BUKU AJAR MATEMATIKA DASAR

DIBUAT OLEH : KELOMPOK 5

ANGGOTA KELOMPOK :

ZAHROTUL AINIL MAHFUDHAH UMAR (220209500014)
NASHIFAH NURUL FAJRI (220209500021)
PUTRI RAHAYU (220209500022)
MUH. ANDRI APRIADI (1929042011)
SRI IRMAYANI (220209500029)
ATHIYYAH ANANDIRA (220209500030)
MUHAMMAD FAZLI (220209500036)
AMANDA PUTRI LESTARI (220209500038)
NUR ISNANIYA BARDA (220209500044)

KELAS : PTIK-A

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN TEKNIK INFORMATIKA DAN KOMPUTER

UNIVERSITAS NEGERI MAKASSAR

2022

KATA PENGANTAR

Bismillahirrahmanirrahim Assalamualaikum

Wr.Wb.

Puji dan syukur dipersembahkan ke hadirat Allah SWT, karena berkat taufik, hidayah dan karunia-Nya, sehingga Buku Ajar Matematika Dasar ini dapat terselesaikan dengan baik.

Shalawat dan salam disampaikan kepada Nabi Muhammad SAW beserta keluarga dan sahabat nya yang telah merintis pertumbuhan dan perkembangan tradisi mencintai, memahami, menghayati, dan mengamalkan berbagai macam ilmu sesuai dengan tuntunan Al – Qur'an dan al-Hadits.

Buku ajar Matematika Dasar ini terdiri dari 4 Bab Materi Perkuliahan, yang terdiri dari (1) Sistem Bilangan Real dan Pertidaksamaan; (2) Pengantar Aljabar; (3) Nilai Mutlak; dan (4) Turunan.

Buku ajar ini dibuat dan disusun dalam rangka memenuhi tugas mata kuliah Matematika Dasar dan dengan usaha maksimal juga atas bantuan dari berbagai pihak yang berkenan meluangkan waktu, tenaga dan pikirannya untuk menyelesaikan buku ajar ini. Oleh karenanya kami sampaikan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada segenap pihak yang telah ikut serta dalam menyelesaikan buku ajar ini.

Terlepas dari itu semua, kami menyadari masih banyak kekurangan dalam buku ajar yang kami buat. Mungkin dari segi bahasa, susunan kalimat atau hal lain yang tidak kami sadari. Oleh karenanya kami sangat mengharapkan kritik dan saran sebagai sarana perbaikan yang lebih baik. Dan semoga buku ajar ini dapat memberikan manfaat bagi pembacanya.

Akhir kata kami ucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya atas perhatiannya.

Wassalamualaikum Wr.Wb.

Makassar, Oktober 2022

Tim Penyusun

DAFTAR ISI

BAB I

SISTEM BILANGAN REAL DAN PERTIDAKSAMAAN

A. Pendahuluan

Kajian sistem bilangan real memberikan kemampuan membedakan himpunan bilangan asli, himpunan bilangan cacah, himpunan bilangan bulat, himpunan bilangan rasional, himpunan bilangan irasional, dan himpunan bilangan real. Sifat-sifat dari bilangan ini akan digunakan dalam bentuk pangkat, penarikan akar, dan logaritma.

Dalam matematika, hubungan antara dua nilai yang tidak sama didefinisikan oleh pertidaksamaan. Pertidaksamaan berarti tidak sama. Ketika dua nilai tidak sama, kita biasanya menggunakan tanda tidak sama dengan (≠). Namun, berbagai pertidaksamaan digunakan untuk membandingkan nilai, apakah kecil atau besar. Kajian ketaksamaan memberikan kemampuan menggunakan notasi interval dengan benar, dan menyelesaikan pertaksamaan.

B. Himpunan Bilangan

1) Himpunan Bilangan Asli

Bilangan asli adalah bilangan bulat positif. Ditulis:

$$\mathbf{N} = \{1,2,3,4,\ldots\}$$

2) Himpunan Bilangan Cacah

Bilangan cacah merupakan himpunan bilangan gabungan antar bilangan 0 sampai bilangan bulat positif (tidak ada yang negatif). Ditulis:

$$\mathbf{W} = \{0,1,2,3,4,\ldots\}$$

3) Himpunan Bilangan Bulat

Bilangan bulat adalah kumpulan atau himpunan yang nilainya bulat. Bilangan bulat sendiri terdiri dari bilangan cacah dan bilangan bulat negatif. Ditulis:

$$\mathbf{I} = \{\ldots -3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$$

4) Himpunan Bilangan Rasional

Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat ditulis dalam bentuk pecahan $\frac{a}{b}$dengan a dan b bilangan bulat dan b 0. Ditulis:

$$\mathbf{Q} = \left\{x \mid x = \frac{a}{b},\ a, b \epsilon I, B \neq 0\right\}$$

Adapun himpunan bilangan rasional terdiri dari bilangan bulat, bilangan pecahan murni, dan bilangan pecahan desimal.

5) Himpunan Bilangan Irasional

Bilangan Irasional adalah bilangan yang tidak dapat dinyatakan sebagai hasil bagi antara dua bilangan bulat (pecahan), tapi dapat dinyatakan dengan bilangan desimal tak tentu atau tak berulang, misalnya : e = 2,71828…, π = 3,14159…, √2 = 1,4142… dan lain sebagainya. Ditulis:

$$\mathbf{Q'} = \{x|x \in Q'\}$$

6) Bilangan Real

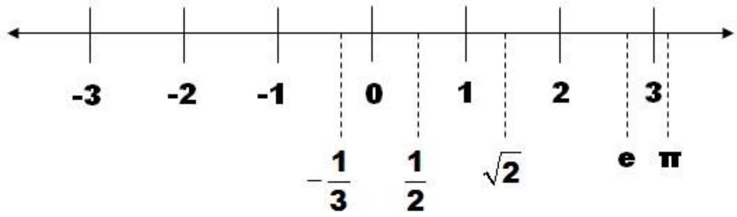
Bilangan rasional dan Irrasional merupakan himpunan bilangan real. Ditulis:

$$\mathbf{R} = (x|x \in \mathbf{R}\}$$

Himpunan-himpunan bilangan di atas dapat ditulis dalam bentuk subset sebagai berikut:

N □W □ I □ Q □ R

Referensi geometrik ke bilangan real



Bilangan real secara geometris diwakili oleh titik-titik pada garis yang disebut sumbu. Untuk setiap bilangan real, hanya ada satu titik pada garis balik. Artinya, korespondensi antara himpunan dengan himpunan nyata adalah satu-satunya korespondensi sebuah titik pada garis. Oleh karena itu, kita sering menggunakan titik dan angka sebagai sinonim.

Di sini, teorema Cantor Dedekind memiliki pengaruh yang besar. Himpunan bilangan real di sebelah kanan 0 disebut himpunan bilangan positif. Himpunan bilangan real di sebelah kiri 0 disebut himpunan bilangan negatif, tetapi 0 itu sendiri bukanlah bilangan positif atau bilangan negatif. (Posisi horizontal garis dan penempatan angka positif dan negatif di kiri dan kanan masih ditentukan). Karena ada bilangan irasional yang tak terhitung banyaknya dan bilangan irasional antara dua bilangan rasional atau irasional pada baris, kami menyebut himpunan bilangan rasional atau irasional himpunan sempit dan melakukan operasi pada bilangan real.

Sifat-Sifat Bilangan Real

Sistem bilangan Real dibentuk atas dasar sistem bilangan Asli, di mana semua sifat-sifatnya dapat diturunkan. Jika a, b, dan c adalah bilangan Real maka sifat-sifat bilangan Real adalah :

- Sifat komutatif untuk penjumlahan

$$a + b = b + a$$

- Sifat assosiatif untuk penjumlahan

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

- Sifat komutatif untuk perkalian

$$a.b = b.a$$

- Sifat assosiatif untuk perkalian

$$a\ (b.c) = (a.b)\ c$$

- Sifat distributif

$$a(b + c) = a.b + a.c$$

- Jika a dan b dua bilangan Real, maka terdapat suatu bilangan Real c sehingga a + c = b. Bilangan c ini kita nyatakan dengan b – a dan disebut selisih dari b dan a. Selisih a – a kita nyatakan dengan simbol 0. Simbol 0 ini selanjutnya disebut nol.
- Terdapat paling sedikit satu bilangan real $a \neq 0$. Jika a dan b dua bilangan Real dengan $x \neq 0$, maka terdapat suatu bilangan Real c demikian sehingga a.c = b. Bilangan c ini kita nyatakan dengan $\frac{b}{a}$ dan disebut hasil bagi dari b dan a. Hasil bagi a dan a dinyatakan dengan simbol 1, yang selanjutnya disebut satu dan tidak bergantung pada a.

