三角函数定义及其三角函数公式汇总

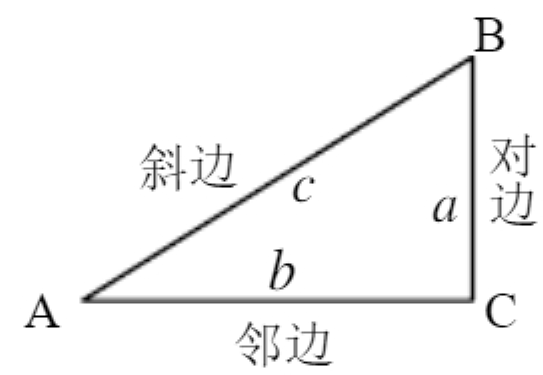
1、勾股定理：直角三角形两直角边 a 、b 的平方和等于斜边 c 的平方。 $\boxed{a^2+b^2=c^2}$

2、如下图，在 Rt△ABC 中，∠C 为直角，则∠A 的锐角三角函数为(∠A 可换成∠B)：

	定　义	表达式	取值范围	关　系
正弦	$\sin A=\dfrac{\angle A的对边}{斜边}$	$\sin A=\dfrac{a}{c}$	$0<\sin A<1$ （∠A 为锐角）	$\sin A=\cos B$ $\cos A=\sin B$ $\sin^2 A+\cos^2 A=1$
余弦	$\cos A=\dfrac{\angle A的邻边}{斜边}$	$\cos A=\dfrac{b}{c}$	$0<\cos A<1$ （∠A 为锐角）	
正切	$\tan A=\dfrac{\angle A的对边}{\angle A的邻边}$	$\tan A=\dfrac{a}{b}$	$\tan A>0$ （∠A 为锐角）	$\tan A=\cot B$ $\cot A=\tan B$ $\tan A=\dfrac{1}{\cot A}$（倒数） $\tan A\cdot\cot A=1$
余切	$\cot A=\dfrac{\angle A的邻边}{\angle A的对边}$	$\cot A=\dfrac{b}{a}$	$\cot A>0$ （∠A 为锐角）	

3、任意锐角的正弦值等于它的余角的余弦值；任意锐角的余弦值等于它的余角的正弦值。

$$\boxed{\begin{aligned}\sin A&=\cos B\\ \cos A&=\sin B\end{aligned}} \xrightarrow[得\angle B=90^\circ-\angle A]{由\angle A+\angle B=90^\circ} \boxed{\begin{aligned}\sin A&=\cos(90^\circ-A)\\ \cos A&=\sin(90^\circ-A)\end{aligned}}$$



4、任意锐角的正切值等于它的余角的余切值；任意锐角的余切值等于它的余角的正切值

$$\xrightarrow[得\angle B=90^\circ-\angle A]{由\angle A+\angle B=90^\circ}$$

sin（α＋β）＝sinαcosβ＋cosαsinβ

sin（α－β）＝sinαcosβ－cosαsinβ

cos（α＋β）＝cosαcosβ－sinαsinβ

cos（α－β）＝cosαcosβ＋sinαsinβ

特殊角的三角函数值表

三角函数 \ 角	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在
$\cot\alpha$	不存在	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

6、正弦、余弦的增减性：

当 0° ≤α≤90° 时，sinα 随 α 的增大而增大，cosα 随 α 的增大而减小。

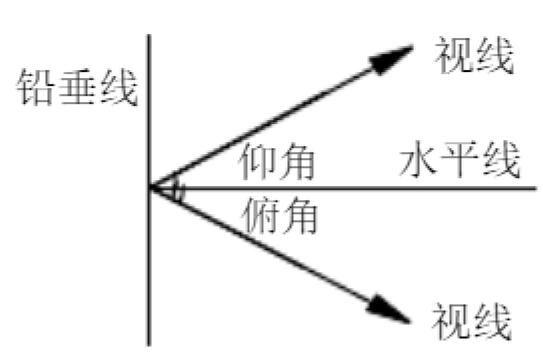
7、正切、余切的增减性：

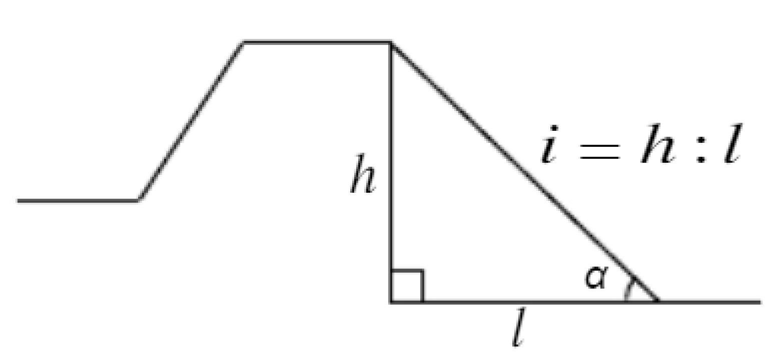
当 0° <α<90° 时，tanα 随 α 的增大而增大，cotα 随 α 的增大而减小。

