Def I.1, σ-Algebra, messbarer Raum

Menge X, Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$, eine Teilmenge von $\mathcal{P}(X)$ heißt Mengensystem

Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt **σ-Algebra**, falls:

(i) $X \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \implies X \setminus A \in \mathcal{A}$

(iii) $A_i \in \mathcal{A}, \forall i \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$

Das Paar $(X, \mathcal{A})$ heißt dann **messbarer Raum**.

Satz I.2

Jeder Durchschnitt von (endlich oder unendlich vielen) σ-Algebren auf der selben Menge X ist wieder eine σ-Algebra.

Def. I.3

Für ein Mengensystem $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt $\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap\{\mathcal{A} | \mathcal{A}$ ist σ-Algebra in X mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}\}$ die von $\mathcal{E}$ **erzeugte $\boldsymbol{\sigma}$-Algebra**. Man nennt $\mathcal{E}$ das **erzeugende System** von $\sigma(\mathcal{E})$.

Dieser Durchschnitt ist nicht-trivial, denn $\mathcal{P}(X)$ ist σ-Algebra mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Def. I.4

Eine Folge $(s_k) \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ $(k \in \mathbb{N})$ konvergiert gegen $s \in \bar{\mathbb{R}}$, falls eine der folgenden Alternativen gilt:

(i) $s \in \mathbb{R}$ und $\forall \epsilon > 0$ gilt: $s_k \in (s - \epsilon, s + \epsilon) \subseteq \mathbb{R}$ für k hinreichend groß

(ii) $s = \infty$ und $\forall r \in \mathbb{R} : s_k \in (r, \infty]$ für k hinreichend groß

(iii) $s = -\infty$ und $\forall r \in \mathbb{R} : s_k \in [-\infty, r)$ für k hinreichend groß

$(s_k) \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann in $\bar{\mathbb{R}}$ konvergent, wenn sie entweder in $\mathbb{R}$ konvergiert, oder bestimmt gegen $\pm\infty$ divergiert.

Def. I.5, Maßraum

Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra, eine nicht-negative Mengenfunktion $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ heißt **Maß** auf $\mathcal{A}$, falls:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) für beliebige paarweiße disjunkte $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, gilt:
$\mu(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$ (σ-Additivität)

Das Tripel $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt **Maßraum**.

Bem.:

(i) Für endlich viele paarweiße disjunkte $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, ..., n$, folgt aus (ii) indem man $A_i = \emptyset$ für $i = n + 1, ...$ setzt:
$\mu(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i)$

(ii) Monotonie des Maßes: $A, B \in \mathcal{A}$ mit
$A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$

Def. I.6

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Das Maß μ heißt **endlich**, wenn $\mu(A) < \infty \; \forall A \in \mathcal{A}$ und $\boldsymbol{\sigma}$**-endlich**, wenn es eine Folge $(X_i) \in \mathcal{A}$ mit $\mu(X_i) < \infty$ gibt, sodass $X = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} X_i$. Falls $\mu(X) = 1$, so wird μ **Wahrscheinlichkeits-Maß** genannt.

Satz I.7 (Stetigkeitseig. von Maßen)

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Dann gelten für Mengen $A_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N}$ folgende Aussagen:

(i) Aus $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$ folgt: $\mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i)$

(ii) Aus $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$ mit $\mu(A_1) < \infty$, folgt: $\mu(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i)$

(iii) $\mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$

Bemerkungen zu Satz I.7

(1) (i) Stetigkeit von unten
(ii) Stetigkeit von oben
(iii) σ-Subadditivität von μ

(2) Bedingung $\mu(A_i) \leq \infty$ in (ii) kann durch $\mu(A_k) \leq \infty$ für ein $k \in \mathbb{N}$ ersetzt werden, kann aber nicht weggelassen werden.
Begründung:
$A_k = k, k+1, ... \subseteq \mathbb{N}$
$card(A_k) = \infty \; \forall k \in \mathbb{N}$
Aber: $card(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i) = card(\emptyset) = 0$

Def. I.8

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum.
Jede Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$ heißt $\boldsymbol{\mu}$**-Nullmenge**. Das System aller μ-Nullmengen bezeichnen wir mit $\boldsymbol{\mathcal{N}(\mu)}$. Das Maß μ heißt **vollständig**, wenn gilt:

$$N \subseteq A \text{ für ein } H \in \mathcal{A} \text{ mit } \mu(A) = 0 \implies N \in \mathcal{A} \text{ und } \mu(N) = 0$$

Bem.: Nicht jedes Maß ist vollständig:

$$\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(X) \; \mu(A) = 0 \; \forall A \in \mathcal{A}$$

Allerdings lässt sich jedes Maß vervollständigen

Zu Def. I.8: Vervollstandigung

$\bar{\mu}$ ist wohldefiniert: $A \cup N = B \cup P$ mit
$A, B \in \mathcal{A}, \;\; P, N \in \mathcal{T}_\mu \implies \exists C \in \mathcal{A}, \mu(C) = 0 : P \subseteq C \implies A \subseteq$
$B \cup C \implies \mu(A) \leq \mu(B) + \mu(C) = \mu(B)$
Symm $\implies \mu(A) = \mu(B)$
$\bar{\mu}$ heißt **Vervollständigung** von μ

Satz I.9

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Dann ist $\bar{\mathcal{A}}_\mu$ eine σ-Algebra und $\bar{\mu}$ ein vollständiges Maß auf $\bar{\mathcal{A}}_\mu$, welches mit μ auf $\mathcal{A}$ übereinstimmt.