Contoh Soal:

1. Pada sebuah tokoh sepatu terdapat 50 pelanggan, beberapa menit kemudian datanglah 20 orang dan membaur dengan 50 orang pelanggan. Jika 5 orang keluar setelah rombongan ke-2 masuk,berapakah jumlah pelanggan yang ada saat itu= …? pembahsan : dik: pelanggan awal =50; pelanggan ke-2=20; pelanggan yang keluar=5
   dit: berapa jumlah pelanggan saat itu?
   peny:
   Pelanggan sekarang = 50+20-5 =65 orang
   Jadi, jumlah pelanggan di tokoh sepatu saat itu sebanyak 65 orang.

2. Ibu Dian pergi ke pasar untuk membeli bahan memasak hari itu. Ibu Dian membeli wortel 1 kg, daging ayam 2 kg, kentang 1 kg. Berapakah total berat belanjaan Ibu Dian?

pembahasan :
dik : wortel = 1 kg;
daging ayam = 2 kg;
kentang 1 kg
dit : total berat belanjaan ibu = ...?
peny:
Total belanjaan Ibu Dian = 1 kg + 2 kg + 1 kg = 4 kg Jadi, total berat belanjaan Ibu Dian adalah 4 kg.

3. Usia adik $\frac{1}{5}$ dari usia ibu saat ini, sedangkan usia nenek adalah 11 kali dari usia adik. Jika saat ini usia ibu adalah 30 tahun, maka berapa usia nenek? pembahasan :
   dik : usia adik = $\frac{1}{5}$ dari usia ibu;
   usia ibu = 30 tahun; usia nenek = 11 kali usia adik
   dit : usia nenek = ...? peny:
   Usia adik = $\frac{1}{5}$ dari usia ibu = $\frac{1}{5} \times 30 = 6$ tahun

Usia nenek = 11 kali usia adik = 11 x 6 = 66 Jadi, usia nenek sekarang adalah 66 tahun.

4. Suhu sebuah kota dua bulan lalu adalah -2° celcius. Kini suhunya naik 25° celcius. Berapakah suhu kota tersebut saat ini? pembahasan:
   dik : suhu kota dua bulan lalu = -2° C suhu kota naik = +28°C
   dit : suhu kota saat ini = ...? peny:
   Suhu kota saat ini = -2+25
   = 25 + (-2)
   =25-2
   =23

   Jadi, suhu kota saat ini adalah 23° C.

5. Fazli mempunyai kelereng sebanyak 5 kotak. Setiap kotak berisi 10 kelereng. Pada hari ulang tahunnya, ia membagikan semua kelerengnya sama banyak kepada 3 temannya. Berapa banyak kelereng yang diterima temannya?
   pembahasan:
   dik : banyak kelereng = 5 x 15 butir = 75 butir; banyak teman = 3 orang
   dit : Berapa banyak kelereng yang diterima temannya = ...?
   peny:
   Banyak kelereng yang diterima setiap teman Fazli= 75 butir : 3 = 25 butir

Jadi, banyak kelereng yang diterima temannya adalah 25 butir.

C. Bentuk Pangkat, Akar, dan Logaritma

1) Bentuk Pangkat/Eksponen

Pangkat bilangan bulat dapat berupa bilangan bulat positif, nol, atau negatif.

Pangkat Bilangan Positif

Jika a adalah bilangan riil dan n bilangan bulat positif maka a^n (dibaca "a pangkat n") adalah hasil kali n buah faktor yang masing-masing faktornya adalah a. Jadi, pangkat bulat positif secara umum dinyatakan dalam bentuk:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times \ldots \times a}_{\text{sebanyak n kali}}$$

dengan: a = bilangan pokok (basis);

n = pangkat atau eksponen; a^n= bilangan berpangkat.

Contoh: $5^2 = 5 \times 5 = 25$

Sifat-sifat pangkat bulat positif

- Sifat Perkalian Bilangan Berpangkat
  Untuk a ∈ R dan m, n bilangan bulat positif, berlaku:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

  Contoh soal:
  1) $4^2 \times 4^3 = 4^{2+3} = 4^5 = 1.024$
  2) $5 \times 25 = 5 \times 5^2 = 5^{1+2} = 5^3 = 125$
  3) $x \times x^5 \times x^2 = x^{5+2+1} = x^8$

- Sifat Pembagian Bilangan Berpangkat
  Untuk a ∈ R, a ≠ 0 dan m, n bilangan bulat positif yang memenuhi m > n.

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

  Contoh soal:
  1) $7^4 : 7^2 = \frac{7^4}{7^2} = 7^{4-2} = 7^2 = 49$
  2) $\frac{2^5}{2} = 2^{5-1} = 2^4 = 16$
  3) $\frac{x^{10}}{x^3} = x^{10-3} = x^7$

- Sifat Pangkat dari Bilangan Berpangkat
  Untuk a ∈ R dan m, n bilangan bulat positif, berlaku:

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Contoh soal:

1) $(2^2)^3 = 2^{2\times3} = 2^6 = 64$

2) $(9)^2 = (3^2)^2 = 3^{2\times2} = 3^4 = 81$

3) $(y^4)^2 = y^{4\times2} = y^8$

- Sifat Pangkat dari Perkalian Bilangan

  Untuk a, b ∈ R dan n bilangan bulat positif, berlaku:

$$(a\cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

Contoh soal:

1) $(4\cdot3)^3 = 4^3\cdot3^3 = 64\cdot27 = 1.728$

2) $9^2\cdot6^2 = (9\cdot6)^2 = (54)^2 = 2.196$

3) $(2xy)^4 = 2^4\cdot x^4\cdot y^4 = 16x^4y^4$

- Sifat Pangkat dari Pembagian Bilangan

  Untuk a, b ∈ R, b ≠ 0 dan n bilangan bulat positif, berlaku:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

Contoh soal:

1) $\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16} = 5,0625$

2) $50^3 : 2^3 = \left(\frac{50}{2}\right)^3 = 25^3 = 15.625$

3) $\left(\frac{x^4}{y^2 z}\right)^6 = \frac{x^{4\times6}}{y^{2\times6} z^6} = \frac{x^{24}}{y^{12} z^6}$

Pangkat Bilangan Negatif dan Nol

Jika pada bentuk perpangkatan pangkat dari bilangan dasar kurang dari satu dan nol maka akan diperoleh pangkat bilangan bulat negatif dan nol.

- Bilangan Berpangkat Nol

  Untuk a ∈ R dan a ≠ 0, maka:

$$a^0 = a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m} = 1$$

Contoh soal:

1) $10^0 = 1$

2) $(3x)^0 = 1$, *dengan syarat* $x \neq 0$

3) $\left(\frac{x^2 y^5}{z^4}\right)^0 = 1$, *dengan syarat* $x \neq 0$; $y \neq 0$ *dan* $z \neq 0$

- Bilangan Berpangkat Negatif

  Untuk a ∈ R dan a ≠ 0 didefinisikan:

$$\frac{1}{a^m} = a^{-m}$$

Contoh soal:

1) $\frac{10^2}{10^5} = 10^{2-5} = 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$

2) $\frac{x^{-2}}{y^5} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{y^5} = \frac{1}{x^2 y^5}$

3) $\frac{a^{-4}}{a^3} = a^{-4-3} = a^{-7} = \frac{1}{a^7}$

2) Akar

Bentuk akar adalah akar dari suatu bilangan yang nilainya memuat tidak terhingga banyaknya angka di belakang koma dan tidak berulang.

Contoh:

1) $\sqrt{2}$ □1,414213...
2) $\sqrt{3}$ □1,732050...
3) $\sqrt{5}$ □ 2,236067...

Dalam bilangan bentuk akar (radikal), ada 3 bagian yang perlu diketahui, yaitu lambang bentuk akar, radikan, dan indeks. Secara umum, bentuk akar ditulis dalam bentuk:

$$\sqrt{a}$$

(dibaca "akar pangkat n dari a")

$\sqrt[n]{\ }$ dengan: *a* disebut bentuk akar (radikal); disebut lambang bentuk akar; n

$\sqrt{\ }$ disebut indeks (pangkat akar); a disebut radikan (bilangan di bawah tanda akar), dengan a bilangan riil positif untuk n bilangan asli dan untuk n bilangan ganjil, a dapat berupa bilangan riil negatif.

Bentuk akar terbagi atas 2 jenis:

- Akar Senama

Suatu bentuk akar dikatakan akar senama jika indeks (pangkat akar) nya sama.

Contoh:

a. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ mempunyai indeks 2

b. $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{5}$ mempunyai indeks 3.

