

Aproksymacja profilu wysokościowego

Projekt 3 – Metody Numeryczne

Yauheni Pyryeu 201253

12 czerwca 2025

Spis treści

1	Wstęp	1
2	Opis algorytmów	1
2.1	Interpolacja wielomianowa Lagrange’a	1
2.2	Interpolacja funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia	1
3	Dane	1
4	Analiza podstawowa interpolacji wielomianowej	2
4.1	Trasa: GdanskPromenade	2
4.2	Trasa: Hel	3
5	Analiza podstawowa interpolacji funkcjami sklejanymi	4
5.1	Trasa: GdanskPromenade	4
5.2	Trasa: Hel	5
6	Analiza dodatkowa	6
6.1	Wpływ rozmieszczenia węzłów (węzły Czebyszewa)	6
6.2	Trasa o wielu wzniesieniach	7
7	Interpretacja wyników	8
8	Podsumowanie	8

1 Wstęp

Profil wysokościowy trasy to wykres przedstawiający wysokość bezwzględną w terenie w zależności od odległości od początku trasy. Znając wysokość tylko części punktów trasy, możemy określić wysokości punktów pośrednich za pomocą aproksymacji interpolacyjnej. W projekcie zastosowano dwie metody interpolacji: wielomianową (Lagrange’a) oraz funkcje sklepane trzeciego stopnia (naturalne splajny kubiczne).

2 Opis algorytmów

2.1 Interpolacja wielomianowa Lagrange’a

Interpolacja polega na wyznaczeniu wielomianu przechodzącego przez zadane punkty (węzły). W celu poprawy stabilności numerycznej, przed wyznaczeniem wielomianu przekształcono dziedzinę do przedziału $[0, 1]$.

$$P(x) = \sum_{j=0}^{N-1} y_j L_j(x)$$

gdzie $L_j(x)$ to wielomiany bazowe Lagrange’a:

$$L_j(x) = \prod_{m=0, m \neq j}^{N-1} \frac{x - x_m}{x_j - x_m}$$

Główną zaletą tej metody jest jej prostota koncepcyjna i gwarancja przejścia przez wszystkie węzły. Wadą jest podatność na tzw. zjawisko Rungego, czyli duże oscylacje wielomianu interpolacyjnego, szczególnie w pobliżu krańców przedziału, przy dużej liczbie równoodległych węzłów. W celu poprawy stabilności numerycznej obliczeń, dziedzina funkcji interpolowanej (x_i) jest przekształcana do przedziału $[0, 1]$ przed wyznaczeniem wielomianu, a następnie wartości są transformowane z powrotem.

2.2 Interpolacja funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia

Funkcje sklepane trzeciego stopnia (splajny kubiczne) to funkcje złożone z wielomianów trzeciego stopnia, definiowanych osobno na każdym podprzedziale $[x_i, x_{i+1}]$ pomiędzy kolejnymi węzłami. Każdy taki wielomian $S_i(x)$ jest tak dobrany, aby cała funkcja była ciągła oraz miała ciągle pierwszą i drugą pochodną (C^2) w całym przedziale interpolacji. W przypadku naturalnych splajnów kubicznych dodatkowo wymaga się, aby drugie pochodne na końcach przedziału były równe zero ($S''(x_0) = 0$, $S''(x_{N-1}) = 0$). Splajny kubiczne są mniej podatne na oscylacje niż wielomiany interpolacyjne wysokiego stopnia i zwykle zapewniają gładzsze oraz bardziej realistyczne przybliżenie danych.

