① Soit $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}^p$ tels que $\mathbb{P}_{n,\theta_1} = \mathbb{P}_{n,\theta_2}$, c'est à dire $\varphi(\theta_1^T x_i) = \varphi(\theta_2^T x_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ car la loi de Bernoulli est identifiable.

Et $\varphi(\theta_1^T x_i) = \varphi(\theta_2^T x_i) \Leftrightarrow \theta_1^T x_i = \theta_2^T x_i$ car φ est monotone.

Comme $\theta_1^T x_i = \theta_2^T x_i$ pour tout $x_i \in \mathbb{R}^p$, donc $\theta_1^T = \theta_2^T \Rightarrow \theta_1 = \theta_2 \Rightarrow$ le modèle est identifiable.

② Soit $y \in \mathbb{R}^n$

Comme
$$y^T F_n(\theta) y = y^T \left(\sum_{i=1}^n h(\theta^T x_i) x_i x_i^T \right) y$$
$$= \sum_{i=1}^n h(\theta^T x_i)\, y^T x_i x_i^T y$$

Comme $h(\theta^T x_i) = \varphi(\theta^T x_i)(1 - \varphi(\theta^T x_i))$

et $\varphi(\theta^T x_i) = \dfrac{e^{\theta^T x_i}}{1 + e^{\theta^T x_i}} \in]0, 1[$

On a donc $h(\theta^T x_i) > 0$

De plus, comme $y^T x_i x_i^T y = (x_i^T y)^T x_i^T y \geq 0$

Et quand $y^T F_n(\theta) y = 0 \Rightarrow x_i^T y = 0 \Rightarrow y = 0$

On a donc montré que $F_n(\theta)$ est définie positive

③ $h(t) = \dfrac{e^t}{(1+e^t)^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R} \Rightarrow h$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $h'(t) = \dfrac{e^t(1-e^t)}{(1+e^t)^3}$

Comme $|e^t| \leq |1+e^t|$, $|1-e^t| \leq |1+e^t|$, $1 \leq |1+e^t|$, donc $|h'(t)| \leq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

Donc d'après le théorème d'accroissement fini, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|h(x) - h(y)| \leq 1 \times |x - y| \Rightarrow h$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$

④ Comme $Y_i \sim Ber(\varphi(\theta^T x_i))$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

On a donc
$$L_n(\theta) = \prod_i \varphi(\theta^T x_i)^{Y_i} (1 - \varphi(\theta^T x_i))^{1 - Y_i}$$

et on a
$$l_n(\theta) = \log L_n(\theta)$$
$$= \sum_i \left[Y_i \log(\varphi(\theta^T x_i)) + (1 - Y_i) \log(1 - \varphi(\theta^T x_i)) \right]$$
$$= \sum_i \left[Y_i \log\left(\frac{\varphi(\theta^T x_i)}{1 - \varphi(\theta^T x_i)} \right) + \log(1 - \varphi(\theta^T x_i)) \right]$$
$$= \sum_i \left[Y_i \theta^T x_i - \log(1 + e^{\theta^T x_i}) \right]$$

⑤ ▷ Montrons que $\nabla l_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \{Y_i - \varphi(\theta^T X_i)\} X_i = X_n^T \{Y_n - \Phi_n(\theta)\}$

D'après la théorème de la derivé de vecteur, on a

$$\nabla l_n(\theta) = \nabla\left(\sum_i \left[Y_i \theta^T X_i - \log(1 + e^{\theta^T X_i})\right]\right)$$

$$= \sum_i \left[Y_i X_i - \frac{X_i e^{\theta^T X_i}}{1 + e^{\theta^T X_i}}\right]$$

$$= \sum_i \left[Y_i X_i - X_i \varphi(\theta^T X_i)\right]$$

$$= \sum_i \{Y_i - \varphi(\theta^T X_i)\} X_i \quad \blacksquare$$

$$= X_n^T \{Y_n - \Phi_n(\theta)\}$$

▷ Montrons que $\nabla^2 l_n(\theta) = -F_n(\theta)$

$$\nabla^2 l_n(\theta) = \nabla\left(X_n^T \{Y_n - \Phi_n(\theta)\}\right)$$

$$= -\nabla\left(X_n^T \Phi_n(\theta)\right)$$

$$= -\nabla\left(\begin{bmatrix} X_1 \cdots X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(\theta^T X_1) \\ \vdots \\ \varphi(\theta^T X_n) \end{bmatrix}\right)$$

$$= -\nabla\left(\sum_i X_i \varphi(\theta^T X_i)\right)$$

Comme $\nabla(\varphi(\theta^T X_i)) = \varphi(\theta^T X_i)(1 - \varphi(\theta^T X_i)) X_i^T = h(\theta^T X_i) X_i^T$