- Akar Sejenis

Suatu bentuk akar dikatakan akar sejenis jika indeks dan radikannya sama Contoh:

$\sqrt[3]{3}, 2\sqrt[3]{3}, 6\sqrt[3]{3}$ mempunyai indeks 3, radikannya 3

Pangkat tak sebenarnya

Bilangan berpangkat dengan pangkat nol, bulat negatif, dan pecahan disebut juga sebagai bilangan berpangkat tak sebenarnya. Adapun bilangan berpangkat dengan pangkat bulat positif disebut juga bilangan berpangkat sebenarnya. Untuk sebarang nilai a dengan a ≠ 0, m bilangan bulat, n bilangan asli, dan n ≥ 2 berlaku:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Bilangan $a^{\frac{1}{n}}$ dan $a^{\frac{m}{n}}$ disebut bilangan dengan pangkat tak sebenarnya

Mengoperasikan bentuk akar

Operasi aljabar seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian dapat juga dilakukan terhadap bentuk akar. Operasi tersebut digunakan untuk merasionalkan penyebut yang dinyatakan dalam bentuk akar. Operasi-operasi aljabar tersebut adalah sebagai berikut :

1) $a\sqrt{x} + b\sqrt{x} = (a+b)\sqrt{x}$
2) $a\sqrt{x} - b\sqrt{x} = (a-b)\sqrt{x}$
3) $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$
4) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
5) $\sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{a^{m+p}}$
6) $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$
7) $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

Contoh soal setiap operasi di atas:

1) $4\sqrt{3} + 7\sqrt{3} = (4+7)\sqrt{3} = 11\sqrt{3}$
2) $8\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = (8-3)\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$
3) $\sqrt{11} \times \sqrt{11} = \sqrt{11^2} = 11$
4) $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \times 4} = \sqrt[3]{8} = 2$
5) $\sqrt[4]{5x^2} \times \sqrt[4]{5x^{10}} = \sqrt[4]{5x^{2+10}} = \sqrt[4]{5x^{12}} = 5x^{\frac{12}{4}} = 5x^3$
6) $\sqrt{\sqrt[3]{2y}} = \sqrt[3 \cdot 2]{2y} = \sqrt[6]{2y}$
7) $\sqrt[7]{3x^5} : \sqrt[7]{6xy^3} = \frac{\sqrt[7]{3x^5}}{\sqrt[7]{6xy^3}} = \sqrt[7]{\frac{3x^5}{6xy^3}}$

Merasionalkan penyebut bentuk akar

- **Merasionalkan penyebut bentuk** $\frac{a}{\sqrt{b}}$

Bentuk akar $\frac{a}{\sqrt{b}}$ dengan b ≠ 0 dapat dirasionalkan penyebutnya dengan cara mengalikan b pecahan dengan $\sqrt{b}$ sehingga:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a}{b}\sqrt{b}$$

Contoh soal: $\frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{7}{3}\sqrt{3}$

- **Merasionalkan penyebut bentuk** $\frac{a}{b \pm \sqrt{c}}$

Untuk menyederhanakan bentuk pecahan $\frac{a}{b+\sqrt{c}}$ atau $\frac{a}{b-\sqrt{c}}$ adalah dengan mengalikan pecahan dengan bentuk sekawan dari penyebut. Bentuk sekawan dari $b+\sqrt{c}$ adalah $b-\sqrt{c}$. Sebaliknya, bentuk sekawan dari $b-\sqrt{c}$ adalah $b+\sqrt{c}$ sehingga:

$$\frac{a}{b+\sqrt{c}} = \frac{a}{b+\sqrt{c}} \times \frac{b-\sqrt{c}}{b-\sqrt{c}} = \frac{a(b-\sqrt{c})}{b^2-c}$$

$$\frac{a}{b-\sqrt{c}} = \frac{a}{b-\sqrt{c}} \times \frac{b+\sqrt{c}}{b+\sqrt{c}} = \frac{a(b+\sqrt{c})}{b^2-c}$$

Contoh soal:

1) $\frac{9}{3+\sqrt{3}} = \frac{9}{3+\sqrt{3}} \times \frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{9(3-\sqrt{3})}{3^2-3} = \frac{27-9\sqrt{3}}{9-3} = \frac{27-9\sqrt{3}}{3} = 9-3\sqrt{3}$

2) $\frac{3}{5-\sqrt{7}} = \frac{3}{5-\sqrt{7}} \times \frac{5+\sqrt{7}}{5+\sqrt{7}} = \frac{3(5+\sqrt{7})}{5^2-7} = \frac{15+3\sqrt{7}}{25-7} = \frac{15+3\sqrt{7}}{14}$

- **Merasionalkan penyebut bentuk** $\frac{a}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}}$

Untuk menyederhanakan penyebut dari bentuk pecahan $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ atau $\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$, yaitu dengan cara mengalikan pecahan dengan bentuk sekawan dari penyebutnya. Bentuk sekawan dari $\sqrt{b}+\sqrt{c}$ adalah $\sqrt{b}-\sqrt{c}$. Sebaliknya, bentuk sekawan dari $\sqrt{b}-\sqrt{c}$ adalah $\sqrt{b}+\sqrt{c}$ sehingga:

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} \times \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} \times \frac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}$$

Contoh soal:

1) $\frac{12}{\sqrt{13}+\sqrt{7}} = \frac{12}{\sqrt{13}+\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{13}-\sqrt{7}}{\sqrt{13}-\sqrt{7}} = \frac{12(\sqrt{13}-\sqrt{7})}{13-7} = \frac{12\sqrt{13}-12\sqrt{7}}{6} = 2\sqrt{13}-2\sqrt{7}$

2) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2} = \frac{2\sqrt{9}+2\sqrt{6})}{1} = 2(3)+2\sqrt{6} = 6+2\sqrt{6}$

<u>**Persamaan bentuk akar**</u>

$$\sqrt{(a+b)\pm 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}\pm\sqrt{b}; \quad a \geq b \geq 0; \quad a, b \in R$$

Contoh soal:

1) $\sqrt{7+2\sqrt{12}} = \sqrt{(4+3)+2\sqrt{4\cdot 3}} = \sqrt{(\sqrt{4}+\sqrt{3})^2} = \sqrt{4}+\sqrt{3} = 2+\sqrt{3}$

2) $\sqrt{12-2\sqrt{35}} = \sqrt{(7+5)-2\sqrt{7\cdot 5}} = \sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2} = \sqrt{7}-\sqrt{5}$

3) Logaritma

Logaritma merupakan invers/kebalikan dari eksponen. Secara umum ditulis:

$$a^c = b \Leftrightarrow {}^a\log b = c$$

dengan: a = bilangan pokok atau basis, a > 0; a ≠ 1; b = numerus (yang dicari nilai logaritmanya), x > 0 c = hasil logaritma.

(${}^a\log b = c$ dibaca "logaritma b dengan basis a")

Bentuk logaritma dapat dinyatakan dalam bentuk pangkat dan sebaliknya, bentuk pangkat dapat dinyatakan dalam bentuk logaritma.

Contoh: $5^2 = 25 \Leftrightarrow {}^5\log 25 = 2$

Sifat-sifat logaritma

Sifat-sifat logaritma berikut berlaku dengan syarat $p \neq 1$ dan $p > 0, a > 0, b > 0$, dan $m, n \in R$.

1) ${}^p\log (a \times b) = {}^p\log a + {}^p\log b$
2) ${}^p\log \frac{a}{b} = {}^p\log a - {}^p\log b$
3) ${}^p\log a^n = n \cdot {}^p\log a$
4) ${}^a\log b = \frac{{}^p\log b}{{}^p\log a}$
5) $\frac{1}{{}^a\log b} = {}^b\log a$
6) ${}^{a^n}\log b^m = \frac{m}{n} \cdot {}^a\log b$
7) $a^{{}^a\log b} = b$
8) ${}^p\log 1 = 0$
9) ${}^a\log a = 1$
10) ${}^p\log a \times {}^a\log b = {}^p\log b$

Contoh soal setiap sifat:

1) ${}^2\log 3 + {}^2\log 5 = {}^2\log (3 \times 5) = {}^2\log 15$
2) ${}^5\log 30 - {}^5\log 6 = {}^5\log \frac{30}{6} = c = 1$
3) ${}^3\log 27 = {}^3\log 3^3 = 3 \cdot {}^3\log 3 = 3 \cdot 1 = 3$
4) ${}^3\log 5 = a$, ${}^{\sqrt{5}}\log 9 = ...?$

$\frac{{}^4\log 1}{{}^9\log 5} \ldots \frac{\log 9}{\log 5} = \frac{\log 3^2}{\log 5} \ldots 2 \ldots \frac{\log 3}{\log 5} \ldots = 12\ {}^3\log 5 = 12.a = a2$

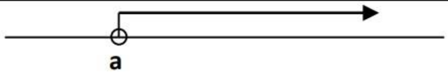
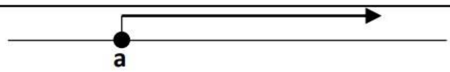
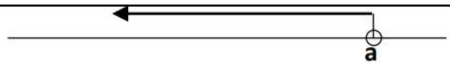
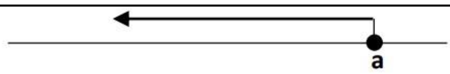
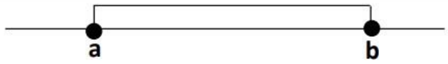
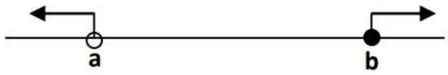
5) $\frac{1}{{}^{49}\log 7} = {}^7\log 49 = {}^7\log 7^2 = 2\ {}^7\log 7 = 2$
6) ${}^8\log 16 = {}^{2^3}\log 2^4 = \frac{4}{3} \cdot {}^2\log 2 = \frac{4}{3}$
7) $6^{{}^6\log 3} = 3$
8) ${}^9\log 1 = 0$
9) ${}^8\log 8 = 1$
10) ${}^4\log 3 \times {}^3\log 4 = {}^4\log 4$

D. Pertidaksamaan

Pertidaksamaan adalah kalimat matematika terbuka yang memuat ungkapan >, ≥, <, atau ≤. Pertidaksamaan adalah kalimat terbuka yang mengandung tanda ketidaksamaan.

