Def I.1, σ-Algebra, messbarer Raum

Menge X, Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$, eine Teilmenge von $\mathcal{P}(X)$ heißt Mengensystem

Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt **σ-Algebra**, falls:

(i) $X \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \implies X \setminus A \in \mathcal{A}$

(iii) $A_i \in \mathcal{A}, \forall i \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$

Das Paar $(X, \mathcal{A})$ heißt dann **messbarer Raum**.

Satz I.2

Jeder Durchschnitt von (endlich oder unendlich vielen) σ-Algebren auf der selben Menge X ist wieder eine σ-Algebra.

Def. I.3

Für ein Mengensystem $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt $\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap\{\mathcal{A} | \mathcal{A}$ ist σ-Algebra in X mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}\}$ die von $\mathcal{E}$ **erzeugte $\boldsymbol{\sigma}$-Algebra**. Man nennt $\mathcal{E}$ das **erzeugende System** von $\sigma(\mathcal{E})$.

Dieser Durchschnitt ist nicht-trivial, denn $\mathcal{P}(X)$ ist σ-Algebra mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Def. I.4

Eine Folge $(s_k) \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ $(k \in \mathbb{N})$ konvergiert gegen $s \in \bar{\mathbb{R}}$, falls eine der folgenden Alternativen gilt:

(i) $s \in \mathbb{R}$ und $\forall \epsilon > 0$ gilt: $s_k \in (s - \epsilon, s + \epsilon) \subseteq \mathbb{R}$ für k hinreichend groß

(ii) $s = \infty$ und $\forall r \in \mathbb{R} : s_k \in (r, \infty]$ für k hinreichend groß

(iii) $s = -\infty$ und $\forall r \in \mathbb{R} : s_k \in [-\infty, r)$ für k hinreichend groß

$(s_k) \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann in $\bar{\mathbb{R}}$ konvergent, wenn sie entweder in $\mathbb{R}$ konvergiert, oder bestimmt gegen $\pm\infty$ divergiert.

Def. I.5, Maßraum

Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra, eine nicht-negative Mengenfunktion $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ heißt **Maß** auf $\mathcal{A}$, falls:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) für beliebige paarweiße disjunkte $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, gilt:
$$\mu\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i) \qquad (\sigma\text{-Additivität})$$

Das Tripel $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt **Maßraum**.

Bem.:

(i) Für endlich viele paarweiße disjunkte $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, ..., n$, folgt aus (ii) indem man $A_i = \emptyset$ für $i = n + 1, ...$ setzt:
$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

(ii) Monotonie des Maßes: $A, B \in \mathcal{A}$ mit
$$A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$$

Def. I.6

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Das Maß μ heißt **endlich**, wenn $\mu(A) < \infty \; \forall A \in \mathcal{A}$ und $\boldsymbol{\sigma}$**-endlich**, wenn es eine Folge $(X_i) \in \mathcal{A}$ mit $\mu(X_i) < \infty$ gibt, sodass $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$. Falls $\mu(X) = 1$, so wird μ **Wahrscheinlichkeits-Maß** genannt.

Satz I.7 (Stetigkeitseig. von Maßen)

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Dann gelten für Mengen $A_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N}$ folgende Aussagen:

(i) Aus $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$ folgt: $\mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i)$

(ii) Aus $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$ mit $\mu(A_1) < \infty$, folgt: $\mu(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i)$

(iii) $\mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$

Bemerkungen zu Satz I.7

(1) (i) Stetigkeit von unten
    (ii) Stetigkeit von oben
    (iii) σ-Subadditivität von μ

(2) Bedingung $\mu(A_i) \leq \infty$ in (ii) kann durch $\mu(A_k) \leq \infty$ für ein $k \in \mathbb{N}$ ersetzt werden, kann aber nicht weggelassen werden.
Begründung:
$A_k = k, k + 1, ... \subseteq \mathbb{N}$
$card(A_k) = \infty \; \forall k \in \mathbb{N}$
Aber: $card(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i) = card(\emptyset) = 0$

Def. I.8

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum.
Jede Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$ heißt **μ-Nullmenge**. Das System aller μ-Nullmengen bezeichnen wir mit $\boldsymbol{\mathcal{N}(\mu)}$. Das Maß μ heißt **vollständig**, wenn gilt:

$$N \subseteq A \text{ für ein } H \in \mathcal{A} \text{ mit } \mu(A) = 0 \implies N \in \mathcal{A} \text{ und } \mu(N) = 0$$

Bem.: Nicht jedes Maß ist vollständig:

$$\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(X) \; \mu(A) = 0 \; \forall A \in \mathcal{A}$$

Allerdings lässt sich jedes Maß vervollständigen

Zu Def. I.8: Vervollstandigung

$\bar{\mu}$ ist wohldefiniert: $A \cup N = B \cup P$ mit
$A, B \in \mathcal{A},\ P, N \in \mathcal{T}_\mu \implies \exists C \in \mathcal{A}, \mu(C) = 0 : P \subseteq C \implies A \subseteq B \cup C \implies \mu(A) \leq \mu(B) + \mu(C) = \mu(B)$
Symm $\implies \mu(A) = \mu(B)$
$\bar{\mu}$ heißt **Vervollständigung** von μ

Satz I.9

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Dann ist $\bar{\mathcal{A}}_\mu$ eine σ-Algebra und $\bar{\mu}$ ein vollständiges Maß auf $\bar{\mathcal{A}}_\mu$, welches mit μ auf $\mathcal{A}$ übereinstimmt.

Satz I.10

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum und $(X, \bar{\mathcal{A}}_\mu, \bar{\mu})$ sei Vervollständigung. Ferner sei $(X, \mathcal{B}, \nu)$ ein vollständiger Maßraum mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ und $\mu = \nu$ auf $\mathcal{A}$. Dann ist $\bar{\mathcal{A}}_\mu \subseteq \mathcal{B}$ und $\bar{\mu} = \nu$ auf $\bar{\mathcal{A}}_\mu$.

