Politechnika Wrocławska

Wydział Elektroniki, Fotoniki i Mikrosystemów

Sterowanie Procesami Ciągłymi

Sprawozdanie nr 1
Charakterystyki częstotliwościowe

Prowadzący:
dr hab. inż. Grzegorz Mzyk

Wykonała:
Zuzanna Mejer, 259382

Termin zajęć:
czwartek TP, 9:15

Wrocław, 16 listopada 2022r.

Spis treści

1 Cel ćwiczenia

Głównymi celami ćwiczenia było: zbadanie zależności odpowiedzi systemu w dziedzinie czasu od pulsacji pobudzenia sinusoidalnego; zapoznanie się z różnymi rodzajami charakterystyk częstotliwościowych oraz zbadanie wpływu wartości parametrów układu opóźniającego z inercją na charakterystykę częstotliwościową układu.

2 Zależność charakterystyki czasowej układu od wartości pulsacji pobudzenia sinusoidalnego

Badany jest asymptotycznie stabilny układ liniowy o zadanej transmitancji:

$$K(s) = \frac{1}{s^2 + 0,1s + 1}, \tag{1}$$

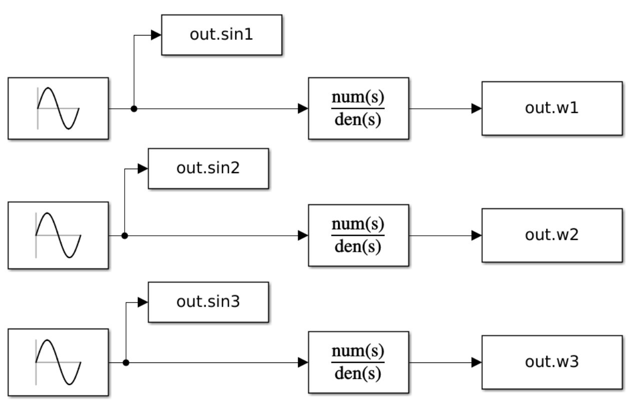
który pobudzany jest sygnałem sinusoidalnym o ogólnym wzorze:

$$u(t) = sin(\omega t), \tag{2}$$

gdzie ω to pulsacja. Odpowiedź układu liniowego na pobudzenie sinusoidalne w stanie ustalonym ma postać:

$$y_{ust}(t) = A \cdot sin(\omega t + \varphi), \tag{3}$$

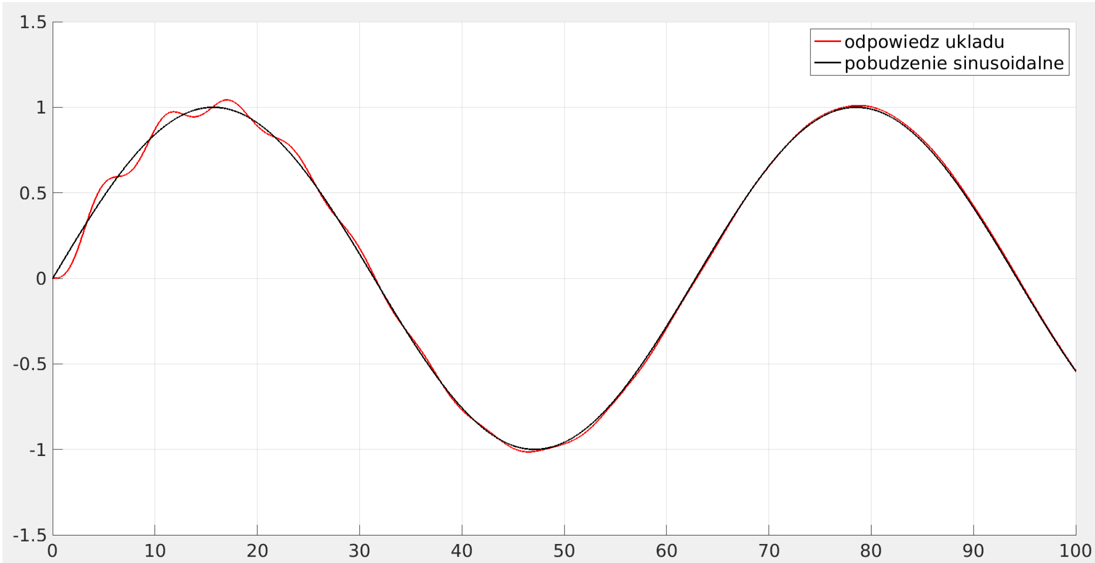
gdzie: A to amplituda, ω to pulsacja oraz φ to przesunięcie fazowe. Wiedząc, że pulsacja odpowiedzi systemu ω jest identyczna jak pulsacja sygnału wejściowego, zbadano jaka jest zależność między pulsacją sygnału wejściowego a amplitudą A i przesunięciem fazowym φ odpowiedzi systemu. Do badań przyjęto 3 wartości pulsacji: $\omega = 0,1$, $\omega = 1$, $\omega = 10$, co oznacza, że układ o transmitancji 1 pobudzono kolejno: $u_1(t) = sin(0,1t)$, $u_2(t) = sin(1t)$ oraz $u_3(t) = sin(10t)$. Zbudowano następujący schemat w Simulinku:



Rysunek 1: Schemat w Simulinku do badania odpowiedzi układu na pobudzenie sinusoidalne

2.1 Odpowiedź systemu na pobudzenie sinusoidalne, gdy pulsacja $\omega = 0,1$

Pobudzono układ sygnałem $u_1(t) = sin(0,1t)$. Poniżej przedstawiono porównanie pobudzenia sinusoidalnego (kolor czarny na wykresie) z odpowiedzią systemu (kolor czerwony na wykresie).

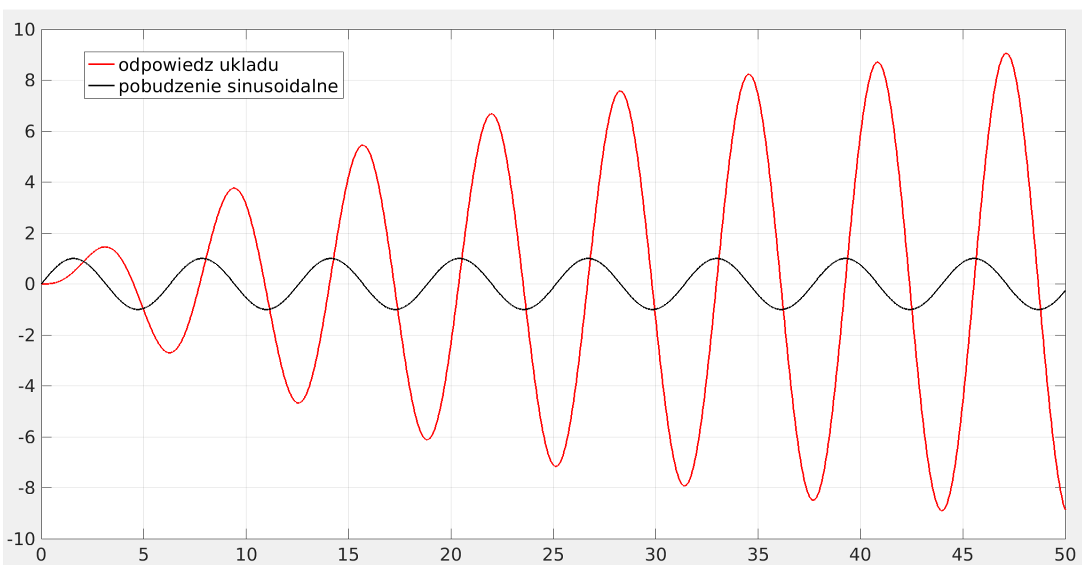


Rysunek 2: Odpowiedź systemu o transmitancji K(s) na pobudzenie $u_1(t) = sin(0,1t)$

Odpowiedź układu prawie idealnie pokrywa się z pobudzeniem sinusoidalnym. Amplituda wynosi $A = 1$ oraz przesunięcie fazowe $\varphi = 0$.