Contoh: $6x \square 12 \square 9x \square 3$

Garis bilangan pertidaksamaan

Simbol/Notasi	Garis Bilangan
x > a	
x ≥ a	
x < a	
x ≤ a	
a ≤ x ≤ b	
x < a atau x ≥ b	

Notasi/simbol pertidaksamaan

Simbol > artinya “ lebih dari ”

Simbol ≥ artinya “ lebih dari atau sama dengan ”

Simbol < artinya “kurang dari”

Simbol ≤ artinya “kurang dari atau sama dengan”

Sifat-sifat pertidaksamaan

1. Arti pertidaksamaan tidak akan berubah apabila tiap-tiap ruas/sisi ditambah atau dikurangi dengan bilangan nyata yang sama. Hal ini mengakibatkan bahwa sembarang suku bisa dipindahkan dari satu sisi ke sisi lain dalam suatu pertidaksamaan, dengan syarat tanda suku diubah.

2. Arti sebuah pertidaksamaan tidak berubah apabila tiap sisi dikalikan atau dibagi dengan bilangan positip yang sama.
3. Arti sebuah pertidaksamaan berubah apabila tiap-tiap sisi dikalikan atau dibagi dengan bilangan negatip yang sama.
4. Apabila a > b dan *a, b, n* adalah positif, maka $a^n > b^n$, tetapi $a^{-n} < b^{-n}$
5. Apabila a < b dan *a, b* adalah negatif, *n* adalah positif, genap, maka $a^n > b^n$
6. Apabila a < b dan *a, b* adalah negatif, *n* adalah positif, ganjil, maka $a^n < b^n$
7. Apabila a > b dan c > d, maka (a+c) > (b+d)

8. Apabila a > b > 0 dan c > d > 0, maka *ac* > *bd*
9. Penggabungan dua pertidaksamaan. Dua pertidaksamaan dapat digabung dengan kata *dan* atau *atau*.

Jenis pertidaksamaan

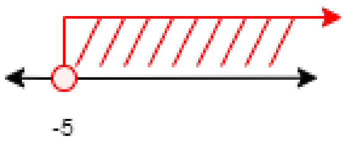
1. **Pertidaksamaan linear** adalah pertidaksamaan yang variabelnya berpangkat satu.

Contoh:

(1) 5*x* □ 6 □ 2*x* □9,*x*□*Q*

□ 5*x* □ 2*x* □ □ □9 6

□ 3*x* □ □15



□ 3 .*x* □□□_13□□□ □ □15□□□_13□□□

□ *x* □ □5

□*HP* □{*x x*| □ □5,*x*□*Q*}

2. **Pertidaksamaan kuadrat**

Suatu pertidaksamaan kuadrat bisa diselesaikan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

- Cari akar – akar bentuk persamaan kuadratnya
- Gambar garis bilangan, lengkapi titik-titik pembuat nol kemudian periksa tandanya -
  Tarik kesimpulan sesuai pertidaksamaan yang diminta.

Contoh:

Selesaikan x^2 □ *x* □ 6!

Jawaban:

x^2 □ *x* □ 6 □ x^2 □ *x* □ 6 □ 0

□ (*x* □ 2)(*x* □3) □ 0

Maka diperoleh x =-2; x =3 sebagai pembuat 1 2 nol fungsi.

Membuat garis bilangan dengan titik nol dan tandanya.

3. **Pertidaksamaan rasional**

Pertidaksamaan pecahan, merupakan pertidaksamaan yang memiliki pembilang dan penyebut, dimana penyebutnya memuat variable. Bentuk umum dari pertidaksmaan rasional (pecahan) sebagai berikut:

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$, dengan g(x)□ 0

Untuk menyelesaikannya ada beberapa langkah, yaitu:

- Ruas kanan harus dijadikan nol.
- Ruas kiri dibuatkan pecahan yang paling sederhana.
- Carilah angka (harga) pembuat nol untuk pembilang dan penyebutnya.
- Simpan angka (harga) pembuat nol pada garis bilangan, serta tentukan tandanya "+" atau "-" nya.
- Tentukan penyelesaiannya.

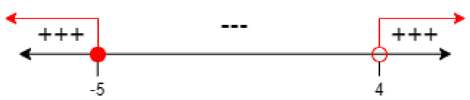
Contoh:

Tentukan penyelesaian dari pertidaksamaan $\frac{x□5}{x□4}$ □ 0!

Jawaban: $\frac{x □ 5}{x □ 4}$ □ 0

□ □ □ □ □□x 5 0 x 5

□ □ □ □ □x 4 0 x 4



Untuk tanda "+" atau "-" tentukan salah satu angka setelah 4, lalu substitusikan ke $\frac{x□5}{x□4}$□0 , hasil pembagianya bernilai "+" atau "-" simpan tandanya disebelah kanan angka 4, untuk tanda selanjutnya biasanya bergantian/berselingan. Sedangkan untuk daerah hasil kembali ke soal apa yang diinginkan soal.

Pada kasus ini adalah " □ ", maka yg diarsir yg bertanda "++ ", sedangkan bulatan hitam dan kosong juga kembali ke soal, kecuali untuk penyebut harus kosong, karena bekaitan dengan syarat ketentuan $g(x) \neq 0$

Jadi, ∴ *penyelesaian* x □-5 atau x > 4

(dibaca x kurang dari atau sama dengan -5 atau x lebih dari 4).

4. **Pertidaksamaan polinomial**

Bentuk Umum : P(x) < 0, P(x) ≤ 0, P(x) > 0, atau P(x) ≥ 0. Secara umum pertidaksamaan polinomial bisa ditulis dalam bentuk faktor linear sebagai berikut:

$$P(x) □ a(x □ x_1)(x □ x_2)(x □ x_3)\ldots □ 0$$

tanda < bisa diganti dengan tanda □ □ , >, atau □ □

Langkah-langkah penyelesaian pertidaksamaan polinomial (suku banyak) sebagai berikut:

- Faktorkan polinomial ke dalam faktor-faktor linear.
- Tentukan pembuat nol (titik-titik kritis) dari polinomial itu.
- Gambarkan letak pembuat nol (titik-titik kritis) polinomial pada pada garis bilangan, sehingga diperoleh beberapa daerah (interval).
- Tentukan daerah (interval) bertanda positif dan negatif dengan cara mengambil satu titik di setiap daerah sebagai titik uji. Substitusikan titik uji ke P(x) yang sudah difaktorkan dan menghitung tandanya saja (apakah + atau −).
- Tulis tanda-tanda titik uji tersebut pada daerah dimana titik uji berada pada garis bilangan.
- Daerah yang memenuhi penyelesaian adalah daerah yang memiliki tanda sesuai dengan tanda pertidaksamaannya.

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $(x$ □ $4)(x$ □ $3)(x$ □$1)$ □ 0!

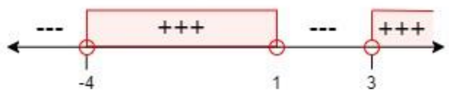
Jawaban:

$(x$ □ $4)(x$ □$3)(x$ □$1)$ □ 0

□ x □ 4 □ 0 □ x □ □4

□ x □3 □ 0 □ x □ 3

□ x □1□ 0 □ x □1



Jadi, HP ={x|x -4 < x < 1 ∨ x > 3}

BAB II

A. Pendahuluan

Berdasarkan catatan sejarah lainnya, ada yang mengatakan bahwa penemu dari cabang ilmu matematika, aljabar adalah Diophantus, ia berasal dari Alexandria. Selain itu, ilmu aljabar juga dipercaya sudah ada dan sudah dikembangkan sejak zaman Babilonia Kuno. Pada masa itu, orang-orang Babilonia sudah melakukan pengembangan terhadap persamaan kuadrat, persamaan linier, dan persamaan linier tidak menentu.

Bahkan, ia juga dijuluki sebagai “Bapak Aljabar” karena sudah memberikan ilmu pengetahuan tentang teori bilangang, notasi matematika, dan aljabar yang bisa diidentifikasi melalui teori persamaan. Sistem aljabar yang diciptakan oleh Diophantus tidak menggunakan simbol dan dikenal dengan nama syncopalet.

