1 微分流形和微分形式—流形上的分析学简介

1.1 射影几何[3]

1.1.1 两条平行线相交与一点

平行线可以相交于$\mathbb{R}^2$之外，概念从这一点出发来拓展平面空间的概念。

对两条平行的直线方程

$$\left\{\begin{array}{lll} y & = & 2x+1 \\ y & = & 2x+3 \end{array}\right.$$

对应一点确定一条直线的概念引入

例子.3

$$\begin{array}{rcl} \text{对于一般直线:}\, y'=kx'+b & \mapsto & \left[\frac{x}{z},\frac{y}{z},1\right] \\ \text{注意这里实际上} & & \left\{\begin{array}{l} x'=\frac{x}{z} \\ y'=\frac{y}{z} \end{array}\right. \\ \text{则关于齐次坐标的方程} & : & y=kx+bz \\ \text{这里拓展是取值} & & \left\{\begin{array}{l} [x,y.z], z\neq 0 \\ [x,y,z], z=0 \end{array}\right. \end{array}$$

这里将结果用$\mathbb{R}P^2$的齐次坐标的形式来说明

对于直线$y=2x+1$, 关于其次坐标的直线方程为：$y=2x+z$

对于直线$y=2x+3$，$y=2x+3z$

于是这里就有了齐次坐标的交点：$[1,2,0]$，这个点在一般的坐标上是找不到的。

1.1.2 实射影平面 $\mathbb{R}P^2$

定义： 一个关于三维有序数对的集合

$$\begin{array}{rcl} [x,y,u] & := & \{(\lambda x,\lambda y,\lambda u)|\lambda\in\mathbb{R},\lambda\neq 0,x^2+y^2+u^2\neq 0\} \\ & & \text{这里是以}\lambda\text{为参量的直线} \\ & = & \{\text{all line in }\mathbb{R}^3\} \end{array}$$

这里用等价类表示$[x,y,u]\sim[\lambda x,\lambda u,\lambda u]$

不可定向?

例子.1

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}P^2 & = & \{[x,y,z]\}=\{[x,y,z]|z\neq 0\}\cup\{[x,y,z]\} \\ & = & \left\{\left[\frac{x}{z},\frac{y}{z},1\right]\right\}\cup\{[x,y,0]\} \\ & = & \mathbb{R}^2\cup\{[x,y]\} \\ & = & \mathbb{R}^2\cup\mathbb{R}P^1=\mathbb{R}^2\cup l_\infty \end{array}$$

3. 数学指南-实用数学手册

这里解答了$u=0$时对应为无穷远点：即平行线的交点在$\mathbb{R}P^1$上

对$\mathbb{R}P^2$不能建立$\mathbb{R}^2$全局坐标系：

例子.2

$$\begin{aligned} \mathbb{R}P^2 &= U_1 \cup U_2 \cup U_3 \quad \text{构成一个覆盖} \\ \text{其中}\quad U_i &:= \left\{\left[\frac{x}{x_i}, \frac{y}{x_i}, \frac{z}{x_i}\right] | x_i \neq 0\right\} \xrightarrow{\varphi} \{(a_i, b_i)\} = \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

这里用三个部分的$\mathbb{R}^2$坐标来表示$\mathbb{R}P^2$

计算

$$\begin{aligned} U_1 &: \{(a_1, b_1)\} = \left\{\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)\right\} \\ U_2 &: \{(a_2, b_2)\} = \left\{\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right)\right\} \end{aligned}$$

$$U_1 \cap U_2 \quad : \quad \begin{cases} a_2 = \frac{1}{a_1} \\ b_2 = \frac{b_1}{a_1} \end{cases}$$

——2——

$$\text{已知：} \mathbb{R}^2 \quad \subset \quad \mathbb{R}P^2$$

$$\begin{aligned} \text{作映射：} \mathbb{R}^2 &\hookrightarrow \mathbb{R}P^2 \supset U = \{z \neq 0\} \\ \text{对于元素而言：} (x, y) &\mapsto [Z, Y, Z \neq 0] \text{with } x = \frac{X}{Z}, y = \frac{Y}{Z} \end{aligned}$$

对于线

$$l: y = kx + b \quad \Rightarrow \quad [xZ, (kx + b)Z, Z] \subset U$$

现在拓展直线l的取值空间，加入$Z=0$的点，因为$(x, y) \in \mathbb{R}$无法表示拓展的点，所以考虑齐次坐标

$$\begin{aligned} l \quad &\Rightarrow \quad [X, kX + bZ, Z] \\ &\overset{Z=0}{=\!=\!=} \quad [X, kX, 0] = [1, k, 0] \not\subset U \end{aligned}$$