3 Dane

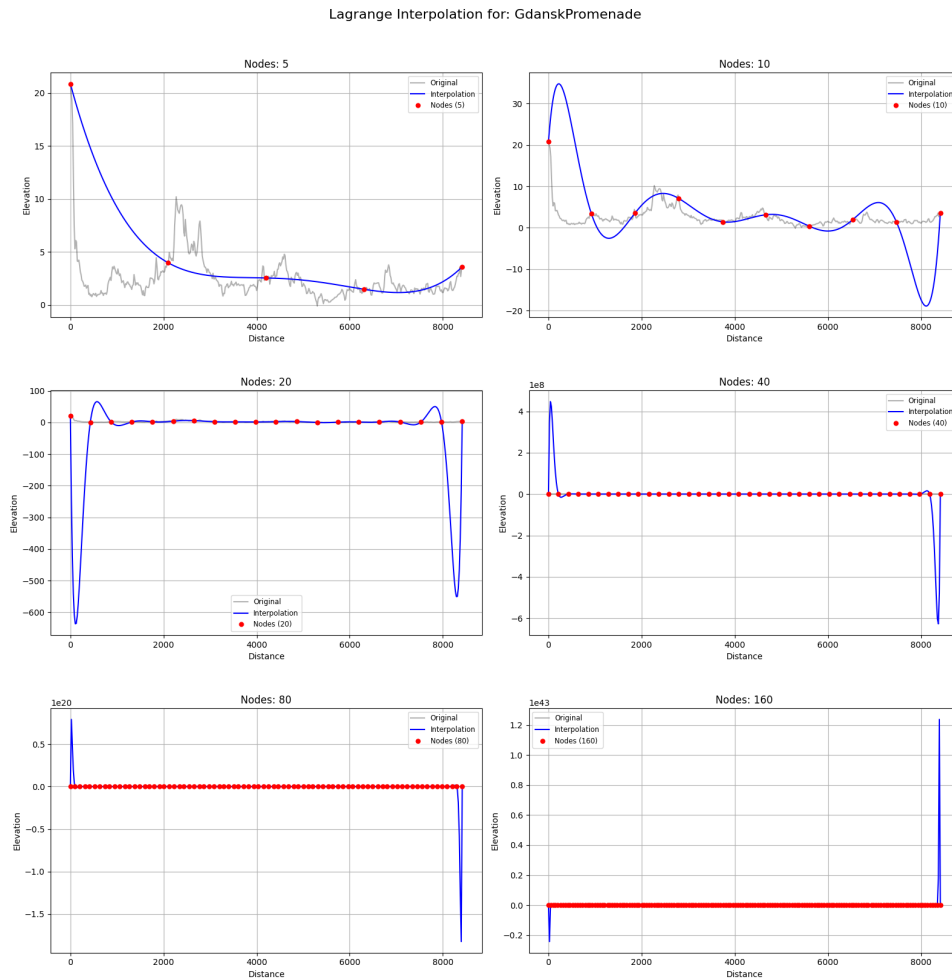
Do analizy wykorzystano rzeczywiste profile wysokościowe kilku tras o zróżnicowanym charakterze:

- GdanskPromenade – trasa prawie płaska,
- Hel – trasa nadmorska,
- VariousHills – trasa o wielu wzniesieniach,
- ChallengerDeep – trasa z dużą różnicą wysokości.

4 Analiza podstawowa interpolacji wielomianowej

4.1 Trasa: GdanskPromenade

Wpływ liczby węzłów na jakość interpolacji Lagrange'a przedstawiono na rysunkach poniżej.