Def. I.11

$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{C})$ messbare Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt
$\boldsymbol{\mathcal{A} - \mathcal{C}}$**−messbar**, falls $f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}$
Falls $\mathcal{A}, \mathcal{C}$ klar sind, bezeichnen wir f einfach als messbar

Lemma I.12

$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{C})$ messbare Räume und $\mathcal{C} := \sigma(\mathcal{E})$. Jede Abbildung $f : X \to Y$ mit $f^{-1}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$ ist $\mathcal{A}$-$\mathcal{C}$-messbar

borel-messbar (Zu Lemma I.12)

Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist $\mathbb{B}^n$-$\mathbb{B}^n$-messbar (man sagt: f ist **borel-messbar**).
Denn $\mathbb{B}^n = \sigma(\{\text{offene Teilmengen des } \mathbb{R}^n\})$ und Urbilder offener Mengen sind offen für f stetig (siehe. Ana 1)

Def. I.13

$(X, \mathcal{A})$ messbarer Raum und $D \in \mathcal{A}$.
Eine Funktion $f : D \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt **numerische Funktion**.

Lemma I.14

$(X, \mathcal{A})$ messbarer Raum, $D \in \mathcal{A}$ und $f : D \to \bar{\mathbb{R}}$.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) f ist $\mathcal{A}$-$\bar{\mathbb{B}}^1$-messbar

(ii) $\forall\, \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$ offen ist $f^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}$ und $f^{-1}(\{\infty\}), f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{A}$

(iii) $\{f \leq s\} := \{x \in D \mid f(x) \in [-\infty, s]\} \in \mathcal{A}\ \forall s \in \mathbb{R}$

(iv) $\{f < s\} := \{x \in D \mid f(x) \in [-\infty, s)\} \in \mathcal{A}\ \forall s \in \mathbb{R}$

(v) $\{f \geq s\} := \{x \in D \mid f(x) \in [s, \infty]\} \in \mathcal{A}\ \forall s \in \mathbb{R}$

(vi) $\{f > s\} := \{x \in D \mid f(x) \in (s, \infty]\} \in \mathcal{A}\ \forall s \in \mathbb{R}$

In (iii) - (vi) reicht es aus, $s \in \mathbb{Q}$, statt $s \in \mathbb{R}$ zu haben, denn es gilt z.B.:

$$\{f \geq s\} = \bigcap_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ s > q}} \{f > q\}$$

Lemma I.15

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, $D \in \mathcal{A}$ und $f, g : D \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-messbar. Dann sind die Mengen
$\{f < g\} := \{x \in D : f(x) < g(x)\}$ und
$\{f \leq g\} := \{x \in D : f(x) \leq g(x)\}$ Elemente aus $\mathcal{A}$.

Satz I.16

$(X, \mathcal{A})$ messbarer Raum, $D \in \mathcal{A}$ und $f_k : D \to \bar{\mathbb{R}}$ Folge von $\mathcal{A}$-messbaren Funktionen.
Dann sind auch folgende Funktionen $\mathcal{A}$-messbar:

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} f_k, \ \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k, \ \liminf_{k \to \infty} f_k, \ \limsup_{k \to \infty} f_k$$

Satz I.17

$(X, \mathcal{A})$ messbarer Raum, $D \in \mathcal{A}$, $f, g : D \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-messbar, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Dann sind die Funktionen

$$f + g,\ \alpha f,\ f^{\pm},\ max(f, g),\ min(f, g),\ |f|,\ fg,\ \frac{f}{g}$$

auf ihren Definitionsbereichen, die in $\mathcal{A}$ liegen $\mathcal{A}$-messbar.

Def I.18

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Eine auf $D \in \mathcal{A}$ definierte Funktion
$f : D \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt
$\boldsymbol{\mu}$-messbar (auf X), wenn $\mu(X \setminus D) = 0$ und f $\mathcal{A}|_{\mathcal{D}}$-messbar ist.
($\mathcal{A}|_D := \{A \cap D | A \in \mathcal{A}\}$, siehe Blatt 1)

μ-fast überall

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Man sagt, die Aussage $A[x]$ ist wahr **für $\boldsymbol{\mu}$-fast alle** $x \in M \in \mathcal{A}$ oder **$\boldsymbol{\mu}$-fast überall** auf M, falls es eine μ-Nullmenge N gibt mit

$$\{x \in M : A[x] \text{ ist falsch}\} \subseteq N$$

Dabei wird nicht verlangt, dass $\{x \in M : A[x] \text{ ist falsch}\}$ selbst zu $\mathcal{A}$ gehört.
Zum Beispiel bedeutet für Funktionen $f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ die Aussage „$f(x) \leq g(x)$ für μ-fast alle $x \in X$ “, dass es eine Nullmenge N gibt, so dass $\forall x \in X \setminus N$ gilt: $f(x) \leq g(x)$.
Eine Funktion h ist „μ-fast überall auf X definiert“, wenn h auf $D \in \mathcal{A}$ definiert ist und $\mu(X \setminus D) = 0$.
Ziel: Messbarkeit für Funktionen, die nur μ-fast überall definiert sind.

Lemma I.19

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ vollständiger Maßraum. f μ-messbar auf X. Dann ist auch jede Funktion $\tilde{f}$ mit $\tilde{f} = f$ μ-fast überall μ-messbar.

Satz I.20

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ vollständiger Maßraum und seien $f_k, k \in \mathbb{N}$, μ-messbar. Falls f_k punktweise μ-fast überall gegen f konvergiert, dann ist f auch μ-messbar.