为满足齐次坐标的要求，$X \neq 0$

例子. 3

$$\mathbb{C}P^1 \quad = \quad \{[z_1, z_2]\}, z_i \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{C}P^1 &= U_1 \cup U_2 \\ \text{where}, U_1 &= \{[z_1, z_2] | z_1 \neq 0\} = \left\{\left[1, z^1\left(= \frac{z_2}{z_1}\right)\right]\right\} = \{z^1\} = \mathbb{C} \end{aligned}$$

两个$\mathbb{C}$之间映射关系$\varphi_{12} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}: z^2 = \frac{1}{z^1}$

另外

$$
\begin{aligned}
\mathbb{C}P^1 &= \{[z_1,z_2]|z_2\neq 0\}\cup\{[z_1,z_2]|z_2=0\}\\
&= \mathbb{C}\cup\{[1,0]\}\\
&= \mathbb{C}\cup\{\infty\}
\end{aligned}
$$

这一等式反应的是，如果在一个坐标卡上有一个连续(或光滑)的函数，经坐标变换后仍然为一个连续(或光滑)的函数

符

1.1.3 n维实射影空间

从$\mathbb{R}P^2$推广，即$\mathbb{R}P^n$

$$[x_1,...,x_{n+1}] \;:=\; \{(\lambda x_1,...,\lambda x_{n+1})|\lambda\in\mathbb{R},\lambda\neq 0, x_1^2+\cdots+x_{n+1}^2\neq 0\}$$

这里的$[\lambda x_1,...,\lambda x_{n+1}]$为$\mathbb{R}P^n$的其次坐标，与齐次函数有关系，
其中$x_{n+1}=0$时对应无穷远点(还是不知道)

1.2 拓扑基础[6]

1.2.1 拓扑空间与拓扑结构

定义： 对于一个非空集合X和它的开集簇 ”一些子集合“ $\tau=\{X_i\}$满足

1. $X,\varnothing\in\tau$
2. $\bigcap^{\text{finity}} X_i\in\tau$,
3. $\bigcup X_i\in\tau$ 任意多个X_i'的并$\in\tau$

这里的τ是拓扑结构，(X,τ)是拓扑空间

例子.1

$M=\{a,b,c\}$, 开集族元素：
$U_0=\varnothing$， $U_1=\{a\}$， $U_2=\{b\},U_3=\{c\},U_4=\{a,b\},U_5=\{a,c\},U_6=\{b,c\},U_7=\{a,b,c\}$

$\tau_1=\{\varnothing, U_1, U_7\}$,$\tau_2=\{\varnothing, U_2, U_7\}$, $\tau_3=\{\varnothing, U_1, U_2, U_4, U_7\}$, $\tau=\{\varnothing, U_1, U_4, U_5, U_7\}\tau_{\max}=\{\text{all}\}$,
这些构成不同的拓扑空间，当然也有不构成拓扑的例子$\tau=\{\varnothing,U_1,U_2,U_7\}$

现在考虑那他们之间的同胚映射,好像他们有3种之间无法同胚的拓扑空间（这里只看了一一对应）

比如：(M,τ_1)和(M,τ_2),
建立映射f: $\begin{cases} a\rightarrow b\\ b\rightarrow a\\ c\rightarrow c\end{cases}$ 时， $\begin{cases}\varnothing\\ U_2\ni f(b), \text{where}, b\in U_7\\ U_7\ni f()\end{cases}$

比如：(M,τ_1)和(M,τ_3)

建立映射如上$\begin{cases}\varnothing\\ U_1\ni f(b),\text{where}, b\in U_7\in\tau_1\\ U_2\ni f(a),\text{where}, a\in U_1, U_7\in\tau_2\\ U_4\ni f(a)\text{or} f(b),\text{where, they}\in U_7\in\tau_3\\ U_7\end{cases}$ 逆映射$\begin{cases}\varnothing\\ U_1\ni f^{-1}(a),\text{where}, b\in U_2\in\tau_1\\ U_7\end{cases}$

6. **物理学中的几何方法-余扬政**

:::这里问了老师，它交代莫深究了orz，参考无非是点集拓扑

1.3 流形基础

局部坐标系： 即坐标卡(chart),用来标记一个流形上的位置，例如地图

符号陈述为：(U,φ) 其中 U是拓扑流形M上的开集，φ是同胚映射

$$\varphi\colon U \;\rightarrow\; \mathbb{R}^n$$

对于流形上的一点p,有 $\varphi\colon p \rightarrow (x_1,\ldots,x_n)$

对于拓扑流形都可以建立一定程度的局部坐标系，因为说在局域里与$\mathbb{R}^n$同胚

对于同一个流形的两个不同的坐标卡：

$$\begin{aligned} \varphi_1\colon p &\;\rightarrow\; (x_1,y_1) \\ \varphi_2\colon p &\;\rightarrow\; (x_2,y_2) \\ \text{这里强调，}p\in U_1\cap U_2 & \\ \text{坐标变换：}(\varphi_2\circ\varphi_1^{-1})\colon(x_1,y_1) &\;\rightarrow\; (x_2,y_2) \end{aligned}$$

