复变函数重点

$chapter$ 1

辐角主值的计算：

$$arg(x+iy)=\begin{cases} arctan\frac{y}{x} & 一、四象限 \\ arctan\frac{y}{x}+\pi & 第二象限 \\ arctan\frac{y}{x}-\pi & 第三象限 \end{cases}$$

$tips$:

1.$arg\in(-\pi,\pi]$

2.$arg0,arg\infty$ 无意义

3.$|z|^2=z\bar{z},|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

4.指数式的标准形式：$r(实数)e^{i\theta}$

5.复数的开方($deMoivre$公式)以n为周期，有n个值(内接圆正n边形顶点)

6.$z_0是z_n的极限即\lim\limits_{n\to\infty}|z_n-z_0|=0$

$Some\ Definition$:

- 复平面(开复平面或有限平面) && 闭复平面或扩充平面
- 区域：非空，开集(无膜)，连通(任意内点用全在区域中的折线连接) vs 闭区域(有膜)
- 有界集：可包含在以原点为中心的某一圆内
- $Jordan$曲线(简单曲线)：无重点且连续
- 任一简单闭曲线分平面为两区域，其中有界集称为内区域，无界集称为外区域
- $区域\begin{cases} 单连通(无洞，无内割痕) \\ 多连通 \end{cases}$

$chapter$ 2

复变数函数

单值函数

z与唯一复数$w=u+iv$对应

多值函数

z对应两个及以上w

一个复变函数对应两个实变函数$u(x,y),v(x,y)$或$u(r,\phi),v(r,\phi)$

一一映照

$z_1-z_2\neq0\longleftrightarrow w_1-w_2\neq0$

求曲线在映照下的像的一般方法

法一：1.求映照w确定的两个实变函数。2.将原像曲线方程与函数对应方程联立，消x,y得到关于u，v的方程。
法二：将原像方程写成关于z的方程，再带入逆映照。

函数的极限

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$|z-z_0|<\delta$时，有$|f(z)-w_0|<\varepsilon$，则称当z趋向于z_0时，$f(z)$的极限值是w_0

函数的连续

若$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$，那么称$f(z)$在$z_0$连续，推广至区域$D$连续记为$f(z)\in C(D)$

函数连续的充要条件：$u(x,y),v(x,y)$连续

结论

1.多项式在复平面处处连续，有理分式在除去使分母为0的点连续

2.$argz$在$z=0$与$x<0$时不连续

函数的导数

$w=f(z)$在z的某个邻域内有定义，若$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta)-f(z)}{\Delta z}$存在，则称$f(z)$在$z$可微

解析

$f(z)$在z_0的某个邻域($|z-z_0|<\delta$)内每一点可微，则称$f(z)$在z_0解析

奇点

$f(z)$在z_0的任一领域内都有不可微的点，则称z_0为$f(z)$的奇点

结论

1. $f(z)=\bar{z}$ 处处不可微，处处不解析
2. $f(z)$解析，若$|f(z)|=const.$，则$f(z)=const.$

$Cauchy-Riemann$ 等式(判断可微的充要条件)

设$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$定义在区域D内，则$f(z)$在点$z=x+iy\in D$可微的充要条件是：
$$\begin{cases}(1)u(x,y),v(x,y)\text{在点}(x,y)\text{都可微；}\\(2)u(x,y),v(x,y)\text{在点}(x,y)\text{满足}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$$
若$f(z)$可微，则$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$

单叶函数

$w=f(z)$是区域D内一一解析映照，则称$f(z)$是D内的单叶函数，称D为$f(z)$的单叶性区域

幂函数$w=z^n$

z的单叶性区域(平面角域)为：$0<|z|<+\infty,\frac{(2k-1)\pi}{n}<argz<\frac{(2k+1)\pi}{n}(k\in\mathbb{Z})$，映照为角域
$0<|w|<+\infty,(2k-1)\pi<argw<(2k+1)\pi$