Donc $-\nabla\left(\sum_i X_i \varphi(\theta^T X_i)\right) = -\sum_i X_i h(\theta^T X_i) X_i^T$

$$= -F_n(\theta) \quad \blacksquare$$

▷ Montrons que $\mathbb{E}_{n,\theta}[\nabla l_n(\theta)\nabla l_n(\theta)^T] = F_n(\theta)$

$$\mathbb{E}_{n,\theta}[\nabla l_n(\theta)\nabla l_n(\theta)^T] = \mathbb{E}_{n,\theta}\left[X_n^T\{Y_n - \Phi_n(\theta)\}\{Y_n - \Phi_n(\theta)\}^T X_n\right]$$

Calculons $\mathbb{E}_{n,\theta}\left([Y_n - \Phi_n(\theta)][Y_n - \Phi_n(\theta)]^T\right)$

$$= \mathbb{E}_{n,\theta}(M) \quad \text{avec } M_{ij} = (Y_i - \varphi(\theta^T X_i))(Y_j - \varphi(\theta^T X_j))$$

Comme $\mathbb{E}_{n,\theta}(M_{ij}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \varphi(\theta^T X_i)(1-\varphi(\theta^T X_i)) & \text{si } i = j \end{cases}$

Donc $$\mathbb{E}_{n,\theta}\left([Y_n - \Phi_n(\theta)][Y_n - \Phi_n(\theta)]^T\right) = \begin{bmatrix} h(\theta^T X_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & h(\theta^T X_n) \end{bmatrix}$$

On a finalement
$$\mathbb{E}_{n,\theta}\left[X_n^T\{Y_n - \Phi_n(\theta)\}\{Y_n - \Phi_n(\theta)\}^T X_n\right] = \sum_i h(\theta^T X_i) X_i X_i^T = F_n(\theta)$$

$\blacksquare$

▷ En déduire que $\theta \mapsto l_n(\theta)$ est strictement concave

Comme pour tout $\theta \in \mathbb{R}^p$, $\nabla^2 l_n(\theta) = -F_n(\theta)$ où $F_n(\theta)$ est une matrice positive définie, d'où on a directement le résultat

ⓑ $$l_n(\lambda\theta_*) = \sum_{i\in[[1,n]]} Y_i \lambda\theta_*^T X_i + \log\left(\frac{1}{1+e^{\lambda\theta_*^T X_i}}\right) = \sum_{i: Y_i=1} \lambda\theta_*^T X_i + \log\frac{1}{1+e^{\lambda\theta_*^T X_i}} + \sum_{j: Y_j=0} \log\frac{1}{1+e^{\lambda\theta_*^T X_j}} \quad \text{avec } \begin{cases} \theta_*^T X_i > 0 \\ \theta_*^T X_j < 0 \end{cases}$$

On a $\log\frac{1}{1+e^{\lambda\theta_*^T X_j}} \xrightarrow{\lambda\to+\infty} 0$ car $\theta_*^T X_j < 0$ $\Rightarrow \sum_{j: Y_j=0} \log\frac{1}{1+e^{\lambda\theta_*^T X_j}} \xrightarrow{\lambda\to+\infty} 0$

Comme $\lambda\theta_*^T X_i + \log\frac{1}{1+e^{\lambda\theta_*^T X_i}} = \log\frac{e^{\lambda\theta_*^T X_i}}{1+e^{\lambda\theta_*^T X_i}}$ et $\frac{e^{\lambda\theta_*^T X_i}}{1+e^{\lambda\theta_*^T X_i}} \xrightarrow{\lambda\to+\infty} 1$ car $\theta_*^T X_i > 0$

$$\Rightarrow \sum_{i: Y_i=1} \lambda\theta_*^T X_i + \log\frac{1}{1+e^{\lambda\theta_*^T X_i}} \xrightarrow{\lambda\to+\infty} 0$$

Finalement, on a $\lim_{\lambda\to+\infty} l_n(\lambda\theta_*) = 0$.