Satz I.21 (Egorov)

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $D \in \mathcal{A}$ Menge mit $\mu(D) < \infty$ und f_n, f μ-messbare, μ-fast überall endliche Funktionen auf D mit $f_n \to f$ μ-fast überall. Dann existiert $\forall \epsilon > 0$ eine Menge $B \in \mathcal{A}$ mit $B \subseteq D$ und

(i) $\mu(D \setminus B) < \epsilon$

(ii) $f_n \to f$ gleichmäßig auf B

Äußere Maße

Sei X eine Menge. Eine Funktion $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ heißt **äußeres Maß** auf X, falls gilt:

$$A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \implies \mu(A) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$$

(i) Die Begriffe σ-additiv, σ-subadditiv, σ-endlich, endlich, monoton sowie Nullmenge und μ-fast überall werden wie für Maße definiert. (Man ersetze überall $\mathcal{A}$ durch $\mathcal{P}(X)$)

(ii) Ein äußeres Maß ist monoton, σ-subadditiv und insbesondere endlich subadditiv
(d.h. $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i \implies \mu(A) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$)

messbare Menge

Sei μ äußeres Maß auf X. Die Menge $A \subseteq X$ heißt **μ-messbar**, falls $\forall S \subseteq X$ gilt:

$$\mu(S) \geq \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A).$$

Das System aller μ-messbaren Mengen wird mit $\boldsymbol{\mathcal{M}(\mu)}$ bezeichnet.

Da $S = (S \cap A) \cup (S \setminus A)$ folgt aus Def. II.1:

$$\mu(S) \leq \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A)$$

d.h.: A messbar $\Leftrightarrow \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A)\ \forall S \subseteq X$

μ als äußeres Maß

Sei $\mathcal{Q}$ ein System von Teilmengen einer Menge X, welches die leere Menge enthält, und sei $\lambda : \mathcal{Q} \to [0, \infty]$ eine Mengenfunktion auf $\mathcal{Q}$ mit $\lambda(\emptyset) = 0$. Definiere die Mengenfunktion
$\mu(E) := \inf\{\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda(P_i)|\ P_i \in \mathcal{Q}, E \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} P_i\}$.
Dann ist μ ein äußeres Maß. (inf $\emptyset = \infty$)

Einschränkung

Sei $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ äußeres Maß auf X. Für M $\subseteq X$ gegeben erhält man durch $\mu \llcorner M : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty], \mu \llcorner M(A) := \mu(A \cap M)$ ein äußeres Maß $\mu \llcorner M$ auf X, welches wir **Einschränkung** von μ auf M nennen.
Es gilt:

$$A \ \mu\text{-messbar} \implies A \ \mu \llcorner M\text{-messbar}$$

Satz II.5

μ äußeres Maß auf X. Dann gilt:

$$N \ \mu\text{-Nullmenge} \implies N \ \mu\text{-messbar}$$
$$N_k, k \in \mathbb{N}, \mu\text{-Nullmengen} \implies \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k \ \mu\text{-Nullmenge}$$

$\mathcal{M}(\mu)$ enthält alle Nullmengen $N \subseteq X$ und damit auch deren Komplemente
(siehe Satz II.7). Es kann sein, dass keine anderen Mengen μ-messbar sind.

Lemma II.6

Seien $A_i \in \mathcal{M}(\mu)$, $i = 1, ..., k$, paarweiße disjunkt und μ äußeres Maß. Dann gilt $\forall S \subseteq X$:

$$\mu(S \cap \bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} \mu(S \cap A_i)$$

Satz II.7

Sei $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß. Dann ist $\mathcal{M}(\mu)$ eine σ-Algebra und μ ist ein vollständiges Maß auf $\mathcal{M}(\mu)$.

Lemma II.8

μ äußeres Maß, $A_i \in \mathcal{M}(\mu), i \in \mathbb{N}$.
Dann gelten:

i) Aus $A_1 \subseteq ... \subseteq A_i \subseteq A_{i+1} \subseteq ...$ folgt $\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$

ii) Aus $A_1 \supseteq ... \supseteq A_i \supseteq A_{i+1} \supseteq ...$ mit $\mu(A_1) < \infty$ folgt $\mu(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$

Def. II.9 / X-stabil

Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt $\bigcup$**-stabil** (bzw. $\bigcap$**-stabil**, $\setminus$**-stabil**), wenn $A \cup B \in \mathcal{A}$ (bzw. $A \cap B \in \mathcal{A}$, $A \setminus B \in \mathcal{A}$) $\forall A, B \in \mathcal{A}$ gilt.

$\bigcup$-stabil impliziert Stabilität bzgl. endlicher Vereinigung. Ebenso $\bigcap$-stabil.

Def. II.10 / Ring / Algebra

Ein Mengensystem $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt **Ring** über X, falls:

i) $\emptyset \in \mathcal{R}$

ii) $A, B \in \mathcal{R} \implies A \setminus B \in \mathcal{R}$

iii) $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cup B \in \mathcal{R}$

$\mathcal{R}$ heißt **Algebra**, falls zusätzlich $X \in \mathcal{R}$.

Für $A, B \in \mathcal{R}$ gilt: $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{R}$
Ringe sind $\bigcup$-stabil, $\bigcap$-stabil, $\setminus$-stabil

Def. II.11 (Im Aufschrieb II.10) / Prämaß

Sei $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ Ring. Eine Funktion $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ heißt **Prämaß** auf $\mathcal{R}$, falls:

i) $\lambda(\emptyset) = 0$

ii) Für $A_i \in \mathcal{R}, i \in \mathbb{N}$, paarweiße disjunkt mit $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{R}$ gilt:

$$\lambda(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A_i)$$

σ-subadditiv, subadditiv, σ-endlich, endlich, monoton, Nullmenge und fast-überall werden wie für Maße definiert.

