

Aproksymacja profilu wysokościowego

Projekt 3 – Metody Numeryczne

Yauheni Pyryeu 201253

12 czerwca 2025

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wstęp</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Opis algorytmów</b>	<b>1</b>
2.1	Interpolacja wielomianowa Lagrange’a . . . . .	1
2.2	Interpolacja funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia . . . . .	1
2.3	Interpolacja wielomianowa Lagrange’a przy urzyciu węzłów Czebyszewa . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Dane</b>	<b>2</b>
<b>4</b>	<b>Analiza podstawowa interpolacji wielomianowej</b>	<b>2</b>
4.1	Trasa: GdanskPromenade . . . . .	2
4.2	Trasa: Hel . . . . .	4
<b>5</b>	<b>Analiza podstawowa interpolacji funkcjami sklejanymi</b>	<b>5</b>
5.1	Trasa: GdanskPromenade . . . . .	5
5.2	Trasa: Hel . . . . .	6
<b>6</b>	<b>Analiza dodatkowa</b>	<b>7</b>
6.1	Wpływ rozmieszczenia węzłów (węzły Czebyszewa) . . . . .	7
6.2	Trasa o wielu wzniesieniach . . . . .	8
<b>7</b>	<b>Interpretacja wyników</b>	<b>9</b>
<b>8</b>	<b>Podsumowanie</b>	<b>9</b>

# 1 Wstęp

Profil wysokościowy trasy to wykres przedstawiający wysokość bezwzględną w terenie w zależności od odległości od początku trasy. Znając wysokość tylko części punktów trasy, możemy określić wysokości punktów pośrednich za pomocą aproksymacji interpolacyjnej. W projekcie zastosowano dwie metody interpolacji: wielomianową (Lagrange’a) oraz funkcje sklepane trzeciego stopnia (naturalne splajny kubiczne).

## 2 Opis algorytmów

### 2.1 Interpolacja wielomianowa Lagrange’a

Interpolacja polega na wyznaczeniu wielomianu stopnia  $N-1$  przechodzącego przez zadane  $N$  punktów (węzłów). W celu poprawy stabilności numerycznej, przed wyznaczeniem wielomianu przekształcono dziedzinę do przedziału  $[0, 1]$ . Wzór tego wielomianu:

$$P(x) = \sum_{j=0}^{N-1} y_j L_j(x)$$

gdzie  $L_j(x)$  to wielomiany bazowe Lagrange’a:

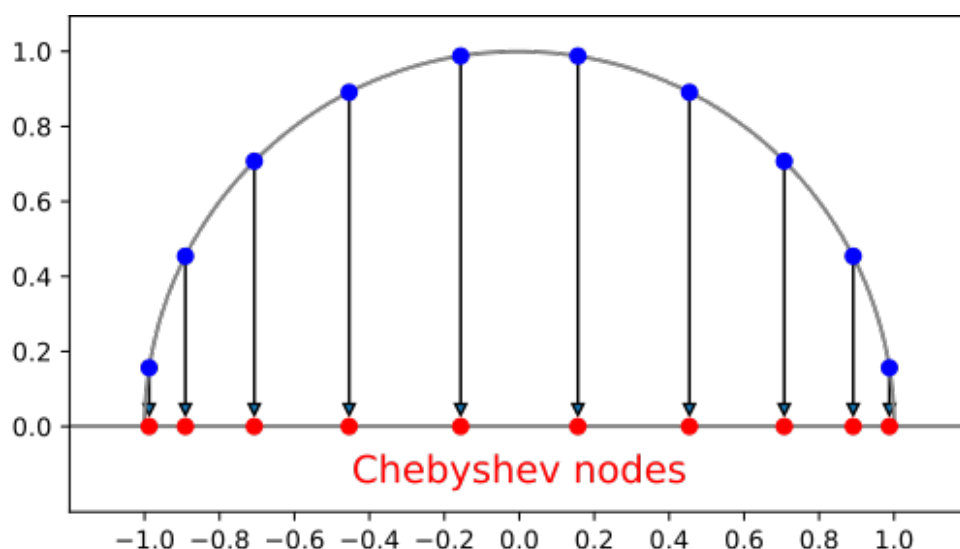
$$L_j(x) = \prod_{m=0, m \neq j}^{N-1} \frac{x - x_m}{x_j - x_m}$$