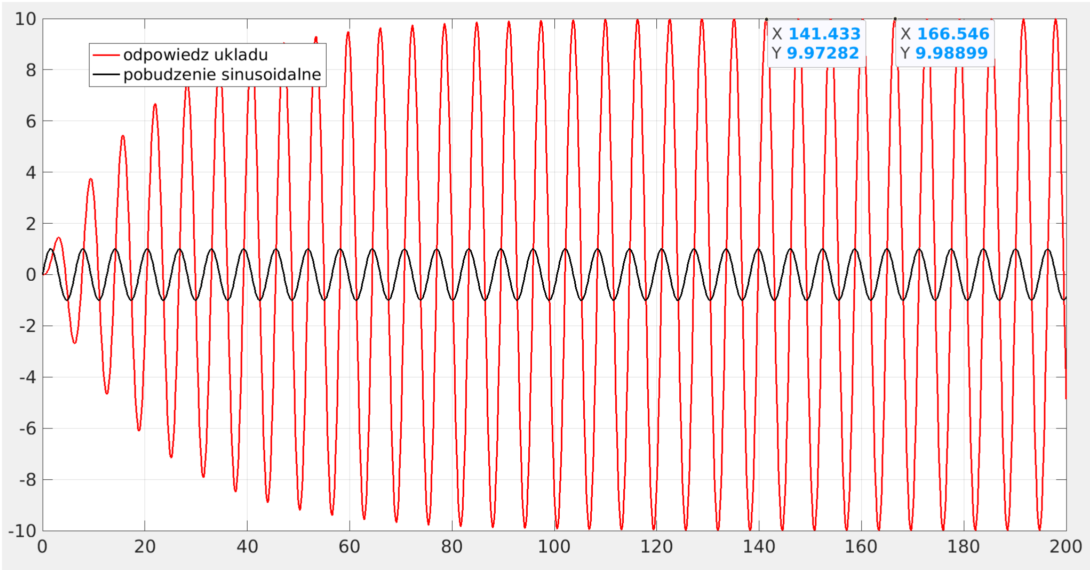
2.2 Odpowiedź systemu na pobudzenie sinusoidalne, gdy pulsacja $\omega = 1$

Pobudzono układ sygnałem $u_2(t) = sin(1t)$. Poniżej przedstawiono porównanie pobudzenia sinusoidalnego (kolor czarny na wykresie) z odpowiedzią systemu (kolor czerwony na wykresie).



Rysunek 3: Odpowiedź systemu o transmitancji K(s) na pobudzenie $u_2(t) = sin(1t)$

Na Rysunku 3 przedstawiony został fragment odpowiedzi układu. Widać na nim, że amplituda odpowiedzi układu wzrasta. Stabilizuje się znacznie później na wartości $A \approx 10$, co przedstawia Rysunek 4:



Rysunek 4: Amplituda odpowiedzi systemu wynosi 10

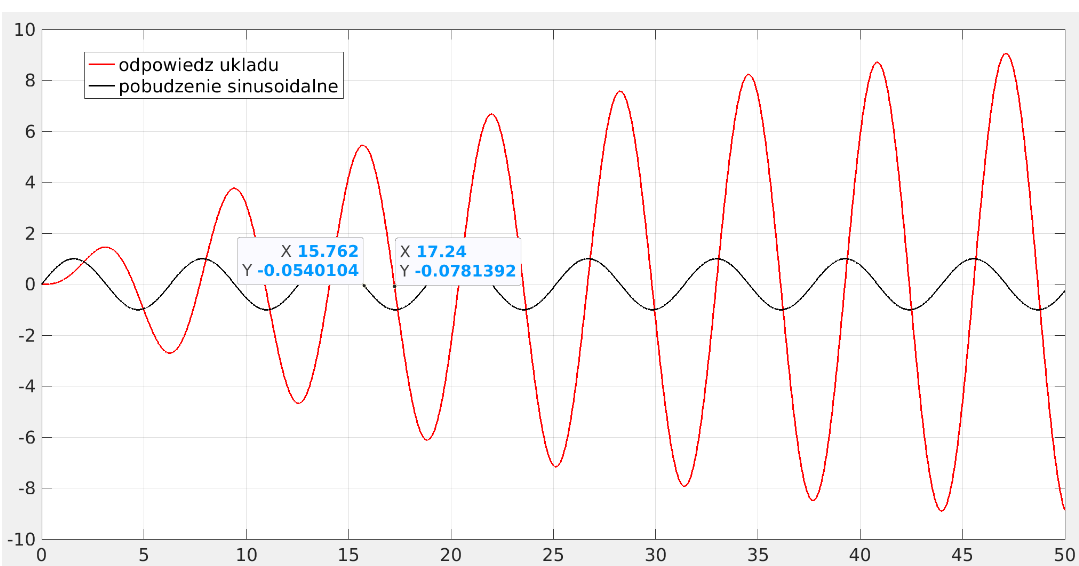
Widać, że funkcje są względem siebie przesunięte o jakiś kąt. Ze względu na to, że osie na wykresie są w dziedzinie czasu, nie można bezpośrednio odczytać przesunięcia fazowego. Aby wyznaczyć przesunięcie fazowe można skorzystać ze wzoru:

$$\varphi = \frac{2\pi}{T} \cdot \tau. \tag{4}$$

Wiedząc, że: $\frac{2\pi}{T} = \omega$, można zapisać ten wzór w postaci:

$$\varphi = \omega \cdot \tau, \tag{5}$$

gdzie τ to różnica wartości przecięć funkcji z osią x, czyli $\tau = x_2 - x_1$. Na Rysunku 5 wybrano punkty przecięcia dwóch funkcji z osią x. Z Rysunku można odczytać, że: $x_2 = 17,24$ oraz $x_1 = 15,762$. Ponadto, do wzoru potrzebna jest pulsacja, która jest zadana: $\omega = 1$.



Rysunek 5: Dane do wyznaczenia przesunięcia fazowego

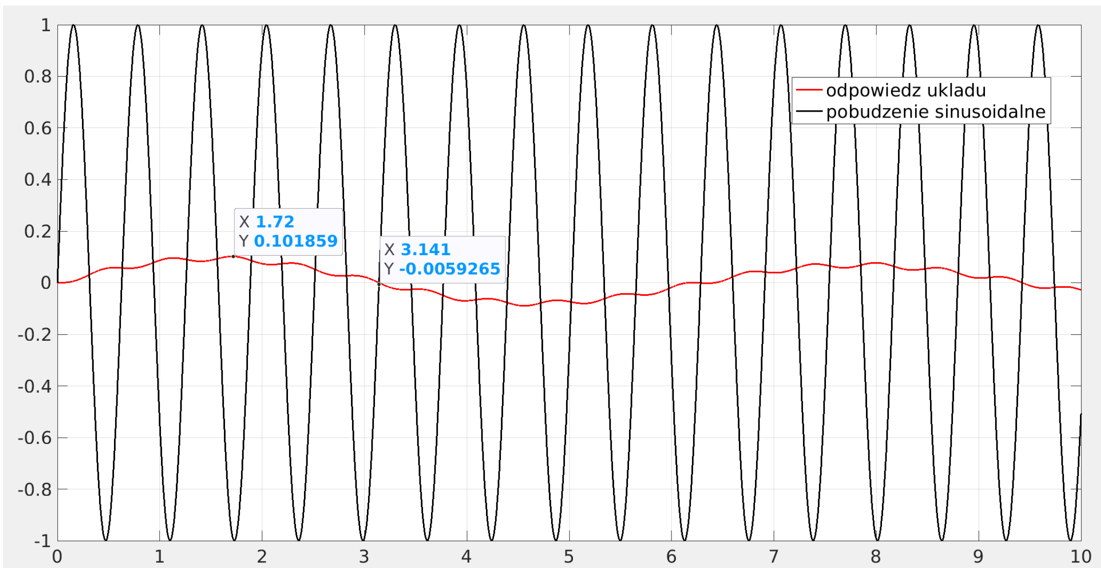
Zatem:

$$\varphi = 1\frac{rad}{s} \cdot (17,24s - 15,762s) = 1,478rad \approx 84,68^\circ \tag{6}$$

Przesunięcie fazowe między pobudzeniem a odpowiedzią układu wynosi $\varphi \approx 84,68^\circ$.

2.3 Odpowiedź systemu na pobudzenie sinusoidalne, gdy pulsacja $\omega = 10$

Pobudzono układ sygnałem $u_3(t) = sin(10t)$. Poniżej przedstawiono porównanie pobudzenia sinusoidalnego (kolor czarny na wykresie) z odpowiedzią systemu (kolor czerwony na wykresie).