Def. II.12 (Im Aufschrieb II.11) / Fortsetzung

λ Prämaß auf Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Ein äußeres Maß μ auf X (bzw. ein Maß auf $\mathcal{A}$) heißt **Fortsetzung** von λ, falls gilt:

i) $\mu|_{\mathcal{R}} = \lambda$, d.h. $\mu(A) = \lambda(A)\ \forall A \in \mathcal{R}$

ii) $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}(\mu)$ (bzw. $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$), d.h. alle $A \in \mathcal{R}$ sind μ-messbar

induziertes äußeres Maß / Caratheodory-Fortsetzung

Lemma II.14 (Im Aufschrieb II.13)

$\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ Prämaß auf Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Sei
$\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ das in Satz II.3 aus $\mathcal{R}$ konstruierte äußere Maß,
d.h. $\forall E \subseteq X$:

$$\mu(E) := inf\{\sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A_i) \mid A_i \in \mathcal{R}, E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\}$$

Dann ist μ eine Fortsetzung von λ.
μ heißt **induziertes äußeres Maß** oder
Caratheodory-Fortsetzung von λ.

Sei $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ Prämaß auf Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann ex. ein Maß μ auf $\sigma(\mathcal{R})$ mit $\mu = \lambda$ auf $\mathcal{R}$. Diese Fortsetzung ist eindeutig, falls λ σ-endlich ist.

Regularität der Caratheodory-Fortsetzung / i.A. II.15

Sei μ Caratheodory-Fortsetzung des Prämaßes $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ auf Ring $\mathcal{R}$ über X. Dann ex. $\forall D \subseteq X$ ein $E \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $E \supseteq D$ und $\mu(E) = \mu(D)$.
(μ ist „reguläres“ äußeres Maß)

Satz II.17 (i.A. II.16)

Sei λ ein σ-endliches Prämaß auf Ring $\mathcal{R}$ über X und sei $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ die Caratheodory-Fortsetzung von λ. Dann ist $\mu|_{\mathcal{M}(\mu)}$ die Vervollständigung von $\mu|_{\sigma(\mathcal{R})}$ und $\mathcal{M}(\mu)$ ist die vervollständigte σ-Algebra von $\overline{\sigma(\mathbb{R})}_{\mu|_{\sigma(\mathbb{R})}}$.
D.h. $\overline{\sigma(\mathbb{R})}_{\mu|_{\sigma(\mathbb{R})}} = \mathcal{M}(\mu)$. Insbesondere ex. genau eine Fortsetzung von $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ zu einem vollständigen Maß auf $\mathcal{M}(\mu)$.

Lemma II.18 (i.A. II.17)

$\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ σ-endliches Prämaß auf Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit Caratheodory-Fortsetzung μ. $D \subseteq X$ ist genau dann μ-messbar, wenn eine der folgenden Bedingungen gilt:

i) $\exists\ E \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $E \supseteq D$ und $\mu(E \setminus D) = 0$

ii) $\exists\ C \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $C \subseteq D$ und $\mu(D \setminus C) = 0$

Def. II.19 / Halbring

Ein Mengensystem $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt **Halbring** über X, falls:

i) $\emptyset \in \mathcal{Q}$

ii) $P, Q \in \mathcal{Q} \implies P \cap Q \in \mathcal{Q}$

iii) $P, Q \in \mathcal{Q} \implies P \setminus Q = \bigcup_{i=1}^{k} P_i$ mit endlich vielen paarweise disjunkten $P_i \in \mathcal{Q}$

Bemerkung: Intervall / Quader

Satz II.20 (i.A. II.19)

$\mathcal{I}$ ist ein Halbring.

Satz II.21 (i.A. II.20)

Für $i = 1, ..., n$ sei $\mathcal{Q}_i$ Halbring über X_i. Dann ist $\mathcal{Q} := \{P_1 \times ... \times P_n \mid P_i \in \mathcal{Q}_i\}$ ein Halbring über $X_1 \times ... \times X_n$.

Satz II.22 (i.A. II.21)

$\mathcal{Q}^n$ ist ein Halbring.

Satz II.23 (i.A. II.22)

$\mathcal{Q}$ Halbring über X und $\mathcal{F}$ sei das System aller endlichen Vereinigungen $F = \bigcup_{i=1}^{k} P_i$ von Mengen $P_I \in \mathcal{Q}$. Dann ist $\mathcal{F}$ der von $\mathcal{Q}$ erzeugte Ring.

Figuren

$\mathcal{Q} := \{\emptyset\} \cup \{\{a\} \mid a \in X\}$

$\implies$ erzeugter Ring $\mathcal{F}$: Ring der endlichen Teilmengen von X.

Lemma II.24 (i.A. II.23)

$\mathcal{Q}$ Halbring über X, $\mathcal{F}$ der von $\mathcal{Q}$ erzeugte Ring.
$\implies \sigma(\mathcal{Q}) = \sigma(\mathcal{F})$

Lemma II.25 (i.A. II.24)

$\mathcal{Q}$ Halbring über X, $\mathcal{F}$ der von $\mathcal{Q}$ erzeugte Ring. Zu jedem $F \in \mathcal{F}$ existieren paarweise disjunkte $P_1, ..., P_k \in \mathcal{Q}$ mit $F = \bigcup_{i=1}^{k} P_i$

Def. II.26 (i.A. II.25) / Inhalt

Sei $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(X)$ Halbring. Eine Funktion $\lambda : \mathcal{Q} \to [0, \infty]$ heißt **Inhalt** auf $\mathcal{Q}$, falls:

i) $\lambda(\emptyset) = 0$

ii) Für $A_i \in \mathcal{Q}$ paarweiße disjunkt mit $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{Q}$ gilt:

$$\lambda(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i)$$

λ heißt **Prämaß** auf $\mathcal{Q}$, falls λ σ-additiv auf $\mathcal{Q}$ ist.
D.h. für $A_i \in \mathcal{Q}$ paarweiße disjunkt ($i \in \mathbb{N}$) mit
$\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{Q} : \lambda(\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A_i)$

Satz II.27 (i.A. II.26)

λ Inhalt auf Halbring $\mathcal{Q}$ und $\mathcal{F}$ der von $\mathcal{Q}$ erzeugte Ring. Dann ex. genau ein Inhalt $\bar{\lambda} : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ mit $\bar{\lambda}(Q) = \lambda(Q)\ \forall Q \in \mathcal{Q}$.

