi}(\boldsymbol{x},t)\}-\delta L \\ &= \int \mathrm{d}^3x\{\delta\pi\dot{\phi}+\pi\delta\dot{\phi}-\dot{\pi}\delta\phi-\pi\delta\dot{\phi}\} \\ &= \int \mathrm{d}^3x\{\dot{\phi}\delta\pi-\dot{\pi}\delta\phi\}\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \frac{\delta H}{\delta\pi} \\ \dot{\pi} &= -\frac{\delta H}{\delta\phi}\end{aligned}$$

当然我们可以继续探讨这组哈密顿方程的密度形式。

泊松括号：

$$\{F,G\}_{\mathrm{PB}} = \int \mathrm{d}^3x\left\{\frac{\delta F}{\delta\phi(x)}\frac{\delta G}{\delta\pi(x)}-\frac{\delta F}{\delta\pi(x)}\frac{\delta G}{\delta\phi(x)}\right\}$$

以此写出海森堡运动方程

$$\dot{F}(t) = \{F,H\}_{\mathrm{PB}}$$

可以看到，这里也有关于泊松括号的对易关系

$$\begin{aligned}\{\phi(\boldsymbol{x},t),\pi(\boldsymbol{x'},t)\} &= \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}) \\ \text{其他} &= 0\end{aligned}$$

1.2.4 经典场论–电动力学

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-j_\mu A^\mu$$

以上参考Walter Greiner 1996

2 第二章 场的正则量子化

相对论+量子力学的3个推论

1. 反粒子，2. CPT定理，3. 自旋统计

2.1 Klein-Golden场[3]

2.1.1 实标量场

量子化

拉格朗如量

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\{\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - m\phi^2\}\\
&\mathcal{L} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}m\phi^2
\end{aligned}
$$

知道了这个可以求得下面几个东西

1. 代入运动方程 见(1.2.2) 得到实的运动方程

$$
(\Box + m^2)\phi(x) = 0
$$

对于电磁场也有类似的方程$\Box A^\nu = 0$

2. 求出正则动量

$$
\pi(x) = \frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}(x)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}(x)} = \dot{\phi}(x)
$$

引入正则量子化

$$
\begin{cases}
[\phi(\boldsymbol{x},t), \pi(\boldsymbol{x}',t)] = i\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\\
\text{其他} = 0
\end{cases}
$$

对应运动方程的解

这里可以设解为

$$
\phi(x) = \varphi(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}
$$

代入方程，然后对所以模式$\vec{k}$做线性组合。

$$
\begin{aligned}
\phi(x) &= \int\frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{k}}}}\{a(\boldsymbol{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\boldsymbol{k})e^{ikx}\}\\
&\omega_{\boldsymbol{k}} = \sqrt{m^2 + \boldsymbol{k}^2}
\end{aligned}
$$

两部分系数一致，是为了满足厄米

应该要注意：$\mathrm{dim}x = 4, \mathrm{dim}\boldsymbol{x} = 3, \mathrm{dim}k = 4, \mathrm{dim}\boldsymbol{k} = 3.$

通过方程的解，引入关于升降算符的一套可替代的量子化

$$
\begin{cases}
[a(\boldsymbol{k}), a^\dagger(\boldsymbol{k}')] = \delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\\
\text{其他} = 0
\end{cases}
$$

3. **Mandl F. ,Shaw G. Quantum field theory**

验证：这里主要是看归一化系数来的，因此设

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{N_k}\{a(\boldsymbol{k})e^{-ikx}+a^\dagger(\boldsymbol{k})e^{ikx}\}\\ \pi(x) &= \int \frac{w_k\mathrm{d}^3k}{iN_k}\{a(\boldsymbol{k})e^{-ikx}-a^\dagger(\boldsymbol{k})e^{ikx}\}\end{aligned}$$