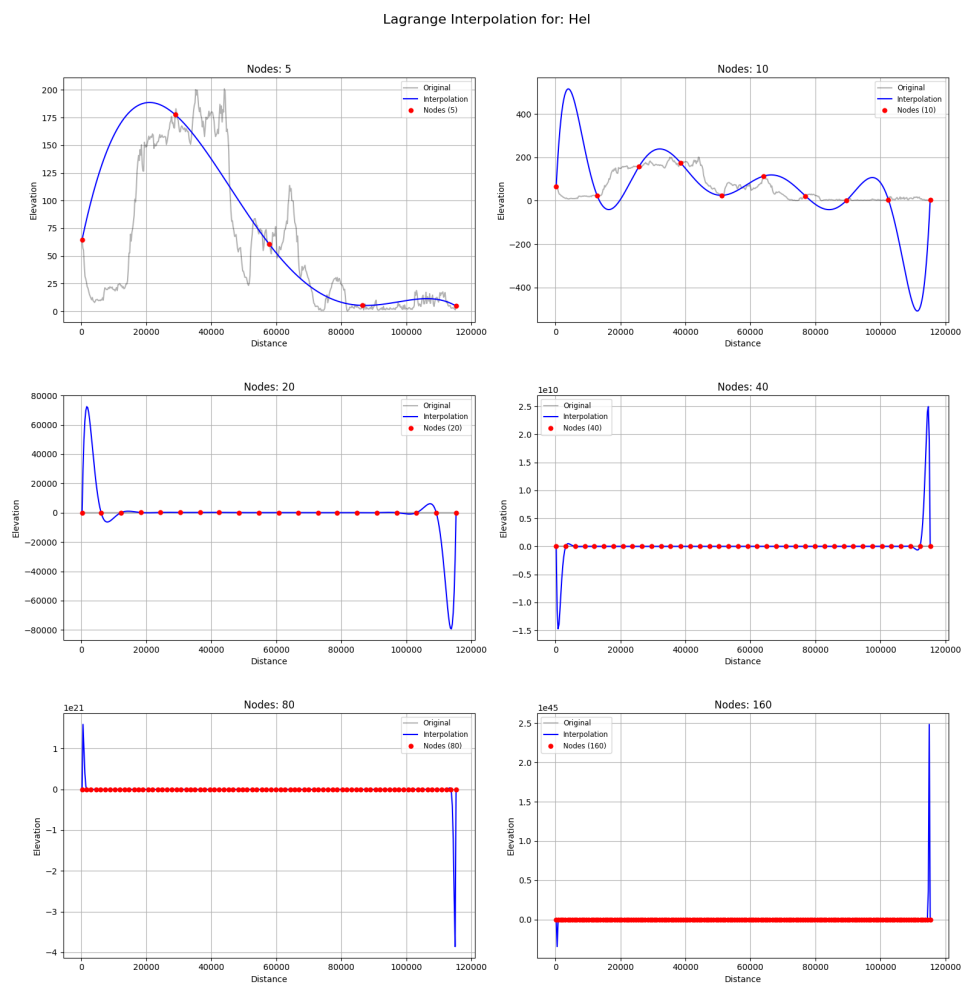


Rysunek 1: Interpolacja Lagrange'a dla trasy GdanskPromenade (różne liczby węzłów)

Interpretacja (Rysunek 1):

- **5 węzły:** Zbyt mało węzłów, profil odwzorowany bardzo schematycznie i niedokładnie.
- **10 węzłów:** Liczba węzłów nadal niewystarczająca, widoczne uproszczenia profilu.
- **20 węzły:** Profil lepiej odwzorowany, pojawiają się wyraźne oscylacje na krańcach.
- **40 węzły:** Oscylacje na krańcach wyraźniejsze, środek odwzorowany dobrze.
- **80 węzły:** Silne oscylacje na końcach, pogorszenie jakości interpolacji.
- **160 węzły:** Bardzo duże oscylacje na krańcach, interpolacja niestabilna.