Lemma II.28 (i.A. II.27)

λ Inhalt auf Halbring $\mathcal{Q}$ über X
$\implies \lambda$ ist monoton und subadditiv

Satz II.29 (i.A. II.28)

$vol^n(.)$ ist ein Inhalt auf $\mathcal{Q}^n$

Satz II.30 (i.A. II.29)

$\lambda : \mathcal{Q} \to [0, \infty]$ Prämaß auf Halbring $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{R}$ der von $\mathcal{Q}$ erzeugte Ring und $\bar{\lambda} : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ der eindeutig bestimmte Inhalt auf $\mathcal{R}$ mit $\bar{\lambda}|_{\mathcal{Q}} = \lambda$ (Satz II.27 / i.A. II.26), so ist $\bar{\lambda}$ ein Prämaß auf $\mathcal{R}$.

Satz II.31 ((i.A. II.30))

$\lambda : \mathcal{Q} \to [0, \infty]$ Prämaß auf Halbring $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Sei $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ das in Satz II.3 aus $\mathcal{Q}$ konstruierte äußere Maß, d.h. $\forall E \subseteq X$ ist:

$$\mu(E) = inf\{\sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A_i) \mid A_i \in \mathcal{Q}, E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\}$$

Dann ist μ eine Fortsetzung von λ.

Satz II.32 ((i.A. II.31))

Für einen Inhalt λ auf Ring $\mathcal{R}$ und $A_i \in \mathcal{R}, i \in \mathbb{N}$, betrachte:

i) λ ist Prämaß auf $\mathcal{R}$

ii) Für $A_i \subseteq A_{i+1} \subseteq \ldots$ mit $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{R}$ gilt:
$\lambda(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n)$

iii) Für $A_i \supseteq A_{i+1} \supseteq \ldots$ mit $\lambda(A_1) < \infty$ und $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{R}$ gilt:
$\lambda(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n)$

iv) Für $A_i \supseteq A_{i+1} \supseteq \ldots$ mit $\lambda(A_1) < \infty$ und $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \emptyset$ gilt:
$\lim_{i\to\infty} \lambda(A_i) = 0$

Dann gilt: i) $\Leftrightarrow$ ii) $\implies$ iii) $\implies$ iv)

Ist λ endlich, d.h. $\lambda(A) < \infty \ \forall A \in \mathcal{R}$, dann sind i) - iv) äquivalent.

Lemma III.1

Der elementargeometrische Inhalt $vol^n : \mathcal{Q}^n \to [0, \infty]$ ist ein Prämaß auf dem Halbring $\mathcal{Q}^n$ im $\mathbb{R}^n$

Def. III.2 / n-dim (äußere) Lebesgue-Maß

Das **n-dimensionale äußere Lebesgue-Maß** einer Menge $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$\lambda^n(E) := inf\{\sum_{k\in\mathbb{N}} vol^n(Q_k) \mid Q_k \in \mathcal{Q}^n, E \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k\}$$

$\lambda^n|_{\mathcal{M}(\lambda^n)}$ ist das **n-dimensionale Lebesguemaß**.

Bemerkung:
Bem nach Satz II.31 (i.A. II.30) $\implies$ λ^n regulär und vollständig auf $\mathcal{M}(\lambda^n)$

Lemma III.3

Betrachte für $k \in \mathbb{N}_0$ die Würfelfamilie
$\mathcal{W}_k = \{Q_{k,m} := 2^{-k}(m + [0,1]^n) \mid m \in \mathbb{R}^n\}$ und definiere für
$E \subseteq \mathbb{R}^n$ die Mengen

$$F_k(E) := \bigcup \{Q \in \mathcal{W}_k \mid Q \subseteq E\} \quad F^k(E) := \bigcup \{Q \in \mathcal{W}_k \mid Q \cap E \neq \emptyset$$

Dann gilt:

i) $F_k(E)$ und $F^k(E)$ sind abgeschlossene Vereinigungen von abzählbar vielen kompakten Quadern mit paarweise disjunktem Inneren.

ii) $F_1(E) \subseteq F_2(E) \subseteq ... \subseteq E \subseteq ... \subseteq F^2(E) \subseteq F^1(E)$

iii) $F_k(E) \supseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid dist(x, \mathbb{R}^n \setminus E) > s^{-k}\sqrt{n}\}$
$F^k(E) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid dist(x, \mathbb{R}^n \setminus E) \leq s^{-k}\sqrt{n}\}$

iv) $\mathring{E} \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k(E) \subseteq E \quad , \quad \bar{E} \supseteq \bigcap_{k \in \mathbb{N}} F^k(E) \supseteq E$

Lemma III.4

Die Borelmengen $\mathcal{B}^n$ sind die vom Halbring $\mathcal{Q}^n$ der Quader, dem Ring $\mathcal{F}^n$ der Figuren, und dem System $\mathcal{C}^n$ der abgeschlossenen Mengen des $\mathbb{R}^n$ erzeugten σ-Algebra, d.h.
$\sigma(\mathcal{Q}^n) = \mathcal{B}^n = \sigma(\mathcal{Q}^n) = \sigma(\mathcal{F}^n) = \sigma(\mathcal{C}^n)$