Główną zaletą tej metody jest jej prostota koncepcyjna i gwarancja przejścia przez wszystkie węzły. Wadą jest podatność na tzw. zjawisko Rungego, czyli duże oscylacje wielomianu interpolacyjnego, szczególnie w pobliżu krańców przedziału, przy dużej liczbie równoodległych węzłów. W celu poprawy stabilności numerycznej obliczeń, dziedzina funkcji interpolowanej ( $x_i$ ) jest przekształcana do przedziału  $[0, 1]$  przed wyznaczeniem wielomianu, a następnie wartości są transformowane z powrotem.

### 2.2 Interpolacja funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia

Funkcje sklepane trzeciego stopnia (splajny kubiczne) to funkcje złożone z wielomianów trzeciego stopnia, definiowanych osobno na każdym podprzedziale  $[x_i, x_{i+1}]$  pomiędzy kolejnymi węzłami. Każdy taki wielomian  $S_i(x)$  jest tak dobrany, aby cała funkcja była ciągła oraz miała ciągle pierwszą i drugą pochodną ( $C^2$ ) w całym przedziale interpolacji. W przypadku naturalnych splajnów kubicznych dodatkowo wymaga się, aby drugie pochodne na końcach przedziału były równe zeru ( $S''(x_0) = 0$ ,  $S''(x_{N-1}) = 0$ ). Splajny kubiczne są mniej podatne na oscylacje niż wielomiany interpolacyjne wysokiego stopnia i zwykle zapewniają gładzsze oraz bardziej realistyczne przybliżenie danych.

## 2.3 Interpolacja wielomianowa Lagrange’a przy urzyciu węzłów Czebyszewa



Rysunek 1: Węzły Czebyszewa są równoważne współrzędnym  $n$  na osi  $x$  równo rozmieszczonych punktów na półokręgu jednostki (tutaj dla  $n = 10$ )

Dla danej liczby całkowitej  $n$  węzły Czebyszewa w przedziale  $(-1, 1)$  to:

$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad k = 1, \dots, n.$$

Po przekształceniu na naszą dziedzinę  $[0, 1]$ :

$$x_{k-norm} = \frac{x_k + 1}{2}$$

Użycie węzłów Czebyszewa pozwala na zwiększenie gęstości węzłów w pobliżu krańców, co przeciwdziała zjawisku Rungego.

## 3 Dane

Do analizy wykorzystano rzeczywiste profile wysokościowe kilku tras o zróżnicowanym charakterze:

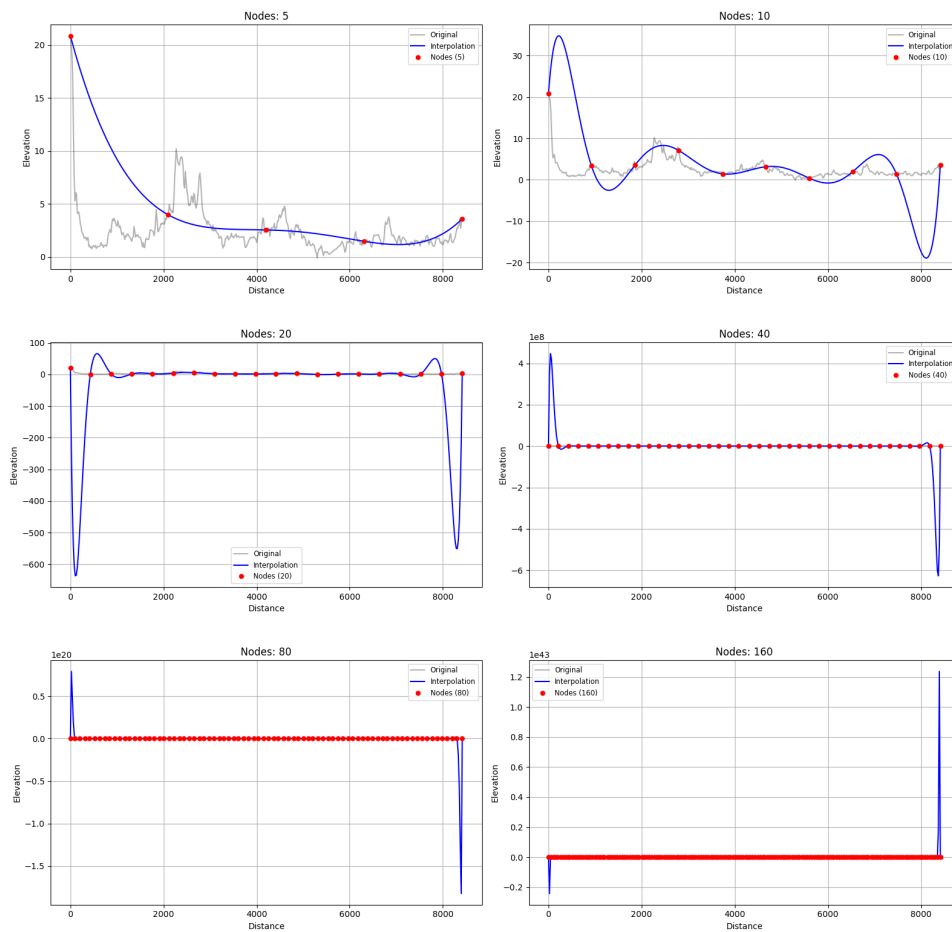
- GdanskPromenade – trasa prawie płaska,
- Hel – trasa nadmorska,
- VariousHills – trasa o wielu wzniesieniach,
- ChallengerDeep – trasa z dużą różnicą wysokości.

## 4 Analiza podstawowa interpolacji wielomianowej

### 4.1 Trasa: GdanskPromenade

Wpływ liczby węzłów na jakość interpolacji Lagrange’a przedstawiono na rysunkach poniżej.

