Einführung in die Informatik 2 - Repetitorium WS 2016/17
Technische Universität München

Kevin Kappelmann 21. März 2017

Induktion - Prinzip und Fallbeispiel

1 Theorie

Induktion ist einer der wichtigsten Beweismittel eines Informatikers. Es ist äußerst wichtig, nicht nur Induktionen durchführen zu können, sondern vor allem auch ihr Prinzip und ihre Struktur zu verstehen.
Induktionen können ganz allgemein über partielle Ordnungen, die keine unendlich absteigenden Ketten besitzen, durchgeführt werden. Oft verwenden wir als Universum der partiellen Ordnung $\mathbb{N}_0$ und als partielle Ordnung die "Kleiner-Gleich-Relation" $\leq \subset \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. Besitzen wir also nun eine solche partielle Ordnung $\preceq \subseteq M \times M$ und wollen die Gültigkeit von $P(m)$ für alle Elemente m unseres Universums M zeigen, so können wir wie folgt verkehren:

1. Zeige die Gültigkeit von P(b) für alle $b \in M$, die keine Vorgänger bezüglich $\preceq$ besitzen (diese existieren, da $\preceq$ keine unendlich absteigende Ketten besitzt).
2. Fixiere ein beliebiges $m \in M$, welches Vorgänger $v_0, v_1, \ldots, v_n$ bezüglich $\preceq$ besitzt.
   (a) Nimm an, es gelte $P(v_0), \ldots, P(v_n)$
   (b) Zeige, dass dann auch $P(m)$ gilt.

2 Fallbeispiele

Wem das jetzt alles etwas zu abstrakt war, der darf sich jetzt auf zwei angewandte Beispiele freuen, in dem das Ganze hoffentlich klarer wird.

2.1 Gauß das Wunderkind

Von 1777 bis 1855 lebte einst einer der einflussreichsten Mathematiker aller Zeiten Carl Friedrich Gauß. Damals schon als "Princeps Mathematicorum" bezeichnet, was so viel wie "Fürst der Mathematik" heißt, entdeckte er bereits als 9-jähriger Schüler, als er als Aufgabe die Summe der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ ausrechnen musste, die gaußsche Summenformel

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n * (n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}_0 \tag{1}$$

Auch wenn der neunjährige Gauß diese damals wohl nicht mit Induktion bewies, wollen wir dies nun tun.

Proposition 2.1. *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die gaußsche Summenformel* (1)

Beweis. Wir zeigen die Aussage mit Induktion über n.

- <u>Induktionsbasis:</u> Sei n=0, dann

$$\sum_{i=0}^{0} i = 0 = \frac{0 * (0+1)}{2}$$

- <u>Induktionsschritt:</u> Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig fixiert

Gauß war übrigens auf dem 10DM-Schein und schaut euch bei eurer EIDI2-Klausur von oben zu ;)

- Induktionshypothese: Es gelte $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n*(n+1)}{2}$
- Induktionsbehauptung: Dann gilt auch $\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)*((n+1)+1)}{2}$
- Beweis:

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = n+1+\sum_{i=0}^{n} i \overset{I.H.}{=} n+1+\frac{n*(n+1)}{2} = n+1+\frac{n^2+n}{2} = \frac{2n+2+n^2+n}{2}$$
$$= \frac{(n^2+2n+1)+n+1}{2} = \frac{(n+1)^2+n+1}{2} = \frac{(n+1)*((n+1)+1)}{2}$$

□

Bitte schreibt eure Induktionsbeweise stets so strukturiert, wie in diesem Beispiel! Behaltet am besten einfach diese Form bei.

2.2 Eine Basis ist nicht genug

Der folgende Fall ist (wahrscheinlich) für EIDI2 nicht interessant, nichtsdestotrotz wollen wir ihn hier kurz besprechen.
Wir betrachten folgende Sequenz

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 8, \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + 2 * a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Proposition 2.2. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$a_n = 3 * 2^{n-1} + 2(-1)^n =: f(n)$$

Beweis. Wir zeigen die Aussage mit Induktion über n. Wir bemerken, dass die Definition von a_{n+2} sowohl von a_n als auch von a_{n+1} abhängig ist, weswegen wir, um im Induktionsschritt die Induktionshypothese für zwei Vorgänger annehmen zu können, im Basisfall sowohl die Aussage für $n = 1$ als auch für $n = 2$ beweisen müssen.