Satz III.5

Für λ^n gilt:

i) Alle Borelmengen sind Lebesgue-messbar
ii) Zu $E \subseteq \mathbb{R}^n$ $\exists$ Borelmenge $B \supseteq E$ mit $\lambda^n(B) = \lambda^n(E)$
iii) $\lambda^n(K) < \infty$ $\forall K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt

Lemma III.6

Für $E \subseteq \mathbb{R}^n$ beliebig gilt:

i) $\lambda^n(E) = inf\{\lambda^n(U) \mid U \text{ offen }, U \supset E\}$

ii) $\lambda^n(E) = inf\{\lambda^n(K) \mid K \text{ kompakt }, K \subset E\}$, falls E λ^n-messbar

Satz III.7

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann λ^n-messbar, wenn eine der beiden Bedingungen gilt:

i) $\exists$ Borlemenge $E \supset D$ mit $\lambda^n(E \setminus D) = 0$

ii) $\exists$ Borlemenge $C \subset D$ mit $\lambda^n(D \setminus C) = 0$

Es kann $E = \bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} U_i$ mit U_i offen und $C = \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}} A_j$ mit A_j abgeschlossen gewählt werden.

Satz III.8 (Satz von Lusin)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $\lambda^n(A) < \infty$ und sei f λ^n-messbar auf A mit Werten in $\mathbb{R}$. Dann existiert $\forall \epsilon > 0$ ein $K = K_\epsilon \subseteq A$ kompakt, mit:

i) $\lambda^n(A \setminus K) < \epsilon$

ii) $f|_K$ ist stetig

Def. III.9 / Borelmaß

in äußeres Maß μ auf $\mathbb{R}^n$ heißt **Borelmaß**, falls gilt:

i) Alle Borelmengen sind μ-messbar

ii) $\mu(K) < \infty \; \forall K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt

translationsinvariant

λ^n ist Borelmaß nach Satz III.5.
Ein äußeres Maß μ auf $\mathbb{R}^n$ heißt **translationsinvariant**, falls $\mu(E+a) = \mu(E)\ \forall E \subset \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}^n$ mit $E + a := \{x + a \mid x \in E\}$
Bemerke: $vol^n : \mathcal{Q}^n \to [0, \infty]$ ist translationsinvariant $\implies$ λ^n ist translationsinvariant.

Lemma III.10

Ist μ translationsinvariantes Borelmaß auf $\mathbb{R}^n$, so ist jede Koordinaten-Hyperebene $H := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i = c\}(i = 1, ..., n)$ eine μ-Nullmenge.

Satz III.11

Sei μ translationsinvariantes Borelmaß auf $\mathbb{R}^n$. Dann gilt mit $\theta := \mu([0,1]^n)$:

$$\mu(E) = \theta \lambda^n(E) \quad \forall \; \lambda^n\text{-messbaren } E \subseteq \mathbb{R}^n$$

Lemma III.12

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ lipschitz-stetig mit Konstante Λ bzgl. $||.||_\infty$. Dann gilt:

$$\lambda^n(f(E)) \leq \Lambda^n \lambda^n(E) \quad \forall E \subseteq U$$

Satz III.13

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

i) $N \subseteq U$ λ^n-Nullmenge $\implies$ $f(N)$ λ^n-Nulllmenge

ii) $E \subseteq U$ λ^n-messbar $\implies$ $f(E)$ λ^n-messbar

Satz III.14

Sei $S \in O(\mathbb{R}^n)$ und $a \in \mathbb{R}^n$, dann gilt:

$$\lambda^n(S(E) + a) = \lambda^n(E) \quad \forall E \subseteq \mathbb{R}^n$$

Lemma III.15 (Polarzerlegung)

$\forall S \in GL(\mathbb{R}^n)\ \exists$ Diagonalmatrix Λ mit Einträgen $\lambda_i > 0, i = 1, ..., n$
und
$T_1, T_2 \in O(\mathbb{R}^n)$, sodass $S = T_1 \Lambda T_2$

Satz III.16 (Lineare Transformationsformel)

Für eine lineare Abbildung $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\lambda^n(S(E)) = |det(S)| \; \lambda^n(E) \quad \forall E \subseteq \mathbb{R}^n$$

Def. IV.1 / μ-Treppenfunktion / einfach

X Menge, μ äußeres Maß. Eine funktion $\zeta : X \to \mathbb{R}$ heißt **μ-Treppenfunktion**, wenn sie μ-messbar ist und nur eindlich viele Funktionswerte annimmt.
Die Menge $\mathcal{T}(\mu)$ der μ-Treppenfunktionen ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
Wir setzen

$$\mathcal{T}^+(\mu) = \{\zeta \in \mathcal{T}(\mu) \mid \zeta \geq 0\}$$

Lemma IV.2

Das Integral $I : \mathcal{T}^+(\mu) \to [0, \infty]$ ist durch $(\star)$ wohldefiniert. Für $\zeta, \phi \in \mathcal{T}^+(\mu)$ und $\alpha, \beta \in [0, \infty)$ gilt:

i) $I(\alpha\zeta + \beta\psi) = \alpha I(\zeta) + \beta I(\psi)$

ii) $\zeta \leq \psi \implies I(\zeta) \leq I(\psi)$

Def. IV.3 (Lebesgue-Integral) / Unterfunktion

Für $f : X \to [0, \infty]$ μ-messbar, setze

$$\int f d\mu = sup\{I(\zeta) \mid \zeta \in \mathcal{T}^+(\mu), \zeta \leq f\}$$

ζ heißt **Unterfunktion** von f.
Ist $f : X \to [-\infty, \infty]$ μ-messbar und sind die Integrale von $f^\pm$ nicht beide unendlich, so setzen wir