Lagrange Interpolation for: GdanskPromenade

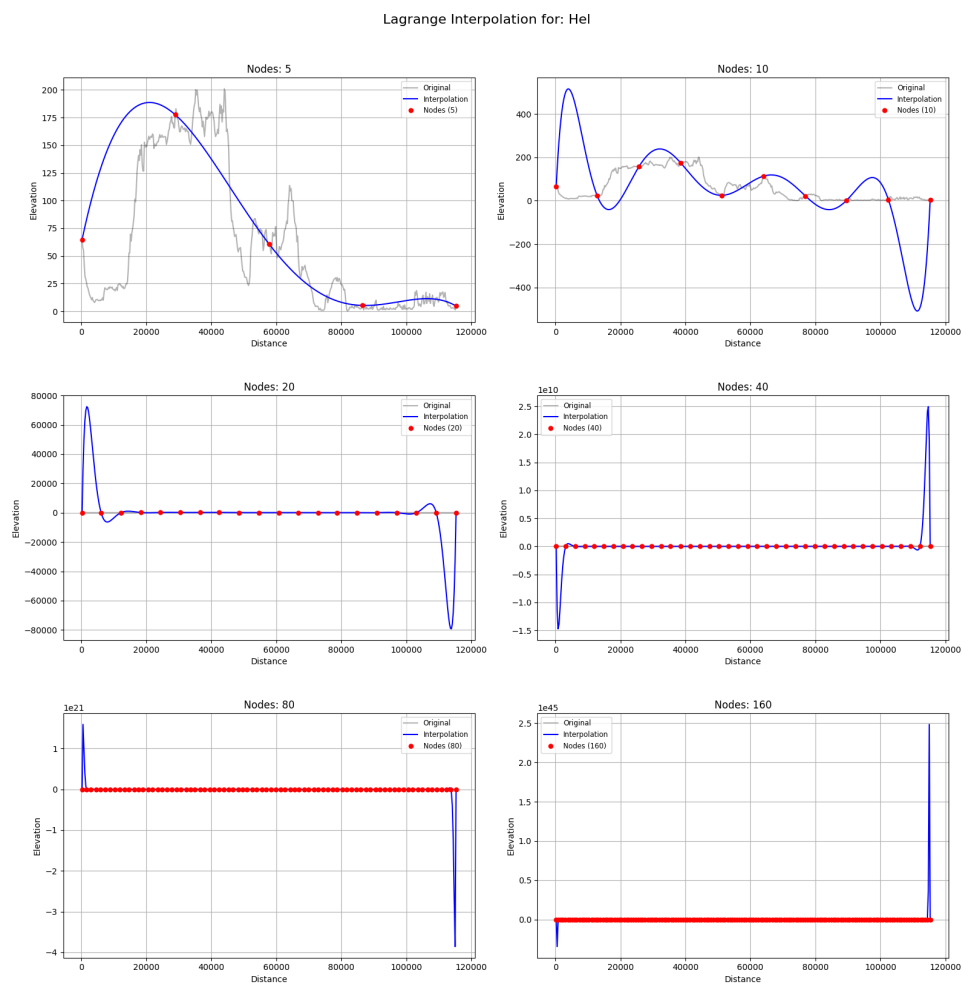


Rysunek 2: Interpolacja Lagrange'a dla trasy GdanskPromenade (różne liczby węzłów)

### Interpretacja (Rysunek 2):

- **5 węzłów:** Zbyt mało węzłów, profil odwzorowany bardzo schematycznie i niedokładnie.
- **10 węzłów:** Liczba węzłów nadal niewystarczająca, widoczne uproszczenia profilu.
- **20 węzłów:** Profil lepiej odwzorowany, pojawiają się wyraźne oscylacje na krańcach.
- **40 węzłów:** Oscylacje na krańcach wyraźniejsze, środek odwzorowany dobrze.
- **80 węzłów:** Silne oscylacje na końcach, pogorszenie jakości interpolacji.
- **160 węzłów:** Bardzo duże oscylacje na krańcach, interpolacja niestabilna.