根式函数$w=\sqrt[n]{z}$

辐角变化

z平面上存在一条起点为a，终点为b的连续曲线.选定$arga\Rightarrow argb$被确定$\Delta_l argz=argb-arga$

l是连续闭曲线$\begin{cases}\Delta_l argz=2\pi & \text{原点在内}\\\Delta_l argz=0 & \text{原点在外}\end{cases}$

支点

在$z=a$点的充分小邻域内，作一条包围该点的闭曲线C，绕C连续转动一周后$f(z)$从一个值变到另一个值，就称a是$f(z)$的支点。

ps：考虑$\Delta_l argz$是否引起$f(z)$的任何变化

$z=0,z=\infty$是$w=\sqrt[n]{z}$的唯一两个支点

$w=\sqrt{z^2-1},w=\sqrt[4]{\frac{z(1-z)^3}{(z+i)^4}}$的支点？$Arg(z-1)$围绕$z=1$转动

支割线

连接$f(z)$任意两支点的**简单**曲线
目的：防止曲线包围支点

单值解析分支

第k支的表达式为$w_k=\sqrt[n]{r}exp(i\frac{argz+2k\pi}{n}),k=0,1,2,...,n-1$

w_k把割开了的z平面$(2k-1)\pi<argz<(2k+1)\pi$映为角域$D_k,\frac{(2k-1)\pi}{n}<argw<\frac{(2k+1)\pi}{n}$

其他初等函数

初等函数	具体表达式	保形变换	杂项
指数函数	$w=e^z$	$a<Imz<b \quad b-a\leq 2\pi \Rightarrow a<Argw<b$	$Arge^z=Imz+2k\pi$
对数函数	$w=Lnz$	$-\pi<argz<\pi \Rightarrow (2k-1)\pi<Imw_k<(2k-1)\pi$	$Lnz=ln\|z\|+iArgz$ $Ln\overline{z}=\overline{Lnz}$
三角函数	$w=\begin{cases}sinz=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\\cosz=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\end{cases}$		$sinz,cosz$无界 $\|sinz\|=\sqrt{cos^2hy-cos^2x}$ $sin(iz)=isinhz$ $cos(iz)=coshz$
双曲函数	$w=\begin{cases}sinz=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}\\cosz=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}\end{cases}$		$cosh(a+b)=coshacoshb+sinhasinhb$ $sinh(a+b)=sinhacoshb+coshasinhb$
反三角函数	$w=\begin{cases}Arcsinz\\Arccosz\end{cases}$		解法：两边取三角函数，令$e^{iz}=\beta$，求解关于β的一元二次方程，最后两边取Ln
一般幂函数	$w=z^\alpha=e^{\alpha Lnz}$		

$chapter$ 3

函数的积分

条件：$f(z)$在（逐段）**光滑**曲线上**连续**
$\int_C f(z)dz=\int_C udx-vdy+i\int_C vdx+udy$

参数法求积分(不解析函数只能用此办法，含$|dz|,\bar{z}$...)

t为参数且$a\leqslant t\leqslant b$，正方向为逆时针方向

$\int_C f(z)dz=\int_a^b f(z(t))z'(t)dt$

- 直线参数方程：$z=$(终点$-$起点)$t+$起点（$0\leqslant t\leqslant 1$）
- 圆的参数方程：$z=$圆心$+$半径$e^{i\theta}$（θ从圆心计算）

结论：$C:|z-a|=R$，正方向为逆时针方向

$$\oint_C\frac{1}{(z-a)^n}dz=\begin{cases}2\pi i & n=1\\0 & n\neq 1\end{cases}$$

长大不等式

$|\int_C f(z)dz| \leqslant \int_C |f(z)||dz| \leqslant sup|f(z)| \cdot s_C$

柯西积分定理

闭域$\bar{D}$内闭路$\widetilde{C}$围成单（多）连通区域，$f(z)$在$\bar{D}$内解析，则$\int_C f(z)dz = 0$

考虑：是闭路？奇点在内？

$Newton - Leibniz$ 等式

若$f(z)$在单连通区域D内解析$H(z)$是$f(z)$的**任一**原函数，$\forall z_0, z \in D$

$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = H(z) - H(z_0)$

$Q: how\, to\, prove?$

柯西积分公式

若$f(z)$在闭路C及其所围区域D内解析，则$\forall a_0 \in D$
$\int_C \frac{f(z)}{z-a_0}dz = 2\pi i f(a_0)$
注意：z前的系数必为1