1、解直角三角形的定义：已知边和角（两个，其中必有一边）→所有未知的边和角。依据：①边的关系：$a^2+b^2=c^2$；②角的关系：A+B=90°；③边角关系：三角函数的定义。(注意：尽量避免使用中间数据和除法)

2、应用举例：

(1)**仰角**：视线在水平线上方的角；**俯角**：视线在水平线下方的角。





(2)坡面的铅直高度 h 和水平宽度 l 的比叫做**坡度**(坡比)。用字母 i 表示，即 $i=\dfrac{h}{l}$ 。坡度一般写成 $1:m$ 的形式，如 $i=1:5$ 等。

把坡面与水平面的夹角记作 α (叫做**坡角**)，那么 $i=\dfrac{h}{l}=\tan\alpha$ 。

3、从某点的指北方向按顺时针转到目标方向的水平角，叫做方位角。如图 3，OA、OB、OC、OD 的方向角分别是：45°、135°、225°。

4、指北或指南方向线与目标方向 线所成的小于 90° 的水平角，叫做方向角。如图 4,OA、OB、OC、OD 的方向角分别是：北偏东 30°（东北方向），南偏东 45°（东南方向），南偏西 60°（西南方向），北偏西 60°（西北方向）。

sin（α＋β）＝sinαcosβ＋cosαsinβ

sin（α－β）＝sinαcosβ－cosαsinβ

cos（α＋β）＝cosαcosβ－sinαsinβ

cos（α－β）＝cosαcosβ＋sinαsinβ

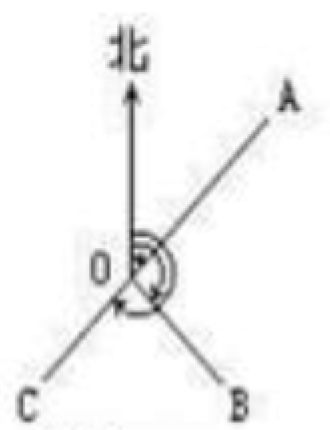


图 3

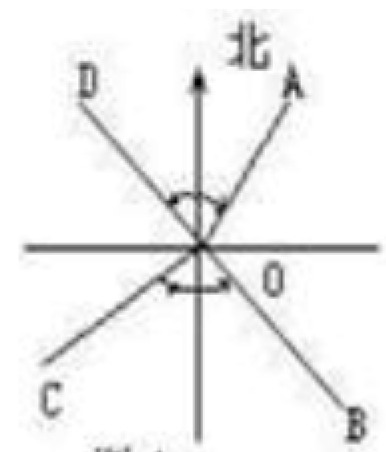


图 4

三角函数公式汇总1

1.$L_{弧长}=|\alpha|R=\dfrac{n\pi R}{180}$ $\quad S_{扇}=\dfrac{1}{2}LR=\dfrac{1}{2}R^2|\alpha|=\dfrac{n\pi\cdot R^2}{360}$

2.正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$（R 为三角形外接圆半径）

3.余弦定理：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ $\quad b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \qquad \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

4.$S_{\Delta}=\dfrac{1}{2}a\cdot h_a=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{abc}{4R}=2R^2\sin A\sin B\sin C$

$=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}=\frac{b^2\sin A\sin C}{2\sin B}=\frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin C}$=pr=$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

(其中 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，r 为三角形内切圆半径)

5.同角关系：

(1)商的关系：①$tg\theta=\frac{y}{x}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sin\theta\cdot\sec\theta$ ②$ctg\theta=\frac{x}{y}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\cos\theta\cdot\csc\theta$

③ $\sin\theta=\frac{y}{r}=\cos\theta\cdot tg\theta$ ④

$\sec\theta=\frac{r}{x}=\frac{1}{\cos\theta}=tg\theta\cdot\csc\theta$

⑤ $\cos\theta=\frac{x}{r}=\sin\theta\cdot ctg\theta$ ⑥

$\csc\theta=\frac{r}{y}=\frac{1}{\sin\theta}=ctg\theta\cdot\sec\theta$

(2)倒数关系：$\sin\theta\cdot\csc\theta=\cos\theta\cdot\sec\theta=tg\theta\cdot ctg\theta=1$