然后

$$\begin{aligned}[\phi(\boldsymbol{x},t),\pi(\boldsymbol{x'},t)] &= \phi(\boldsymbol{x},t)\pi(\boldsymbol{x'},t)-\pi(\boldsymbol{x'},t)\phi(\boldsymbol{x},t)\\
&= \iint \frac{w_{k'}\mathrm{d}^3k\mathrm{d}^3k'}{iN_kN_{k'}}\{(a(\boldsymbol{k})e^{-ikx}+a^\dagger(\boldsymbol{k})e^{ikx})(a(\boldsymbol{k'})e^{-ik'x'}-a^\dagger(\boldsymbol{k'})e^{ik'x'})\\
&\quad -(a(\boldsymbol{k'})e^{-ik'x'}-a^\dagger(\boldsymbol{k'})e^{ik'x'})(a(\boldsymbol{k})e^{-ikx}+a^\dagger(\boldsymbol{k})e^{ikx})\}\\
&= \iint \frac{w_{k'}\mathrm{d}^3k\mathrm{d}^3k'}{iN_kN_{k'}}\{[a(\boldsymbol{k}),a(\boldsymbol{k'})]e^{-i(kx+k'x')}-[a^\dagger(\boldsymbol{k}),a^\dagger(\boldsymbol{k'})]e^{i(kx+k'x')}\\
&\quad +[a^\dagger(\boldsymbol{k}),a(\boldsymbol{k'})]e^{i(kx-k'x')}+[a(\boldsymbol{k}),a^\dagger(\boldsymbol{k'})]e^{-i(kx-k'x')}\}\\
&= \iint \frac{w_{k'}\mathrm{d}^3k\mathrm{d}^3k'}{iN_kN_{k'}}\{-\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'})e^{i(kx-k'x')}+\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'})e^{-i(kx-k'x')}\}\\
&= \int \frac{w_k\mathrm{d}^3k}{iN_k^2}\{e^{-ik(x-x')}-e^{ik(x-x')}\}\\
&= i\int \frac{w_k}{N_k^2}\mathrm{d}^3k\{e^{-i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'})}-e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'})}\}\\
&= i\left(\int \frac{w_k}{N_k^2}\mathrm{d}^3ke^{-i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'})}-\int \frac{w_{-k}}{N_{-k}^2}\mathrm{d}^3(-k)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'})}\right)\\
&= i\int \frac{2w_{\boldsymbol{k}}}{N_{\boldsymbol{k}}^2}\mathrm{d}^3ke^{-i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'})}\\
&\quad \text{要求：}\ \frac{2w_{\boldsymbol{k}}}{N_{\boldsymbol{k}}^2}=\frac{1}{(2\pi)^3}\\
&= i\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3ke^{-i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'})}\\
&= i\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'})\end{aligned}$$

因此可以看到

$$N_{\boldsymbol{k}} = \sqrt{(2\pi)^3 2w_{\boldsymbol{k}}}$$

由此可一看到：$N_{\boldsymbol{k}}$正比于$w_{\boldsymbol{k}}$是凑不出Dirac delta函数的

PS：在归一化系数上面 有不同的取法，即$\sqrt{(2\pi)^3 2w_{\boldsymbol{k}}}\sim(2\pi)^3 2w_{\boldsymbol{k}}$这种，
这里原因后者是 $w_{\boldsymbol{k}}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'})$在$a(\boldsymbol{k})$的对易关系中能体现是一个洛伦兹协变量。
而$\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'})$不是，可是如果这让计算来看起来复杂的话，我是不愿用的。

粒子数算符及其运算

$$N(\boldsymbol{k}) = a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})$$

一点关于升降算符的运算

$$\begin{aligned}[N(\boldsymbol{k}),a^\dagger(\boldsymbol{k})] &= a^\dagger(\boldsymbol{k})\\ [N(\boldsymbol{k}),a(\boldsymbol{k})] &= -a(\boldsymbol{k})\end{aligned}$$

动量态

$$a^\dagger(\boldsymbol{k})|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2w_{\boldsymbol{k}}}}|\boldsymbol{k}\rangle$$

这个归一化系数和上面可能不一致,这里归一化因子可以保证$|\boldsymbol{k}\rangle$洛伦兹协变。

动量空间展开的的哈密顿量

$$H = \int \mathrm{d}^3 k w_{\boldsymbol{k}} \left\{ N(\boldsymbol{k}) + \frac{\delta(0)}{2} \right\}$$

