Def I.1, σ-Algebra, messbarer Raum

Menge X, Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$, eine Teilmenge von $\mathcal{P}(X)$ heißt Mengensystem

Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt **σ-Algebra**, falls:

(i) $X \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \implies X \setminus A \in \mathcal{A}$

(iii) $A_i \in \mathcal{A}, \forall i \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$

Das Paar $(X, \mathcal{A})$ heißt dann **messbarer Raum**.

Satz I.2

Jeder Durchschnitt von (endlich oder unendlich vielen) σ-Algebren auf der selben Menge X ist wieder eine σ-Algebra.

Def. I.3

Für ein Mengensystem $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt $\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap\{\mathcal{A} | \mathcal{A}$ ist σ-Algebra in X mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}\}$ die von $\mathcal{E}$ **erzeugte $\boldsymbol{\sigma}$-Algebra**. Man nennt $\mathcal{E}$ das **erzeugende System** von $\sigma(\mathcal{E})$.

Dieser Durchschnitt ist nicht-trivial, denn $\mathcal{P}(X)$ ist σ-Algebra mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Def. I.4

Eine Folge $(s_k) \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ $(k \in \mathbb{N})$ konvergiert gegen $s \in \bar{\mathbb{R}}$, falls eine der folgenden Alternativen gilt:

(i) $s \in \mathbb{R}$ und $\forall \epsilon > 0$ gilt: $s_k \in (s - \epsilon, s + \epsilon) \subseteq \mathbb{R}$ für k hinreichend groß

(ii) $s = \infty$ und $\forall r \in \mathbb{R} : s_k \in (r, \infty]$ für k hinreichend groß

(iii) $s = -\infty$ und $\forall r \in \mathbb{R} : s_k \in [-\infty, r)$ für k hinreichend groß

$(s_k) \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann in $\bar{\mathbb{R}}$ konvergent, wenn sie entweder in $\mathbb{R}$ konvergiert, oder bestimmt gegen $\pm\infty$ divergiert.

Def. I.5, Maßraum

Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra, eine nicht-negative Mengenfunktion $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ heißt **Maß** auf $\mathcal{A}$, falls:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) für beliebige paarweiße disjunkte $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, gilt:
$\mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$ (σ-Additivität)

Das Tripel $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt **Maßraum**.

Bem.:

(i) Für endlich viele paarweiße disjunkte $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, ..., n$, folgt aus (ii) indem man $A_i = \emptyset$ für $i = n + 1, ...$ setzt:
$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$

(ii) Monotonie des Maßes: $A, B \in \mathcal{A}$ mit
$A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$

Def. I.6

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Das Maß μ heißt **endlich**, wenn $\mu(A) < \infty \; \forall A \in \mathcal{A}$ und **$\boldsymbol{\sigma}$-endlich**, wenn es eine Folge $(X_i) \in \mathcal{A}$ mit $\mu(X_i) < \infty$ gibt, sodass $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$. Falls $\mu(X) = 1$, so wird μ **Wahrscheinlichkeits-Maß** genannt.

Satz I.7 (Stetigkeitseig. von Maßen)

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Dann gelten für Mengen $A_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N}$ folgende Aussagen:

(i) Aus $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$ folgt: $\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$

(ii) Aus $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$ mit $\mu(A_1) < \infty$, folgt: $\mu(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$

(iii) $\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$

Bemerkungen zu Satz I.7

(1) (i) Stetigkeit von unten
(ii) Stetigkeit von oben
(iii) σ-Subadditivität von μ

(2) Bedingung $\mu(A_i) \leq \infty$ in (ii) kann durch $\mu(A_k) \leq \infty$ für ein $k \in \mathbb{N}$ ersetzt werden, kann aber nicht weggelassen werden.
Begründung:
$A_k = k, k+1, \ldots \subseteq \mathbb{N}$
$card(A_k) = \infty \ \forall k \in \mathbb{N}$
Aber: $card(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i) = card(\emptyset) = 0$

Def. I.8

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum.
Jede Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$ heißt **$\boldsymbol{\mu}$-Nullmenge**. Das System aller μ-Nullmengen bezeichnen wir mit $\boldsymbol{\mathcal{N}(\mu)}$. Das Maß μ heißt **vollständig**, wenn gilt:

$$N \subseteq A \text{ für ein } H \in \mathcal{A} \text{ mit } \mu(A) = 0 \implies N \in \mathcal{A} \text{ und } \mu(N) = 0$$