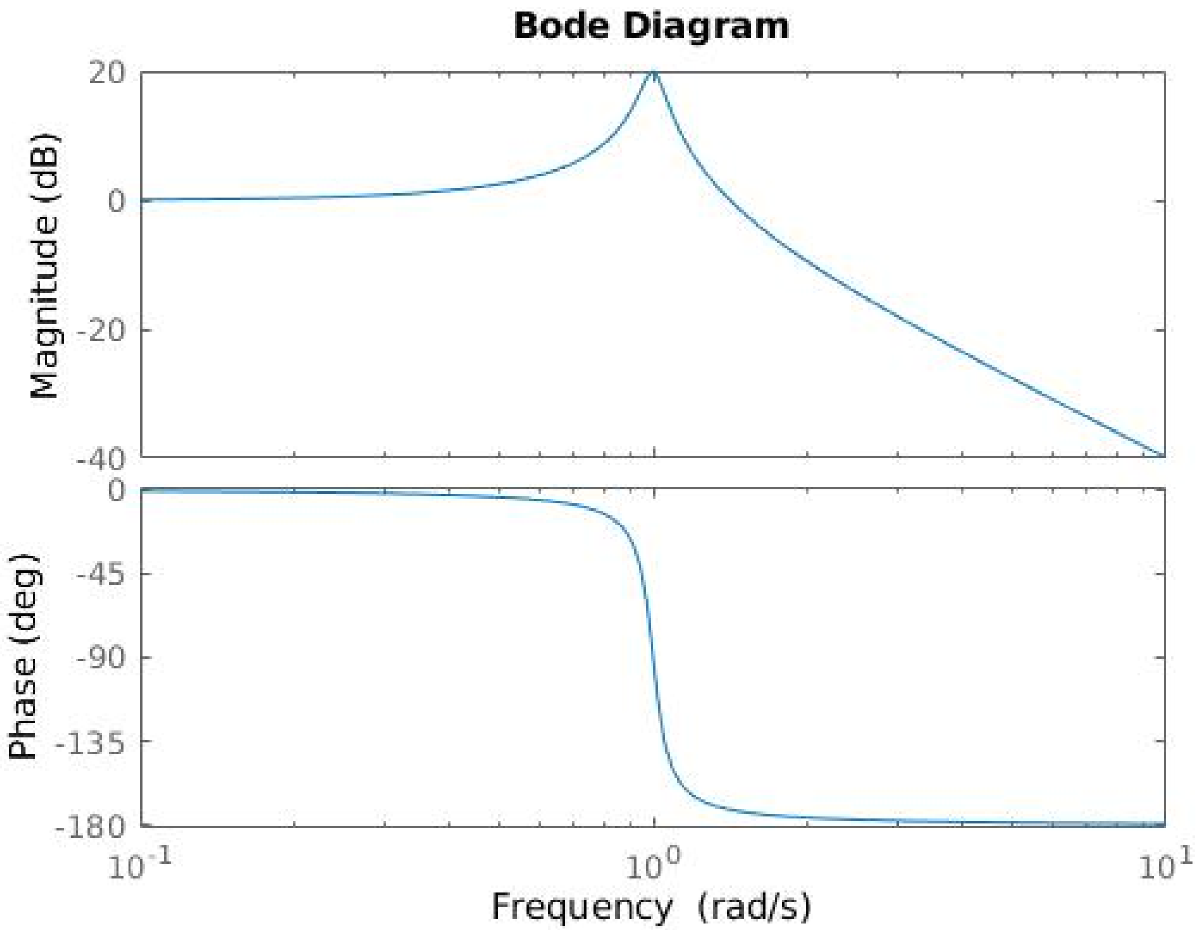


Rysunek 6: Odpowiedź systemu o transmitancji K(s) na pobudzenie $u_3(t) = sin(10t)$

Na Rysunku 6 zaznaczono najbardziej wychylony punkt, który oznacza amplitudę odpowiedzi układu: $A \approx 0,1$. Ponadto, z Rysunku 6 można odczytać przesunięcie fazowe. Obydwa wykresy przechodzą przez oś x w tych samych punktach (zaznaczono jeden taki punkt na rysunku), jednak ich przesunięcie fazowe nie jest równe 0, a 180°. Można to wywnioskować po tym, że kiedy na jednym wykresie lokalnie jest „górka", na drugim lokalnie jest „dolina". To oznacza, że są odwrócone w fazie o $\varphi = 180^\circ$.