$prove?$ 连续+长大不等式，难点：构造出$f(z)$

高阶导数积分公式

$\forall a_0 \in D$解析域，$f(z)$有任意阶导数！！
$\int_C \frac{f(z)}{(z-a_0)^n}dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a_0)$
$prove?\, definition$+归纳+长大不等式，难点：$k-1 \rightarrow k$

平均值公式（边界决定内部）

$f(z)$在闭圆$|z-a| \leqslant R$内解析
$f(z) = \frac{1}{2\pi R}\int_{|z-a|=R} f(\zeta)ds$

最大模原理

$f(z)$在有界区域$D+C$上解析且不恒等于常数，则$\exists a \in C, s.t. |f(z)|_{max} = |f(a)|$

柯西不等式（解析函数导数模的估计）

设$f(z)$在$|z| \leqslant R$上解析，且**边界上**的最大值为$M(R)$，则有
$|f^{(n)}(z)| \leqslant \frac{n!M(R)}{R^n}$

$Liouville$定理

不恒为常数的整函数模无界

$ex:$

证明：$f'(a) = \frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi} Re[f(a+re^{i\theta})]e^{-i\theta}d\theta$

难点：运用柯西积分定理+取共轭

Tip :对零点问题用反证+取倒数+最大模原理

Tip :对外部解析的问题，构造更大的复闭路

$chpter$ 4

调和函数

$\Delta f = 0$

定理：f解析，其实部和虚部为共轭调和函数

必考题

已知u在单连通区域D内调和，求D内的解析函数$f(z)$

$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + C$

$\xrightarrow{C-R} v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + C$

$v(x,y) = \int_{x_0}^{x} -\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=y_0} dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x} dy + C$

$f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y) \xrightarrow{x=z,y=0} f(z)$

其中C是任意实常数

调和函数性质

$u(z)$只能在D的边界C上取得$\bar{D}$上的最大值和最小值，构造$g(z) = e^{\pm u(z) \pm iv(z)}$，利用最大模原理即可

调和函数的泊松积分公式

$f(z)$为调和函数，其在圆内任意点的值可以用圆周上的积分表示出来（柯西积分公式+柯西积分定理$z = \frac{R^2}{r}$）

$f(z_0 + re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rRcos(\theta - \varphi) + r^2} f(z_0 + re^{i\varphi}) d\theta$

$chapter$ 5

解析函数的级数展开

部分和定义！ 一致收敛的定义！ $Cauchy$收敛准则

$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$的敛散性：

$|z| < 1$时收敛，$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ 但不绝对收敛(?)

$|z| \geqslant 1$时发散（逐项不收敛）

$|z| \leqslant r, 0 < r < 1$强级数绝对收敛

- $Weierstrass$定理

设$f_n(z)$在D内解析且$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$在$D$内一致收敛，则$f(z)$在$D$内解析，且
$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k)}(z), k = 1, 2, 3, \ldots$**这是实函数没有的**

- $Abel$定理

收敛半径

实系数幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| x^n$的收敛半径R是$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (z-a)^n$的收敛半径

$R = \frac{1}{r}$其中$r = \lim\limits_{n \to +\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$或$r = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n}$

$Taylor$展开（必考）

设$f(z)$在点a解析，以点a为半径作圆，直至碰到$f(z)$的奇点

$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n \qquad |z-a| < R$

$steps:$

1.求奇点

2.求收敛半径$R=$|展开点-距离最近的奇点|

3.从$n=0$处展开成幂级数，注意从基本的函数展开开始再运用变量代换

4.在幂级数展开后**写出收敛半径**

$tips:$

1.求和号内的首个常数项要与求和号外的常数项合并

2.不好展开的函数/**级数乘级数**考虑求导/积分函数是否比较好展开

3.展开到第n项指展开到z^{n-1}

4.$n+1/n-1$要换成n

零点

z_0为$f(z)$的m级零点
$\iff f(z_0)=\ldots=f^{(m-1)}(z_0)=0, f^{(m)}(z_0)\neq 0 \iff f(z)=(z-z_0)^m g(z), g(z)$在$z_0$解析

