① $X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$ car moyenne est nulle et $Cov(X_1, X_1) = 1$

En utilisant la fonction caractéristique de $\mathcal{N}(0,1)$: $\phi_X(u) = e^{-u^2/2}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} p(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n p(x)\,dx = e^{s^2/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s^{2n}}{2^n n!}$$

Par identification des coefficients de s^n : $\mathbb{E}[X^4] = \frac{(2\times 2)!}{2^2 2!} = 3$

$Var_\rho(X^2) = \mathbb{E}[X^4] - \mathbb{E}[X^2]^2$ avec $\mathbb{E}[X^2] = Var(X) + \mathbb{E}[X]^2 = 1$

$\Rightarrow Var_\rho(X^2) = 3 - 1 = 2$

De même, $\mathbb{E}_\rho[Y_1^4] = 3$ et $Var_\rho(Y^2) = 2$

② 1) Montrons que X, Z indépendants

Montrons alors $Y - \rho X$ indépendant avec X

car $Z = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}(Y - \rho X)$

Comme
$$\begin{cases} E[X(Y-\rho X)] = E[XY] - \rho E[X^2] & \text{---}(1) \\ \rho = E[XY] - E[X]E[Y] & \text{---}(2) \\ E[X]E[Y-\rho X] = E[X]E[Y] - \rho(E[X])^2 & \text{---}(3) \end{cases}$$

Par (1) et (2), on a

$$\begin{cases} E[X(Y-\rho X)] = E[XY] - E[X^2](E[XY] - E[X]E[Y]) \\ E[X]E[Y-\rho X] = E[X]E[Y] - (E[X])^2(E[XY] - E[X]E[Y]) \end{cases}$$

De plus, comme $E[X^2] - (E[X])^2 = 1$

On a donc

$$E[X(Y-\rho X)] = \cancel{E[XY]} - \cancel{E[XY]} + E[X]E[Y] - (E[X])^2(E[XY] - E[X]E[Y])$$
$$= E[X]E[Y - \rho X]$$

ce qui montre que $Y - \rho X$ et X indépendant, donc X, Z indépendant

2) Montrons que $Z = \frac{Y - \rho X}{\sqrt{1-\rho^2}} \sim N(0,1)$

Comme $\begin{cases} X \sim N(0,1) \\ Y \sim N(0,1) \end{cases}$ et $\left(\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)^2 + \left(-\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)^2 = 1$, d'où le résultat

Montrons que $E_\rho[X_1^2 Y_1^2] = 1 + 2\rho^2$

$$E_\rho[X_1^2 Y_1^2] = E[X_1^2(\rho^2 X^2 + (1-\rho^2)Z^2 + 2\rho\sqrt{1-\rho}\, XZ)]$$
$$= E[\rho^2 X_1^4 + (1-\rho^2)X_1^2 Z^2 + 2\rho\sqrt{1-\rho}\, X_1^3 Z]$$

$$= \rho^2 \underbrace{E[X_1^4]}_{3} + (1-\rho^2) \underbrace{E[X_1^2]}_{1} \underbrace{E[Z^2]}_{1} + \cancel{2\rho\sqrt{1-\rho}\, E[X_1^3] \underbrace{E[Z]}_{0}}$$

$$= 1 + 2\rho^2 \qquad \blacksquare$$

③ $Cov_\rho(X_1^2, X_1Y_1) = Cov_\rho(X_1^2, X_1(\rho X_1 + \sqrt{1-\rho^2}Z)) = Cov_\rho(X_1^2, \rho X_1^2) + Cov_\rho(X_1^2, \sqrt{1-\rho^2}X_1Z)$