2.4 Porównanie

Powyższe badania potwierdziły, że wzmocnienie amplitudy A oraz przesunięcie fazowe φ są zależne od ω. Nie ma jednak jednoznacznej i uniwersalnej zależności dla każdego typu systemów jak ω wpływa na amplitudę i przesunięcie fazowe, ale można to sprawdzić na przykład za pomocą charakterystyk Bodego. Dla układu o transmitancji 1 charakterystyka Bodego wygląda następująco:



Rysunek 7: Charakterystyka Bodego dla układu o transmitancji $K(s) = \frac{1}{s^2+0,1s+1}$

Z rozważań wynikło, że:

1. kiedy $\omega = 0,1$, amplituda $A = 1$ i przesunięcie fazowe $\varphi = 0°$;

2. kiedy $\omega = 1$, amplituda $A = 10$ i przesunięcie fazowe $\varphi \approx 84,68°$;

3. kiedy $\omega = 10$, amplituda $A = 0,1$ i przesunięcie fazowe $\varphi = 180°$.

Można zauważyć, że zgadza się to z amplitudą i przesunięciem fazowym ukazanym na charakterystyce Bodego:

1. kiedy $\omega = 0,1$, amplituda $A = 0dB = 20 \cdot log\frac{x}{1} = 1$ i przesunięcie fazowe $\varphi = 0°$;

2. kiedy $\omega = 1$, amplituda $A = 20dB = 20 \cdot log\frac{x}{1} = 10$ i przesunięcie fazowe $\varphi \approx -90°$;

3. kiedy $\omega = 10$, amplituda $A = -40dB = 20 \cdot log\frac{x}{1} = 0,1$ i przesunięcie fazowe $\varphi = -180°$.

3 Badania w dziedzinie częstotliwościowej

3.1 Charakterystyka amplitudowo-fazowa

Podana została transmitancja układu:

$$K(s) = \frac{1}{s+1}. \tag{7}$$

Obliczono transmitancję widmową układu:

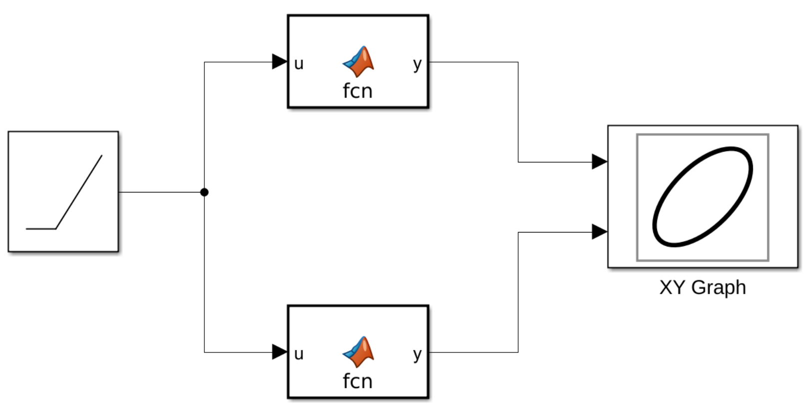
$$K(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1} = \frac{1 \cdot (1 - j\omega)}{(1 + j\omega) \cdot (1 - j\omega)} = \frac{1 - j\omega}{1 + \omega^2} \tag{8}$$

oraz wydzielono części rzeczywistą i urojoną transmitancji widmowej:

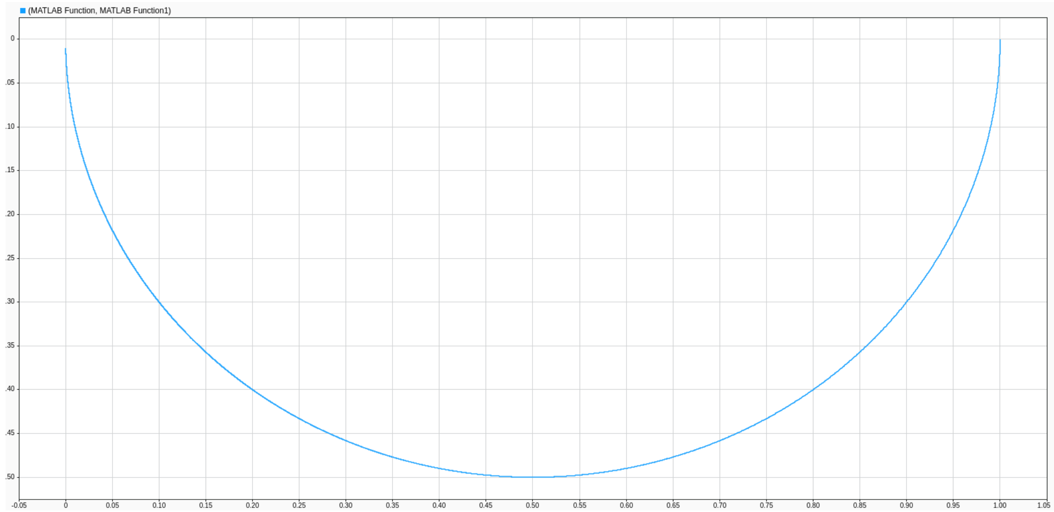
$$Re(K(j\omega)) = \frac{1}{1 + \omega^2} \tag{9}$$

$$Im(K(j\omega)) = \frac{-\omega}{1 + \omega^2}. \tag{10}$$

Na ich podstawie można wygenerować charakterystykę częstotliwościową, która stanowi rzut trójwymiarowej krzywej w przestrzeni (ω, $ReK(j\omega)$, $ImK(j\omega)$), gdzie $\omega \in [0, \infty)$, na płaszczyznę ($ReK(j\omega)$, $ImK(j\omega)$). Na poniższych rysunkach przedstawiono schemat w Simulinku (8) oraz charakterystykę częstotliwościową układu o wyznaczonej transmitancji (9).



Rysunek 8: Schemat Simulink do rysowania charakterystyki częstotliwościowej



Rysunek 9: Charakterystyka częstotliwościowa układu o transmitancji $K(s) = \frac{1}{s+1}$

Charakterystyka przechodzi przez 1 ćwiartkę, gdyż jest to charakterystyka układu pierwszego rzędu. Ma swój początek w punkcie (1,0j) i koniec w punkcie (0,0j).

3.2 Analiza charakterystyki częstotliwościowej układu opóźniającego z inercją

Transmitancja układu opóźniającego z inercją to:

$$K(s) = \frac{k}{Ts+1} \cdot e^{-s\tau}, \tag{11}$$

gdzie k to wzmocnienie, T to stała czasowa oraz τ to opóźnienie układu. Wartości tych trzech parametrów mają wpływ na charakterystykę amplitudowo-fazową układu. Przyjmując przykładowe dane:

- k = 1
- T = 1
- $\tau = 2$

transmitancja układu wyniesie:

$$K(s) = \frac{1}{s+1} \cdot e^{-2s}, \tag{12}$$

czyli transmitancja widmowa będzie miała postać:

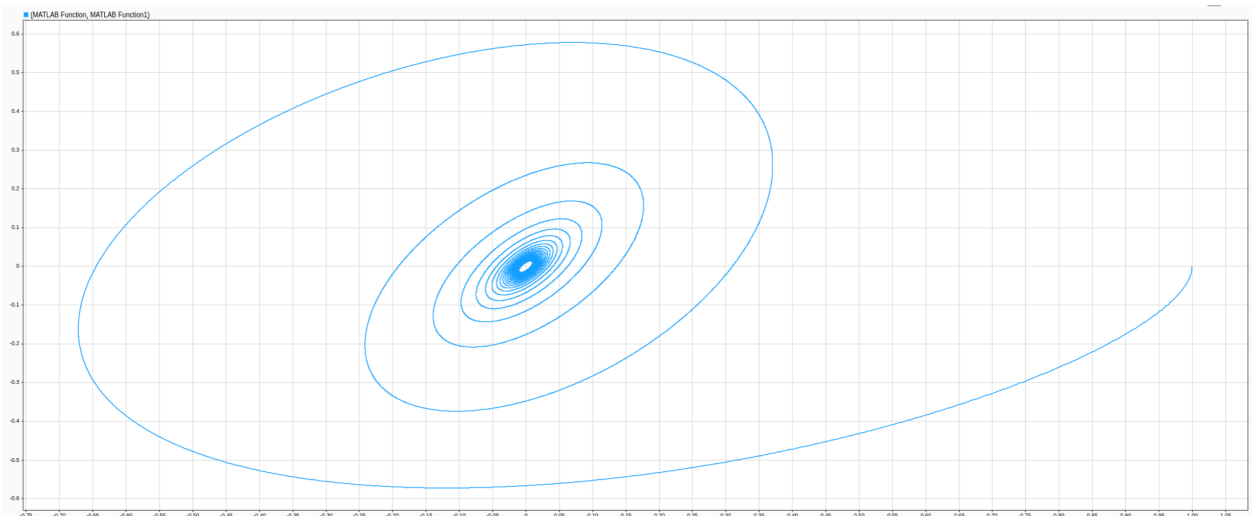
$$\begin{aligned} K(j\omega) = \frac{1}{j\omega+1} \cdot e^{-2j\omega} = \frac{1}{1+j\omega} \cdot (cos(2\omega) - jsin(2\omega)) = \\ = \frac{cos(2\omega) - jsin(2\omega)}{1+j\omega} \cdot \frac{1-j\omega}{1-j\omega} = \frac{cos(2\omega) - j\omega cos(2\omega) - jsin(2\omega) - \omega sin(2\omega)}{1+\omega^2} = \\ = \frac{cos(2\omega) - \omega sin(2\omega)}{1+\omega^2} + j \cdot \frac{-\omega cos(2\omega) - sin(2\omega)}{1+\omega^2} \end{aligned} \tag{13}$$

Część rzeczywista oraz urojona transmitancji widmowej wynoszą:

$$Re(K(j\omega)) = \frac{cos(2\omega) - \omega sin(2\omega)}{1 + \omega^2} \tag{14}$$

$$Im(K(j\omega)) = \frac{-\omega cos(2\omega) - sin(2\omega)}{1 + \omega^2} \tag{15}$$

Na ich podstawie i korzystając ze schematu Simulink 8 wygenerowano charakterystykę częstotliwościową:



Rysunek 10: Charakterystyka częstotliwościowa układu o transmitancji $K(s) = \frac{1}{s+1} \cdot e^{-2s}$

Charakterystyka ma postać spirali, która ma swój początek w punkcie (1, 0j) ze względu na wartość wzmocnienia $k = 1$ oraz zbiega do punktu (0, 0j).

4 Podsumowanie i wnioski

1. Podczas ćwiczenia wykazano, że charakterystyka czasowa odpowiedzi systemu na pobudzenie sinusoidalne zależy od wartości zadanej pulsacji ω. W odpowiedzi systemu zmienia się amplituda oraz przesunięcie fazowe, natomiast pulsacja zostaje identyczna jak pulsacja sygnału pobudzającego.

2. Charakterystyka czasowa odpowiedzi systemu na pobudzenie sinusoidalne odwzorowuje charakterystykę Bodego w dziedzinie częstotliwości. Z charakterystyk czasowych wyznaczono amplitudy oraz przesunięcia fazowe odpowiedzi układu, które okazały się poprawne i zgodne z tym, co pokazywał wykres Bodego.

3. Z charakterystyki częstotliwościowej można odczytać amplitudę oraz przesunięcie fazowe. W zależności od rzędu badanego układu, wykres przechodzi przez różną liczbę ćwiartek wykresu - dla układu pierwszego rzędu będzie to jedna ćwiartka, dla układu drugiego rzędu - dwie ćwiartki itd.

4. Charakterystyka częstotliwościowa układu opóźniającego z inercją przypomina spiralę zawijającą się dookoła początku układu współrzędnych. Jej wygląd zależy od parametrów - wzmocnienia k, stałej czasowej T oraz opóźnienia τ.

5. Od wzmocnienia zależy gdzie rozpocznie się spirala (dla $k = 1$ zaczynała się w punkcie (1, 0j)). Od opóźnienia zależy jak „rozległa” jest spirala (dla $\tau = 2$ będzie sięgać dalej niż dla $\tau = 1$). W miarę zwiększania stałej czasowej spirala zbliża się do 0 (dla $T = 1$ spirala zawijała się dookoła punktu 0, natomiast dla $T = 0$, charakterystyka byłaby okręgiem, a nie spiralą).