4.2 Trasa: Hel



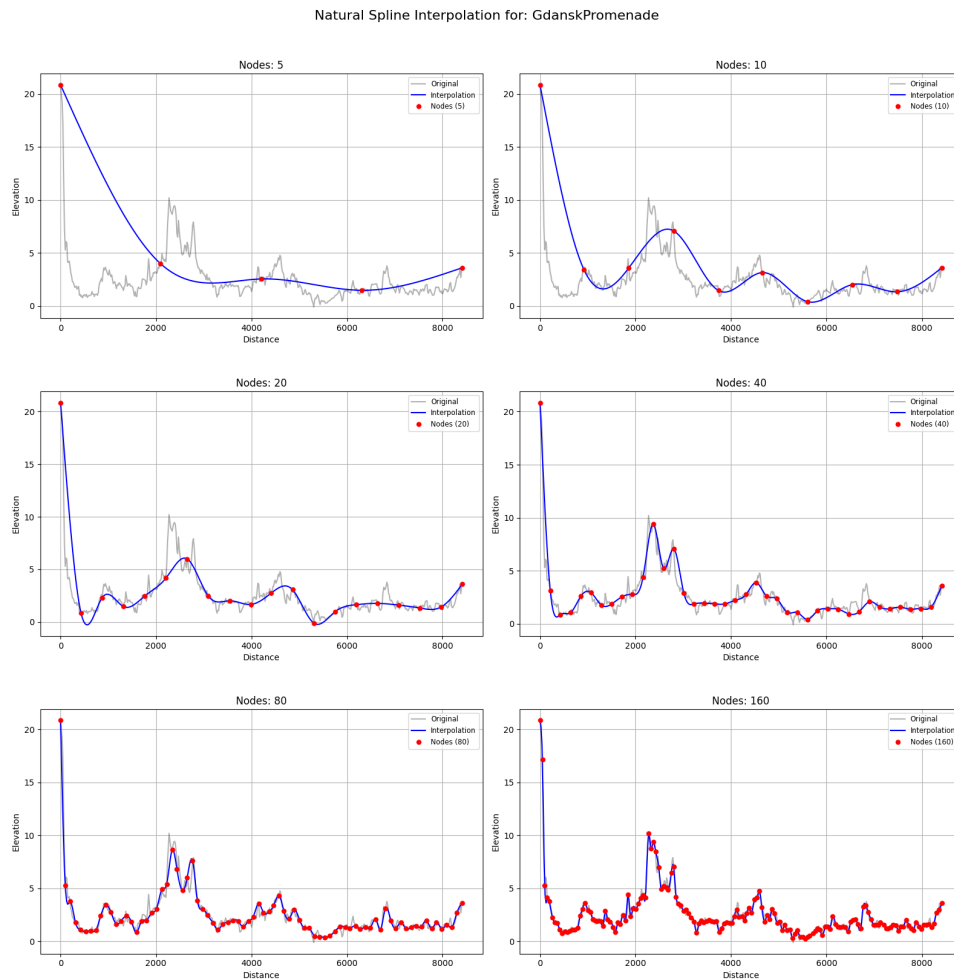
Rysunek 2: Interpolacja Lagrange'a dla trasy Hel (różne liczby węzłów)

Interpretacja (Rysunek 2):

- **5 węzły:** Zbyt mało węzłów, profil jest bardzo uproszczony.
- **10 węzłów:** Liczba węzłów niewystarczająca, uproszczenia profilu są widoczne (+ pierwsze oscylacje).
- **20 węzły:** Profil lepiej odwzorowany, pojawiają się wyraźne oscylacje na końcach.
- **40 węzły:** Oscylacje na krańcach są jeszcze mocniejsze.
- **80 węzły:** Oscylacje wyraźnie zaburzają przebieg na końcach.
- **160 węzły:** Bardzo silne oscylacje.