## 4.2 Trasa: Hel



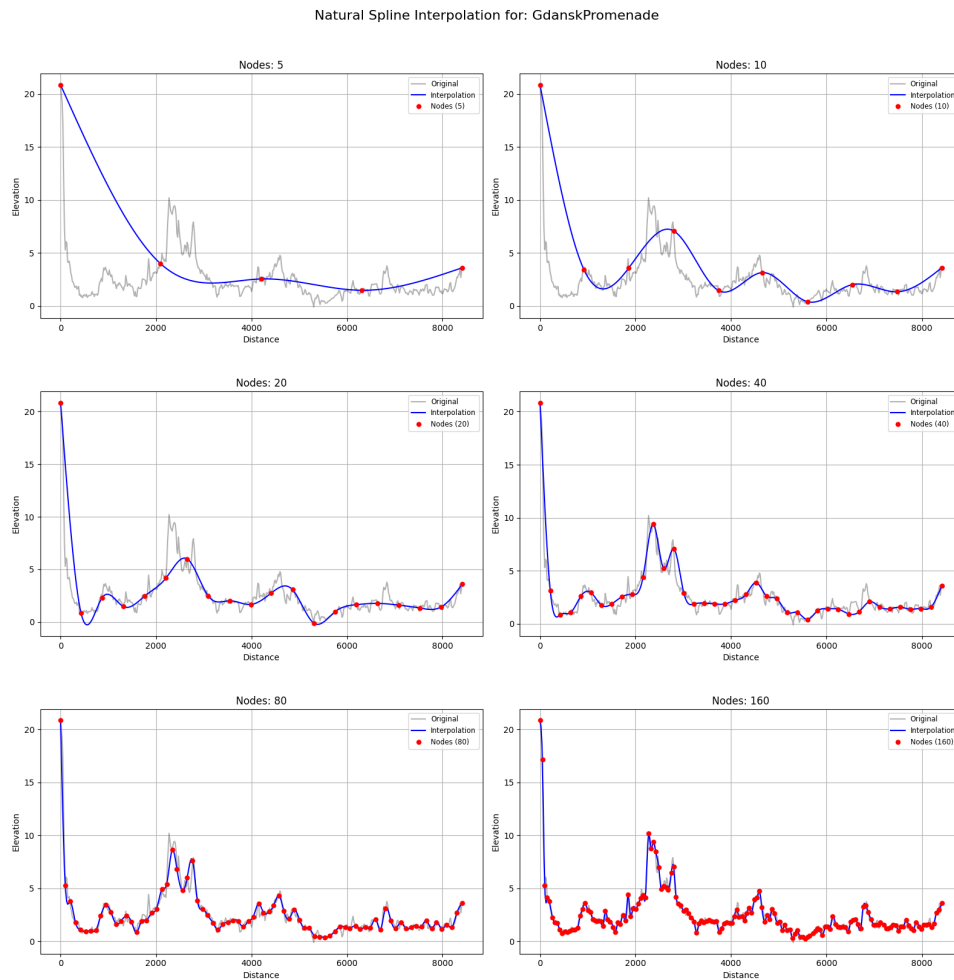
Rysunek 3: Interpolacja Lagrange'a dla trasy Hel (różne liczby węzłów)

### Interpretacja (Rysunek 3):

- **5 węzłów:** Zbyt mało węzłów, profil jest bardzo uproszczony.
- **10 węzłów:** Liczba węzłów niewystarczająca, uproszczenia profilu są widoczne (+ pierwsze oscylacje).
- **20 węzłów:** Profil lepiej odwzorowany, pojawiają się wyraźne oscylacje na końcach.
- **40 węzłów:** Oscylacje na krańcach są jeszcze mocniejsze.
- **80 węzłów:** Oscylacje wyraźnie zaburzają przebieg na końcach.
- **160 węzłów:** Bardzo silne oscylacje.