因为这里的φ都是一一映射

联系下面拓扑流形和微分流形的概念来想象，只要增加对φ_i的限定就足够了，
而对于坐标变换就也是连续或光滑的了。

开覆盖： 它相对于流形M定义这样的一个开集族$\{U_a\}$:$M=\bigcup_a U_a$

坐标卡集(atlas)： 所有坐标卡的集合

1.3.1 拓扑流形

实n维流形(拓扑流形)： 它是一个Hausdorff空间[1]，满足对于流形上的任意一点都有包含该点的开集[2]与$\mathbb{R}^n$上的开集同胚[3];当然还有复的

定义： 给定一拓扑空间(M,τ),$\exists\tau=\{(U_i,\varphi_i)\}$,$\varphi_i\colon U_i\simeq\mathbb{R}^n$和$\varphi_{ij}\colon=\varphi_i\circ\varphi_i^{-1}$连续
这里的τ是拓扑流形结构
更直观的讲，它是这样的一个集合，它的开覆盖的开集族所构成的坐标卡的对应映射为连续映射。

连续映射的开集定义： 对于一个映射$f\colon M\rightarrow N$，满足N中任意开集的逆映射在M中也是开集

比较两个拓扑空间$(M,\tau)\xrightarrow{f}(N,\tau')$通过一个映射，这样的$f$的连续映射：
$p\in M, f(p)\in N, \forall U\ni f(p), \exists V\ni p,$其中$U\in\tau', V\in\tau \quad s.t. f(V)\in U,$在$p$处连续

同胚映射： 对于连续映射f,g有$\left\{\begin{smallmatrix} f\circ g & = & \mathbb{I} \\ g\circ f & = & \mathbb{I}\end{smallmatrix}\right.$，满足$(M,\tau)\underset{g}{\overset{f}{\longleftrightarrow}}(N,\tau')$,一般这样的映射很难找到。
这是一一映射的另一种定义说法，至于证明现在我有点无力orz,它是一种等价关系[7]

7. 拓扑学的基础和方法 野口宏

连续函数的集合:定义一个函数$f\colon M\to\mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
f(p) &= f_i\circ\varphi_i(p)=f_i(x)\\
&\quad 这里p\in M,\, f_i为通常坐标(U_i,\varphi_i)上的函数
\end{aligned}
$$

上的函数

已知坐标系

$$\varphi_i\colon U_i \to \mathbb{R}^2$$

函数

$$
\begin{gathered}
f\colon U_i\to\mathbb{R}\\
记：f_i=f\circ\varphi^{-1}\colon\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}
\end{gathered}
$$

对于不同的坐标卡(U_i,φ_i)上的位置，设$\varphi_i(p)=x,\varphi_j(p)=y$

$$y = \varphi_j\circ\varphi_i^{-1}(x)$$

只要$\varphi_i\varphi_j$

因此，由$f(p)=f_j(y)=f_i(x)$

$$f_j(y) = f_i\circ\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}(y)=f_i(x)$$

*对于一个集合M,能够由多少个τ构成的拓扑空间他们不同胚?
module space：上述这要不同胚的拓扑空间构成的集合

***拓扑不变性：**由同胚映射变换的拓扑结构，这些变换构成同调群，

***构成拓扑空间的函数空间$F(M)$:**就是线性同胚映射？这里是拓扑空间的环可以重构拓扑空间，
这里就有定义类似线性性的运算。

紧致性：有界(能存在一个开集包含它)闭集(开集的补集)

可分性：给定两个点，存在两个开集包含他们，并且这两个开集不相交,即Hausdorff空间
流形都要求是可分的。

补充

[1]Hausdorff空间：可分空间，即该空间可以分为至少两个完全不相交的空间

1.3.2 微分流形

微分流形： 它是一种拓扑流形，具有C^∞微分结构

或者直观地讲：它是这样的一个集合，它的开覆盖的开集族所构成的坐标卡的对应映射为光滑映射。

虽然直观的顶定义看起来好理解，但是流形上的光滑映射这一点却十分模糊。这里并不像拓扑微分定义那么容易

一般地，我们只能在$\mathbb{R}^n$上定义光滑
$\varphi_{ji}=\varphi_i\circ\varphi_j^{-1}$，（粘结函数）是一个$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$的映射，可以定义光滑。