Où $\begin{cases} Cov_\rho(X_1^2, \rho X_1^2) = \mathbb{E}[\rho X_1^4] - \rho\,\mathbb{E}[X_1^2]^2 = 3\rho - \rho = 2\rho \\ Cov_\rho(X_1^2, \sqrt{1-\rho^2}X_1Z) = \sqrt{1-\rho^2}\left(\mathbb{E}[X_1^3Z] - \mathbb{E}[X_1^2]\mathbb{E}[X_1Z]\right) = \sqrt{1-\rho^2}\left(\mathbb{E}[X_1^3]\mathbb{E}[Z] - \mathbb{E}[X_1^2]\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Z]\right) \end{cases}$ car $X \perp\!\!\!\perp Z$

Comme $\mathbb{E}[X^3] = \mathbb{E}[X] = 0 \Rightarrow Cov_\rho(X_1^2, \sqrt{1-\rho^2}X_1Z) = 0$

$\Rightarrow Cov_\rho(X_1^2, X_1Y_1) = 2\rho$

D'après l'équivalence entre X_1 et Y_1, on a bien $Cov_\rho(Y_1^2, X_1Y_1) = 2\rho$.

④ C'est une application de TLC

On a déjà $\begin{cases} Var(X_i^2) = 2 \\ Var(Y_i^2) = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} cov(X_i^2, Y_i^2) = E[X_i^2Y_i^2] - E[X_i^2]E[Y_i^2] = 1+2\rho^2 - 1 = 2\rho^2 \\ cov(X_i^2, X_iY_i) = cov(Y_i^2, X_iY_i) = 2\rho \end{cases}$

et on calcule $Var(X_iY_i) = E[X_i^2Y_i^2] - (E[X_iY_i])^2$

et $cov(X_i, Y_i) = E[X_iY_i] - E[X_i]E[Y_i] = E[X_iY_i] = \rho$

on a donc $Var(X_iY_i) = 1+2\rho^2 - \rho^2 = 1+\rho^2$

On peut donc écrit la matrice de co-variance

$$V = \begin{bmatrix} 2 & 2\rho^2 & 2\rho \\ 2\rho^2 & 2 & 2\rho \\ 2\rho & 2\rho & 1+\rho^2 \end{bmatrix}$$

De plus, $\begin{cases} E[X_i^2] = 1 \\ E[Y_i^2] = 1 \\ E[X_iY_i] = \rho \end{cases} \xRightarrow{TLC} \sqrt{n}(\bar{U}_n - \mu) \xRightarrow{\mathbb{P}_{n,\rho}} N(0, V(\rho))$

d'où le résultat

⑤ $S_{n,X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i^2 + \bar{X}_n^2 - 2X_i\bar{X}_n) = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^n X_i^2 + n\bar{X}_n^2 - 2\bar{X}_n\sum_{i=1}^n X_i\right]$

$= \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}_n^2\right]$

De même, $S_{n,Y}^2 = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^n Y_i^2 - n\bar{Y}_n^2\right]$

$S_{n,XY}^2 = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^n X_iY_i - \bar{X}_n\sum_{i=1}^n Y_i - \bar{Y}_n\sum_{i=1}^n X_i + n\bar{X}_n\bar{Y}_n\right] = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^n X_iY_i - n\bar{X}_n\bar{Y}_n\right]$

$\Rightarrow [S_{n,X}^2, S_{n,Y}^2, S_{n,XY}^2]^T = \bar{U}_n - [\bar{X}_n^2, \bar{Y}_n^2, \bar{X}_n\bar{Y}_n]^T$

On va montrer que $\sqrt{n}[\bar{X}_n^2, \bar{Y}_n^2, \bar{X}_n\bar{Y}_n]^T \xRightarrow{\mathbb{P}_{n,\rho}} 0$:

Comme $\sqrt{n}\bar{X}_n \xRightarrow{\mathbb{P}_{n,\rho}} \mathcal{N}(0,1)$ d'après le TCL

et $\bar{X}_n \xRightarrow{\mathbb{P}_{n,\rho}} 0$ d'après le Théorème de Grand Nombre