5 Analiza podstawowa interpolacji funkcjami sklejanymi

5.1 Trasa: GdanskPromenade

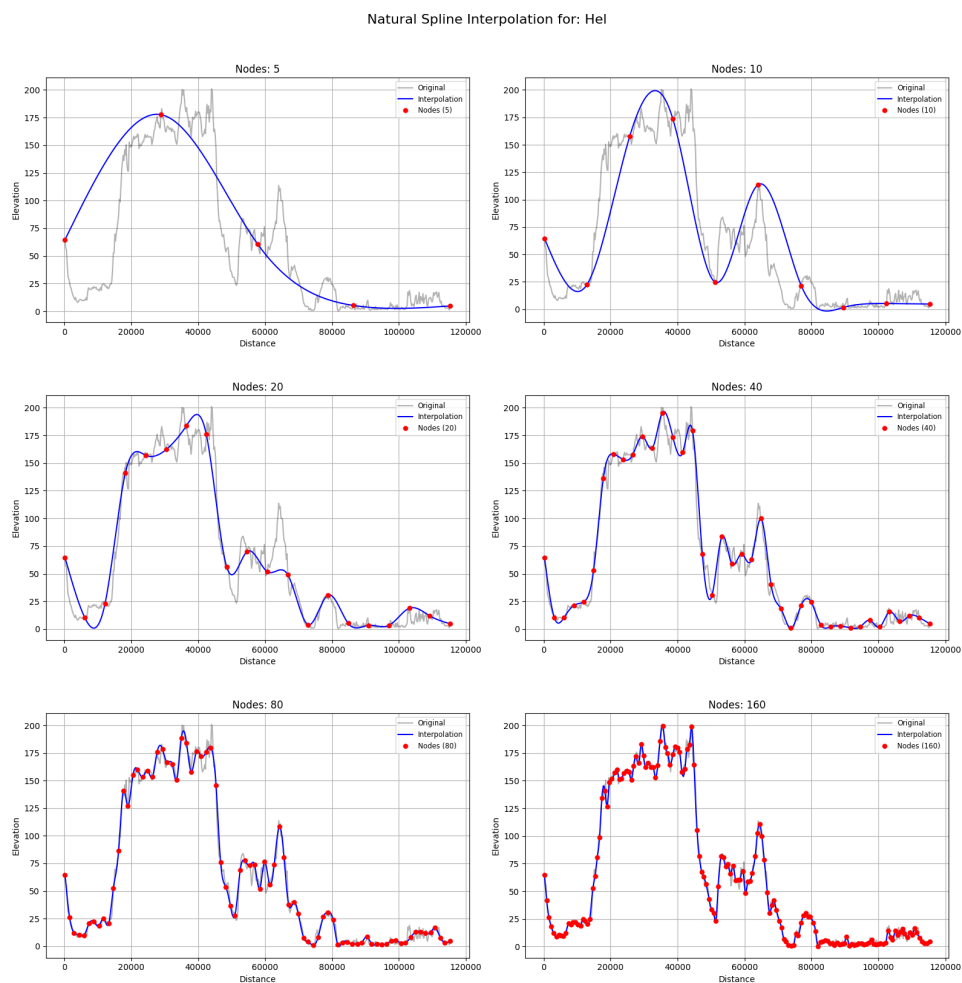


Rysunek 3: Interpolacja splajnami kubicznymi dla trasy GdanskPromenade (różne liczby węzłów)

Interpretacja (Rysunek 3):

- **5 węzły:** Zbyt mało węzłów, profil odwzorowany bardzo ogólnie.
- **10 węzły:** Profil nadal uproszczony, ale przebieg gładki.
- **20 węzły:** Dokładność rośnie, przebieg pozostaje gładki.
- **40 węzły:** Wysoka jakość aproksymacji.
- **80 węzły:** Profil bardzo dobrze odwzorowany, bez zakłóceń.
- **160 węzły:** Idealne dopasowanie, brak niepożądanych efektów.

5.2 Trasa: Hel



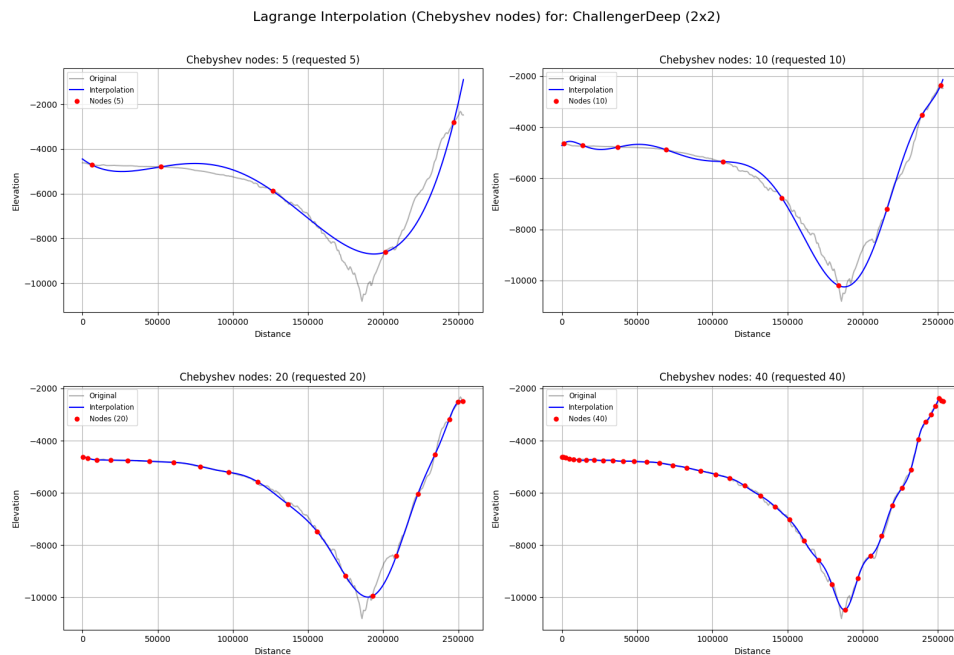
Rysunek 4: Interpolacja splajnami kubicznymi dla trasy Hel (różne liczby węzłów)