微分流形结构：对于$\{(U_i,\varphi_i)\}$的一族$\{\varphi_{ji}\}$,有$\varphi_{ij}=\varphi_{ji}$,且$\varphi_{ij}\circ\varphi_{ik}\circ\varphi_{ki}=\mathbb{I}$ 在 $U_i\cap U_j\cap U_k$,自然满足

光滑映射： 一个光滑映射$f\colon M\to N$，由一个$f_i\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$映射的光滑性来反应，其中

$$f_i \;=\; \psi_i\circ f\circ\varphi_i^{-1}$$

微分同胚： 即两个流形间$M\underset{g}{\overset{f}{\longleftrightarrow}}N$这里$f,g$为光滑映射，$g\circ f=f\circ g=\mathbb{I}$

[ ]流形M的C^k微分结构：即流形有这样的坐标卡集$\mathcal{A}=\{(U_a,\phi_a)\}$,满足

1. $\bigcup_a U_a=M$，（开覆盖）

2. $U_a\bigcap U_b\neq\varnothing,\forall\ U_aU_b$，
且两可局部坐标系在交叉部分建立的坐标之间具有的函数关系，有k阶连续偏导数(C^k相容)

3. $\mathcal{A}$为最大的坐标卡集，

————第二课————

2 张量分析

希望用来定义的概念不依赖于坐标

2.1 对偶空间

2.1.1 切空间与切向量场

方向导数： 作用于在选定坐标卡下(U,φ)，流形M上的函数f,即 $f\circ\varphi^{-1}$

$$\delta \;=\; \sum_{i=1}^{n}(\Delta x)^i\partial_i$$

而且注意到实际上位移量$(\Delta x)^i$也是依赖坐标的选取(U,φ)的

流形上的曲线：$C(t): I \to M$,其中$I \in \mathbb{R}$，它是一个强调参数化的曲线

一般我们考虑的都是光滑曲线

切向量：按照教材中，它的引入源于可能这样的一个古怪的想法：
如一个东西它是一个矢量，那么对一定存在对任意函数在这方向上的方向导数，于是就找到了一个参数直线
直接对参数求导，这个能保证求导结果的”一半”是这个参数变化方向矢量的信息。

或者说，这里将算子定义为向量，在电动力学中的∇也有这个影子

具体地，这里定义微分算子，$X = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，它是一个$I \to \mathbb{R}$，$I \in \mathcal{F}(M)$的一个映射即$X: \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} X_p f &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(C(t))\right|_{t=0} \\ & \text{其中记，} x(0) = p, \text{为流形上的点} \end{aligned}$$

它自然满足 1）线性性　2）莱布尼茨规则

对于流形上的任意函数f,这一微分算子X为切于曲线$x(t)$的切向量。

如果这里进一步选取坐标卡(U, φ),即 $\varphi(x) = (\varphi \circ C)(t) = (x^0(t), x^1(t), \ldots, x^n(t))$

$$\begin{aligned} X_p f &= \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\varphi^{-1}(x^0(t), x^1(t), \ldots, x^n(t)))\right|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (f \circ \varphi^{-1})(x^0(t), x^1(t), \ldots, x^n(t))\right|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\mathrm{d}x^i(t)}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial x^i} (f \circ \varphi^{-1})\right|_{t=0} \end{aligned}$$

可以看到$\frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ \varphi^{-1})$是一个与曲线$x(t)$无关的量。$\frac{\mathrm{d}x^i(t)}{\mathrm{d}t}$的确是我们熟知的切矢量的分量

切向量坐标基矢：对于给定坐标卡，当我们考虑沿着某一坐标分量的曲线时对其作切向量$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$的操作，就可以得到一个矢量

这样的一组矢量$\{\partial_i\}$自然标架(local frame)，为该坐标卡下的切向量的坐标基矢。

坐标变换：

给定一个流形上的光滑映射$\mathcal{T}: M \to N$，对于会有切空间的映射$T_p(M) \xrightarrow{\mathcal{T}_*} T_q(N)$
下面看看具体是怎么回事

对一点的光滑映射

$$\mathcal{T}: p \in M \;\; \to \;\; \mathcal{T}(p) = q \in N$$

我们对一点的切向量是已经定义了的

$$X_q f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(q) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ C_N(t))$$

引入坐标卡

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \varphi_y^{-1} \circ \varphi_y \circ C_N(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \varphi_y^{-1}(y)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}y^i(t)}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial y^i}(f \circ \varphi_y^{-1}(y))
\end{aligned}$$