Selain itu, ada juga yang beranggapan Aljabar ini ditemukan oleh Abu Abdullah Muhammad Ibn Musa Al-Khwarizmi. Bahkan ajabar ini telah mulai digunakan oleh matematikawan di sekitar 3500 tahun di masa peradaban Mesopotamia. kemudian teori lain bahwa Istilah aljabar pertamakali muncul dalam buku karangan Al-Khwarizmi yang berjudul The Compendious Book on Calculation by Completion and Balancing.

B. Pengertian Aljabar

Aljabar (Algebra) merupakan salah satu cabang dalam ilmu matematika yang sangat luas cakupannya, sedangkan aljabar itu sendiri diartikan sebagai cabang ilmu dalam matematika yang mempelajari simbol matematika dan aturan aturan yang digunakan untuk memanipulasi simbol tersebut. Aljabar dapat mempermudah dalam memecahkan permasalahan daripada metode konvensional, yaitu menyatakan permasalahan dalam kata-kata.

C. Unsur – Unsur Aljabar

Dalam aljabar, ada beberapa unsur yang membentuk aljabar, diantaranya:

1. Variabel

Variabel sering disebut juga peubah, merupakan simbol atau lambang yang mewakili suatu bilangan, sedang bilangan tersebut belum diketahui nilainya secara jelas. Umumnya, variabel disimbolkan dengan huruf kecil. Contohnya adalah penggunaan variabel x dan y pada 5x+2y.

Variabel atau lambang pengganti merupakan suatu bilangan yang belum diketahui nilainya dengan jelas. Variabel disebut juga dengan peubah. Variabel biasanya dilambangkan dengan huruf a, b, c, ..., z.

Contoh:

Variabel dari $5x + 2y$ adalah x dan y. Variabel
dari $2x^2 + 4x - 12$ adalah x.

2. Suku

Suku adalah variabel beserta koefisiennya atau konstanta pada bentuk aljabar oleh tanda operasi jumlah atau selisih.

a) Suku satu adalah bentuk aljabar yang tidak dihubungkan oleh tanda operasi jumlah atau selisih.
Contoh: $3x$, $4a^2$, $-2ab$.

b) Suku dua adaah bentuk aljabar yang dihubungkan oleh satu tanda operasi humlah atau selisih.
Contoh: $a^2 + 3$, $x+ 2y$, $3x^2 - 5x$.

c) Suku tiga adalah bentuk aljabar yang dihubungkan oleh dua tanda operasi jumlah atau selisih.
Contoh: $3x^2 + 4x - 5$, $2x + 2y - xy$.

Bentuk aljabar yang mempunyai lebih dari dua suku disebut suku banyak atau polinom. Suku-suku yang variabel dan pangkatnya sama dinamakan suku yang sejenis.

3. Koefisien

Koefisien adalah faktor konstanta dari suatu suku, berupa sebuah bilangan yang menempel pada variabel. Misalnya pada $3x$ maka 3 adalah koefisiennya. Koefisien pada bentuk aljabar adalah bilangan yang melekat dengan variabel dari suatu suku pada bentuk aljabar.

Contohya:
a) Koefisien x yang ada pada $5x^2y + 3x$ adalah 3.
b) Koefisien x yang ada pada $2x^2 + 6x - 3$ adalah 6.

4. Konstanta

Konstanta merupakan suku pada aljabar yang tidak memuat variabel, hanya berupa bilangan saja. Contohnya pada aljabar $3x+8$ maka 8 adalah konstantanya. Suku dari suatu bentuk aljabar yang berupa bilangan dan tidak memuat variabel disebut konstanta.

Contoh:
a) Konstanta yang ada pada $2x^2 + 3xy + 7x - y - 8$ adalah -8.
b) Konstanta yang ada pada $3- 4x^2 - x$ adalah 3.

D. Pengoperasian Aljabar

Bentuk aljabar di atas terdiri dari huruf x sebagai variabel, angka 2 sebagai koefisien nilai x, dan angka 5 sebagai konstanta. Konstanta adalah nilai yang tetap, jadi nilainya sudah jelas. Sementara itu, variabel adalah nilai yang belum tetap, makanya bisa berubah-ubah.

Kemudian, variabel bisa disimbolkan menggunakan huruf, misalnya a, b, c, x, y, dan lain sebagainya. Terakhir, koefisien adalah nilai yang berada di depan variabel. Suatu variabel pasti punya yang namanya koefisien.

1. Penjumlahan bentuk Aljabar

Syarat suatu aljabar bisa dijumlahkan adalah suku-sukunya harus sejenis.

Contoh soal:

Sederhanakan bentuk dari 5a - 2b + 6a + 4b - 3c.

Jawaban:

Untuk penyelesainnya hanya perlu menyusun atau mengelompokkan suku-suku yang sejenis. Suku sejenis berarti variabelnya harus sama. Setelah dikelompokkan, kita bisa jumlahkan koefisiennya.

5a - 2b + 6a + 4b - 3c

= 5a + 6a - 2b + 4b - 3c

= (5 + 6)a + (-2 + 4)b - 3c

= 11a + 2b - 3cPengurangan matriks

Syarat operasi pengurangan sama dengan operasi penjumlahan yakni ukuran matriks yang dioperasikan harus sama. Jika A dan B adalah sebarang dua matriks yang ukurannya sama, maka A - B merupakan matriks yang diperoleh dengan mengurangkan unsur-unsur yang bersesuaian pada A dengan B.

2. Pengurangan bentuk Aljabar

Cara mengurangi aljabar pada dasarnya dapat dilakukan apabila operand (elemen yang dikurangi) mempunyai suku yang sejenis. Suku sejenis dalam hal ini berarti elemen yang dioperasikan mempunyai simbol variabel sama dan pangkat variabel juga sama.

7x – 3x = (7 – 3)x

= 4x

Dengan: x merupakan variabel yang

dikurangi

7 dan 3 merupakan koefisien masing-masing elemen-nya 7x

dan 3x merupakan elemen yang dioperasikan.

Contohnya:

8x – 4x + 7 – 2 =

=(8x -4x) + (7 – 2)

=(8 – 4)x + 5

=4x + 5

3. Perkalian bentuk Aljabar

Kita lanjut ke operasi perkalian pada aljabar. Berbeda dengan operasi penjumlahan dan pengurangan yang hanya bisa diselesaikan jika suku-sukunya sejenis, untuk operasi perkalian ini, dapat diselesaikan, baik sukunya sejenis, maupun tidak sejenis.

Pada aljabar, simbol perkalian ditulis dengan "×", ".", ataupun hanya dipisah dengan tanda kurung aja "( )( )". Operasi perkalian bentuk aljabar bisa kita selesaikan menggunakan metode distributif.

<u>a. Perkalian aljabar antara suku satu dengan suku dua</u>

Jadi, menurut metode distributif, kita tinggal mengalikan a terhadap b, dan a terhadap c. Distributif perkalian terhadap penjumlahan dan pengurangan:

Penjumlahan: a × (b + c) = ab + ac

Pengurangan: a × (b - c) = ab - ac

Contohnya:

Bentuk-bentuk aljabar

5 (3p+4q) = 15 p + 20q

-4 (2p + 3) = -8 - 12

-3(4p - 5q) = -12p + 15 q

<u>b. Perkalian aljabar antar suku dua</u>

Kurang lebih konsepnya sama nih dengan poin a, untuk perkalian antar suku dua menggunakan metode distributif, kita kalikan aja a terhadap c, a terhadap d, b terhadap c, dan b terhadap d.

(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd Contohnya:

Selesaikan perkalian bentuk aljabar (2x + y)(5x - 3y)

(2x + y)(5x - 3y)

= (2x)(5x) + (2x)(-3y) + (y)(5x) + (y)(-3y)

= 10x2 + (-6xy) + 5xy + (-3y2)

= 10x2 - 6xy + 5xy - 3y2

= 10x2 - 1xy - 3y2 = 10x2 - xy - 3y2

4. Pembagian bentuk Aljabar

Pembagian aljabar adalah operasi pembagian dengan menggunakan elemen aljabar sebagai operan atau objek yang dioperasikan. Sebelum mempelajari pembagian pada aljabar, diperlukan pemahaman materi sebelumnya terkait perkalian aljabar. Berikut dijelaskan mengenai dasar operasi pembagian pada aljabar, pembagian aljabar berpangkat, dan bentuk pecahan dari operasi pembagian aljabar.

Berikut dasar operasi pembagian pada dua elemen aljabar, yaitu:

- Koefisien antar elemen dihitung secara terpisah
- Perhitungan variabel hanya terjadi untuk variabel yang sama dengan konsep perpangkatan

Berikut konsep perpangkatan untuk variabel sejenis.

$$x^m : x^n = x^{m-n}$$

Dengan "x" diruas kanan dan kiri adalah variabel yang sejenis; "m dan n" adalah pangkat masing masing variabel.