Bem.: Nicht jedes Maß ist vollständig:

$$\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(X) \ \mu(A) = 0 \ \forall A \in \mathcal{A}$$

Allerdings lässt sich jedes Maß vervollständigen

Zu Def. I.8: Vervollstandigung

$\bar{\mu}$ ist wohldefiniert: $A \cup N = B \cup P$ mit
$A, B \in \mathcal{A},\ P, N \in \mathcal{T}_\mu \implies \exists C \in \mathcal{A}, \mu(C) = 0 : P \subseteq C \implies A \subseteq B \cup C \implies \mu(A) \leq \mu(B) + \mu(C) = \mu(B)$
Symm $\implies \mu(A) = \mu(B)$
$\bar{\mu}$ heißt **Vervollständigung** von μ

Satz I.9

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Dann ist $\bar{\mathcal{A}}_\mu$ eine σ-Algebra und $\bar{\mu}$ ein vollständiges Maß auf $\bar{\mathcal{A}}_\mu$, welches mit μ auf $\mathcal{A}$ übereinstimmt.

Satz I.10

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum und $(X, \bar{\mathcal{A}}_\mu, \bar{\mu})$ sei Vervollständigung. Ferner sei $(X, \mathcal{B}, \nu)$ ein vollständiger Maßraum mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ und $\mu = \nu$ auf $\mathcal{A}$. Dann ist $\bar{\mathcal{A}}_\mu \subseteq \mathcal{B}$ und $\bar{\mu} = \nu$ auf $\bar{\mathcal{A}}_\mu$.

Def. I.11

$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{C})$ messbare Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt $\boldsymbol{\mathcal{A} - \mathcal{C}}$**−messbar**, falls $f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}$
Falls $\mathcal{A}, \mathcal{C}$ klar sind, bezeichnen wir f einfach als messbar

Lemma I.12

$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{C})$ messbare Räume und $\mathcal{C} := \sigma(\mathcal{E})$. Jede Abbildung $f : X \to Y$ mit $f^{-1}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$ ist $\mathcal{A}$-$\mathcal{C}$-messbar

borel-messbar (Zu Lemma I.12)

Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist $\mathbb{B}^n$-$\mathbb{B}^n$-messbar
(man sagt: f ist **borel-messbar**).
Denn $\mathbb{B}^n = \sigma(\{\text{offene Teilmengen des } \mathbb{R}^n\})$ und Urbilder offener Mengen sind offen für f stetig (siehe. Ana 1)

Def. I.13

$(X, \mathcal{A})$ messbarer Raum und $D \in \mathcal{A}$.
Eine Funktion $f : D \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt **numerische Funktion**.

Lemma I.14

$(X, \mathcal{A})$ messbarer Raum, $D \in \mathcal{A}$ und $f : D \to \bar{\mathbb{R}}$.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) f ist $\mathcal{A}$-$\bar{\mathbb{B}}^1$-messbar

(ii) $\forall\, \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$ offen ist $f^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}$ und $f^{-1}(\{\infty\}), f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{A}$

(iii) $\{f \leq s\} := \{x \in D \mid f(x) \in [-\infty, s]\} \in \mathcal{A}\ \forall s \in \mathbb{R}$

(iv) $\{f < s\} := \{x \in D \mid f(x) \in [-\infty, s)\} \in \mathcal{A}\ \forall s \in \mathbb{R}$

(v) $\{f \geq s\} := \{x \in D \mid f(x) \in [s, \infty]\} \in \mathcal{A}\ \forall s \in \mathbb{R}$

(vi) $\{f > s\} := \{x \in D \mid f(x) \in (s, \infty]\} \in \mathcal{A}\ \forall s \in \mathbb{R}$

In (iii) - (vi) reicht es aus, $s \in \mathbb{Q}$, statt $s \in \mathbb{R}$ zu haben, denn es gilt z.B.:

$$\{f \geq s\} = \bigcap_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ s > q}} \{f > q\}$$

Lemma I.15

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, $D \in \mathcal{A}$ und $f, g : D \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-messbar. Dann sind die Mengen $\{f < g\} := \{x \in D : f(x) < g(x)\}$ und $\{f \leq g\} := \{x \in D : f(x) \leq g(x)\}$ Elemente aus $\mathcal{A}$.