## 5 Analiza podstawowa interpolacji funkcjami sklejanymi

### 5.1 Trasa: GdanskPromenade

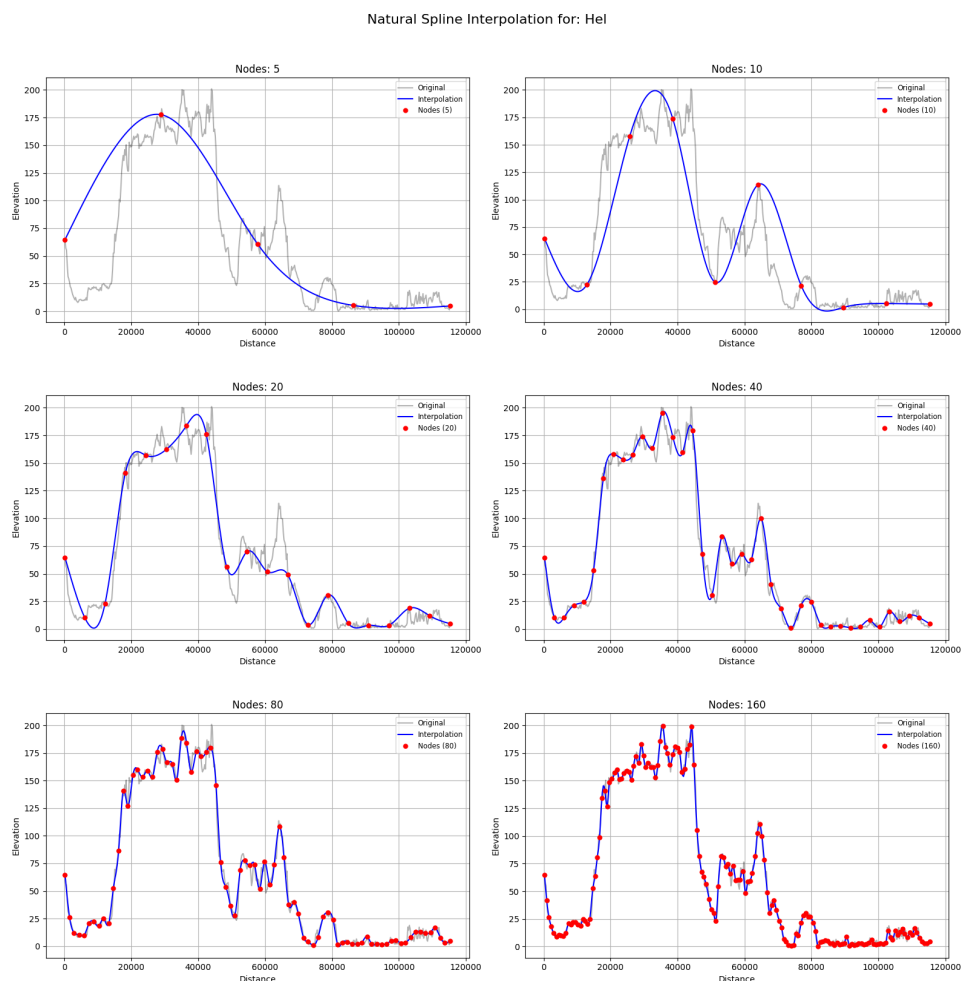


Rysunek 4: Interpolacja splajnami kubicznymi dla trasy GdanskPromenade (różne liczby węzłów)

#### Interpretacja (Rysunek 4):

- **5 węzłów:** Zbyt mało węzłów, profil odwzorowany bardzo ogólnie.
- **10 węzłów:** Profil nadal uproszczony, ale przebieg gładki.
- **20 węzłów:** Dokładność rośnie, przebieg pozostaje gładki.
- **40 węzłów:** Wysoka jakość aproksymacji.
- **80 węzłów:** Profil dobrze odwzorowany, bez zakłóceń, natomiast niektóre punkty są wciąż niedokładne.
- **160 węzłów:** Idealne dopasowanie, brak niepożądanych efektów.

## 5.2 Trasa: Hel



Rysunek 5: Interpolacja splajnami kubicznymi dla trasy Hel (różne liczby węzłów)

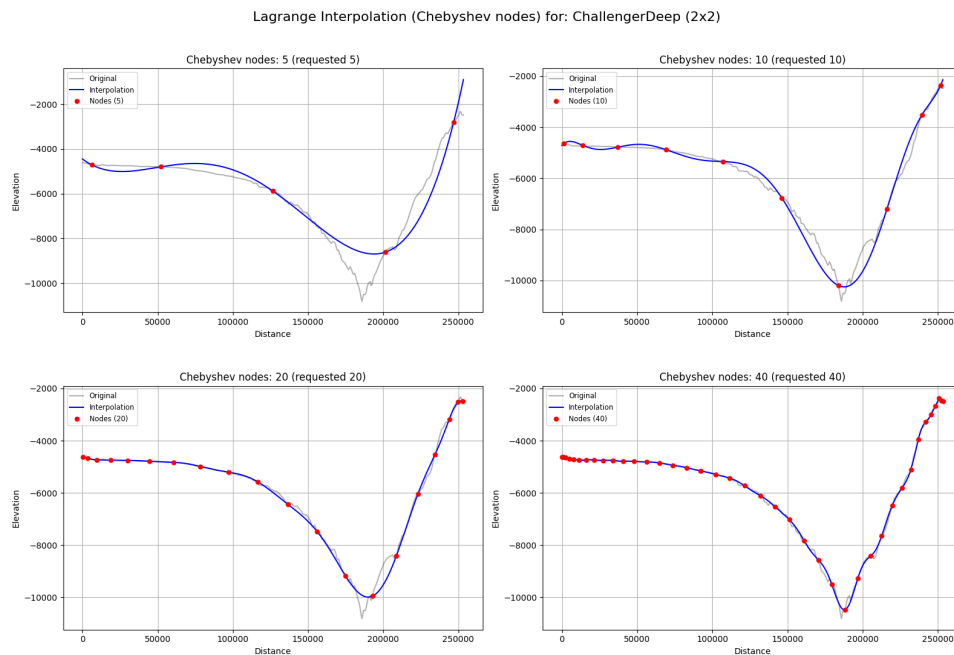
### Interpretacja (Rysunek 5):