Contohnya :

1. 8x : 2 =

   = (8 : 2) x

   = 4x

   14 y : 7 =

   = (14 : 7) y

   = 2y

2. $18x^3 : 9x^2$ =

   = $(18 : 9)\ x^{3-2}$

   =2x

   $35x^3y^3 : 7x^2y$ =

   = (35 : 7) $x^{3-2}y^{3-1}$

   =$5xy^2$

5. Perpangkatan bentuk Aljabar

Perpangkatan adalah suatu bilangan yang dikalikan dengan dirinya sendiri sebanyak jumlah pangkatnya (n kali). Pada prinsipnya, ternyata rumus perpangkatan pada bentuk aljabar sama dengan perpangkatan pada bilangan bulat.

Bentuk penyelesaian yang mudah dari perpangkatan dengan:

6. Segitiga Pascal

1 $\longrightarrow$ $(a \pm b)^0$ = 1

1 1 $\longrightarrow$ $(a \pm b)^1$ = a ± b

1 2 1 $\longrightarrow$ $(a \pm b)^2$ = a^2± 2ab + b^2

1 3 3 1 $\longrightarrow$ $(a \pm b)^3$ = a^3± $3a^2$b ± $3ab^2$±b^3

1 4 6 4 1 $\longrightarrow$ $(a \pm b)^4$ = a^4± $4a^3$b ± $6a^2b^2$±$4ab^3 + b^4$

Pada gambar di atas dapat ketahui bahwa, pola bilangan tersebut membentuk bangun segitiga yang selalu diawali dan diakhiri dengan angka 1. Kemudian, bilangan-bilangan yang selain angka 1 itu diperoleh dari jumlah dua buah bilangan yang terletak di atasnya dan saling berdekatan.

Perhatikan besar pangkat pada masing-masing variabelnya, **semakin ke kanan, besar pangkat variabel a akan semakin kecil** (a^n --> a^{n-1} --> ... --> a^0) dan **besar pangkat variabel b akan semakin besar** (b^0 --> ... --> b^n). Jadi, berdasarkan soal di atas dapat kita peroleh hasil sebagai berikut:

$(a + b)^3 = a^3 + 3ab^3 + b^3$

$(3a + 5b)^3 = (3a)^2 + 3(3a)^2(5b) + 3(3a)(5b)^2 + (5b)^3$

$= 27a^3 + 3(9a^2)(5b) + 3(3a)(25b^2) + 125b^3$

$= 27a^3 + 2(9)(5)a^2b + 3(3)(25)ab^2 + 125b^3$

$= 27a^3 + 135a^2b + 225ab^2 + 125b^3$

7. Faktorisasi bentuk Aljabar

- Hukum Distributif dan Faktor Persekutuan Aljabar

Masih ingat dengan hukum distributif untuk bilangan a, b, c. dibawah merupakan hukum distributif yang berlaku dengan aturan;

$$\underbrace{a \times (b + c)}_{\text{faktor}} = \underbrace{(a \times b) + (a \times c)}_{\text{penjumlahan suku-suku}}$$

Langkah pertama yang harus dilakukan adalah mencari faktor persekutuan terbesar dari setiap suku aljabar.

Contohnya:

Faktorkanlah bentuk aljabar berikut ini! a.
2x2 + 8x2y
b. 12abc + 15xyz
c. 3x2y – 15xy2z Jawaban:

a. 2x2 + 8x2y = 2x2 (1 + 4y) (FPB 2x2 dan 8x2y = 2x2)

b. 12abc + 15xyz = 3(4abc + 5xyz) (FPB 12abc dan 15xyz = 3)

c. 3x2y – 15xy2z = 3xy(x – 5yz) (FPB 3x2y dan 15xy2z = 3xy)

- Faktorisasi Bentuk x2 + 2xy + y2

Hasil perkalian dari (x + y)2 adalah x2 + 2xy + y2. Bentuk seperti ini disebut sebagai bentuk kuadrat sempurna.

Bentuk kuadrat sempurna mempunyai beberapa ciri khusus, yaitu:
a. Koefisien peubah pangkat dua (x2) sama dengan 1.
b. Konstanta merupakan hasil kuadrat setengah koefisien x.

Contohnya:

Faktorkanlah bentuk kuadrat sempurna dari x2 + 8x + 16!

Jawaban:

Konstanta = (½ × 8)2 = 42, maka
x2 + 8x + 16 = x2 + 8x + (4)2
= (x + 4)2
= (x + 4)(x + 4)

Faktorkanlah bentuk kuadrat sempurna dari x2 + 8x + 16! Faktorkanlah bentuk kuadrat sempurna dari x2 + 8x + 16!

Jawaban: x2 + 8x + 16 = x2 + 4x
+ 4x + 16
= (x2 + 4x) + (4x + 16)
= x (x + 4) + 4(x + 4)
= (x + 4) (x + 4)
= (x + 4)2
Jadi faktor dari x2 + 4x + 16 adalah (x + 4)2

- Faktorisasi Bentuk Kuadrat ax2 + bx + c

Selain faktorisasi bentuk x2 + 2xy + y2, faktorisasi bentuk kuadrat terdapat pula dalam bentuk ax2 + bx + c; dengan a, b, dan c merupakan bilangan real. a dan b merupakan koefisien, c adalah konstanta. Sedangkan yang menjadi peubah atau variabel adalah x2 dan x. a. Memfaktorkan bentuk ax2 + bx + c, jika a = 1

Untuk memfaktorkan bentuk aljabar seperti ini, kalian harus memperhatikan bentuk perkalian suku (x + y) dengan (x + z) berikut. (x + y)(x + z) = x(x + z) + y(x + z) (sifat distributif)

= ((x.x)+(x.z))+((y.x)+(y.z)) (sifat distributif)
= x2 + xz + xy + yz
= x2 + (y + z)x + yz

Contohnya:

Faktorkanlah bentuk aljabar dari x2 + 7x + 12!

Jawaban: x2 + 7x + 12 = x2 + (y + z)x + yz y + z = 7 yz = 12 y dan z yang memenuhi adalah y = 3 dan z = 4 atau y = 4 dan z = 3.

Jadi bentuk kuadrat dari x2 + 7x + 12 adalah:
(x+y)(x+z) = (x + 3)(x + 4) *atau*
(x+y)(x+z) = (x + 4)(x + 3).

b. Memfaktorkan bentuk ax2 + bx + c, jika a ¹ 1

Kalian telah memahami bahwa pemfaktoran bentuk ax2 + bx + c, jika a = 1 adalah (x + y)(x + z). Dengan menurunkan rumus tersebut kita dapat memperoleh rumus pemfaktoran ax2 + bx + c untuk a ≠ 1. Perhatikan pemfaktoran berikut!

ax^2 + bx + c = $(x^2 + \frac{b}{x}\text{x} + \frac{c}{a})$ (bagi setiap suku dengan a)

Selanjutnya kita cari bilangan yang jika dijumlahkan hasilnya sama dengan b/a dan jika dikalikan hasilnya sama dengan b/c.

Contohnya:

Faktorkanlah bentuk aljabar 2x2 + 3x – 14!

Jawaban:

2x2 + 3x – 14 = a(x+ p/a)(x+ q/a)
Berdasarkan soal, diperoleh nilai a = 2, b = 3, dan c = –14, sehingga:
pq = ac = –28 p + q = b = 3
Nilai p dan q yang memenuhi adalah p = –4 dan q = 7, atau p = 7 dan q = –4.

Jadi,
Untuk p = –4 dan q = 7
2x2 + 3x – 14 = 2(x + –4/2)(x + 7/2)
= (x – 2)(2x + 7)

Untuk p = 7 dan q = -4
2x2 + 3x – 14 = 2(x + 7/2)(x + -4/2)
= (2x + 7)(x – 2)

BAB III

Jadi faktor dari 2x2 + 3x – 14 adalah (2x + 7)(x – 2)

NILAI MUTLAK

A. Pendahuluan

Nilai mutlak adalah bilangan dengan nilai yang sama dari panjang atau jarak dari titik asal atau titik nol dalam koordinat. Nilai mutlak sangat berguna untuk menyelesaikan berbagai persoalan matematika, baik pada persamaan maupun pertidaksamaan.

B. Pengertian dan Konsep Nilai Mutlak

Dalam matematika terdapat konsep sesuatu yang tidak pernah bernilai negatif yang disebut nilai mutlak. Nilai mutlak bilangan 3 ditulis |3| adalah 3 dan nilai mutlak bilangan -3 ditulis |-3| adalah 3. Berapapun besar atu kecil nilai bialngan tersebut nilai mutlaknya tidak pernah bernilai negatif.

1. Konsep Nilai Mutlak suatu Bilangan

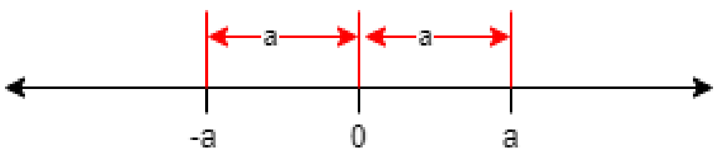
Nilai mutlak bilangan x, dinotasikan dengan |x|, didefinisikan sebagai berikut.