Satz I.16

$(X, \mathcal{A})$ messbarer Raum, $D \in \mathcal{A}$ und $f_k : D \to \bar{\mathbb{R}}$ Folge von $\mathcal{A}$-messbaren Funktionen.
Dann sind auch folgende Funktionen $\mathcal{A}$-messbar:

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} f_k, \ \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k, \ \liminf_{k \to \infty} f_k, \ \limsup_{k \to \infty} f_k$$

Satz I.17

$(X, \mathcal{A})$ messbarer Raum, $D \in \mathcal{A}$, $f, g : D \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-messbar, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Dann sind die Funktionen

$$f + g,\ \alpha f,\ f^{\pm},\ max(f, g),\ min(f, g),\ |f|,\ fg,\ \frac{f}{g}$$

auf ihren Definitionsbereichen, die in $\mathcal{A}$ liegen $\mathcal{A}$-messbar.

Def I.18

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Eine auf $D \in \mathcal{A}$ definierte Funktion
$f : D \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt
μ-messbar (auf X), wenn $\mu(X \setminus D) = 0$ und f $\mathcal{A}|_{\mathcal{D}}$-messbar ist.
($\mathcal{A}|_D := \{A \cap D | A \in \mathcal{A}\}$, siehe Blatt 1)

μ-fast überall

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Man sagt, die Aussage $A[x]$ ist wahr **für $\boldsymbol{\mu}$-fast alle** $x \in M \in \mathcal{A}$ oder **$\boldsymbol{\mu}$-fast überall** auf M, falls es eine μ-Nullmenge N gibt mit

$$\{x \in M : A[x] \text{ ist falsch}\} \subseteq N$$

Dabei wird nicht verlangt, dass $\{x \in M : A[x] \text{ ist falsch}\}$ selbst zu $\mathcal{A}$ gehört.
Zum Beispiel bedeutet für Funktionen $f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ die Aussage „$f(x) \leq g(x)$ für μ-fast alle $x \in X$ “, dass es eine Nullmenge N gibt, so dass $\forall x \in X \setminus N$ gilt: $f(x) \leq g(x)$.
Eine Funktion h ist „μ-fast überall auf X definiert“, wenn h auf $D \in \mathcal{A}$ definiert ist und $\mu(X \setminus D) = 0$.
Ziel: Messbarkeit für Funktionen, die nur μ-fast überall definiert sind.

Lemma I.19

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ vollständiger Maßraum. f μ-messbar auf X. Dann ist auch jede Funktion $\tilde{f}$ mit $\tilde{f} = f$ μ-fast überall μ-messbar.

Satz I.20

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ vollständiger Maßraum und seien $f_k, k \in \mathbb{N}$, μ-messbar. Falls f_k punktweise μ-fast überall gegen f konvergiert, dann ist f auch μ-messbar.

Satz I.21 (Egorov)

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $D \in \mathcal{A}$ Menge mit $\mu(D) < \infty$ und f_n, f μ-messbare, μ-fast überall endliche Funktionen auf D mit $f_n \to f$ μ-fast überall. Dann existiert $\forall \epsilon > 0$ eine Menge $B \in \mathcal{A}$ mit $B \subseteq D$ und

(i) $\mu(D \setminus B) < \epsilon$

(ii) $f_n \to f$ gleichmäßig auf B

Äußere Maße

Sei X eine Menge. Eine Funktion $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ heißt **äußeres Maß** auf X, falls gilt:

$$A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \implies \mu(A) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$$

(i) Die Begriffe σ-additiv, σ-subadditiv, σ-endlich, endlich, monoton sowie Nullmenge und μ-fast überall werden wie für Maße definiert. (Man ersetze überall $\mathcal{A}$ durch $\mathcal{P}(X)$)

(ii) Ein äußeres Maß ist monoton, σ-subadditiv und insbesondere endlich subadditiv
(d.h. $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i \implies \mu(A) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$)

messbare Menge

Sei μ äußeres Maß auf X. Die Menge $A \subseteq X$ heißt **$\boldsymbol{\mu}$-messbar**, falls $\forall S \subseteq X$ gilt:

$$\mu(S) \geq \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A).$$

Das System aller μ-messbaren Mengen wird mit $\boldsymbol{\mathcal{M}(\mu)}$ bezeichnet.