- Induktionsbasis:
  - $n = 1$: $\quad a_1 \overset{Def.}{=} 1 = 3 * 2^0 - 2 = f(1)$
  - $n = 2$: $\quad a_2 \overset{Def.}{=} 8 = 3 * 2^1 + 2 = f(2)$
- Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig fixiert
  - Induktionshypothese: Es gelte $a_n = f(n)$ und $a_{n+1} = f(n+1)$
  - Induktionsbehauptung: Dann gilt auch $a_{n+2} = f(n+2)$
  - Beweis:

$$\begin{aligned} a_{n+2} &\overset{Def.}{=} a_{n+1} + 2 * a_n \overset{I.H.}{=} 3 * 2^n + 2 * (-1)^{n+1} + 2 * (3 * 2^{n-1} + 2 * (-1)^n) \\ &= 2 * 3 * 2^n + 2 * ((-1)^{n+1} + 2 * (-1)^n) \\ &= 3 * 2^{n+1} + 2 * ((-1)^n * (-1 + 2)) = 3 * 2^{n+1} + 2 * (-1)^n \\ &= 3 * 2^{n+1} + 2 * (-1)^{n+2} \end{aligned}$$

□

3 Übungen

- Ein kleiner Gauß ist zu wenig! Zeigen Sie: $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n*(n+1)*(2*n+1)}{6}, \forall n \in \mathbb{N}_0$
- DS-Flashbacks: Die Anzahl der Holztüren Eiche fundiert mit Plastikgriff (kurz: HtEfmPg) der Preisklasse n ist durch folgende Funktion definiert

$$HtEfmPg(n) \coloneqq \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \\ 2, & \text{falls } n = 1 \\ 2 * HtEfmPg(n-1) - HtEfmPg(n-2) + 1, & \text{sonst} \end{cases} \tag{3}$$

  Zeigen Sie: $HtEfmPg(n) = 0.5 * (n^2 + n + 2), \forall n \in \mathbb{N}_0$

Lösungen auf nächster Seite.

1.

Beweis. Wir zeigen die Aussage mit Induktion über n.

- Induktionsbasis: Sei n=0, dann

$$\sum_{i=0}^{0} i^2 = 0 = \frac{0 * (0+1) * (2*0+1)}{6}$$

- Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig fixiert
  - Induktionshypothese: Es gelte $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n*(n+1)*(2*n+1)}{6}$
  - Induktionsbehauptung: Dann gilt auch $\sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)*(n+2)*(2*(n+1)+1)}{6}$
  - Beweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} i^2 &= (n+1)^2 + \sum_{i=0}^{n} i^2 \overset{I.H.}{=} n^2 + 2n + 1 + \frac{n*(n+1)*(2n+1)}{6} \\
&= \frac{6n^2 + 12n + 6 + 2n^3 + n^2 + 2n^2 + n}{6} = \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6} \\
\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} &= \frac{2n^3 + 3n^2 + 4n^2 + 6n + 2n^2 + 3n + 4n + 6}{6} \\
&= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}
\end{aligned}$$

□

2.

Beweis. Wir zeigen die Aussage mit Induktion über n. Setze $h(n) =: HtEfmPg(n)$

- Induktionsbasis:
  - $n = 0$: $1 = 0.5 * (0^2 + 0 + 2) = h(0)$
  - $n = 1$: $2 = 0.5 * (1^2 + 1 + 2) = h(1)$
- Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig fixiert
  - Induktionshypothese: Die Aussage gelte für n und $n+1$.
  - Induktionsbehauptung: Dann gilt sie auch für $n+2$.
  - Beweis:

$$\begin{aligned}
h(n+2) &\overset{Def.}{=} 2 * h(n+1) - h(n) + 1 \overset{I.H.}{=} ((n+1)^2 + n + 1 + 2) - 0.5 * (n^2 + n + 2) + 1 \\
&= n^2 + 3n + 4 - 0.5 * (n^2 + n + 2) + 1 = 0.5 * n^2 + 2.5n + 4 \\
&= 0.5 * (n^2 + 5n + 8) = 0.5 * ((n+2)^2 + (n+2) + 2)
\end{aligned}$$

□