

Def I.1, σ -Algebra, messbarer Raum

Menge X , Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$, eine Teilmenge von $\mathcal{P}(X)$ heißt Mengensystem

Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt **σ -Algebra**, falls:

- (i) $X \in \mathcal{A}$
- (ii) $A \in \mathcal{A} \implies X \setminus A \in \mathcal{A}$
- (iii) $A_i \in \mathcal{A}, \forall i \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$

Das Paar (X, \mathcal{A}) heißt dann **messbarer Raum**.

Satz 1.2

Jeder Durchschnitt von (endlich oder unendlich vielen) σ -Algebren auf der selben Menge X ist wieder eine σ -Algebra.

Def. 1.3

Für ein Mengensystem $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt $\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap \{ \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra in } X \text{ mit } \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A} \}$ die von \mathcal{E} **erzeugte σ -Algebra**. Man nennt \mathcal{E} das **erzeugende System** von $\sigma(\mathcal{E})$.

Dieser Durchschnitt ist nicht-trivial, denn $\mathcal{P}(X)$ ist σ -Algebra mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Def. 1.4

Eine Folge $(s_k) \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ ($k \in \mathbb{N}$) konvergiert gegen $s \in \bar{\mathbb{R}}$, falls eine der folgenden Alternativen gilt:

- (i) $s \in \mathbb{R}$ und $\forall \epsilon > 0$ gilt: $s_k \in (s - \epsilon, s + \epsilon) \subseteq \mathbb{R}$ für k hinreichend groß
 - (ii) $s = \infty$ und $\forall r \in \mathbb{R} : s_k \in (r, \infty]$ für k hinreichend groß
 - (iii) $s = -\infty$ und $\forall r \in \mathbb{R} : s_k \in [-\infty, r)$ für k hinreichend groß
- $(s_k) \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann in $\bar{\mathbb{R}}$ konvergent, wenn sie entweder in \mathbb{R} konvergiert, oder bestimmt gegen $\pm\infty$ divergiert.

Def. 1.5, Maßraum

Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine σ -Algebra, eine nicht-negative Mengenfunktion $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ heißt **Maß** auf \mathcal{A} , falls:

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$
- (ii) für beliebige paarweise disjunkte $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, gilt:
$$\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i) \quad (\sigma\text{-Additivität})$$

Das Tripel (X, \mathcal{A}, μ) heißt **Maßraum**.

Bem.:

- (i) Für endlich viele paarweise disjunkte $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, \dots, n$, folgt aus (ii) indem man $A_i = \emptyset$ für $i = n + 1, \dots$ setzt:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$$

- (ii) Monotonie des Maßes: $A, B \in \mathcal{A}$ mit
 $A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$

Def. 1.6

Sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Das Maß μ heißt **endlich**, wenn $\mu(A) < \infty \forall A \in \mathcal{A}$ und **σ -endlich**, wenn es eine Folge $(X_i) \in \mathcal{A}$ mit $\mu(X_i) < \infty$ gibt, sodass $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$. Falls $\mu(X) = 1$, so wird μ **Wahrscheinlichkeits-Maß** genannt.

Satz I.7 (Stetigkeitseig. von Maßen)

Sei (X, \mathcal{A}, μ) Maßraum. Dann gelten für Mengen $A_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N}$ folgende Aussagen:

(i) Aus $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$ folgt: $\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i)$

(ii) Aus $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ mit $\mu(A_1) < \infty$, folgt:

$$\mu\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i)$$

(iii) $\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$

Bemerkungen zu Satz 1.7

- (1) (i) Stetigkeit von unten
(ii) Stetigkeit von oben
(iii) σ -Subadditivität von μ
- (2) Bedingung $\mu(A_i) \leq \infty$ in (ii) kann durch $\mu(A_k) \leq \infty$ für ein $k \in \mathbb{N}$ ersetzt werden, kann aber nicht weggelassen werden.

Begründung:

$$A_k = k, k+1, \dots \subseteq \mathbb{N}$$

$$\text{card}(A_k) = \infty \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\text{Aber: } \text{card}\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \text{card}(\emptyset) = 0$$

Def. 1.8

(X, \mathcal{A}, μ) Maßraum.