Da $S = (S \cap A) \cup (S \setminus A)$ folgt aus Def. II.1:

$$\mu(S) \leq \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A)$$

d.h.: A messbar $\Leftrightarrow \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A)$ $\forall S \subseteq X$

μ als äußeres Maß

Sei $\mathcal{Q}$ ein System von Teilmengen einer Menge X, welches die leere Menge enthält, und sei $\lambda : \mathcal{Q} \to [0, \infty]$ eine Mengenfunktion auf $\mathcal{Q}$ mit $\lambda(\emptyset) = 0$. Definiere die Mengenfunktion
$\mu(E) := \inf\{\sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(P_i) |\ P_i \in \mathcal{Q}, E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} P_i\}$.
Dann ist μ ein äußeres Maß. $(\inf \emptyset = \infty)$

Einschränkung

Sei $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ äußeres Maß auf X. Für M $\subseteq X$ gegeben erhält man durch $\mu\llcorner M : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty], \mu\llcorner M(A) := \mu(A \cap M)$ ein äußeres Maß $\mu\llcorner M$ auf X, welches wir **Einschränkung** von μ auf M nennen.
Es gilt:

$$A \ \mu\text{-messbar} \implies A \ \mu\llcorner M\text{-messbar}$$

Satz II.5

μ äußeres Maß auf X. Dann gilt:

$$N \ \mu\text{-Nullmenge} \implies N \ \mu\text{-messbar}$$

$$N_k, k \in \mathbb{N}, \mu\text{-Nullmengen} \implies \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k \ \mu\text{-Nullmenge}$$

$\mathcal{M}(\mu)$ enthält alle Nullmengen $N \subseteq X$ und damit auch deren Komplemente
(siehe Satz II.7). Es kann sein, dass keine anderen Mengen μ-messbar sind.

Lemma II.6

Seien $A_i \in \mathcal{M}(\mu)$, $i = 1, ..., k$, paarweiße disjunkt und μ äußeres Maß. Dann gilt $\forall S \subseteq X$:

$$\mu(S \cap \bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} \mu(S \cap A_i)$$

Satz II.7

Sei $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß. Dann ist $\mathcal{M}(\mu)$ eine σ-Algebra und μ ist ein vollständiges Maß auf $\mathcal{M}(\mu)$.

Lemma II.8

μ äußeres Maß, $A_i \in \mathcal{M}(\mu), i \in \mathbb{N}$.
Dann gelten:

i) Aus $A_1 \subseteq ... \subseteq A_i \subseteq A_{i+1} \subseteq ...$ folgt $\mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i)$

ii) Aus $A_1 \supseteq ... \supseteq A_i \supseteq A_{i+1} \supseteq ...$ mit $\mu(A_1) < \infty$ folgt $\mu(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i)$

Def. II.9 / X-stabil

Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt $\bigcup$-**stabil** (bzw. $\bigcap$-**stabil**, $\setminus$-**stabil**), wenn $A \cup B \in \mathcal{A}$ (bzw. $A \cap B \in \mathcal{A}$, $A \setminus B \in \mathcal{A}$) $\forall A, B \in \mathcal{A}$ gilt.

$\bigcup$-stabil impliziert Stabilität bzgl. endlicher Vereinigung. Ebenso $\bigcap$-stabil.

Def. II.10 / Ring / Algebra

Ein Mengensystem $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt **Ring** über X, falls:

i) $\emptyset \in \mathcal{R}$

ii) $A, B \in \mathcal{R} \implies A \setminus B \in \mathcal{R}$

iii) $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cup B \in \mathcal{R}$

$\mathcal{R}$ heißt **Algebra**, falls zusätzlich $X \in \mathcal{R}$.

Für $A, B \in \mathcal{R}$ gilt: $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{R}$
Ringe sind $\bigcup$-stabil, $\bigcap$-stabil, $\setminus$-stabil

Def. II.11 (Im Aufschrieb II.10) / Prämaß

Sei $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ Ring. Eine Funktion $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ heißt **Prämaß** auf $\mathcal{R}$, falls:

i) $\lambda(\emptyset) = 0$

ii) Für $A_i \in \mathcal{R}, i \in \mathbb{N}$, paarweiße disjunkt mit $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{R}$ gilt:

$$\lambda\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda(A_i)$$

σ-subadditiv, subadditiv, σ-endlich, endlich, monoton, Nullmenge und fast-überall werden wie für Maße definiert.