另外一方面

$$\begin{aligned}
X_q f &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(\mathcal{T}(p))) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \mathcal{T} \circ C_M(t)) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \varphi_y^{-1} \circ \varphi_y \circ \mathcal{T} \circ \varphi_x^{-1} \circ \varphi_x \circ C_M(t)) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \varphi_y^{-1} \circ (\varphi_y \circ \mathcal{T} \circ \varphi_x)^{-1} \circ (\varphi_x \circ C_M(t))) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \varphi_y^{-1} \circ y^\nu(x^\mu)) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \varphi_y^{-1}(y^\nu(x^\mu))) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y^i}(f \circ \varphi_y^{-1}(y^\nu)) \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial T^i(x)}{\partial x^j} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^i}(f \circ \varphi_y^{-1}(y^\nu))
\end{aligned}$$

最后容易知道

$$X_p f = \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial x^j}(f \circ \varphi_x^{-1}(x))$$

用爱因斯坦求和规则来表述

$$X_q f = \frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial y^i}$$

这里当然没错，但这个不是我想要的

我现在要的**是**
1) 这里给定 光滑映射$\mathcal{T}: p \to q$
2) 我们看到通过这一个映射的联系，

$$X_p \to X_q \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial x^j} \to \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^i}$$

将这里的映射关系定义为$\mathcal{T}_*$

更书面的定义

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_* X \mathcal{F} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathcal{F} \circ \mathcal{T} \circ C(t)) \\
&= \mathcal{T}_*\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathcal{F} \circ C(t))\right)
\end{aligned}$$

问题：$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$,对应$T_p(M) \xrightarrow{f_*} T_q(N) \xrightarrow{g_*} T_n(P)$,计算$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$成立，并给出

$$\begin{aligned}
f_*\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) &= \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} \quad \text{已证} \\
f_*\left(a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) &= a_i f_*\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)
\end{aligned}$$

这里如果利用上面的方法进行计算

$$
\begin{aligned}
X_p\mathcal{F} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{F}(C_P(t))\Big|_p \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{F}(g\circ f(C_M(t)))\Big|_m \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{F}(g\circ f\circ\varphi_x^{-1}\circ\varphi_x(C_M(t))) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{F}(g\circ f\circ\varphi_x^{-1}(x^\mu(t)))\Big|_m \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathcal{F}\circ g\circ f\circ\varphi_x^{-1})(x^\mu(t)|_m \\
&\overset{1}{=\!=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathcal{F}\circ\varphi_z^{-1}\circ\varphi_z\circ(g\circ f)\circ\varphi_x^{-1})(x^\mu(t)) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathcal{F}\circ\varphi_z^{-1}(z^\nu(x^\mu(t)))) \\
\\
&\overset{2}{=\!=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathcal{F}\circ\varphi_z^{-1}\circ\varphi_z\circ g\circ\varphi_y^{-1}\circ\varphi_y\circ f\circ\varphi_x^{-1})(x^\mu) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathcal{F}\circ\varphi_z^{-1}\circ z^\nu(y^\kappa(x^\mu(t))))
\end{aligned}
$$

或者

$$
\begin{aligned}
X_p\mathcal{F} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{F}(C_P(t))\Big|_p \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{F}(g\circ f(C_M(t)))\Big|_m \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathcal{F}\circ g\circ f\circ C_M(t))\Big|_m \\
&\overset{1}{=\!=} (g\circ f)_*\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathcal{F}\circ C_M(t))\Big|_m\right) \\
&= (g\circ f)_*(X_m\mathcal{F}) \\
&= ((g\circ f)_*X_m)\mathcal{F} \\
&\overset{2}{=\!=} g_*\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathcal{F}\circ f\circ C_M(t))\Big|_m\right) \\
&= g_*\left(f_*\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathcal{F}\circ C_M(t))\Big|_m\right)\right) \\
&= g_*\circ f_*\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathcal{F}\circ C_M(t))\Big|_m\right) \\
&= g_*\circ f_*(X_m\mathcal{F}) \\
&= ((g_*\circ f_*)X_m)\mathcal{F}
\end{aligned}
$$

切空间：$T_p(M)$为流形M过p点所有切向量所张成的向量空间。

切丛： 流形M上所有点的切空间的并集，
$T(M)$(budle space): $=\cup T_p(M)$(fiber),不同点的切空间没有任何关系

这里有两点概念有点不理解，不知道为什么要提到

1. $T_p(M)\simeq\mathbb{R}^n$ 这里同构比较有意义，可以构建一个矢量场

2. 对于p的邻域U,$T(U)\simeq U\times\mathbb{R}^n$ 这是为了方面，在局域成立

向量场：它是切丛$T(M)$的一个截面，
直观地讲，它是在每一个点以一定要求选一个切向量，并以此构成的切向量的空间分布。
这里与切向量的区别是：导数和导函数的区别

$$\begin{aligned} X\colon p &\rightarrow X(p)\in T_p(M) \\ X\colon M &\rightarrow T(M)\ \text{截面} \end{aligned}$$