$|x|$ = jarak x dari titik nol pada garis bilangan

Secara formal, nilai mutlak x didefinisikan dengan atau bisa ditulis

$|x| = -x$ jika $x \geq 0$

$|x| = -x$ jika $x < 0$



Definisi diatas bisa di maknai sebagai berikut : Nilai mutlak bilangan positif ataupun nol ialah bilangan itu sendiri dan nilai mutlak bilangan negatif yaitu lawan dari bilangan tersebut. Contohnya:

$|9| = 9$, $|0| = 0$, $|-7| = -(-7) = 7$

Maka, jelas bahwasanya nilai mutlak tiap bilangan real akan selalu memiliki nilai positif atau nol.

2. Fungsi Nilai Mutlak

Fungsi nilai mutlak adalah fungsi yang variabelnya di dalam tanda mutlak. Berdasarkan definisi nilai mutlak diperoleh $f(x) = |x|$

| x |□□□ *x jika x* □ 0

□□*x jika x* □ 0

C. Sifat-Sifat Nilai Mutlak

Nilai mutlak memiliki sifat sebagai berikut.

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = |-x|$
3. $|x-y| = |y-x|$
4. $|x| = \sqrt{}|x^2|$
5. $|x|^2 = x^2$
6. jika $|x| < |y|$ maka $x^2 < y^2$
7. $|xy| = |x|\ |y|$
8. $x/y| = |x| / |y|$; $y \neq 0$
9. $|x-y| = |x| - |y|$
10. $|x+y| = |x| + |y|$

D. Persamaan Nilai Mutlak

Persamaan Nilai Mutlak yaitu suatu nilai mutlak dari sebuah bilangan yang dapat didefinisikan sebagai jarak bilangan tersebut terhadap titik 0 pada garis bilangan tanpa memperhatikan arahnya.

Bentuk Umum Persamaan Linear Nilai Mutlak yaitu untuk f(x) dan g(x) fungsi dalam variabel x

$|f(x)| = c$ dengan syarat $c \geq 0$

$|f(x)| = |g(x)|$ $|f(x)| = |g(x)|$ dengan syarat $|g(x)| \geq 0$ Contoh:

Tentukanlah himpunan penyelesaian $|2x - 9| = 5$ Jawaban

:

$|2x - 9| = 5$ ($2x - 9 = 5$ ataupun $2x - 9 = -5$)

$|2x - 9| = 5$ ($2x = 14$ ataupun $2x = 4$)

$2x - 9| = 5$ ($x = 7$ ataupun $x = 2$)

Maka, HP = {2, 7}

E. Pertidaksamaan Linear Nilai Mutlak

Pertidaksamaan nilai mutlak merupakan jenis pertidaksamaan yang mengandung nilai mutlak.

Berikut ini sifat-sifat dari pertidaksamaan nilai mutlak.

1. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
2. $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
3. $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ *atau* $x \geq a$
4. $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ *atau* $x > a$
5. $|f(x)| \leq a \Leftrightarrow -a \leq f(x) \leq a$
6. $|f(x)| < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a$
7. $|f(x)| \geq a \Leftrightarrow f(x) \leq -a$ *atau* $f(x) \geq a$
8. $|f(x)| > a \Leftrightarrow f(x) < -a$ *atau* $f(x) > a$
9. $|x| = \sqrt{x^2} \Leftrightarrow |x^2| = x^2$
10. $|f(x)| \leq |g(x)| \Leftrightarrow [f(x)]^2 \leq [g(x)]^2$
11. $|f(x)| \geq |g(x)| \Leftrightarrow [f(x)]^2 \geq [g(x)]^2$
12. $\dfrac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq a \Leftrightarrow |f(x)| \leq a\,|g(x)|$

$\Leftrightarrow |f(x)| \leq |a.g(x)|$

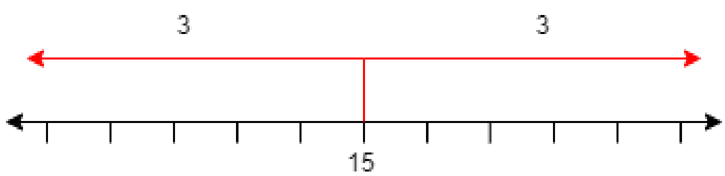
$\Leftrightarrow [f(x) + a.g(x)][f(x) - a.g(x)] \leq 0$

F. Menyelesaikan Permasalahan Nilai Mutlak Menggunakan Konsep Pertidaksamaan Linear Nilai Mutlak

Pada mobil-mobil baru, angka kilometer per liternya tergantung pada bagaimana mobil itu digunakan, apakah sering digunakan untuk perjalanan jarak jauh ataukah hanya untuk perjalanan jarak dekat (dalam kota). Untuk suatu merek mobil tertentu, angka kilometer per liternya berkisar di angka 3 kurang atau lebihnya dari 15 km/L. Berapakah jangkauan dari angka km/L dari mobil tersebut?

Jawaban:

Diketahui angka km/L dari suatu mobil berkisar di angka 3 kurang atau lebihnya dari 15 km/L.



Misalkan m adalah angka km/L dari mobil tersebut. Maka, selisih m dan 15 tidak boleh lebih dari 3 atau dapat dituliskan ke dalam |m – 15| ≤ 3

$$|m - 15| \le 3$$

$$\Leftrightarrow -3 \le m - 15 \le 3$$

$$\Leftrightarrow 12 \le m \le 18$$

BAB IV TURUNAN

A. Pendahuluan

Turunan memiliki banyak aplikasi dalam kehidupan, diantaranya menentukan jarak, kecepatan, percepatan, dan waktu tempuh suatu benda. Namun dalam penggunaannya istilah turunan seringkali disalah artikan dengan diferensial. Dengan demikian, agar memahami turunan dan memiliki bekal yang cukup untuk mempelajari materi integral sebagai materi berikutnya, serta tidak terjadi kesalahan konsep. Maka dibutuhkan pemahaman mendalam tentang konsep turunan.

B. Pengertian Turunan

Misal $f(x)$ merupakan fungsi yang terdefinisi di $\mathbb{R}$, turunan pertama dari fungsi tersebut didefinisikan sebagai limit dari perubahan rata-rata dari nilai fungsi terhadap variabel x dan ditulis sebagai:

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Asalkan nilai limit tersebut ada namun selain ∞ atau ∞ Fungsi f dikatakan terdiferensiasikan di x, apabila nilai limit di atas ada. Sementara pencarian turunannya disebut diferensiasi.

Selain menggunakan notasi $f'(x)$ untuk menyatakan turunan fungsi f terhadap x, ada notasi lain diantaranya adalah y' (notasi aksen), $D_x y$ (notasi D), $\frac{dy}{dx}$ (notasi Leibniz).

Contoh:

Diberikan $f(x) = x^2 + 4$. Berapakah $f'(2)$?

Jawaban:

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[(2+h)^2 + 4] - 8}{h}$$

$$\frac{[(h^2 + 4h + 4)^2 + 4] - 8}{}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\qquad}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4h + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 4 + h$$

$$= 4 + 0 = 4$$

C. Aturan-Aturan Turunan

1. Aturan Fungsi Konstanta

Jika $f(x) = k$, k suatu konstanta maka untuk sebarang x, $f'(x) = 0$.

Contoh:

$f(x) = 2 \Rightarrow f'(x) = 0$

2. Aturan Fungsi Identitas

Jika $f(x) = x$, maka $f'(x) = 1$

Contoh:

$f(x) = 3x \Rightarrow f'(x) = 3$

3. Aturan Pangkat

Jika $f(x) = x^n$, n bilangan bulat positif, maka $f'(x) = nx^{n-1}$

Contoh:

$f(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 2.3x^{2-1} = 6x$

4. Aturan Jumlah

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Contoh:

$f(x) = 5x^2 + 4x \qquad f'(x) = 2.5x^{2-1} + 4 = 10x + 4$

5. Aturan Selisih

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$.

$f(x) = 3x^3 - 2x^3 \Rightarrow f'(x) = 3.3x^{3-1} - 2.3x^{3-1} = 9x^2 - 6x^2 = 3x^2$

6. Aturan Hasil Kali

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka $(f \cdot g)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$.