Def. II.12 (Im Aufschrieb II.11) / Fortsetzung

λ Prämaß auf Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Ein äußeres Maß μ auf X (bzw. ein Maß auf $\mathcal{A}$) heißt **Fortsetzung** von λ, falls gilt:

i) $\mu|_{\mathcal{R}} = \lambda$, d.h. $\mu(A) = \lambda(A)\ \forall A \in \mathcal{R}$

ii) $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}(\mu)$ (bzw. $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$), d.h. alle $A \in \mathcal{R}$ sind μ-messbar

induziertes äußeres Maß / Caratheodory-Fortsetzung

Lemma II.14 (Im Aufschrieb II.13)

$\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ Prämaß auf Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Sei
$\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ das in Satz II.3 aus $\mathcal{R}$ konstruierte äußere Maß,
d.h. $\forall E \subseteq X$:

$$\mu(E) := inf\{\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda(A_i) \mid A_i \in \mathcal{R}, E \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\}$$

Dann ist μ eine Fortsetzung von λ.
μ heißt **induziertes äußeres Maß** oder
Caratheodory-Fortsetzung von λ.

Sei $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ Prämaß auf Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann ex. ein Maß μ auf $\sigma(\mathcal{R})$ mit $\mu = \lambda$ auf $\mathcal{R}$. Diese Fortsetzung ist eindeutig, falls λ σ-endlich ist.

Regularität der Caratheodory-Fortsetzung / i.A. II.15

Sei μ Caratheodory-Fortsetzung des Prämaßes $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ auf Ring $\mathcal{R}$ über X. Dann ex. $\forall D \subseteq X$ ein $E \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $E \supseteq D$ und $\mu(E) = \mu(D)$.
(μ ist „reguläres“ äußeres Maß)

Satz II.17 (i.A. II.16)

Sei λ ein σ-endliches Prämaß auf Ring $\mathcal{R}$ über X und sei $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ die Caratheodory-Fortsetzung von λ. Dann ist $\mu|_{\mathcal{M}(\mu)}$ die Vervollständigung von $\mu|_{\sigma(\mathcal{R})}$ und $\mathcal{M}(\mu)$ ist die vervollständigte σ-Algebra von $\overline{\sigma(\mathbb{R})}_{\mu|_{\sigma(\mathbb{R})}}$.
D.h. $\overline{\sigma(\mathbb{R})}_{\mu|_{\sigma(\mathbb{R})}} = \mathcal{M}(\mu)$. Insbesondere ex. genau eine Fortsetzung von $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ zu einem vollständigen Maß auf $\mathcal{M}(\mu)$.

Lemma II.18 (i.A. II.17)

$\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ σ-endliches Prämaß auf Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit Caratheodory-Fortsetzung μ. $D \subseteq X$ ist genau dann μ-messbar, wenn eine der folgenden Bedingungen gilt:

i) $\exists\ E \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $E \supseteq D$ und $\mu(E \setminus D) = 0$

ii) $\exists\ C \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $C \subseteq D$ und $\mu(D \setminus C) = 0$

Def. II.19 / Halbring

Ein Mengensystem $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt **Halbring** über X, falls:

i) $\emptyset \in \mathcal{Q}$

ii) $P, Q \in \mathcal{Q} \implies P \cap Q \in \mathcal{Q}$

iii) $P, Q \in \mathcal{Q} \implies P \setminus Q = \bigcup_{i=1}^{k} P_i$ mit endlich vielen paarweise disjunkten $P_i \in \mathcal{Q}$

Bemerkung: Intervall / Quader

Satz II.20 (i.A. II.19)

$\mathcal{I}$ ist ein Halbring.

Satz II.21 (i.A. II.20)

Für $i = 1, ..., n$ sei $\mathcal{Q}_i$ Halbring über X_i. Dann ist $\mathcal{Q} := \{P_1 \times ... \times P_n \mid P_i \in \mathcal{Q}_i\}$ ein Halbring über $X_1 \times ... \times X_n$.

Satz II.22 (i.A. II.21)

$\mathcal{Q}^n$ ist ein Halbring.

Satz II.23 (i.A. II.22)

$\mathcal{Q}$ Halbring über X und $\mathcal{F}$ sei das System aller endlichen Vereinigungen $F = \bigcup_{i=1}^{k} P_i$ von Mengen $P_I \in \mathcal{Q}$. Dann ist $\mathcal{F}$ der von $\mathcal{Q}$ erzeugte Ring.