(3)平方关系：$\sin^2\theta+\cos^2\theta=\sec^2\theta-tg^2\theta=\csc^2\theta-ctg^2\theta=1$

(4)$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\varphi)$ （其中辅助角φ与点（a, b）在同一象限，且$tg\varphi=\frac{b}{a}$）

6.函数 y=$A\sin(\omega\cdot x+\varphi)+$k 的图象及性质：（$\omega>0,A>0$）

振幅 A，周期 T=$\frac{2\pi}{\omega}$， 频率 f=$\frac{1}{T}$， 相位$\omega\cdot x+\varphi$，初相φ

7.五点作图法：令$\omega x+\varphi$依次为$0\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi$ 求出 x 与 y， 依点(x,y)作图

8.诱导公试

	sin	cos	tg	ctg
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$
$\pi-\alpha$	$+\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$

$\pi+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$+tg\alpha$	$+ctg\alpha$
$2\pi-\alpha$	$-\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$
$2k\pi+\alpha$	$+\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$+tg\alpha$	$+ctg\alpha$

三角函数值等于α的同名三角函数值，前面加上一个把α看作锐角时，原三角函数值的符号；即：函数名不变，符号看象限

	sin	con	tg	ctg
$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$+\cos\alpha$	$+\sin\alpha$	$+ctg\alpha$	$+tg\alpha$
$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$+\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$+ctg\alpha$	$+tg\alpha$
$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$-\cos\alpha$	$+\sin\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$

三角函数值等于α的异名三角函数值，前面加上一个把α看作锐角时，原三角函数值的符号；即：函数名改变，符号看象限

9.和差角公式

①$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$ ②$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

③$tg(\alpha\pm\beta)=\dfrac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\mp tg\alpha\cdot tg\beta}$ ④$tg\alpha\pm tg\beta=tg(\alpha\pm\beta)(1\mp tg\alpha\cdot tg\beta)$

⑤$tg(\alpha+\beta+\gamma)=\dfrac{tg\alpha+tg\beta+tg\gamma-tg\alpha\cdot tg\beta\cdot tg\gamma}{1-tg\alpha\cdot tg\beta-tg\alpha\cdot tg\gamma-tg\beta\cdot tg\gamma}$ 其中当 A+B+C=π 时，有：

i). $tgA+tgB+tgC=tgA.tgB.tgC$ ii). $tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+tg\frac{A}{2}tg\frac{C}{2}+tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}=1$

10.二倍角公式：(含万能公式)

①$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{2tg\theta}{1+tg^2\theta}$

②$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta=\dfrac{1-tg^2\theta}{1+tg^2\theta}$

③$tg2\theta=\dfrac{2tg\theta}{1-tg^2\theta}$ ④$\sin^2\theta=\dfrac{tg^2\theta}{1+tg^2\theta}=\dfrac{1-\cos2\theta}{2}$ ⑤$\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos2\theta}{2}$

11.三倍角公式：

①$\sin3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta=4\sin\theta\sin(60^\circ-\theta)\sin(60^\circ+\theta)$

②$\cos3\theta=-3\cos\theta+4\cos^3\theta=4\cos\theta\cos(60^\circ-\theta)\cos(60^\circ+\theta)$

③$tg3\theta=\dfrac{3tg\theta-tg^3\theta}{1-3tg^2\theta}=tg\theta\cdot tg(60-\theta)\cdot tg(60+\theta)$

12.半角公式：（符号的选择由$\dfrac{\theta}{2}$所在的象限确定）

①$\sin\dfrac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$ ②$\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{2}$ ③$\cos\dfrac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}$

④$\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1+\cos\theta}{2}$ ⑤$1-\cos\theta=2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$ ⑥$1+\cos\theta=2\cos^2\dfrac{\theta}{2}$

⑦$\sqrt{1\pm\sin\theta}=\sqrt{(\cos\dfrac{\theta}{2}\pm\sin\dfrac{\theta}{2})^2}=\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\pm\sin\dfrac{\theta}{2}\right|$

⑧$tg\dfrac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

13.积化和差公式：

$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$ $\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$ $\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$

14.和差化积公式：

①$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ ②$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

③$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ ④$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