On va montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance n'existe pas par absurde.

Supposons qu'il existe un estimateur du maximum de vraisemblance :

C'est à dire il existe $\hat{\theta}$ tel que $l_n(\hat{\theta}) \geq l_n(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}^p$.

$\ldots = \begin{cases} \log\left(\frac{1}{1+e^{\theta^T X_i}}\right) < 0 & \text{si } Y_i = 0 \\ \ldots \end{cases}$ $\Rightarrow l_n(\theta) < 0 \ \forall \theta \in \mathbb{R}^p$

Comme soit $\theta \in \mathbb{R}^p$, $Y_i \theta^T X_i + \log\left(\frac{1}{1+e^{\theta^T X_i}}\right) = \left\{ \log\left(\frac{e^{\theta^T X_i}}{1+e^{\theta^T X_i}}\right) < 0 \text{ si } Y_i = 1 \right.$

Comme $l_n(\lambda\theta_*) \xrightarrow{\lambda \to +\infty} 0$ et $l_n(\hat{\theta}) < 0$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $l_n(\lambda\theta_*) > l_n(\hat{\theta})$. Absurde.

Donc il n'existe pas estimateur du maximum de vraisemblance.

⑦ Pour $k \in \xi$, alors $Y_k \theta_\lambda^T X_k + \log\left(\frac{1}{1+e^{\theta_\lambda^T X_k}}\right) = Y_k \bar{\theta} X_k + \log \frac{1}{1+e^{\bar{\theta}^T X_k}}$ car $\theta_*^T X_k = 0$

Pour $i \notin \xi$, alors $Y_i \theta_\lambda^T X_i + \log\left(\frac{1}{1+e^{\theta_\lambda^T X_i}}\right) = \begin{cases} \log \frac{1}{1+e^{\lambda\theta_*^T X_i} e^{(\bar{\theta}^T - \theta_*^T) X_i}} & \text{si } Y_i = 0 \\ \lambda\theta_*^T X_i + (\bar{\theta} - \theta_*)^T X_i + \log \frac{1}{1+e^{\lambda\theta_*^T X_i} e^{(\bar{\theta}-\theta_*)^T X_i}} & \text{si } Y_i = 1 \end{cases}$

Pour $i \notin \xi$ tel que $Y_i = 0$, on a $\theta_*^T X_i < 0$, donc $\log \frac{1}{1+e^{\lambda\theta_*^T X_i} e^{(\bar{\theta}^T - \theta_*^T) X_i}}$ est strictement croissante pour λ

Pour $i \notin \xi$ tel que $Y_i = 1$, on a $\theta_*^T X_i > 0$, donc $\log \frac{e^{\lambda\theta_*^T X_i} e^{(\bar{\theta}^T - \theta_*^T) X_i}}{1+e^{\lambda\theta_*^T X_i} e^{(\bar{\theta}^T - \theta_*^T) X_i}}$ est strictement croissante pour λ

Donc $L_n = \left(\prod_{k \in \xi} \frac{e^{Y_k \bar{\theta}^T X_k}}{1+e^{\bar{\theta}^T X_k}}\right) \left(\prod_{i \notin \xi, Y_i = 0} \frac{1}{1+e^{\lambda\theta_*^T X_i} e^{(\bar{\theta}-\theta_*)^T X_i}}\right) \left(\prod_{j \notin \xi, Y_j = 1} \frac{e^{\lambda\theta_*^T X_j} e^{(\bar{\theta}-\theta_*)^T X_j}}{1+e^{\lambda\theta_*^T X_j} e^{(\bar{\theta}-\theta_*)^T X_j}}\right)$

est le produit d'un terme constant en λ est d'un terme strictement croissant.

Donc il n'existe pas estimateur du maximum de vraisemblance car pour tout $\theta \in \mathbb{R}^p$, il existe

$\theta' = (\bar{\theta} - \theta_*) + \lambda\theta_*$ avec $\lambda > 1$ tel que $L_n(\theta') > L_n(\theta)$.

⑧ Posons $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \theta \mapsto \theta^T X_{k_{1,\theta}} \end{cases}$, on a : g est continue car $g = \max(\theta^T X_i,\ i \in [\![1,n]\!])$ avec $\theta \mapsto \theta^T X_i$ continue

Comme $S(0,1)$ est compact d'après le théorème de Riesz, donc $g(\theta^T X_{k_{1,\theta}})$ est aussi compact.