Jede Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$ heißt **μ -Nullmenge**. Das System aller μ -Nullmengen bezeichnen wir mit $\mathcal{N}(\mu)$. Das Maß μ heißt **vollständig**, wenn gilt:

$$N \subseteq A \text{ für ein } A \in \mathcal{A} \text{ mit } \mu(A) = 0 \implies N \in \mathcal{A} \text{ und } \mu(N) = 0$$

Bem.: Nicht jedes Maß ist vollständig:

$$\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(X) \quad \mu(A) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

Allerdings lässt sich jedes Maß vervollständigen

Zu Def. 1.8: Vervollständigung

$\bar{\mu}$ ist wohldefiniert: $A \cup N = B \cup P$ mit

$$A, B \in \mathcal{A}, P, N \in \mathcal{T}_\mu \implies \exists C \in \mathcal{A}, \mu(C) = 0 : P \subseteq C \implies A \subseteq B \cup C \implies \mu(A) \leq \mu(B) + \mu(C) = \mu(B)$$

$$\text{Symm} \implies \mu(A) = \mu(B)$$

$\bar{\mu}$ heißt **Vervollständigung** von μ

Satz I.9

(X, \mathcal{A}, μ) Maßraum. Dann ist $\bar{\mathcal{A}}_\mu$ eine σ -Algebra und $\bar{\mu}$ ein vollständiges Maß auf $\bar{\mathcal{A}}_\mu$, welches mit μ auf \mathcal{A} übereinstimmt.

Satz I.10

(X, \mathcal{A}, μ) Maßraum und $(X, \bar{\mathcal{A}}_\mu, \bar{\mu})$ sei Vervollständigung. Ferner sei (X, \mathcal{B}, ν) ein vollständiger Maßraum mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ und $\mu = \nu$ auf \mathcal{A} . Dann ist $\bar{\mathcal{A}}_\mu \subseteq \mathcal{B}$ und $\bar{\mu} = \nu$ auf $\bar{\mathcal{A}}_\mu$.

Def. 1.11

$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{C})$ messbare Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **$\mathcal{A} - \mathcal{C}$ -messbar**, falls $f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}$

Falls \mathcal{A}, \mathcal{C} klar sind, bezeichnen wir f einfach als messbar

Lemma I.12

$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{C})$ messbare Räume und $\mathcal{C} := \sigma(\mathcal{E})$. Jede Abbildung $f : X \rightarrow Y$ mit $f^{-1}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$ ist \mathcal{A} - \mathcal{C} -messbar

borel-messbar (Zu Lemma I.12)

Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist \mathbb{B}^n - \mathbb{B}^n -messbar
(man sagt: f ist **borel-messbar**).

Denn $\mathbb{B}^n = \sigma(\{\text{offene Teilmengen des } \mathbb{R}^n\})$ und Urbilder offener Mengen sind offen für f stetig (siehe. Ana 1)

Def. 1.13

(X, \mathcal{A}) messbarer Raum und $D \in \mathcal{A}$.

Eine Funktion $f : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ heißt **numerische Funktion**.

Lemma 1.14

(X, \mathcal{A}) messbarer Raum, $D \in \mathcal{A}$ und $f : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) f ist \mathcal{A} - $\bar{\mathbb{B}}^1$ -messbar
- (ii) $\forall \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$ offen ist $f^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}$ und
 $f^{-1}(\{\infty\}), f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{A}$
- (iii) $\{f \leq s\} := \{x \in D \mid f(x) \in [-\infty, s]\} \in \mathcal{A} \forall s \in \mathbb{R}$
- (iv) $\{f < s\} := \{x \in D \mid f(x) \in [-\infty, s)\} \in \mathcal{A} \forall s \in \mathbb{R}$
- (v) $\{f \geq s\} := \{x \in D \mid f(x) \in [s, \infty]\} \in \mathcal{A} \forall s \in \mathbb{R}$
- (vi) $\{f > s\} := \{x \in D \mid f(x) \in (s, \infty]\} \in \mathcal{A} \forall s \in \mathbb{R}$

In (iii) - (vi) reicht es aus, $s \in \mathbb{Q}$, statt $s \in \mathbb{R}$ zu haben, denn es gilt z.B.:

$$\{f \geq s\} = \bigcap_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ s > q}} \{f > q\}$$

Lemma I.15

Sei (X, \mathcal{A}) ein messbarer Raum, $D \in \mathcal{A}$ und $f, g : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ \mathcal{A} -messbar. Dann sind die Mengen
 $\{f < g\} := \{x \in D : f(x) < g(x)\}$ und
 $\{f \leq g\} := \{x \in D : f(x) \leq g(x)\}$ Elemente aus \mathcal{A} .

Satz I.16

(X, \mathcal{A}) messbarer Raum, $D \in \mathcal{A}$ und $f_k : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ Folge von \mathcal{A} -messbaren Funktionen.