15.反三角函数：

名称	函数式	定义域	值域	性质
反正弦函数	$y=\arcsin x$	$[-1,1]$增	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	arcsin(-x)= -arcsinx 奇
反余弦函数	$y=\arccos x$	$[-1,1]$减	$[0,\pi]$	$\arccos(-x)=\pi-\arccos x$
反正切函数	$y=arctgx$	R 增	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	arctg(-x)= - arctgx 奇
反余切函数	$y=arcctgx$	R 减	$(0,\pi)$	$arcctg(-x)=\pi-arcctgx$

16.最简单的三角方程

方程		方程的解集
$\sin x=a$	$\lvert a\rvert=1$	$\{x\mid x=2k\pi+\arcsin a,k\in Z\}$
	$\lvert a\rvert<1$	$\{x\mid x=k\pi+(-1)^k\arcsin a,k\in Z\}$
$\cos x=a$	$\lvert a\rvert=1$	$\{x\mid x=2k\pi+\arccos a,k\in Z\}$
	$\lvert a\rvert<1$	$\{x\mid x=2k\pi\pm\arccos a,k\in Z\}$
$tgx=a$		$\{x\mid x=k\pi+arctga,k\in Z\}$
$ctgx=a$		$\{x\mid x=k\pi+arcctga,k\in Z\}$

三角公式汇总2

一、任意角的三角函数

在角α的终边上任取一点$P(x,y)$，记：$r=\sqrt{x^2+y^2}$，

正弦：$\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$　　余弦：$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$

正切：$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}$　　余切：$\cot\alpha=\dfrac{x}{y}$

正割：$\sec\alpha=\dfrac{r}{x}$　　余割：$\csc\alpha=\dfrac{r}{y}$

注：我们还可以用单位圆中的有向线段表示任意角的三角函数：如图，与单位圆有关的有向线段MP、OM、AT分别叫做角α的正弦线、余弦线、正切线。

二、同角三角函数的基本关系式

倒数关系：$\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1$，$\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$，$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$。

商数关系：$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，$\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$。

平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$，$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$。

三、诱导公式

(1)$\alpha+2k\pi\ (k\in Z)$、$-\alpha$、$\pi+\alpha$、$\pi-\alpha$、$2\pi-\alpha$的三角函数值，等于α的同名函数值，前面加上一个把α看成锐角时原函数值的符号。（口诀：函数名不变，符号看象限）

(2)$\dfrac{\pi}{2}+\alpha$、$\dfrac{\pi}{2}-\alpha$、$\dfrac{3\pi}{2}+\alpha$、$\dfrac{3\pi}{2}-\alpha$的三角函数值，等于α的异名函数值，前面加上一个把α看成锐角时原函数值的符号。（口诀：函数名改变，符号看象限）

四、和角公式和差角公式

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

五、二倍角公式

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha\cdots(*)$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

二倍角的余弦公式$(*)$有以下常用变形：（规律：降幂扩角，升幂缩角）

$1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$　　　　$1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$

$1+\sin 2\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$　　　　$1-\sin 2\alpha=(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$

$$\boxed{\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2},\quad \sin^2\alpha=\frac{1+\sin 2\alpha}{2},\quad \tan\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}。}$$

六、万能公式（可以理解为二倍角公式的另一种形式）

$$\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha},\quad \cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha},\quad \tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}。$$

万能公式告诉我们，单角的三角函数都可以用半角的正切来表示。

七、和差化积公式

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\quad\cdots(1)$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\quad\cdots(2)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\quad\cdots(3)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\quad\cdots(4)$$

了解和差化积公式的推导，有助于我们理解并掌握好公式：

$$\sin\alpha=\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\beta=\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

两式相加可得公式(1)，两式相减可得公式(2)。

$$\cos\alpha=\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\beta=\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

两式相加可得公式(3)，两式相减可得公式(4)。

八、积化和差公式

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

我们可以把积化和差公式看成是和差化积公式的逆应用。

九、辅助角公式

$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$ （）

其中：角 φ 的终边所在的象限与点 (a,b) 所在的象限相同，

$$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \tan\varphi=\frac{b}{a}。$$

十、正弦定理

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ （R 为 ΔABC 外接圆半径）

十一、余弦定理

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$$

十二、三角形的面积公式

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\times 底\times 高$$

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$（两边一夹角）

$S_{\Delta ABC}=\frac{abc}{4R}$（$R$ 为 ΔABC 外接圆半径）

$S_{\Delta ABC}=\frac{a+b+c}{2}\cdot r$（$r$ 为 ΔABC 内切圆半径）

$S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ …海仑公式（其中 $p=\frac{a+b+c}{2}$）