Donc d'après le Lemme de Slustky : $\sqrt{n}\bar{X}_n^2 \xRightarrow{\mathbb{P}_{n,\rho}} 0$

De même, $\sqrt{n}\bar{Y}_n^2 \xRightarrow{\mathbb{P}_{n,\rho}} 0$ et $\sqrt{n}\bar{X}_n\bar{Y}_n \xRightarrow{\mathbb{P}_{n,\rho}} 0$

$\Rightarrow \sqrt{n}[\bar{X}_n^2, \bar{Y}_n^2, \bar{X}_n\bar{Y}_n]^T \xRightarrow{\mathbb{P}_{n,\rho}} 0$.

Comme $\sqrt{n}(\bar{U}_n - \mu) \xRightarrow{\mathbb{P}_{n,\rho}} \mathcal{N}(0, V(\rho))$, donc d'après le lemme de Slustky,

$$\sqrt{n}(\bar{U}_n - \mu - [\bar{X}_n^2, \bar{Y}_n^2, \bar{X}_n\bar{Y}_n]^T) \xRightarrow{\mathbb{P}_{n,\rho}} \mathcal{N}(0, V(\rho))$$

Donc on a $\sqrt{n}([S_{n,x}^2, S_{n,y}^2, S_{n,xy}^2 - \rho]^T - \mu) \xRightarrow{\mathbb{P}_{n,\rho}} \mathcal{N}(0, V(\rho))$

⑥ En utilisant la forme multivariée de la Delta-méthode

Prenons $g(x,y,z) = \dfrac{z}{\sqrt{XY}}$

donc $J_g(x,y,z) = \left[-\dfrac{z}{2X^{\frac{3}{2}}Y^{\frac{1}{2}}}, -\dfrac{z}{2Y^{\frac{3}{2}}X^{\frac{1}{2}}}, \dfrac{1}{\sqrt{XY}} \right]$

On vérifie bien que pour tout $\rho \in]-1,1[$, g différentiable sur μ

et comme $\sqrt{n}([S_{n,x}^2, S_{n,y}^2, S_{n,xy}^2]^T - \mu) \xRightarrow{\mathbb{P}_{n,\rho}} \mathcal{N}(0, V(\rho))$ (Que 5)

d'après la méthode Delta

On sait donc $\sqrt{n}(g([S_{n,x}^2, S_{n,y}^2, S_{n,xy}^2]^T) - g(\mu)) \xRightarrow{\mathbb{P}_{n,\rho}} J_g(\mu)\, \mathcal{N}(0, V(\rho))$

Par calcule : $\begin{cases} g([S_{n,x}^2, S_{n,y}^2, S_{n,xy}^2]^T) = R_n \\ g(\mu) = \rho \end{cases}$

De plus, $\left[\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}, -1\right] \begin{bmatrix} 2 & 2\rho^2 & 2\rho \\ 2\rho^2 & 2 & 2\rho \\ 2\rho & 2\rho & 1+\rho^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\rho}{2} \\ \frac{\rho}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$

$$= \left[\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}, -1\right] \begin{bmatrix} \rho + \rho^3 - 2\rho \\ \rho^3 + \rho - 2\rho \\ \rho^2 + \rho^2 - 1 - \rho^2 \end{bmatrix} = \left[\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}, -1\right] \begin{bmatrix} \rho^3 - \rho \\ \rho^3 - \rho \\ -1 + \rho^2 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{\rho^4}{2} - \frac{\rho^2}{2}\right) \times 2 + 1 - \rho^2 = \rho^4 - 2\rho^2 + 1 = (\rho^2 - 1)^2$$

Finalement, on a montré que $\sqrt{n}(R_n-\rho) \xRightarrow{\mathbb{P}_{n,\rho}} N(0,(1-\rho^2)^2)$

⑦ $g(\rho) = \int \frac{1}{1-\rho^2} d\rho = \int \left[\frac{1/2}{1-\rho} + \frac{1/2}{1+\rho}\right] d\rho = -\frac{1}{2}\log(1-\rho) + \frac{1}{2}\log(1+\rho) = \frac{1}{2}\log\frac{1+\rho}{1-\rho}$

⑧ Comme g est dérivable sur $]-1,1[$, et $\sqrt{n}(R_n-\rho) \xRightarrow{\mathbb{P}_{n,\rho}} \mathcal{N}(0,(1-\rho^2)^2)$ pour $\rho \in]-1,1[$.