Alors si pour tout $\xi > 0$, il existe $\theta \in S(0,1)$ tel que $\theta^T X_{k_{1,\theta}} \leq \xi$:

En ce cas, $]0,+\infty[\subset g(S(0,1))$. Alors on a $\{0\} \subset g(S(0,1))$ car $g(S(0,1))$ est compact.

C'est une absurde contre l'existence d'un recouvrement car il existe $\theta \in S(0,1)$ tel que

$\theta^T X_{k_{1,\theta}} = 0$ et donc il n'existe pas k_1 tel que $\theta^T X_{k_1} > 0$.

Donc on a montré par absurde que : $\exists \xi > 0$ tel que $\forall \theta \in S(0,1)$, on a $\theta^T X_{k_{1,\theta}} > \xi$.

On a aussi $\theta^T X_{k_{2,\theta}} < -\xi$ par la démonstration similaire.

Si on note $\begin{cases} k_{1,\theta,0} = \operatorname{argmax}_{k \in \{1,\dots,n\}, Y_k = 0} \theta^T X_k \\ k_{2,\theta,0} = \operatorname{argmin}_{k \in \{1,\dots,n\}, Y_k = 0} \theta^T X_k \end{cases}$

et $\begin{cases} k_{1,\theta,1} = \operatorname{argmax}_{k \in \{1,\dots,n\}, Y_k = 1} \theta^T X_k \\ k_{2,\theta,1} = \operatorname{argmin}_{k \in \{1,\dots,n\}, Y_k = 1} \theta^T X_k \end{cases}$

On peut également montrer que : il existe $\xi_1 > 0$ tel que $\theta^T X_{k_{1,\theta,0}} > \xi_1$ et $\theta^T X_{k_{2,\theta,0}} < -\xi_1$

ou $\theta^T X_{k_{1,\theta,1}} > \xi_1$ et $\theta^T X_{k_{2,\theta,1}} < -\xi_1$

On traite d'abord le cas $\theta^T X_{k_{1,\theta,0}} > \xi_1$ et $\theta^T X_{k_{2,\theta,0}} < -\xi_1$

En ce cas, (On l'appelle cas ①) $l_n(\lambda\theta) = \sum_{i \in \{1,\dots,n\}} \lambda Y_i \theta^T X_i + \log \frac{1}{1+e^{\lambda\theta^T X_i}} \leq \log \frac{1}{1+e^{\lambda\xi_1}}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}^d$

En l'autre cas, (On l'appelle cas ②) $l_n(\lambda\theta) \leq \log \frac{e^{-\lambda\xi_1}}{1+e^{-\lambda\xi_1}}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}^d$

(On a bien l_n dérivable)

On va montrer que : il existe $R > 0$ tel que pour tout $\lambda > R$ et $\theta \in S(0,1)$, $l_n'(\lambda\theta) \leq 0$

On va le montrer par absurde :

Suppsons que : pour tout $R>0$, il existe $\lambda > R$ et $\theta \in S(0,1)$ tels que $l_n'(\lambda\theta) > 0$

Comme l_n est strictement concave, donc pour tout $\lambda \in [0,R]$, $l_n'(\lambda\theta) > 0$

Donc $l_n(\lambda\theta) > l_n(0) = n \log(\frac{1}{2})$ pour tout $\lambda \in [0,R] \Rightarrow l_n(R\theta) > n\log(\frac{1}{2})$

Dans le cas ①, on choisit $R = \frac{1}{\xi_1}\log(2^{n-1})$, Alors on a : $l_n(R\theta) > n\log(\frac{1}{2}) = \log\frac{1}{1+e^{R\xi_1}}$. Absurd

Dans le cas ②, on choisit $R = -\frac{1}{\xi_1}\log\frac{2^{-n}}{1-2^{-n}}$. Alors on a : $l_n(R\theta) > n\log(\frac{1}{2}) = \log\frac{e^{-R\xi_1}}{1+e^{-R\xi_1}}$. Absurd

Donc on a : il existe $R>0$ tel que pour tout $\lambda > R$ et $\theta \in S(0,1)$, $l_n'(\lambda\theta) \leq 0$.

Donc pour tout $\theta_1 \in BF(0,R)$, et $\theta_2 \notin BF(0,R)$, on a : $l_n(\theta_1) > l_n(\theta_2)$.