- **5 węzłów:** Zbyt mało węzłów, profil odwzorowany bardzo uproszczony.
- **10 węzłów:** Profil nadal uproszczony, ale przebieg gładki.
- **20 węzłów:** Dokładność aproksymacji rośnie, przebieg gładki.
- **40 węzłów:** Brak zaburzeń, profil dobrze odwzorowany.
- **80 węzłów:** Wysoka jakość aproksymacji, brak oscylacji, natomiast niektóre części wykresu są zbyt uproszczone.
- **160 węzłów:** Idealne dopasowanie do danych (poza kilkoma punktami).



## 6 Analiza dodatkowa

### 6.1 Wpływ rozmieszczenia węzłów (węzły Czebyszewa)

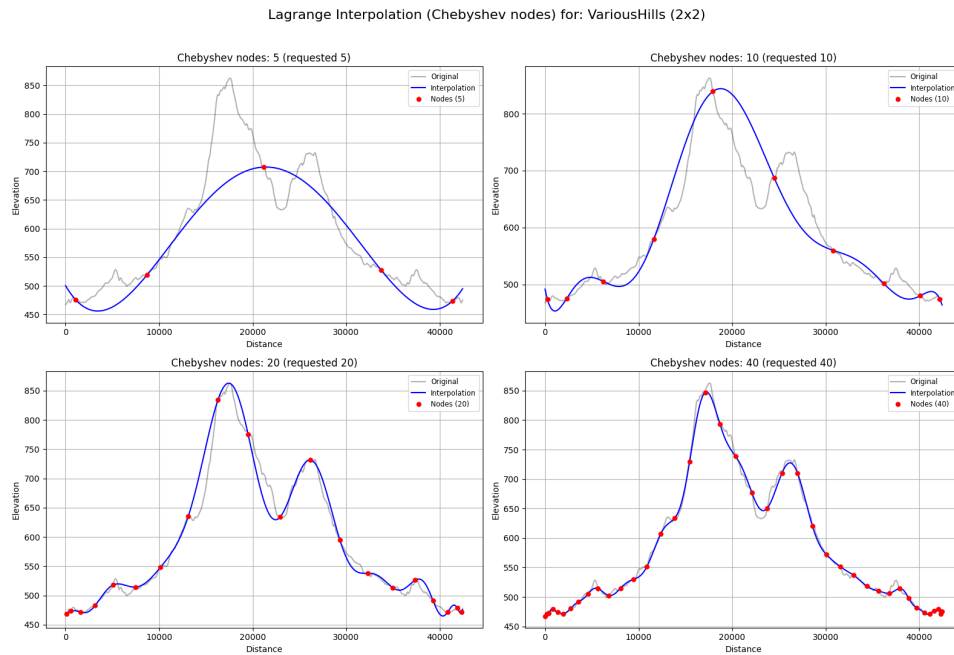


Rysunek 6: Interpolacja Lagrange'a z węzłami Czebyszewa dla trasy ChallengerDeep

#### Interpretacja (Rysunek 6):

- **5 węzłów:** Zbyt mało węzłów, profil odwzorowany bardzo ogólnie.
- **10 węzłów:** Profil nadal uproszczony, ale ze względu na typ wykresu już w miarę dopasowany.
- **20 węzłów:** Profil coraz lepiej odwzorowany, brak efektu Rungego.
- **40 węzłów:** Brak oscylacji, interpolacja bardzo dobra.