Interpretacja (Rysunek 4):

- **5 węzły:** Zbyt mało węzłów, profil odwzorowany bardzo uproszczony.
- **10 węzły:** Profil nadal uproszczony, ale przebieg gładki.
- **20 węzły:** Dokładność aproksymacji rośnie, przebieg gładki.
- **40 węzły:** Brak zaburzeń, profil bardzo dobrze odwzorowany.
- **80 węzły:** Wysoka jakość aproksymacji, brak oscylacji.
- **160 węzły:** Idealne dopasowanie do danych.

6 Analiza dodatkowa

6.1 Wpływ rozmieszczenia węzłów (węzły Czebyszewa)

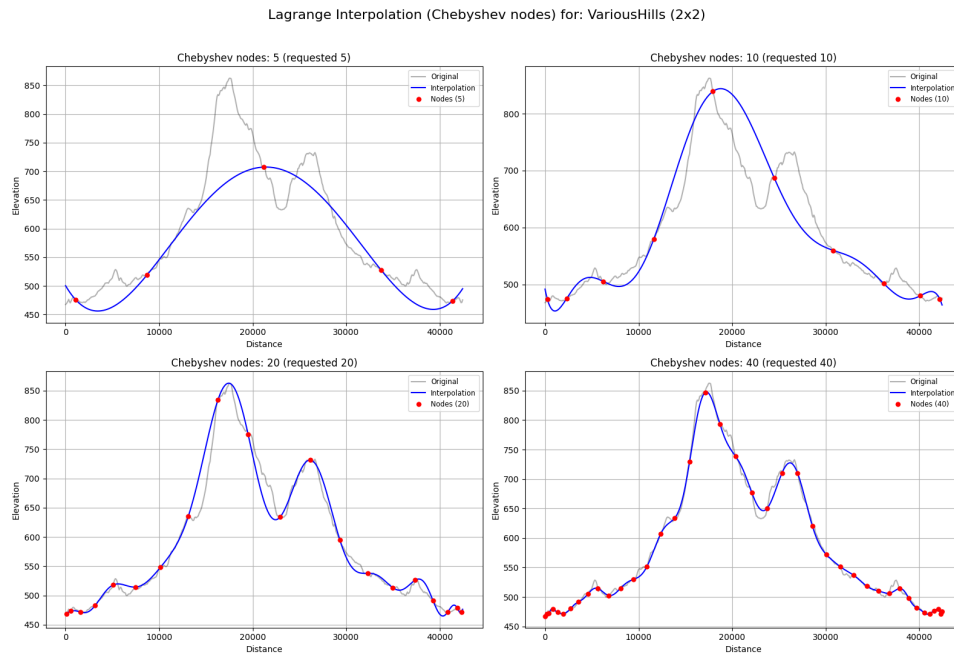


Rysunek 5: Interpolacja Lagrange'a z węzłami Czebyszewa dla trasy ChallengerDeep

Interpretacja (Rysunek 5):

- **5 węzły:** Zbyt mało węzłów, profil odwzorowany bardzo ogólnie.
- **10 węzłów:** Profil nadal uproszczony, ale ze względu na typ wykresu już w miarę dopasowany.
- **20 węzły:** Profil coraz lepiej odwzorowany, brak efektu Rungego.
- **40 węzły:** Brak oscylacji, interpolacja bardzo dobra.