现在对角化哈密顿量

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{\sqrt{(2\pi)^3 2 w_{\boldsymbol{k}}}} \{ a(\boldsymbol{k}) e^{-ikx} + a^\dagger(\boldsymbol{k}) e^{ikx} \} \\
\pi(x) &= \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{i} \sqrt{\frac{w_{\boldsymbol{k}}}{2(2\pi)^3}} \{ a(\boldsymbol{k}) e^{-ikx} - a^\dagger(\boldsymbol{k}) e^{ikx} \} \\
\nabla\phi(x) &= \int \frac{k \mathrm{d}^3 k}{i\sqrt{(2\pi)^3 2 w_{\boldsymbol{k}}}} \{ a(\boldsymbol{k}) e^{-ikx} - a^\dagger(\boldsymbol{k}) e^{ikx} \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 x \{ \pi^2(x) + (\nabla\phi(x))^2 + m^2 \phi^2(x) \} \\
&= \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 x \left\{ - \iint \mathrm{d}^3 k \mathrm{d}^3 k' \sqrt{\frac{w_{\boldsymbol{k}}}{2(2\pi)^3}} \sqrt{\frac{w_{\boldsymbol{k}'}}{2(2\pi)^3}} (a(\boldsymbol{k}) e^{-ikx} - a^\dagger(\boldsymbol{k}) e^{ikx})(a(\boldsymbol{k}') e^{-ik'x} - a^\dagger(\boldsymbol{k}') e^{ik'x}) \right. \\
&\quad - \iint \mathrm{d}^3 k \mathrm{d}^3 k' \frac{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2 w_{\boldsymbol{k}}} \sqrt{(2\pi)^3 2 w_{\boldsymbol{k}'}}} (a(\boldsymbol{k}) e^{-ikx} - a^\dagger(\boldsymbol{k}) e^{ikx})(a(\boldsymbol{k}') e^{-ik'x} - a^\dagger(\boldsymbol{k}) e^{ik'x}) \\
&\quad \left. + \frac{m^2}{\sqrt{(2\pi)^3 2 w_{\boldsymbol{k}}} \sqrt{(2\pi)^3 2 w_{\boldsymbol{k}}}} (a(\boldsymbol{k}) e^{-ikx} + a^\dagger(\boldsymbol{k}) e^{ikx})(a(\boldsymbol{k}') e^{-ik'x} + a^\dagger(\boldsymbol{k}) e^{ik'x}) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \iiint \frac{\mathrm{d}^3 x \mathrm{d}^3 k \mathrm{d}^3 k'}{2(2\pi)^3} \left\{ \left(- \left(\sqrt{w_{\boldsymbol{k}} w_{\boldsymbol{k}'}} + \frac{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}{\sqrt{w_{\boldsymbol{k}} w_{\boldsymbol{k}}}} \right) \sigma(+--+) + \frac{m^2}{\sqrt{w_{\boldsymbol{k}} w_{\boldsymbol{k}'}}} \right) (a(\boldsymbol{k}) a(\boldsymbol{k}') e^{-i(k+k')x} \right. \\
&\quad \left. + a(\boldsymbol{k}) a^\dagger(\boldsymbol{k}') e^{-i(k-k')x} + a^\dagger(\boldsymbol{k}) a(\boldsymbol{k}') e^{i(k-k')x} + a^\dagger(\boldsymbol{k}) a^\dagger(\boldsymbol{k}') e^{i(k+k')x}) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \iint \frac{\mathrm{d}^3 k \mathrm{d}^3 k'}{2} \left\{ \left(- \left(\sqrt{w_{\boldsymbol{k}} w_{\boldsymbol{k}'}} + \frac{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}{\sqrt{w_{\boldsymbol{k}} w_{\boldsymbol{k}'}}} \right) \sigma(+--+) + \frac{m^2}{\sqrt{w_{\boldsymbol{k}} w_{\boldsymbol{k}'}}} \right) \right. \\
&\quad (a(\boldsymbol{k}) a(\boldsymbol{k}') \delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}') e^{-i(w_{\boldsymbol{k}}+w_{\boldsymbol{k}'})t} + a(\boldsymbol{k}) a^\dagger(\boldsymbol{k}') \delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') e^{-i(w_{\boldsymbol{k}}-w_{\boldsymbol{k}'})t} \\
&\quad \left. + a^\dagger(\boldsymbol{k}) a(\boldsymbol{k}') \delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') e^{i(w_{\boldsymbol{k}}-w_{\boldsymbol{k}'})t} + a^\dagger(\boldsymbol{k}) a^\dagger(\boldsymbol{k}') \delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}') e^{i(w_{\boldsymbol{k}}+w_{\boldsymbol{k}'})t}) \right\} \\
&= \frac{1}{4} \int \mathrm{d}^3 k \left\{ \left(-w_{\boldsymbol{k}} \sigma + \frac{\boldsymbol{k}^2}{w_{\boldsymbol{k}}} + \frac{m^2}{w_{\boldsymbol{k}}} \right) (a(\boldsymbol{k}) a(\boldsymbol{k}) e^{-2iw_{\boldsymbol{k}}t} + a(\boldsymbol{k}) a^\dagger(\boldsymbol{k}) + a^\dagger(\boldsymbol{k}) a(\boldsymbol{k}) \right. \\
&\quad \left. + a^\dagger(\boldsymbol{k}) a^\dagger(\boldsymbol{k}) e^{2iw_{\boldsymbol{k}}t}) \right\} \\
&= \frac{1}{4} \int \mathrm{d}^3 k w_{\boldsymbol{k}} \{ (1-\sigma)(a(\boldsymbol{k}) a(\boldsymbol{k}) e^{-2iw_{\boldsymbol{k}}t} + a(\boldsymbol{k}) a^\dagger(\boldsymbol{k}) + a^\dagger(\boldsymbol{k}) a(\boldsymbol{k}) + a^\dagger(\boldsymbol{k}) a^\dagger(\boldsymbol{k}) e^{2iw_{\boldsymbol{k}}t}) \} \\
&= \frac{1}{4} \int \mathrm{d}^3 k w_{\boldsymbol{k}} \{ 2(a(\boldsymbol{k}) a^\dagger(\boldsymbol{k}) + a^\dagger(\boldsymbol{k}) a(\boldsymbol{k})) \} \\
&= \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 k w_{\boldsymbol{k}} \{ [a(\boldsymbol{k}), a^\dagger(\boldsymbol{k})] + 2 a^\dagger(\boldsymbol{k}) a(\boldsymbol{k}) \} \\
&= \int \mathrm{d}^3 k w_{\boldsymbol{k}} \left\{ a^\dagger(\boldsymbol{k}) a(\boldsymbol{k}) + \frac{\delta^3(0)}{2} \right\}
\end{aligned}$$