Donc d'après la méthode-delta, on a : $\sqrt{n}\left(g(R_n)-g(\rho)\right) \xRightarrow{\mathbb{P}_{n,\rho}} g'(\rho)\mathcal{N}(0,(1-\rho^2)^2)$

Comme $g'(\rho) = \frac{1}{1-\rho^2}$, donc $\sqrt{n}\left[\frac{1}{2}\log\frac{1+R_n}{1-R_n} - \frac{1}{2}\log\frac{1+\rho}{1-\rho}\right] \xRightarrow{\mathbb{P}_{n,\rho}} \frac{1}{1-\rho^2}\mathcal{N}(0,(1-\rho^2)^2) \sim \mathcal{N}(0,1)$

⑨ Comme $\sqrt{n}(W_n - g(\rho)) \xRightarrow{\mathbb{P}_{n,\rho}} \mathcal{N}(0,1)$,

donc un intervalle de confiance asymptotique de probabilité de couverture $1-\alpha$ est $\{\rho : -z_{1-\alpha/2} \le \sqrt{n}(W_n - g(\rho)) \le z_{1-\alpha/2}\}$ avec $z_{1-\alpha/2}$ le quantile de $\mathcal{N}(0,1)$ de niveau $1-\alpha/2$

Comme $\{\rho : -z_{1-\alpha/2} \le \sqrt{n}(W_n - \frac{1}{2}\log\frac{1+\rho}{1-\rho}) \le z_{1-\alpha/2}\}$

$$= \left(\frac{\exp\{2(W_n - z_{1-\alpha/2}/\sqrt{n})\}-1}{\exp\{2(W_n - z_{1-\alpha/2}/\sqrt{n})\}+1}, \frac{\exp\{2(W_n + z_{1-\alpha/2}/\sqrt{n})\}-1}{\exp\{2(W_n + z_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}\}+1}\right)$$

Donc c'est un intervalle de confiance asymptotique de probabilité de ρ de couverture $1-\alpha$

⑩ Comme $\sqrt{n}(R_n-\rho) \xRightarrow{\mathbb{P}_{n,\rho}} \mathcal{N}(0,(1-\rho^2)^2)$ et $R_n \xrightarrow{\mathbb{P}_{n,\rho}} \rho$,

Donc d'après le lemme de Slutsky, $\frac{\sqrt{n}(R_n-\rho)}{1-R_n^2} \xRightarrow{\mathbb{P}_{n,\rho}} \frac{1}{1-\rho^2}\mathcal{N}(0,(1-\rho^2)^2) \sim \mathcal{N}(0,1)$

Donc $\{\rho : -z_{1-\alpha/2} \le \frac{\sqrt{n}(R_n-\rho)}{1-R_n^2} \le z_{1-\alpha/2}\}$ est un intervalle asymptotique de couverture $1-\alpha$

Comme $\{\rho : -z_{1-\alpha/2} \le \frac{\sqrt{n}(R_n-\rho)}{1-R_n^2} \le z_{1-\alpha/2}\} = \left(R_n - \frac{z_{1-\alpha/2}(1-R_n^2)}{\sqrt{n}}, R_n + \frac{z_{1-\alpha/2}(1-R_n^2)}{\sqrt{n}}\right)$

Donc c'est un intervalle de confiance asymptotique de probabilité de ρ de couverture $1-\alpha$.