单零点：1级零点

$Laurent$级数

$f(z)$在圆环域$D: r<|z-a|<R$中解析，则$f(z)$一定能在这个圆环中展开成罗朗级数，即
$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$

奇点

$$\cdot\begin{cases}\text{可去奇点：}1.\text{无主要部分，}\exists\rho>0, f(z)\text{在}0<|z-a|<\rho\text{内有界；}2.\lim\limits_{z\to a} f(z)=a_0\\ \text{极点：}1.f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}\text{且}\varphi(a)\neq 0\to a\text{是}m\text{级极点；}2.a\text{是函数}g(z)=\frac{1}{f(z)}\text{的}m\text{级零点；}3.\lim\limits_{z\to a} f(z)=+\infty\\ \text{本性奇点：}1.m=+\infty\text{；}2.\lim\limits_{z\to a} f(z)\text{不存在}\end{cases}$$

无穷奇点

做代换$\varphi(\zeta)=f(\frac{1}{\zeta})$再讨论，此时积分区间变化

$ex:$

$1=e^{i\theta}e^{-i\theta}$的运用$P104.6$

$chapter$ 6

留数定理

> 设a是$f(z)$的孤立奇点，C是a充分小邻域内一条把a点包含在其内部的闭路，定义留数（残数）为：
> $Res[f(z),a]=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz$

$$\cdot\begin{cases}Res[f(z),a]=a_{-1} & \text{a为本性奇点\&else}\\ Res[f(z),a]=\frac{1}{(m-1)!}\lim\limits_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-a)^m f(z)] & \text{a为m级极点待定系数法（求高级极点的优先级高于直接求导）}\\ Res[\frac{P(z)}{Q(z)},a]=\frac{P(a)}{Q'(a)} & \text{a为1级极点（只适用于1级）}\end{cases}$$

积分计算

$\int_C f(z)dz = 2\pi i Res[f(z), a]$

C内含有本性奇点用留数较为麻烦：$e.g.\ \int_{|z|=7} \frac{cos\frac{1}{z-2}}{6-z}dz$

简单办法：寻找$|z|=7$所处的解析范围，在本性奇点$z=2$处展开为罗朗级数，则$\int_{|z|=7} \frac{cos\frac{1}{z-2}}{6-z}dz = 2\pi a_{-1}$

计算实积分

> ### 小圆弧定理
>
> 当ρ充分小，$f(z)$在$C_\rho: z = a+\rho e^{i\theta}, \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$**上连续**，且$\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z) = k$，则
> $\lim\limits_{\rho\to 0}\int_{C_\rho} f(z)dz = i(\beta-\alpha)k$
>
> ### 大圆弧定理
>
> $C_\rho: |z| = R > R_0, f(z)$在$D: |z| > R_0, 0 \le argz \le \alpha, 0 < \alpha \le 2\pi$内**连续**，且$\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = k$，则
> $\lim\limits_{\rho\to\infty}\int_{C_\rho} f(z)dz = i\alpha k$
>
> ### 约当定理
>
> 当ρ充分大，$f(z)$在$C_\rho: |z| = \rho, Imz > -a(a>0)$**上连续**，且$\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$，则对$\forall\lambda > 0$都有
> $\lim\limits_{\rho\to\infty}\int_{C_\rho} f(z)e^{i\lambda z}dz = 0$

1. $\int_{0(-\pi)}^{2\pi(\pi)} R(cos\theta, sin\theta)d\theta = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} Res[R(z), a_k] \qquad a_k$为所有奇点

令
$z = e^{i\theta} \quad d\theta = \frac{1}{iz}dz \quad cos\theta = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}) = Re\ e^{i\theta} \quad sin\theta = \frac{1}{2}(z-\frac{1}{z}) = Im\ e^{i\theta} \quad$ 路径 $\to |z| = 1$(逆)

必备技巧：奇偶性、变量代换

2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} Res[\frac{P(z)}{Q(z)}, a_k]$