On va montrer l'existence de $\hat{\theta}_n^{mv}$:

Comme $BF(0,R)$ est compact (fermé borné dans un espace vectoriel de dimension finie)

et l_n est une fonction continue, donc $l_n(BF(0,R))$ est compact.

Donc $l_n(BF(0,R))$ a un maximum et le maximum est atteint. d'où l'existence de $\hat{\theta}_n^{mv}$

L'unicité de $\hat{\theta}_n^{mv}$ est évidente car l_n est strictement concave.

(9) Montrons qu'il existe une constante C telle que pour tout $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}^p$ et tout $n>0$.

$$\| F_n(\theta_1) - F_n(\theta_2) \| \leq C n \| \theta_1 - \theta_2 \|$$

Comme $F_n(\theta_1) - F_n(\theta_2) = \sum_{i=1}^{n} \left(h(\theta_1^T x_i) - h(\theta_2^T x_i) \right) x_i x_i^T$

et d'après Que 3, h est 1-Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$

Donc $h(\theta_1^T x_i) - h(\theta_2^T x_i) \leq | \theta_1^T x_i - \theta_2^T x_i |$

Donc $\| F_n(\theta_1) - F_n(\theta_2) \| \leqslant \| \sum_{i=1}^{n} \| \theta_1 - \theta_2 \| \| x_i \| x_i x_i^T \|$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \| \theta_1 - \theta_2 \| \| x_i \|^3$$

De plus, on a $\sup_{n \geq 0} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^3 < \infty$

C'est-à-dire qu'il existe C tel que pour tout n, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^3 \leq C$

Donc $\| F_n(\theta_1) - F_n(\theta_2) \| \leqslant C n \| \theta_1 - \theta_2 \|$, d'où le résultat. $\blacksquare$

(10) Montrons alors $\nabla l_n(\hat{\theta}_n^{MV}) - \nabla l_n(\theta) = \left[- F_n(\theta) + n R_n \right] (\hat{\theta}_n - \theta)$

On effectue un développement de Taylor autour de θ

On a $\nabla l_n(\hat{\theta}_n^{MV}) - \nabla l_n(\theta) = \nabla^2 l_n(\theta) (\hat{\theta}_n - \theta) + R_n n (\hat{\theta}_n - \theta)$

où $R_n = \frac{1}{n} \int_0^1 \nabla^2 l_n(\theta + wt) - \nabla^2 l_n(\theta) \, dw$, $t = \hat{\theta}_n - \theta$

$= \frac{1}{n} \int_0^1 F_n(\theta) - F_n(\theta + wt) \, dw$. $t = \hat{\theta}_n - \theta$

De plus, on a pour tout $\theta \in \mathbb{R}^p$, il existe une matrice $Q(\theta)$ définie positive telle que $\lim_{n \to \infty} ||| \frac{1}{n} F_n(\theta) - Q(\theta) ||| = 0$

Donc $R_n = \frac{1}{n} F_n(\theta) - \int_0^1 \frac{1}{n} F_n(\theta + wt) \, dw \xrightarrow{P_{n,\theta}\text{-prob}} 0$

d'où le résultat. $\blacksquare$

(11) Appliquons alors le théorème de Lindeberg-Feller

Prenons $\{(Z_{n,i})_{i\in[\![1,n]\!]}\}$ et $Z_{n,i} = \dfrac{\{Y_i - \varphi(\theta^T X_i)\} X_i}{\sqrt{n}}$

1) Montrons que $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{E}_{n,\theta}\left[\|Z_{n,i}\|^2 \mathbb{1}_{\|Z_{n,i}\|>\varepsilon}\right] = 0$

Montrons alors qu'il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$. $\mathbb{1}_{\|Z_{n,i}\|>\varepsilon} = 0$
C'est-à-dire que $\|Z_{n,i}\| < \varepsilon$
Comme $\|Z_{n,i}\| = \dfrac{|Y_i - \varphi(\theta^T X_i)| \, \|X_i\|}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

On a immédiatement le resultat

2) Montrons que $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} Var(Z_{n,i}) = \dfrac{F_{n,\theta}}{n}$