6.2 Trasa o wielu wzniesieniach



Rysunek 6: Interpolacja Lagrange'a z węzłami Czebyszewa dla trasy VariousHills

Interpretacja (Rysunek 6):

- **5 węzły:** Zbyt mało węzłów, profil odwzorowany bardzo uproszczony.
- **10 węzłów:** Profil nadal uproszczony, ale brak oscylacji.
- **20 węzły:** Interpolacja stabilna, przebieg coraz lepiej odwzorowany.
- **40 węzły:** Brak efektu Rungego, profil dobrze odwzorowany.

7 Interpretacja wyników

- Zwiększanie liczby węzłów w interpolacji Lagrange’a prowadzi do poprawy dokładności tylko do pewnego momentu; dla dużej liczby węzłów pojawia się efekt Rungego (oscylacje na krańcach przedziału).
- Rozmieszczenie węzłów według Czebyszewa poprawia stabilność interpolacji wielomianowej.
- Interpolacja splajnami kubicznymi jest stabilna nawet dla większej liczby węzłów i dobrze odwzorowuje przebieg trasy.
- Charakter trasy (liczba i stromość wzniesień) wpływa na trudność interpolacji – trasy o gwałtownych zmianach wysokości są trudniejsze do aproksymacji.

8 Podsumowanie

Interpolacja wielomianem Lagrange’a okazała się metodą wrażliwą na liczbę i rozmieszczenie węzłów. Przy większej liczbie równoodległych węzłów (16 i więcej) pojawia się zjawisko Rungego, prowadzące do znacznych oscylacji i zniekształceń profilu. Metoda ta może być stosowana przy niewielkiej liczbie węzłów oraz dla gładkich profili, jednak jej praktyczna użyteczność jest ograniczona. Przeskalowanie dziedziny poprawia stabilność numeryczną, lecz nie eliminuje problemu oscylacji. Wykorzystanie węzłów Czebyszewa (patrz Sekcja ??) pozwala ograniczyć te efekty i poprawić wyniki, jednak interpolacja wielomianowa pozostaje mniej stabilna i mniej gładka niż funkcje sklepane.

Interpolacja naturalnymi funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia wykazała się dużą stabilnością i wysoką jakością aproksymacji. Metoda ta zapewnia gładkie i realistyczne odwzorowanie profilu, niezależnie od liczby węzłów (w testowanym zakresie od 4 do 128). Wraz ze wzrostem liczby węzłów dokładność aproksymacji systematycznie się poprawia, bez pojawiania się niepożądanych artefaktów. Funkcje sklepane dobrze radzą sobie zarówno z profilami gładkimi, jak i bardziej złożonymi.

Podsumowując działanie zaimplementowanych algorytmów:

- Implementacja **interpolacji Lagrange’a** poprawnie odzwierciedla jej właściwości teoretyczne, w tym podatność na zjawisko Rungego przy węzłach równoodległych oraz poprawę stabilności przy **węzłach Czebyszewa**. W praktyce jej zastosowanie do aproksymacji profilu wysokościowego jest ograniczone.
- Implementacja **naturalnych funkcji sklepanych trzeciego stopnia** działa stabilnie i skutecznie realizuje zadanie aproksymacji profilu.

Do aproksymacji profili wysokościowych rekomendowana jest interpolacja funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia, ze względu na jej stabilność, gładkość wyników i odporność na problemy charakterystyczne dla interpolacji wielomianowej wysokiego stopnia. Interpolację Lagrange’a, nawet z węzłami Czebyszewa, należy stosować ostrożnie, mając na uwadze możliwość wystąpienia oscylacji.