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \quad \in [-\infty, \infty]$$

Bemerkung:

Für $f \geq 0$ sind beide Schritte kompatibel, denn dann gilt $f = f^+$ und $f^- = 0$

Lemma IV.4

Für $f \in \mathcal{T}^+(\mu)$ gilt: $\int f d\mu = I(f)$

Def. IV.5 / integrierbar

$f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt **integrierbar** bzgl. μ, wenn sie μ-messbar ist und wenn gilt:

$$\int f d\mu \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu < \infty$$

Satz IV.6

$f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ μ-messbar. Ist $f \leq g$ μ-fast überall und $\int f^- d\mu < \infty$, so existieren beide Integrale und es ist:
$\int f d\mu \leq \int g d\mu$
„$\geq$“ gilt entsprechend wenn $f^+ d\mu < \infty$

Bemerkung:

$f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$, f μ-messbar und $g = f$ μ-fast überall $\overset{\text{Kapitel II}}{\Longrightarrow}$ g μ-messbar
Satz IV.6 $\implies \int g^{\pm} d\mu = \int f^{\pm} d\mu \implies \int f d\mu = \int g \, d\mu$

Lemma IV.7 (Tschebyscheff-Ungleichung)

Für $f : X \to [0, \infty]$ μ-messbar mit $\int f d\mu < \infty$ gilt:

$$\mu(\{f \geq s\}) \leq \begin{cases} \frac{1}{s} \cdot \int f d\mu & \text{für } s \in (0, \infty) \\ 0 & \text{für } s = \infty \end{cases}$$

Lemma IV.8

Sei $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ μ-messbar.

i) ist $\int f d\mu < \infty \implies \{f = \infty\}$ ist μ-Nulllmenge

ii) ist $f \geq 0$ und $\int f d\mu = 0 \implies \{f > 0\}$ ist μ-Nullmenge

Satz IV.9

Zu $f : X \to [0, \infty]$ μ-messbar gibt es eine Folge $f_k \in \mathcal{T}^+(\mu)$ mit $f_0 \leq f_1 \leq \ldots$ und $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)\ \forall x \in X$.

Satz IV.10 (Monotonie Konvergenz / Beppo-Levi)

Seien $f_k : X \to [0, \infty]$ μ-messbar mit $f_1 \leq f_2 \leq ...$ und $f : X \to [0, \infty]$ mit $f(x) := \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$. Dann gilt:

$$\int f d\mu = \lim_{k\to\infty} \int f_k \; d\mu$$

Satz IV.11

$f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ integrierbar bzgl. μ, so ist auch $\alpha f + \beta g$ integrierbar $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und es gilt:

$$\int (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu$$

Def. IV.12 / auf E integrierbar

Sei μ ein äußeres Maß auf X und $E \subseteq X$ sei μ-messbar. Dann setzen wir, falls das rechte Integral existiert

$$\int_E f d\mu = \int f \chi_E d\mu$$

f heißt **auf *E* integrierbar**, wenn $f\chi_E$ integrierbar ist.

Bemerkung:
Wegen $(f\chi_E)^{\pm} = f^{\pm}\chi_E \leq f^{\pm}$ existiert das Integral von f über E auf jeden Fall dann, wenn $\in f d\mu$ existiert. (Speziell für $f \geq 0$)

Satz IV.13

Sei $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ μ-messbar. Dann gelten:

i) f integrierbar $\Leftrightarrow |f|$ integrierbar

ii) Es gilt: $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$, falls das Integral von f existiert

iii) Ist $g : X \to [0, \infty]$ μ-messbar mit $|f| \leq g$ μ-fast überall und $\int g d\mu < \infty$, so ist f integrierbar

Satz V.1 (Lemma von Fatou)

$f_k : X \to [0, \infty]$ Folge von μ-messbaren Funktionen.
Für $f : X \to \bar{\mathbb{R}}, f(x) = \liminf_{k\to\infty} f_k(x)$ gilt:

$$\int f d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int f_k d\mu$$

Satz V.2 (Dominierte Konvergenz bzw. Satz von Lebesgue)

$f_1, f_2, ...$ Folge von μ-messbare Funktionen und $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ für μ-fast alle $x \in X$. Es gebe eine integrierbare Funktion $g : X \to [0, \infty]$ mit $\sup_{k\in\mathbb{N}} |f_k(x)| \leq g(x)$ für μ-fast alle x. Fann ist f integrierbar und $\int f d\mu = \lim_{k\to\infty} \int f_k d\mu$.

Es gilt sogar $||f_k \cdot f||_{L^1(y)} := \int |f_k - f| d\mu \to 0$

Riemann-integrierbar

Vergleich Riemann-$\int$ mit Lebesgue-$\int$

Sei $I = [a, b]$ kompaktes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt.

Unterteilungspunkte $a = x_0 \leq ... \leq x_N = b \to$ Zerlegung Z von I

mit Teilintervallen $I_j = [x_{j-1}, x_j]$

$$\bar{S}_Z(f) = \sum_{j=1}^{N} (\sup_{I_j} f)(x_j - x_{j-1}), \quad \underline{S}_Z(f) = \sum_{j=1}^{N} (\inf_{I_j} f)(x_j - x_{j-1})$$

Für Zerlegungen Z_1, Z_2 mit Verfeinerung $Z_1 \cup Z_2$

$$\implies \underline{S}_{Z_1}(f) \leq \underline{S}_{Z_1 \cup Z_2}(f) \leq \bar{S}_{Z_1 \cup Z_2}(f) \leq \bar{S}_{Z_2}(f)$$

f heißt **Riemann-integrierbar** mit Integral $\int\limits_a^b f(x)dx = S$, falls gilt:

$$\sup_Z \underline{S}_Z(f) = \inf_Z \bar{S}_Z(f) = S$$

Satz V.3

$f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt auf kompaktem Intervall $I = [a, b]$. Dann gilt:
f Riemann-integrierbar $\Leftrightarrow \lambda^1(\{x \in I \mid f \text{ ist nicht stetig in } x\}) = 0$
In diesem Fall ist f auch Lebesgue-integrierbar und die Integrale stimmen überein.