Pour n fini
Comme $Var(Z_{n,i}) = Var\left(\dfrac{\{Y_i - \varphi(\theta^T X_i)\} X_i}{\sqrt{n}}\right)$

$$= \frac{1}{n} Var(\{Y_i - \varphi(\theta^T X_i)\}) X_i X_i^T$$

De plus, comme $Var(\{Y_i - \varphi(\theta^T X_i)\}) = \varphi(\theta^T X_i)(1-\varphi(\theta^T X_i))$
$= h(\theta^T X_i)$

Donc $Var(Z_{n,i}) = \frac{1}{n} h(\theta^T X_i) X_i X_i^T$

Donc $\sum\limits_{i=1}^{n} Var(Z_{n,i}) = \frac{1}{n} F_n(\theta)$

et en passant à la limite, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} Var(Z_{n,i}) = \dfrac{F_n(\theta)}{n}$

En utilisant le théorème, on a donc

$\sum\limits_{i=1}^{n} Z_{n,i} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \nabla l_n(\theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \dfrac{F_n(\theta)}{n}\right)$, d'où le résultat ∎

(12) Comme $\nabla l_n(\hat{\theta}_n^{MV}) = 0$

Donc
$$\frac{\nabla l_n(\theta)}{\sqrt{n}} = \left(\frac{F_n(\theta)}{n} - R_n \right) \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$$

et comme
$$\begin{cases} \dfrac{\nabla l_n(\theta)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N\left(0, \dfrac{F_n(\theta)}{n}\right) \\ \dfrac{F_n(\theta)}{n} - R_n \xrightarrow{P_{n,\theta}\text{-prob}} \dfrac{F_n(\theta)}{n} \end{cases}$$

on a $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{P_{n,\theta}\text{-prob}} N\left(0, \left(\frac{F_n(\theta)}{n}\right)^{-1}\right)$

De plus, comme $\lim_{n\to\infty} ||| n^{-1} F_n(\theta) - Q(\theta) ||| = 0$

On a donc $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{P_{n,\theta}\text{-prob}} N(0, \{Q(\theta)\}^{-1})$ ■

(13) On a déjà montré que $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{P_{n,\theta}\text{-prob}} N\left(0, \left(\frac{F_n(\theta)}{n}\right)^{-1}\right)$

De plus, on a $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{MV} - \theta) \xrightarrow{P_{n,\theta}\text{-prob}} N(0, \{Q(\theta)\}^{-1})$ ... (1)

et $\| F_n(\theta) - F_n(\hat{\theta}_n^{MV}) \| \leq C_n \| \theta - \hat{\theta}_n^{MV} \|$ ... (2)

avec (1) et (2), on a le k-ème coefficient de la diagonale de $F_n(\theta)$ est exactement le même que l'un de $F_n(\hat{\theta}_n^{MV})$

Donc $\sqrt{n}(\hat{\theta}_{n,k}^{MV} - \theta_k) \xrightarrow{P_{n,\theta}\text{-prob}} N(0, \beta_{n,k})$

et finalement $\sqrt{\frac{n}{\beta_{n,k}}}(\hat{\theta}_{n,k}^{MV} - \theta_k) \xrightarrow{P_{n,\theta}\text{-prob}} N(0, I)$ d'où le résultat ■

(14) Par Que 13, on a immédiatemment que
$$C_{n,\alpha}(\hat{\theta}_{n,k}^{MV}) = \left[\hat{\theta}_{n,k}^{MV} \pm \sqrt{\frac{\beta_{n,k}}{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

où z_α est le quantile d'ordre α de la loi $\mathcal{N}(0,1)$
est l'intervalle de confiance de niveau asymptotique $1-\alpha$

(15) D'après Que 14, on a directement test de niveau asymptotique α est défini par la zone de rejet

$$R = \left\{ \hat{\theta} \in \mathbb{R}^+ , \left| \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{P_{n,k}}} \hat{\theta}^{MV}_{n,k} \right| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

(16.) Notons le test $T(\hat{\theta}) = \left| \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{P_{n,k}}} \hat{\theta}^{MV}_{n,k} \right|$

le test est rejeté si $T(\hat{\theta}) > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

Donc la p-valeur $\alpha(\hat{\theta})$ est définie comme $\inf \{ \alpha \in [0,1] : T(\hat{\theta}) > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \}$
la solution est donc $\alpha \in [0,1]$ tq $T(\hat{\theta}) = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

$$\hat{\alpha}(\hat{\theta}) = 2(1 - \Phi(T(\hat{\theta})))$$

où Φ est la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$