Dann sind auch folgende Funktionen \mathcal{A} -messbar:

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} f_k, \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k, \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k, \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k$$

Satz I.17

(X, \mathcal{A}) messbarer Raum, $D \in \mathcal{A}$, $f, g : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ \mathcal{A} -messbar, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Dann sind die Funktionen

$$f + g, \alpha f, f^{\pm}, \max(f, g), \min(f, g), |f|, fg, \frac{f}{g}$$

auf ihren Definitionsbereichen, die in \mathcal{A} liegen \mathcal{A} -messbar.

Def I.18

(X, \mathcal{A}, μ) Maßraum. Eine auf $D \in \mathcal{A}$ definierte Funktion $f : D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ heißt **μ -messbar** (auf X), wenn $\mu(X \setminus D) = 0$ und $f|_{\mathcal{A}_D}$ -messbar ist. ($\mathcal{A}_D := \{A \cap D | A \in \mathcal{A}\}$, siehe Blatt 1)

μ -fast überall

Sei (X, \mathcal{A}, μ) Maßraum. Man sagt, die Aussage $A[x]$ ist wahr **für μ -fast alle $x \in M \in \mathcal{A}$** oder **μ -fast überall** auf M , falls es eine μ -Nullmenge N gibt mit

$$\{x \in M : A[x] \text{ ist falsch}\} \subseteq N$$

Dabei wird nicht verlangt, dass $\{x \in M : A[x] \text{ ist falsch}\}$ selbst zu \mathcal{A} gehört.

Zum Beispiel bedeutet für Funktionen $f, g : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ die Aussage „ $f(x) \leq g(x)$ für μ -fast alle $x \in X$ “, dass es eine Nullmenge N gibt, so dass $\forall x \in X \setminus N$ gilt: $f(x) \leq g(x)$.

Eine Funktion h ist „ μ -fast überall auf X definiert“, wenn h auf $D \in \mathcal{A}$ definiert ist und $\mu(X \setminus D) = 0$.

Ziel: Messbarkeit für Funktionen, die nur μ -fast überall definiert sind.

Lemma I.19

(X, \mathcal{A}, μ) vollständiger Maßraum. f μ -messbar auf X . Dann ist auch jede Funktion \tilde{f} mit $\tilde{f} = f$ μ -fast überall μ -messbar.

Satz I.20

(X, \mathcal{A}, μ) vollständiger Maßraum und seien $f_k, k \in \mathbb{N}$, μ -messbar.
Falls f_k punktweise μ -fast überall gegen f konvergiert, dann ist f auch μ -messbar.

Satz I.21 (Egorov)

(X, \mathcal{A}, μ) Maßraum, $D \in \mathcal{A}$ Menge mit $\mu(D) < \infty$ und f_n, f μ -messbare, μ -fast überall endliche Funktionen auf D mit $f_n \rightarrow f$ μ -fast überall. Dann existiert $\forall \epsilon > 0$ eine Menge $B \in \mathcal{A}$ mit $B \subseteq D$ und

- (i) $\mu(D \setminus B) < \epsilon$
- (ii) $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig auf B

Äußere Maße

Sei X eine Menge. Eine Funktion $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ heißt **äußeres Maß** auf X , falls gilt:

$$A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \implies \mu(A) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$$

- (i) Die Begriffe σ -additiv, σ -subadditiv, σ -endlich, endlich, monoton sowie Nullmenge und μ -fast überall werden wie für Maße definiert. (Man ersetze überall \mathcal{A} durch $\mathcal{P}(X)$)
- (ii) Ein äußeres Maß ist monoton, σ -subadditiv und insbesondere endlich subadditiv

$$\text{(d.h. } A \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i \implies \mu(A) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i))$$

messbare Menge

Sei μ äußeres Maß auf X . Die Menge $A \subseteq X$ heißt **μ -messbar**, falls $\forall S \subseteq X$ gilt:

$$\mu(S) \geq \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A).$$

Das System aller μ -messbaren Mengen wird mit $\mathcal{M}(\mu)$ bezeichnet.

Da $S = (S \cap A) \cup (S \setminus A)$ folgt aus Def. II.1:

$$\mu(S) \leq \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A)$$

d.h.: A messbar $\Leftrightarrow \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A) \forall S \subseteq X$

μ als äußeres Maß

Sei \mathcal{Q} ein System von Teilmengen einer Menge X , welches die leere Menge enthält, und sei $\lambda : \mathcal{Q} \rightarrow [0, \infty]$ eine Mengenfunktion auf \mathcal{Q} mit $\lambda(\emptyset) = 0$. Definiere die Mengenfunktion

$$\mu(E) := \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(P_i) \mid P_i \in \mathcal{Q}, E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} P_i \right\}.$$

Dann ist μ ein äußeres Maß.

$$(\inf \emptyset = \infty)$$

Einschränkung

Sei $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ äußeres Maß auf X . Für $M \subseteq X$ gegeben erhält man durch $\mu \llcorner M : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty], \mu \llcorner M(A) := \mu(A \cap M)$ ein äußeres Maß $\mu \llcorner M$ auf X , welches wir **Einschränkung** von μ auf M nennen.

