Politechnika Wrocławska

**Wydział Elektroniki, Fotoniki i Mikrosystemów**

*Sterowanie Procesami Ciągłymi*

# Sprawozdanie nr 4
## Identyfikacja obiektu dyskretnego

*Prowadzący:*
dr hab. inż. Grzegorz Mzyk

*Wykonała:*
Zuzanna Mejer, 259382

*Termin zajęć:*
czwartek TP, 9:15

Wrocław, 7 grudnia 2022r.

# Spis treści

# 1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia była identyfikacja obiektu dyskretnego na podstawie wygenerowanych danych oraz późniejsza ocena jakości identyfikacji w zależności od liczby pomiarów.

# 2 Generowanie danych

Dany jest obiekt dyskretny opisany wzorem:

$$y_k = 3u_k + 2u_{k-1} + 1u_{k-2} + z_k, \tag{1}$$

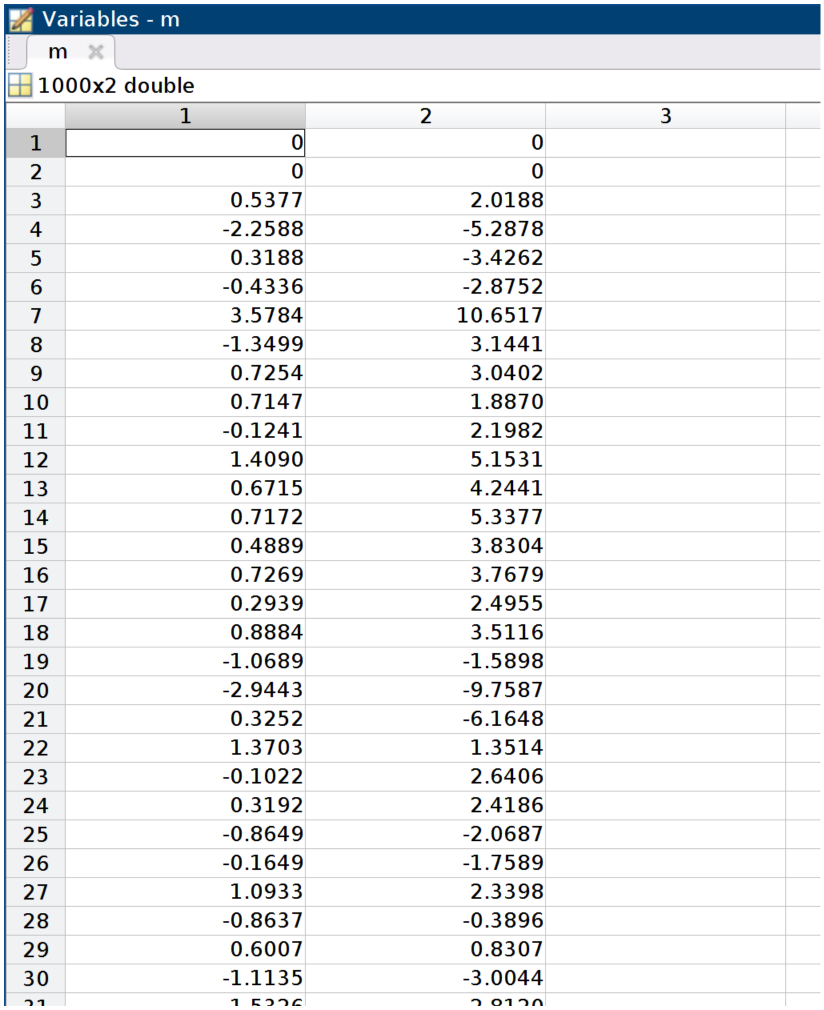
gdzie $z_k, u_k$ są od siebie niezależne. Wejście $u_k$ jest opisane funkcją *randn*, która generuje liczby o rozkładzie normalnym. Z kolei $z_k$ jest opisane funkcją *rand - 0,5*, która generuje liczby o rozkładzie równomiernym z zakresu [-0,5 ; 0,5]. Wykorzystując przedstawiony skrypt (rys. 1), wygenerowano ciąg par (rys. 2):

$$\{(u_k, y_k)\}_{k=3}^{N} \tag{2}$$

gdzie $N$ to liczba ciągu par. Rozpoczęto od $k = 3$ ze względu na nieznajomość wcześniejszych zdarzeń $(u_0, u_{-1})$.

```
clear all;
close all;

% GENEROWANIE DANYCH
i = 1000;

uk = zeros(i, 1);
yk = zeros(i, 1);
m = zeros(i, 2);

for j = 3:1:i
    uka = randn();
    uk(j) = uka;
    zk = rand() - 0.5;
    yka = 3*uk(j) + 2*uk(j-1) + uk(j-2) + zk;
    yk(j) = yka;
    m(j, 1) = uka;
    m(j, 2) = yka;
end