这里应该指的不是切向量$X3$

PS：在所有向量场构成的空间定义李括号乘法，发现这个向量场构成的空间可以构成李代数。

2.1.2 余切向量场

向量空间之间的同态映射

对偶空间：对于一个向量空间V,它的对偶空间V^*，当然他们是互为对偶的。

$$V^* = \mathrm{Hom}(V,\mathbb{R})\ni f\colon\ V\rightarrow\mathbb{R}$$

这里的$\mathrm{Hom}(V,\mathbb{R})$为一个到$\mathbb{R}$同态线性映射(保持线性空间结构的映射)。直接的讲这是一个线性函数构成的空间

这里的函数都满足

$$f(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}) = \alpha f(\vec{a})+\beta f(\vec{b})\quad \vec{a},\vec{b}\in V,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

这样的一个函数作用在一个在基矢上展开的矢量上

$$\begin{aligned} f(\vec{a}) &= \sum_{i=1}^{n} f(a^i\vec{e}_i)=\sum_{i=1}^{n} a^i f(\vec{e}_i)\xlongequal{\text{求和规则}} a^i f(\vec{e}_i) \\ &\quad \text{进一步地} \\ &= a^j\delta^i_j f(\vec{e}_i) \\ &= a^j\theta^i(\vec{e}_j)f(\vec{e}_i) \\ &= f(\vec{e}_i)\theta^i(a^j\vec{e}_j) \\ &= f(\vec{e}_i)\theta^j(\vec{a}) \end{aligned}$$

构造：$\theta^i\in V^*,\theta^j(\vec{e}_i)=\delta^j_i$

最终

$$f = f(\vec{e}_i)\theta^j\xlongequal{\text{记}} f_i\theta^j$$

根据这个推导，这个就是对偶向量在给定向量空间的表示，漂亮！其中f_i为分量，θ^j为基矢

问题：证明，$\{\theta^i\}$是线性独立的，hint：用e_i作用θ^i的线性叠加。

余切向量空间：如果选定向量空间是切向量空间，则根据对偶空间的定义得到余切向量空间

$$T_p^*(M)=\mathrm{Hom}(T_p(M),\mathbb{R})\colon\ T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

一般的我们考虑

我们选取线性映射$\mathrm{d}f$有

$$\mathrm{d}f\colon X_p = Xf|_p$$

这里是一种定义，或者说它是一种超越原有构架的理解。当然我现在还不能理解= =

余切从：$T^*(M)=\bigcup T_p^*(M)$
这里提到了余切场集合$\Lambda^1(M)$与切场集合$D(M)$的F线性对偶关系

$$\Lambda^1(M) \ = \ \mathrm{Hom}_F(D(M),F(M))$$

没有理解为什么提到这个，先抄下来

变换：这个我知道，就不写了
活动标架：自然标记的基矢的重组，这里之间说他们恶毒变换关系，并没有说他们的特色、区别

2.2 流形上的张量计算

对于双线性的向量空间做同态线性映射，同样可以得到它的对偶空间（因为这里保持了线性性
***r*重线性张量空间：**这里说的有几种定义，随便说一种

$$T^r(p) \ = \ \mathrm{span}\{e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes ...\otimes e_{i_r}\}, i_x=1,...,n$$

因此这里有n^r和基底

另外还可以用满足的变换来定义，和从已知余切空间来推导
s重协变张量空间：

$$\begin{aligned} T_s(p) \ &= \ T_p^*(M)\otimes T_p^*(M)...T_p^*(M) \\ &= \ \mathrm{Hom}(T_p(M),T_p(M),...,T_p(M);\mathbb{R}) \end{aligned}$$

当然还有混合重张量空间
张量积：$V\otimes M$, 构成$\mathrm{dim}V\times\mathrm{dim}M$线性空间
更过火的是设　$K\in T_s^r(M), H\in T_v^u(p)$

$$K\otimes H \ = \ T_{s+v}^{r+u}(p)$$

张量的缩并：定义为如下

$$C{:}T_s^r(p) \ \to \ T_{s-1}^{r-1}(p)$$

$$\text{具体地，}(CK)_{j_2...j_s}^{i_2...i_r} \ = \ \sum_{i=1}^n K_{ij_2...j_s}^{ij_2...i_r}$$