Es gilt:

$$A \text{ } \mu\text{-messbar} \implies A \text{ } \mu \llcorner M\text{-messbar}$$

Satz II.5

μ äußeres Maß auf X . Dann gilt:

$$N \text{ } \mu\text{-Nullmenge} \implies N \text{ } \mu\text{-messbar}$$

$$N_k, k \in \mathbb{N}, \mu\text{-Nullmengen} \implies \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k \text{ } \mu\text{-Nullmenge}$$

$\mathcal{M}(\mu)$ enthält alle Nullmengen $N \subseteq X$ und damit auch deren Komplemente (siehe Satz II.7). Es kann sein, dass keine anderen Mengen μ -messbar sind.

Lemma II.6

Seien $A_i \in \mathcal{M}(\mu)$, $i = 1, \dots, k$, paarweise disjunkt und μ äußeres Maß. Dann gilt $\forall S \subseteq X$:

$$\mu\left(S \cap \bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k \mu(S \cap A_i)$$

Satz II.7

Sei $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ ein äußeres Maß. Dann ist $\mathcal{M}(\mu)$ eine σ -Algebra und μ ist ein vollständiges Maß auf $\mathcal{M}(\mu)$.

Lemma II.8

μ äußeres Maß, $A_i \in \mathcal{M}(\mu)$, $i \in \mathbb{N}$.

Dann gelten:

i) Aus $A_1 \subseteq \dots \subseteq A_i \subseteq A_{i+1} \subseteq \dots$ folgt $\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i)$

ii) Aus $A_1 \supseteq \dots \supseteq A_i \supseteq A_{i+1} \supseteq \dots$ mit $\mu(A_1) < \infty$ folgt
 $\mu\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i)$

Def. II.9 / \mathcal{X} -stabil

Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt **\cup -stabil** (bzw. **\cap -stabil**, **\setminus -stabil**), wenn $A \cup B \in \mathcal{A}$ (bzw. $A \cap B \in \mathcal{A}$, $A \setminus B \in \mathcal{A}$) $\forall A, B \in \mathcal{A}$ gilt.

\cup -stabil impliziert Stabilität bzgl. endlicher Vereinigung. Ebenso \cap -stabil.

Def. II.10 / Ring / Algebra

Ein Mengensystem $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt **Ring** über X , falls:

- i) $\emptyset \in \mathcal{R}$
- ii) $A, B \in \mathcal{R} \implies A \setminus B \in \mathcal{R}$
- iii) $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cup B \in \mathcal{R}$

\mathcal{R} heißt **Algebra**, falls zusätzlich $X \in \mathcal{R}$.

Für $A, B \in \mathcal{R}$ gilt: $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{R}$

Ringe sind \cup -stabil, \cap -stabil, \setminus -stabil

Def. II.11 (Im Aufschrieb II.10) / Prämaß

Sei $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ Ring. Eine Funktion $\lambda : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ heißt **Prämaß** auf \mathcal{R} , falls:

i) $\lambda(\emptyset) = 0$

ii) Für $A_i \in \mathcal{R}, i \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt mit $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{R}$ gilt:

$$\lambda\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A_i)$$

σ -subadditiv, subadditiv, σ -endlich, endlich, monoton, Nullmenge und fast-überall werden wie für Maße definiert.

Def. II.12 (Im Aufschrieb II.11) / Fortsetzung

λ Prämaß auf Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Ein äußeres Maß μ auf X (bzw. ein Maß auf \mathcal{A}) heißt **Fortsetzung** von λ , falls gilt:

- i) $\mu|_{\mathcal{R}} = \lambda$, d.h. $\mu(A) = \lambda(A) \ \forall A \in \mathcal{R}$
- ii) $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}(\mu)$ (bzw. $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$), d.h. alle $A \in \mathcal{R}$ sind μ -messbar

induziertes äußeres Maß / Caratheodory-Fortsetzung

Lemma II.14 (Im Aufschrieb II.13)

$\lambda : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ Prämaß auf Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Sei $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ das in Satz II.3 aus \mathcal{R} konstruierte äußere Maß, d.h. $\forall E \subseteq X$:

$$\mu(E) := \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A_i) \mid A_i \in \mathcal{R}, E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right\}$$

Dann ist μ eine Fortsetzung von λ .

μ heißt **induziertes äußeres Maß** oder **Caratheodory-Fortsetzung** von λ .