Contoh:

$y = (5x^3 + 2)(2x^2 - 5)$

$dy = (5x^3 + 2)(4x) + (15x^2)(2x^2 - 5)$

$= 20x^4 + 8x + 30x^4 - 75x^2$

$= 50x^4 - 75x^2 + 8x$

7. Aturan Hasil Bagi

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, $g(x) \neq 0$, maka

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Contoh:

$$y = \frac{x^3 - 2}{x^2 + 4}$$

$$dy = \frac{(x^2 + 4)(3x^2) - (x^3 - 2)(2x)}{(x^2 + 4)^2}$$

$$= \frac{(x^2 + 4)(3x^2) - (x^3 - 2)(2x)}{(x^2 + 4)^2}$$

$$= \frac{3x^4 + 12x^2 - (2x^4 - 4x)}{(x^2 + 4)^2}$$

$$= \frac{3x^4 + 12x^2 - 2x^4 + 4x}{(x^2 + 4)^2}$$

$\square 2x^4 \square\ 3x^2 \square\ 4x\ \square 12$

$\square \quad {}^2 \quad 4\square_2$

$\square x\ \square$

D. Macam-Macam Turunan

1. Turunan Fungsi Aljabar

Turunan yang berbentuk perkalian dan turunan dalam pembagian fungsi aljabar termasuk dalam pembahasan turunan fungsi aljabar. (H. J. Lumbantoruan, 2020). Bentuk perkalian dalam turunan fungsi aljabar dapat dilihat sebagai berikut:

Contoh: $h(x) = u(x).\ v(x)$.

Jadi, turunan fungsi tersebut adalah $h'(x) = u'(x).\ v(x) + u(x).\ v'(x)$.

Keterangan:

- $h(x)$: fungsi dalam bentuk perkalian fungsi
- $h'(x)$: turunan fungsi dalam bentuk perkalian
- $u(x)$, $v(x)$: fungsi dengan variable x.
- $u'(x)$, $v'(x)$: turunan fungsi dengan variable x

Bentuk pembagian dalam turunan fungsi aljabar dapat dilihat sebagai berikut:

Contoh: $h(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$.

Turunan dari fungsi tersebut adalah: $h'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Keterangan:

- $h(x)$: fungsi dalam bentuk perkalian fungsi.
- $h'(x)$: turunan fungsi bentuk perkalian.
- $u(x)$, $v(x)$: fungsi dengan variable x.
- $u'(x)$, $v'(x)$: turunan fungsi dengan variable x..

2. Turunan fungsi eksponensial

$$y = e^x \Rightarrow \ln y = x \Rightarrow \frac{1}{y}\, y' = 1 \Rightarrow y' = y = e^x$$

$$y = e^{kx} \Rightarrow y' = k\,e^{kx}$$

Contoh:

$$y = e^{6x} \Rightarrow y' = 6e^{6x}$$

3. Turunan logaritmik

Turunan fungsi logaritma natural yaitu:

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx}\left[m \ln[f(x)] + n \ln[g(x)] \right]$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{m}{f(x)}\frac{df(x)}{dx} + \frac{n}{g(x)}\frac{dg(x)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{m}{f(x)}\frac{df(x)}{dx} + \frac{n}{g(x)}\frac{dg(x)}{dx} \right]$$

Contoh:

$$y = (x^2 + 3x + 5)^4 (2x + 3)^2$$

$$\ln y = \ln[(x^2 + 3x + 5)^4 (2x + 3)^2]$$

$$\ln y = 4\ln(x^2 + 3x + 5) + 2\ln(2x + 3)$$

$$\frac{d}{dx} \ln y = 4\frac{d}{dx} \ln(x^2 + 3x + 5) + 2\frac{d}{dx} \ln(2x + 3)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{4(2x + 3)}{x^2 + 3x + 5} + \frac{4}{2x + 3}$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{4(2x + 3)}{x^2 + 3x + 5} + \frac{4}{2x + 3} \right]$$

$\frac{dy}{dx} \square (x^2 \square 3x \square 5)\,(2^4\ \overline{x\ \ \square 3)^2}\ \square\square\ \overline{x4(2^2}$

$\square x3x\square\square 3)5 \square 2x4\square 3\square\square\square\ dx\ \ \square$

4. Turunan Implisit

Variabel yang terdapat dalam fungsi yang telah ditentukan merupakan pengertian dari turunan fungsi. (J. H. Lumbantoruan, n.d.)

Turunan suatu fungsi dengan variable x adalah: $x\frac{d}{dx}$.

Turunan suatu fungsi dengan variabel y adalah: $y\frac{d}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$

Turunan suatu fungsi dengan variable x dan y adalah: $xy\frac{d}{dx} = xy\frac{d}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$

Contoh:

$x^2 + 2y + xy = 5$

$\frac{dy}{dx} = \ .....?$

Jawaban:

$2x + 2\frac{dy}{dx} + \left(1.y + x.\frac{dy}{dx}\right) = 0$

$2\frac{dy}{dx} + x\frac{dy}{dx} = -y - 2x$

$\frac{dy}{dx}(2 + x) = -y - 2x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-y - 2x}{2 + x}$

5. Turunan parametric

Jika $y = f(t)$ dan $x = f(t)$ maka: dy

$dy\ dt$

  . dx dt dx

Contoh:

y t^4 4t

 x t_2

dy 4t_3 4 dan dx
2t dt dt

Sehingga

dy dy dt. 4 (t t^{12}1) 2 1) 2(t
dx dt dx 2t

Jika hendak mencari turunan kedua:

3 d $dydx$. dt 4t 2
d y

 Rumus turunan trigonometri berpangkat 2 atau lebih

a y) k.sin^n u y' k n. .sin^{n1} u.cos . 'uu b

y) k.cos^n u y' k n. .cos^{n1} u.sin . 'uu

c y) k.tan^n u y' k n. .tan^{n1} u.sec^2 uu. '

---

1 dt dx
2t dx

2 . **Turunan trigonometri**

 Rumus turunan trigonometri berpangkat 1

a y) k.sin$u$ y' k.cos .
'uu b y) k.cos$u$ y' k.sin .
'uu c y) k.tan$u$ y' k.sec^2
uu. '

3 uu. ' d
y) k.cot$u$ y' k.csc e y) k.sec$u$
 y' k.sec .tan . 'u uu

f) y k.csc$u$ y' k.csc .cot . 'u uu

d $y) \square k.\cot^n u \square \square\square y' k n. .\cot^{n\square 1} u.\csc^2 uu. '$ e $y) \square k.\sec^n u$

$\square \square y' k n. .\sec^{n\square 1} u.\sec .\tan . 'u uu$

f $) y \square k.\csc^n u \square \square\square y' \; k n. .\csc^{n\square 1} u.\csc .\cot . 'u \quad uu$

E. Contoh Aplikasi Turunan dalam Kehidupan Sehari-Hari Biaya untuk memproduksi x bungkus keripik buah adalah $\square\square \frac{1}{4} x^2 \square 25x \square 25\square\square\square$ ribu

$\square$

rupiah. Jika setiap bungkus keripik dijual dengan harga $\square\square\square 55 \square \frac{1}{2} x \square\square\square$ ribu rupiah, maka

keuntungan maksimum yang dapat diperoleh adalah….

Jawaban:

fungsi Fungsi pengeluaran dari kasus di atas adalah $f x( ) \square \frac{1}{4} x^2 \; 25x \square 25$, sedangkan

penjualan sebanyak bungkus keripik tempe adalah $g(x) \square x.\square\square 55\square \frac{1}{2} x\square\square\square\square 55x\square \frac{1}{2} x^2$.

Karena $\square$

keuntungan didapat dari hasil penjualan dikurangi pengeluaran (modal), maka kita peroleh fungsi keuntungan

$h x( ) \square g x( ) \square f x( )$ $\qquad \underline{3}(20)^2 \square 30(20)\square 25$

$\square\square \; 1 \; ^2 \square \square 1 x^2 \square 25x \square 25\square\square$ $\qquad h x( ) \square\square \square\square\square 3004600\square \square 25 \quad 275$

$\square\square 55x \square 2 x \quad \square \quad \square\square \square\square 4 \quad \square$

$-\frac{3}{4} x^2 \; 30x \square 25$ Jadi, keuntungan maksimum yang $\square\square x \square$ diperoleh adalah Rp275.000,00. Nilai fungsi akan maksimum ketika $h x'( ) \square 0$;

$\square \frac{3}{4}(2)^2 \square 30x \square 0$

3

□ _ x □□30

2 x □ 30□

2

3x □ 20

Substitusi x=20 pada h(x).

DAFTAR PUSTAKA

Amir, Mohammad Faizal, and Bayu Hari Prasojo. "Matematika Dasar." (2016).

Gumilar, Hendi Senja. "Matematika 1 Kelompok Seni, Pariwisata, dan Teknologi Kerumahtanggaan: untuk SMA Kelas X SMK/MAK." (2008).

Listra, Listra. "Himpunan Bilangan Real." (2022).

Pertidaksamaan. Sugiyono. http://staff.uny.ac.id/sites/default/files/pendidikan/ir-sugiyonomkes/11-pertidaksamaan.pdf

Achmad, Asmar. "Modul pembelajaran SMA matematika umum kelas X: pertidaksamaan rasional dan irasional satu variabel." (2020).

Supriadi, Endang. "e-Modul Matematika kelas X: nilai mutlak." (2019).

Novrida, Lizza. "E-modul matematika kelas XI: turunan." (2019).

Saputri, Cristallia Angelli. "Turunan." (2021).