有点看不明白为什么要写成这样。反正我知道就是了

张量代数：即所有线性/协变张量空间做直和构成的空间

$$T(p) \ = \ \oplus\sum_{r,s=0}^{\infty} T_s^r$$

这一空间存在直积运算

张量丛： 对于流形M上的各点p

$$T^r_s(M) \ = \ \bigcup_{p\in M} T^r_s(p)$$

这叫流形M上的(r,s)型张量丛

张量场： 在张量丛中在流形上的每一个点出取一个张量

分量表示形如形式

$$K(\mathrm{d}x^{i_1},\mathrm{d}x^{i_2},...,\partial_{i_n},...,) \ = \ K^{i_1 i_2,...,}{}_{,...,i_n,...,}$$

整个张量来看就是

$$\begin{aligned} K \ &= \ (K^{i_1 i_2,...,}{}_{,...,i_n,...,})\partial_{i_1}\otimes\partial_{i_2}\otimes,...,\otimes\mathrm{d}x^{i_n},..., \\ &= \ K(\mathrm{d}x^{i_1},\mathrm{d}x^{i_2},...,\partial_{i_n},...,)\partial_{i_1}\otimes\partial_{i_2}\otimes,...,\otimes\mathrm{d}x^{i_n},..., \end{aligned}$$

F高阶线性对偶，这里又提到了。

2.3 微分形式

张量的置换群作用： $P(r)\ni\sigma$则

$$\sigma K(\theta^{i_1},...,\theta^{i_r}) \ = \ K(\theta^{i_{\sigma_1}},...,\theta^{i_{\sigma_r}})$$

这里就是调换指标的位置 $(1,...,r)\to(\sigma_1,...,\sigma_r)$

对称化算子：*S*

$$S_r \ = \ \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in P(r)}\sigma$$

反对称化算子：*A*

$$A_r \ = \ \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in P(r)}\mathrm{sign}(\sigma)\sigma$$

S和A为互相正交的投影算子，什么鬼，即

$$T^r \ = \ A_r(T^r)\oplus S_r(T^r)$$

微分形式： 完全反对称协变张量场，秩为r的这种张量场叫r形式，其构成的空间记为Λ^r

它是一个$\frac{n!}{r!(n-r)!}$维空间，即一个张量有多少个自由的分量，这里n是单线性基矢的个数，r是指标的个数

***推广Kronecker符号：** $\delta^{ij}_{kl}=\delta^i_k\delta^j_k-\delta^i_l\delta^j_k$,类似还有更高维的

$$\delta^{i_1...i_r}_{k_1...k_r} \ = \ \begin{cases} +1 & 偶置换 \\ -1 & 奇置换 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

因此容易知道，它的上下指标都全反对称

基矢的表示： 用2形式的例子来看

$$\text{基矢：}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j = \delta^{ij}_{kl}\mathrm{d}x^k\otimes\mathrm{d}x^l$$

更一般的

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^{i_r} &= \sum_{\sigma\in P(r)}\mathrm{sign}(\sigma)(\mathrm{d}x^{i_{\sigma_1}}\otimes\ldots\otimes\mathrm{d}x^{i_{\sigma_r}})\\ &= \delta^{i_1\ldots i_r}_{k_1\ldots k_r}\mathrm{d}x^{k_1}\otimes\ldots\otimes\mathrm{d}x^{k_r}\end{aligned}$$

r形式的表示：

2形式：

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}f_{ij}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j=\sum_{i<j}f_{ij}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j=\frac{1}{2}f_{ij}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j$$

r形式

$$\alpha_r = \frac{1}{r!}f_{i_1\ldots i_r}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^{i_r}$$

这里有意思的，分量个数和独立分量的个数有个$r!$因子的关系

外积： 这个运算定义我有点看不懂啊= =

$$\alpha_p\wedge\beta_q = \frac{(p+q)!}{p!q!}\Lambda_{q+p}(\alpha_p\otimes\beta_q)=(-1)^{pq}\beta_q\wedge\alpha_p$$

满足，结合律、分配律、

斜交换律：

$$\alpha\wedge\beta = (-1)^{pq}\beta\wedge\alpha$$

外代数： 2^n维的向量空间Λ^*加上外积运算，也叫Catan代数

其中

$$\begin{aligned}\Lambda^* &= \Lambda^0\oplus\Lambda^1\ldots\Lambda^n\\ &= \oplus\sum_{i=0}^{n}\Lambda^i\end{aligned}$$

这里说他们的直和之后维数有2^n也可以计算一下。即

$$\text{维数} = \sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{r!(n-r)!}=\sum_{r=0}^{n}C_n^r=2^n$$