证明用到：大圆弧定理

条件：$Q(x)$的次数高$P(x)$2次及以上，$Q(x)$在x轴上无零点，a_k为上半平面所有奇点

3. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}cosmxdx = Re\{2\pi i\sum_{k=1}^{n} Res[\frac{P(z)}{Q(z)}e^{imz}, a_k] + \pi i\sum_{k=1}^{l} Res[\frac{P(z)}{Q(z)}e^{imz}, x_k]\}$

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}sinmxdx = Im\{2\pi i\sum_{k=1}^{n} Res[\frac{P(z)}{Q(z)}e^{imz}, a_k] + \pi i\sum_{k=1}^{l} Res[\frac{P(z)}{Q(z)}e^{imz}, x_k]\}$

证明用到：小圆弧定理+约当定理

条件：$Q(x)$的次数高$P(x)$1次及以上，$Q(x)$在x轴上有l个一级零点x_k，a_k为上半平面所有奇点，$m > 0$

幅角原理

> $lemma$：设a, b分别是$f(z)$的m级零点和n级极点，则a, b都是$\frac{f'(z)}{f(z)}$的一级极点，且
> $Res[\frac{f'(z)}{f(z)}, a] = m, \quad Res[\frac{f'(z)}{f(z)}, b] = -n$
> $prove: f(z) = (z-a)^m\varphi(z)\ldots$

$N - P = \frac{1}{2\pi}\Delta_C argf(z)$
$N = \sum C$内部的零点级数，$P = \sum C$内部的极点级数

儒歇定理（必考）

设函数$f(z)$及$\varphi(z)$在闭路C及其内部解析，且在C上有不等式$|f(z)| > |\varphi(z)|$，则在C内部$f(z)+\varphi(z)$和$f(z)$的零点个数相等（和函数零点的个数取决于模较大函数在C中的零点个数）

圆环情形：$e.g. \quad r_1 < |z| < r_2$考虑$|Z| < r_1$内$N_{内圆}$；说明$|z| = r_1$上无零点；考虑$|Z| < r_2$内$N_{外圆}$；则$N = N_{外圆} - N_{内圆}$

chapter 7

唯一性定理

$f(z), g(z)$在区域D**内**解析，若$f(z), g(z)$在互不相同的点列$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots$上的值相等且$\lim\limits_{k\to\infty} = a$（$a$必须在$D$内），则$f(z) \equiv g(z) \quad z \in D.$

零点问题

证明无零点用最大模原理（边界不要求解析）；证明有零点用儒歇定理$f(z_0) = z_0 \dots$（边界必须解析）；证明恒为零用唯一性定理

chapter 8

导数的几何意义

> 设$w = f(z)$在D内解析，$z_0 \in D, w_0 = f(z_0)$, $f'(z_0) \neq 0$，设$C: z(t) = x(t) + iy(t)$是D内过z_0的简单光滑曲线，$f(z)$将C映成w平面过w_0的曲线C_1

有：
$w'(t) = f'(z(t))z'(t)$
$arg[w'(t_0)] = arg[f'(z_0)] + arg[z'(t_0)]$
$arg[f'(z_0)] = arg[w'(t_0)] - arg[z'(t_0)]$
又有：
$|f'(z_0)| = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$
综上：$arg[f'(z_0)]$为旋转角，$|f'(z_0)|$为伸张系数，只与z_0有关

保形变换

区域D内**单叶函数**所确定的变换为保形变换（$f'(z) \neq 0$）

黎曼定理

如果D是闭复平面上一个边界至少包含**两个点**（∞可以看作一点）的**单连通**区域，则必存在单叶函数$w = f(z)$把D变为单位圆内部D_1.