另外、有教材通过能动张量讨论动量、叫动量算符的升降算符表达形式，也算长见识了。

对能量本征态的作用

2.1.2 复标量场

$$\mathcal{L} = N(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^\dagger\partial_\nu\phi - m^2\phi^\dagger\phi)$$

1. 运动方程

$$\begin{aligned}(\Box+m^2)\phi(x) &= 0\\ (\Box+m^2)\phi^\dagger(x) &= 0\end{aligned}$$

2. 共轭动量

$$\begin{aligned}\pi(x) &= \dot{\phi}^*(x)\\ \pi^*(x) &= \dot{\phi}(x)\end{aligned}$$

引入正则量子化

$$\begin{cases}[\phi(\boldsymbol{x},t),\pi(\boldsymbol{x'},t)] &= i\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'})\\ \text{其他} &= 0\end{cases}$$

这注意到，在复数场的情况下有$[\phi(\boldsymbol{x},t),\dot{\phi}(\boldsymbol{x'},t)]=[\phi(\boldsymbol{x},t),\pi^\dagger(\boldsymbol{x'},t)]=0$,这样以来就会发现，若$\phi$仅仅只在实数上取值，就退回不到实标量场的理论。

运动方程的解

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \int\frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{2(2\pi)^3w_{\boldsymbol{k}}}}\{a(\boldsymbol{k})e^{-ikx}+b^\dagger(\boldsymbol{k})e^{ikx}\}\\ \phi^\dagger(x) &= \int\frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{2(2\pi)^3w_{\boldsymbol{k}}}}\{b(\boldsymbol{k})e^{-ikx}+a^\dagger(\boldsymbol{k})e^{ikx}\}\end{aligned}$$

升降算符的对易关系

$$\begin{cases}[b(\boldsymbol{k}),b^\dagger(\boldsymbol{k'})]=[a(\boldsymbol{k}),a^\dagger(\boldsymbol{k'})] &= \delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'})\\ \text{其他} &= 0\end{cases}$$

由此升降算符定义粒子数算符，这里应有两种粒子数算符

$$\begin{cases}N_a(\boldsymbol{k}) &= a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})\\ N_b(\boldsymbol{k}) &= b^\dagger(\boldsymbol{k})b(\boldsymbol{k})\end{cases}$$

哈密顿量

$$H = \int\mathrm{d}^3k[a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})+b^\dagger(\boldsymbol{k})b(\boldsymbol{k})]$$

这里似乎可以描述电荷数

$$\begin{aligned}Q &= -i\int\mathrm{d}^3x\{\phi^\dagger(x)\phi(x)-\phi^\dagger(x)\phi(x)\}\\ &= \int\mathrm{d}^3k\{a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})-b^\dagger(\boldsymbol{k})b(\boldsymbol{k})\}\end{aligned}$$

2.1.3 协变对易关系

因为前面考虑的都是等时的对易关系，因此这里考虑四维的对易关系，这样才可能是协变的

从简单情况开始，这里用的是实标量场的理论，那么考虑计算

这里就牵扯到了费曼传播子了，应该是

$$
\begin{aligned}
[\phi(x), \phi(y)] &= ...... \\
&= \frac{i}{(2\pi)^3}\int \frac{\mathrm{d}^3 k}{w_{\boldsymbol{k}}} \sin k(x-y)
\end{aligned}
$$