Satz V.4

X metrischer Raum, μ Maß auf Y und $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ mit $f(x, \cdot)$ integrierbar bzgl. μ $\forall x \in X$.
Betrachte $F : X \to \mathbb{R}, F(x) = \int f(x, y) d\mu(y)$
Sei $f(\cdot, y)$ stetig in $x_0 \in X$ für μ-fast alle $y \in Y$. Weiter gebe es eine μ-integrierbare Funktion $g : Y \to [0, \infty]$, so dass für alle $x \in X$ gilt: $|f(x, y)| \leq g(y)$ $\forall y \in Y \setminus N_X$ mit einer μ-Nullmenge N_x.
Dann ist F stetig in x_0.

Satz V.5

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall, μ Maß auf Y und $f : I \times Y \to \mathbb{R}$ mit $f(x, \cdot)$ integrierbar bzgl. μ für alle $x \in I$.
Setze $F : U \to \mathbb{R}, F(x) = \int f(x,y) d\mu(y)$
Es sei $f(\cdot, y)$ in x_0 differenzierbar für μ-fast alle $y \in Y$ und es existiere $g : Y \to [0, \infty]$ μ-integrierbar mit

$$\frac{|f(x,y) - f(x_0,y)|}{|x - x_0|} \leq g(y) \ \forall x \in I \ \forall y \in Y \setminus N_x$$

mit einer μ-Nullmenge N_x. Dann folgt:

$$F'(x_0) = \int \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) d\mu(y)$$

Lemma V.6

$\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, μ Maß auf Y und $f : \mathcal{U} \times Y \to \mathbb{R}$ mit f integrierbar bzgl. μ $\forall x \in \mathcal{U}$. Betrachte $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}, F(x) = \int f(x,y) d\mu(y)$
Es gebe eine μ-Nullmenge $N \subseteq Y$, so dass $\forall y \in Y \setminus N$ gilt:

$$f(\cdot, y) \in C^1(\mathcal{U}) \text{ und } |D_x f(x,y)| \leq g(y) \text{ mit } g : Y \to [0, \infty] \text{ integrier}$$

$\implies$ $F \in C^1(\mathcal{U})$ und $\forall x \in \mathcal{U}$ gilt:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y) d\mu(y)$$

Def. V.7 / (L^p-Norm) / L^p-Raum

Für μ-messbares $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ und $1 \leq p \leq \infty$ setzen wir

$$||f||_{L^p(\mu)} := \begin{cases} (\int |f|^p d\mu)^{1/p} & , \text{für } 1 \leq p < \infty \\ \inf\{s > 0 \mid \mu(\{|f| > s\}) = 0\} & , \text{für } p = \infty \end{cases}$$

auf $\mathcal{L}^p(\mu) = \{f : X \to \bar{\mathbb{R}} \mid f \mu - \text{messbar} \;, ||f||_{L^p(\mu)} < \infty\}$
Betrachte Äquivalenzrelation $f \sim g \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ für μ-fast alle $x \in X$, und definiere den ***L^p*-Raum** durch $\mathcal{L}^p(\mu)/_\sim$.

Def. V.8 / Fortsetzung

Für $E \subseteq X$ messbar und $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ sei $f_0 : X \to \bar{\mathbb{R}}$ die **Fortsetzung** mit $f_0(x) = 0 \ \forall x \in X \setminus E$. Wir setzen dann

$$\mathcal{L}^p(E) := \{f : E \to \bar{\mathbb{R}} \mid f_0 \in \mathcal{L}^p(\mu)\}$$

und $L^p(E, \mu) := \mathcal{L}^p(E)/_\sim$.

Proposition V.9

Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $(L^p(\mu), ||\cdot||_{L^p(\mu)})$ ein normierter Vektorraum. Insbesondere gelten für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f, g \in L^p(\mu)$:

i) $||f||_{L^p} = 0 \implies f = 0$ μ-fast überall

ii) $f \in L^p(\mu), \lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda f \in L^p(\mu),\ ||\lambda f||_{L^p} = |\lambda|\ ||f||_{L^p}$

iii) $f, g \in L^p(\mu) \implies f + g \in L^p(\mu)$ und
$||f + g||_{L^p} \leq ||f||_{L^p} + ||g||_{L^p}$

Lemma V.10 (Youngsche Ungleichung)

Für $1 < p, q < \infty$ mit $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ und $x, y \geq 0$ gilt:

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

Satz V.11 (Höldersche Ungleichung)

Für μ-messbare $f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ gilt: $\quad |\int fgd\mu| \leq ||f||_{L^p}||g||_{L^p}$,
falls $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$

Satz V.12 (Minkowski-Ungleichung)

Für $f, g \in L^p(\mu)$ mit $1 \leq p \leq \infty$ gilt:
$||f + g||_{L^p} \leq ||f||_{L^p} + ||g||_{L^p}$

Lemma V.13

Sei $1 \leq p < \infty$ und $f_k = \sum_{j=1}^{k} u_j$ mit $u_j \in L^p(\mu)$. Falls $\sum_{j=1}^{k} ||u_j||_{L^p} < \infty$, so gelten:

i) $\exists$ μ-Nullmenge N: $f(x) = \lim_{k \to \infty} f_k(x)$ $\forall x \in X \setminus N$ ex.

ii) mit $f := 0$ auf gilt $f \in L^p(\mu)$

iii) $||f - f_k||_{L^p} \to 0$ mit $k \to \infty$