显然啊！

这里这个Catan引理不知道是在说些什么

微分形式的求值公式：其实也是缩并运算，不过这个计算公式看起来有点诡异

$$\langle \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_n}; X_{(1)}, \ldots, X_{(n)} \rangle = \det(\langle \mathrm{d}x^i, X_{(j)} \rangle)$$

然而这个计算公式并不直观，而且不是方正怎么办，不灵活啊

计算公式应该是这样

考虑2×2

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j; X, Y \rangle &= \langle \langle \mathrm{d}x^i, X \rangle \mathrm{d}x^j - \langle \mathrm{d}x^j, X \rangle \mathrm{d}x^i; Y \rangle \\ &= \langle \delta^{ij}_{kl} \langle \mathrm{d}x^k, X \rangle \mathrm{d}x^l; Y \rangle \\ &= \delta^{ij}_{kl} \langle \mathrm{d}x^k, X \rangle \langle \mathrm{d}x^l, Y \rangle \\ & \quad \text{这个也是方阵} \end{aligned}$$

$$\langle \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_n}; X_{(1)}, \ldots, X_{(n)} \rangle = \delta^{i_1 \ldots i_n}_{i j_1 \ldots j_{n-1}} \langle \mathrm{d}x^i, X_{(1)} \rangle \langle \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_{n-1}}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)} \rangle$$

好像就是这样，不过这也没优越到哪里去。

记符号: $i_X \alpha \equiv \langle \alpha, X \rangle$

外微分算子：它是Cartan外代数Λ^*上的算子

$$\mathrm{d}: \Lambda^r = \Lambda^{r+1}$$

具体计算公式，对于一个p形式：$\alpha_p = \frac{1}{p!} f_{i_1 \ldots i_p} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \mathrm{d}x^{i_p}$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}a_p &= \frac{1}{p!} \mathrm{d}f_{i_1 \ldots i_p} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_p} \\ &= \frac{1}{p!} \partial_k f_{i_1 \ldots f_p} \mathrm{d}x^k \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_p} \\ &= \frac{\delta^{k i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_{p+1}}}{p!(p+1)!} \partial_k f_{i_1 \ldots i_p} \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_{p+1}} \end{aligned}$$

这个公式在稍微像点样子

计算性质：

1）线性性、2）斜莱布尼茨法则

3）对于0形式：$\mathrm{d}f = \partial_i f \mathrm{d}x^i$

4）$\mathrm{d}^2 = 0$

根据外微分算子的分类

1. **闭形式**：对于一个微分形式α有：$\mathrm{d}\alpha = 0$
2. **正合形式**：同样对于α有：$\alpha = \mathrm{d}\beta$,其中β比α的秩少一阶

2.4 Stokes公式

可定向曲面：对于二维曲面，就是具有内外两个法线方向

它也是通过坐标卡集来断定性质：在交叉开集区域的坐标变换，其Jacobi矩阵恒大于0

单侧面：对于二维曲面，就是一个法方向

紧致：一个流形必有有限开覆盖

仿紧致：它对开覆盖的要求是，在流形上的点邻域与开集的交不为空的数目为有限个

这里完全不明白说的是什么，还说和定义积分有关系，不理解

开集U内n维积分运算：(在闭子流形V中)–为什么要说闭

$$\int_V f(x)\tau(x) = \int_V f(x) \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n, V \in U$$

单位配分：在流形上定义的一组光滑函数

(1) $0 \leqslant \rho_\alpha(x) \leqslant 1$
(2) 当 $x \notin U_\alpha, \rho_\alpha = 0$
(3) $\sum_\alpha \rho_\alpha(x) = 1$

如果流形是仿紧致的，那么这里α的个数为有限个，借助单位配分，积分表示为

$$\int_M f\tau \;=\; \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha(x_\alpha) f(x_\alpha) \mathrm{d}x_\alpha^1 \ldots \mathrm{d}x_\alpha^n$$

边界流形：用$\mathbb{R}^n$空间的例子来说，如果有一个流形$\mathbb{R}^{n+}$

$$\mathbb{R}^{n+} \;=\; \{(x^1, x^2, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n | x^n \geqslant 0\}$$

那么当$x^n = 0$时构成的空间$\{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n | x^n = 0\}$即$\mathbb{R}^{n+}$的边界流形

Stokes公式：n维光滑流形M,$n-1$维边界光滑流形∂M

$$\int_M \mathrm{d}w \;=\; \int_{\partial M} w$$

w为M上的$n-1$形式

这里讨论$U_\alpha \cap \partial M \overset{?}{=\!=} 0$,有点不明意义啊

积分符号表示：

$$\int_M w \;\equiv\; \langle M, w \rangle \in \mathbb{R}$$

可知几个积分运算具有线性性。