## 6.2 Trasa o wielu wzniesieniach



Rysunek 7: Interpolacja Lagrange'a z węzłami Czebyszewa dla trasy VariousHills

### Interpretacja (Rysunek 7):

- **5 węzłów:** Zbyt mało węzłów, profil odwzorowany w bardzo uproszczony sposób.
- **10 węzłów:** Profil nadal uproszczony, ale brak oscylacji.
- **20 węzłów:** Interpolacja stabilna, przebieg coraz lepiej odwzorowany.
- **40 węzłów:** Brak efektu Runego, profil dobrze odwzorowany.

## 7 Interpretacja wyników

- Zwiększanie liczby węzłów w interpolacji Lagrange’a prowadzi do poprawy dokładności tylko do pewnego momentu; dla dużej liczby węzłów pojawia się efekt Rungego (oscylacje na krańcach przedziału).
- Rozmieszczenie węzłów według Czebyszewa poprawia stabilność interpolacji wielomianowej.
- Interpolacja splajnami kubicznymi jest stabilna nawet dla większej liczby węzłów i dobrze odwzorowuje przebieg trasy.
- Charakter trasy (liczba i stromość wzniesień) wpływa na trudność interpolacji – trasy o gwałtownych zmianach wysokości są trudniejsze do aproksymacji.

## 8 Podsumowanie

**Interpolacja wielomianem Lagrange’a** okazała się metodą wrażliwą na liczbę i rozmieszczenie węzłów. Przy większej liczbie równoodległych węzłów (20 i więcej) pojawia się zjawisko Rungego, prowadzące do znacznych oscylacji i zniekształceń profilu. Metoda ta może być stosowana przy niewielkiej liczbie węzłów oraz dla gładkich profili, jednak jej praktyczna użyteczność jest ograniczona. Przeskalowanie dziedziny poprawia stabilność numeryczną, lecz nie eliminuje problemu oscylacji. Wykorzystanie **węzłów Czebyszewa** pozwala ograniczyć te efekty i poprawić wyniki, jednak interpolacja wielomianowa pozostaje mniej stabilna i mniej gładka niż funkcje sklepane.

**Interpolacja naturalnymi funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia** wykazała się dużą stabilnością i wysoką jakością aproksymacji. Metoda ta zapewnia gładkie i realistyczne odwzorowanie profilu, niezależnie od liczby węzłów (w testowanym zakresie od 5 do 160). Wraz ze wzrostem liczby węzłów dokładność aproksymacji systematycznie się poprawia, bez pojawiania się niepożądanych zaburzeń. Funkcje sklepane dobrze radzą sobie zarówno z profilami gładkimi, jak i bardziej złożonymi.

Podsumowując działanie zaimplementowanych algorytmów:

- Implementacja **interpolacji Lagrange’a** poprawnie odzwierciedla jej właściwości teoretyczne, w tym podatność na zjawisko Rungego przy węzłach równoodległych oraz poprawę stabilności przy **węzłach Czebyszewa**. W praktyce jej zastosowanie do aproksymacji profilu wysokościowego jest ograniczone.
- Implementacja **naturalnych funkcji sklepanych trzeciego stopnia** działa stabilnie i skutecznie realizuje zadanie aproksymacji profilu.

Do aproksymacji profili wysokościowych rekomendowana jest interpolacja funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia, ze względu na jej stabilność, gładkość wyników i odporność na problemy charakterystyczne dla interpolacji wielomianowej wysokiego stopnia. Interpolację Lagrange’a, nawet z węzłami Czebyszewa, należy stosować ostrożnie, mając na uwadze możliwość wystąpienia oscylacji.