分式线性变换

$w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0$

规定：$w(-\frac{d}{c}) = +\infty, w(\infty) = \frac{a}{c}$，满足黎曼定理

$w = \frac{az+b}{cz+d} = \overbrace{\frac{a}{c}}^{T} + \overbrace{|\frac{b}{c} - \frac{ad}{c^2}|\overbrace{exp\{iarg(\frac{b}{c} - \frac{ad}{c^2})\}}^{R}}^{S}\overbrace{\frac{1}{z+\frac{d}{c}}}^{I}$

寻找分式变换

- 任给z平面上三个不同点z_1, z_2, z_3和w平面上三个不同点w_1, w_2, w_3，存在一个唯一的分式线性变换把z_1, z_2, z_3分别变成w_1, w_2, w_3

$\frac{w-w_1}{w-w_2} \cdot \frac{w_3-w_2}{w_3-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$

- 若给定两个条件$w(z_1)=w_1,w(z_2)=w_2$（一般为两个对称点）则变换可以表示为

$\frac{w-w_1}{w-w_2}=k\frac{z-z_1}{z-z_2}$

k为任意复常数，一般由边界对应边界的关系确定

定义：z_1,z_2关于有限圆周$|z-z_0|=R$的对称点：$|z_1-z_0||z_2-z_0|=R^2$，圆心对应无穷

几种常见的保形变换

- 上半平面$\rightarrow$单位圆，把z_0变为圆的圆心
  $w=e^{i\theta}\frac{z-z_0}{z-\bar{z_0}}$
- 单位圆$\rightarrow$单位圆，把z_0变为第二个圆的圆心
  $w=e^{i\theta}\frac{z-z_0}{1-z\bar{z_0}}$
- 二角形$\rightarrow$上半平面
  $\varphi_1=\frac{z-顶点1}{z-顶点2}$
  将（原像）条形域变成角域用指数函数e^z，将（原像）角域变成条形域用对数函数主值lnz

$chapter$ 9

拉氏变换

$Def:f(t)$是实变量t的实值函数或复值函数，当$t<0$时$f(t)=0$
$F(p)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt$
若其在p的某个区域内收敛，则其称为$f(t)$的拉普拉斯变换（像函数）记为$F(p)=L[f(t)]$，$f(t)$为本函数，记为$f(t)=L^{-1}[F(p)]$

注：$f(t)$的拉氏变换就是$f(t)h(t)e^{-\sigma t}$的傅氏变换

一些重要的拉式变换

$$L[1]=\frac{1}{p}$$
$$L[e^{at}]=\frac{1}{p-a}$$
$$L[cos\omega t]=\frac{p}{p^2+\omega^2}$$
$$L[sin\omega t]=\frac{w}{p^2+\omega^2}$$
$$L[t^n]=\frac{n!}{p^{n+1}}$$

本函数的微分

$L[f^{(n)}(t)]=p^nL[f(t)]-p^{n-1}f(+0)+p^{n-2}f^{(1)}(+0)+...+f^{(n-1)}(+0)$

本函数的积分

$L[\int_0^tf(t)dt]=\frac{1}{p}L[f(t)]$

像函数的微分

$\frac{d^n}{dp^n}L[f(t)]=L[(-t)^nf(t)]$

像函数求导，本函数乘$-t$

像函数的积分

$\int_p^\infty L[f(t)]dp = L[\frac{f(t)}{t}]$

像函数积分，本函数除以t

位移定理

$F(p+a) = e^{-at}F(p)$

$L^{-1}[F(p+\mu)] = e^{-\mu t}L^{-1}[F(p)]$

延迟定理

$L[f(t-\tau)h(t-\tau)] = e^{-\tau p}L[f(t)]$

卷积定理

$L[f_1 * f_2] = L[f_1]L[f_2]$

$L^{-1}[F_1(p)F_2(p)] = L^{-1}[F_1(p)] * L^{-1}[F_2(p)]$

$tips:$

- 分母不能因式分解→配方→位移定理
- $\frac{1}{(p-a)^2(p^2+b)} = \frac{A}{p-a} + \frac{B}{(p-a)^2} + \frac{Cp+D}{p^2+b}$保留
  $A = -\frac{2a}{2a^2b+b^2+a^4}, B = \frac{a^2+b}{2a^2b+b^2+a^4}, C = \frac{2a}{2a^2b+b^2+a^4}, D = \frac{a^2-b}{2a^2b+b^2+a^4}$直到最后再代入数值
- 积化和差