Satz I.10

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum und $(X, \bar{\mathcal{A}}_\mu, \bar{\mu})$ sei Vervollständigung. Ferner sei $(X, \mathcal{B}, \nu)$ ein vollständiger Maßraum mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ und $\mu = \nu$ auf $\mathcal{A}$. Dann ist $\bar{\mathcal{A}}_\mu \subseteq \mathcal{B}$ und $\bar{\mu} = \nu$ auf $\bar{\mathcal{A}}_\mu$.

Def. I.11

$(X,\mathcal{A}),(Y,\mathcal{C})$ messbare Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt
$\boldsymbol{\mathcal{A}-\mathcal{C}}$**−messbar**, falls $f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}$
Falls $\mathcal{A},\mathcal{C}$ klar sind, bezeichnen wir f einfach als messbar

Lemma I.12

$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{C})$ messbare Räume und $\mathcal{C} := \sigma(\mathcal{E})$. Jede Abbildung $f : X \to Y$ mit $f^{-1}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$ ist $\mathcal{A}$-$\mathcal{C}$-messbar

borel-messbar (Zu Lemma I.12)

Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist $\mathbb{B}^n$-$\mathbb{B}^n$-messbar
(man sagt: f ist **borel-messbar**).
Denn $\mathbb{B}^n = \sigma(\{\text{offene Teilmengen des } \mathbb{R}^n\})$ und Urbilder offener Mengen sind offen für f stetig (siehe. Ana 1)

Def. I.13

$(X, \mathcal{A})$ messbarer Raum und $D \in \mathcal{A}$.
Eine Funktion $f : D \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt **numerische Funktion**.

Lemma I.14

$(X, \mathcal{A})$ messbarer Raum, $D \in \mathcal{A}$ und $f : D \to \bar{\mathbb{R}}$.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) f ist $\mathcal{A}$-$\bar{\mathbb{B}}^1$-messbar

(ii) $\forall\, \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$ offen ist $f^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}$ und
$f^{-1}(\{\infty\}), f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{A}$

(iii) $\{f \leq s\} := \{x \in D \mid f(x) \in [-\infty, s]\} \in \mathcal{A}\ \forall s \in \mathbb{R}$

(iv) $\{f < s\} := \{x \in D \mid f(x) \in [-\infty, s)\} \in \mathcal{A}\ \forall s \in \mathbb{R}$

(v) $\{f \geq s\} := \{x \in D \mid f(x) \in [s, \infty]\} \in \mathcal{A}\ \forall s \in \mathbb{R}$

(vi) $\{f > s\} := \{x \in D \mid f(x) \in (s, \infty]\} \in \mathcal{A}\ \forall s \in \mathbb{R}$

In (iii) - (vi) reicht es aus, $s \in \mathbb{Q}$, statt $s \in \mathbb{R}$ zu haben, denn es gilt z.B.:

$$\{f \geq s\} = \bigcap_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ s > q}} \{f > q\}$$

Lemma I.15

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, $D \in \mathcal{A}$ und $f, g : D \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-messbar. Dann sind die Mengen $\{f < g\} := \{x \in D : f(x) < g(x)\}$ und $\{f \leq g\} := \{x \in D : f(x) \leq g(x)\}$ Elemente aus $\mathcal{A}$.

Satz I.16

$(X, \mathcal{A})$ messbarer Raum, $D \in \mathcal{A}$ und $f_k : D \to \bar{\mathbb{R}}$ Folge von $\mathcal{A}$-messbaren Funktionen.
Dann sind auch folgende Funktionen $\mathcal{A}$-messbar:

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} f_k, \ \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k, \ \liminf_{k \to \infty} f_k, \ \limsup_{k \to \infty} f_k$$

Satz I.17

$(X, \mathcal{A})$ messbarer Raum, $D \in \mathcal{A}$, $f, g : D \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-messbar, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Dann sind die Funktionen

$$f + g,\ \alpha f,\ f^{\pm},\ max(f, g),\ min(f, g),\ |f|,\ fg,\ \frac{f}{g}$$

auf ihren Definitionsbereichen, die in $\mathcal{A}$ liegen $\mathcal{A}$-messbar.

Def I.18

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Eine auf $D \in \mathcal{A}$ definierte Funktion
$f : D \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt
μ-messbar (auf X), wenn $\mu(X \setminus D) = 0$ und f $\mathcal{A}|_{\mathcal{D}}$-messbar ist.
($\mathcal{A}|_D := \{A \cap D | A \in \mathcal{A}\}$, siehe Blatt 1)

μ-fast überall

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Man sagt, die Aussage $A[x]$ ist wahr **für μ-fast alle** $x \in M \in \mathcal{A}$ oder **μ-fast überall** auf M, falls es eine μ-Nullmenge N gibt mit

$$\{x \in M : A[x] \text{ ist falsch}\} \subseteq N$$

Dabei wird nicht verlangt, dass $\{x \in M : A[x] \text{ ist falsch}\}$ selbst zu $\mathcal{A}$ gehört.
Zum Beispiel bedeutet für Funktionen $f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ die Aussage „$f(x) \leq g(x)$ für μ-fast alle $x \in X$ ", dass es eine Nullmenge N gibt, so dass $\forall x \in X \setminus N$ gilt: $f(x) \leq g(x)$.
Eine Funktion h ist „μ-fast überall auf X definiert", wenn h auf $D \in \mathcal{A}$ definiert ist und $\mu(X \setminus D) = 0$.
Ziel: Messbarkeit für Funktionen, die nur μ-fast überall definiert sind.

Lemma I.19

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ vollständiger Maßraum. f μ-messbar auf X. Dann ist auch jede Funktion $\tilde{f}$ mit $\tilde{f} = f$ μ-fast überall μ-messbar.

Satz I.20

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ vollständiger Maßraum und seien $f_k, k \in \mathbb{N}$, μ-messbar. Falls f_k punktweise μ-fast überall gegen f konvergiert, dann ist f auch μ-messbar.