Figuren

$\mathcal{Q} := \{\emptyset\} \cup \{\{a\} \mid a \in X\}$
$\Longrightarrow$ erzeugter Ring $\mathcal{F}$: Ring der endlichen Teilmengen von X.

Lemma II.24 (i.A. II.23)

$\mathcal{Q}$ Halbring über X, $\mathcal{F}$ der von $\mathcal{Q}$ erzeugte Ring.
$\implies \sigma(\mathcal{Q}) = \sigma(\mathcal{F})$

Lemma II.25 (i.A. II.24)

$\mathcal{Q}$ Halbring über X, $\mathcal{F}$ der von $\mathcal{Q}$ erzeugte Ring. Zu jedem $F \in \mathcal{F}$ existieren paarweise disjunkte $P_1, \dots, P_k \in \mathcal{Q}$ mit $F = \bigcup_{i=1}^{k} P_i$

Def. II.26 (i.A. II.25) / Inhalt

Sei $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(X)$ Halbring. Eine Funktion $\lambda : \mathcal{Q} \to [0, \infty]$ heißt **Inhalt** auf $\mathcal{Q}$, falls:

i) $\lambda(\emptyset) = 0$

ii) Für $A_i \in \mathcal{Q}$ paarweiße disjunkt mit $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{Q}$ gilt:

$$\lambda(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i)$$

λ heißt **Prämaß** auf $\mathcal{Q}$, falls λ σ-additiv auf $\mathcal{Q}$ ist.
D.h. für $A_i \in \mathcal{Q}$ paarweiße disjunkt ($i \in \mathbb{N}$) mit
$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{Q} : \lambda(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda(A_i)$

Satz II.27 (i.A. II.26)

λ Inhalt auf Halbring $\mathcal{Q}$ und $\mathcal{F}$ der von $\mathcal{Q}$ erzeugte Ring. Dann ex. genau ein Inhalt $\bar{\lambda} : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ mit $\bar{\lambda}(Q) = \lambda(Q) \; \forall Q \in \mathcal{Q}$.

Lemma II.28 (i.A. II.27)

λ Inhalt auf Halbring $\mathcal{Q}$ über X
$\implies \lambda$ ist monoton und subadditiv

Satz II.29 (i.A. II.28)

$vol^n(.)$ ist ein Inhalt auf $\mathcal{Q}^n$

Satz II.30 (i.A. II.29)

$\lambda : \mathcal{Q} \to [0, \infty]$ Prämaß auf Halbring $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{R}$ der von $\mathcal{Q}$ erzeugte Ring und $\bar{\lambda} : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ der eindeutig bestimmte Inhalt auf $\mathcal{R}$ mit $\bar{\lambda}|_{\mathcal{Q}} = \lambda$ (Satz II.27 / i.A. II.26), so ist $\bar{\lambda}$ ein Prämaß auf $\mathcal{R}$.

Satz II.31 ((i.A. II.30))

$\lambda : \mathcal{Q} \to [0, \infty]$ Prämaß auf Halbring $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Sei
$\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ das in Satz II.3 aus $\mathcal{Q}$ konstruierte äußere Maß,
d.h. $\forall E \subseteq X$ ist:

$$\mu(E) = inf\{\sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A_i) \mid A_i \in \mathcal{Q}, E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\}$$

Dann ist μ eine Fortsetzung von λ.

Satz II.32 ((i.A. II.31))

Für einen Inhalt λ auf Ring $\mathcal{R}$ und $A_i \in \mathcal{R}, i \in \mathbb{N}$, betrachte:

i) λ ist Prämaß auf $\mathcal{R}$

ii) Für $A_i \subseteq A_{i+1} \subseteq ...$ mit $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{R}$ gilt:
$\lambda(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \lim_{n \to \infty} \lambda(A_n)$

iii) Für $A_i \supseteq A_{i+1} \supseteq ...$ mit $\lambda(A_1) < \infty$ und $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{R}$ gilt:
$\lambda(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \lim_{n \to \infty} \lambda(A_n)$

iv) Für $A_i \supseteq A_{i+1} \supseteq ...$ mit $\lambda(A_1) < \infty$ und $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \emptyset$ gilt:
$\lim_{i \to \infty} \lambda(A_i) = 0$

Dann gilt: i) $\Leftrightarrow$ ii) $\implies$ iii) $\implies$ iv)

Ist λ endlich, d.h. $\lambda(A) < \infty \; \forall A \in \mathcal{R}$, dann sind i) - iv) äquivalent.