```

Rys. 1: Skrypt w Matlabie do wygenerowania danych



Variables - m

m

1000x2 double

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | |
| 2 | 0 | 0 | |
| 3 | 0.5377 | 2.0188 | |
| 4 | -2.2588 | -5.2878 | |
| 5 | 0.3188 | -3.4262 | |
| 6 | -0.4336 | -2.8752 | |
| 7 | 3.5784 | 10.6517 | |
| 8 | -1.3499 | 3.1441 | |
| 9 | 0.7254 | 3.0402 | |
| 10 | 0.7147 | 1.8870 | |
| 11 | -0.1241 | 2.1982 | |
| 12 | 1.4090 | 5.1531 | |
| 13 | 0.6715 | 4.2441 | |
| 14 | 0.7172 | 5.3377 | |
| 15 | 0.4889 | 3.8304 | |
| 16 | 0.7269 | 3.7679 | |
| 17 | 0.2939 | 2.4955 | |
| 18 | 0.8884 | 3.5116 | |
| 19 | -1.0689 | -1.5898 | |
| 20 | -2.9443 | -9.7587 | |
| 21 | 0.3252 | -6.1648 | |
| 22 | 1.3703 | 1.3514 | |
| 23 | -0.1022 | 2.6406 | |
| 24 | 0.3192 | 2.4186 | |
| 25 | -0.8649 | -2.0687 | |
| 26 | -0.1649 | -1.7589 | |
| 27 | 1.0933 | 2.3398 | |
| 28 | -0.8637 | -0.3896 | |
| 29 | 0.6007 | 0.8307 | |
| 30 | -1.1135 | -3.0044 | |

Rys. 2: Fragment wygenerowanego ciągu 1000 par od trzeciego elementu

# 3 Identyfikacja obiektu

W tej części zakłada się, że nie jest znany dokładny dyskretny opis obiektu (1), a jedynie jego postać:

$$y_k = a_0 \cdot u_k + a_1 \cdot u_{k-1} + a_2 \cdot u_{k-2} + z_k, \tag{3}$$

gdzie $a_0, a_1, a_2$ to wartości szukane. W celu zidentyfikowania obiektu wygenerowano macierze $X_N$ oraz $Y_N$ zawierające kolejne elementy ciągu par:

$$X_N = \begin{bmatrix} u_3 & u_2 & u_1 \\ u_4 & u_3 & u_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ u_N & u_{N-1} & u_{N-2} \end{bmatrix} \qquad Y_N = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_N \end{bmatrix} \tag{4}$$

Ze względu na nieznajomość wcześniejszych zdarzeń ($u_0$, $u_{-1}$), wycięto 2 pierwsze wiersze macierzy $X_N$, których nie pokazano już w powyższym wzorze.

Do znalezienia $a_0, a_1, a_2$ przyjęto estymator:

$$\hat{\Theta} = \begin{bmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{bmatrix} = \left(X_N^T \cdot X_N\right)^{-1} \cdot X_N^T \cdot Y_N \tag{5}$$

W celu wyznaczenia estymatora wygenerowano skrypt w Matlabie (rys. 3). Otrzymane wyniki zostały przedstawione na rys. 4

```
% IDENTYFIKACJA

xn = zeros(i, 3);
yn = zeros(i, 1);

for j = 3:1:i
    yn(j-2) = m(j,2);
    xn(j-2, 1) = m(j,1);
    xn(j-2, 2) = m(j-1, 1);
    xn(j-2, 3) = m(j-2, 1);
end

estymator = inv(xn' * xn) * xn' *yn;
```

Rys. 3: Skrypt w Matlabie do wyznaczenia wartości estymowanych

yn | m | estymator — 3x1 double

| | 1 |
|---|---|
| 1 | 2.9938 |
| 2 | 1.9914 |
| 3 | 0.9948 |
| 4 | |

yn | m | estymator — 3x1 double

| | 1 |
|---|---|
| 1 | 3.0234 |
| 2 | 1.9856 |
| 3 | 1.0057 |
| 4 | |

yn | m | estymator — 3x1 double

| | 1 |
|---|---|
| 1 | 3.0041 |
| 2 | 1.9997 |
| 3 | 1.0034 |
| 4 | |

Rys. 4: Oszacowany estymator wartości $a_0, a_1, a_2$ - 3 próby

Na rys. 4 przedstawione zostały 3 próby wyliczenia estymatora. Przyjął on wartości:

$$\hat{\Theta}_1 \approx \begin{bmatrix} 2,99 \\ 1,99 \\ 0,99 \end{bmatrix} \qquad \hat{\Theta}_2 \approx \begin{bmatrix} 3,02 \\ 1,99 \\ 1,01 \end{bmatrix} \qquad \hat{\Theta}_3 \approx \begin{bmatrix} 3,00 \\ 2,00 \\ 1,00 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Zatem w przybliżeniu: $a_0 = 3$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, co zgadza się z rzeczywistym opisem obiektu dyskretnego (1).

# 4 Błąd estymatora i wielokrotne powtórzenie pomiaru

Wyznaczono błąd, odejmując wartość rzeczywistą od wartości pochodzącej z identyfikacji, a następnie wyznaczono normę euklidesową otrzymanego wektora:

$$\Delta_N = norm(\hat{\Theta} - \Theta) \tag{7}$$

Skrypt opisany w poprzednich punktach (rys. 1 3) powtórzono $R$ razy po to, żeby otrzymać wiele estymatorów i żeby móc obliczyć uśredniony błąd estymatora dla danej liczby próbek N:

$$E(N) = \frac{1}{R} \sum_{R=1}^{R} \Delta_N \tag{8}$$

Ponadto, całość powtórzono jeszcze kilkukrotnie dla różnej liczby próbek $N = 100 : 500 : 10000$ (rys. 5, 6).

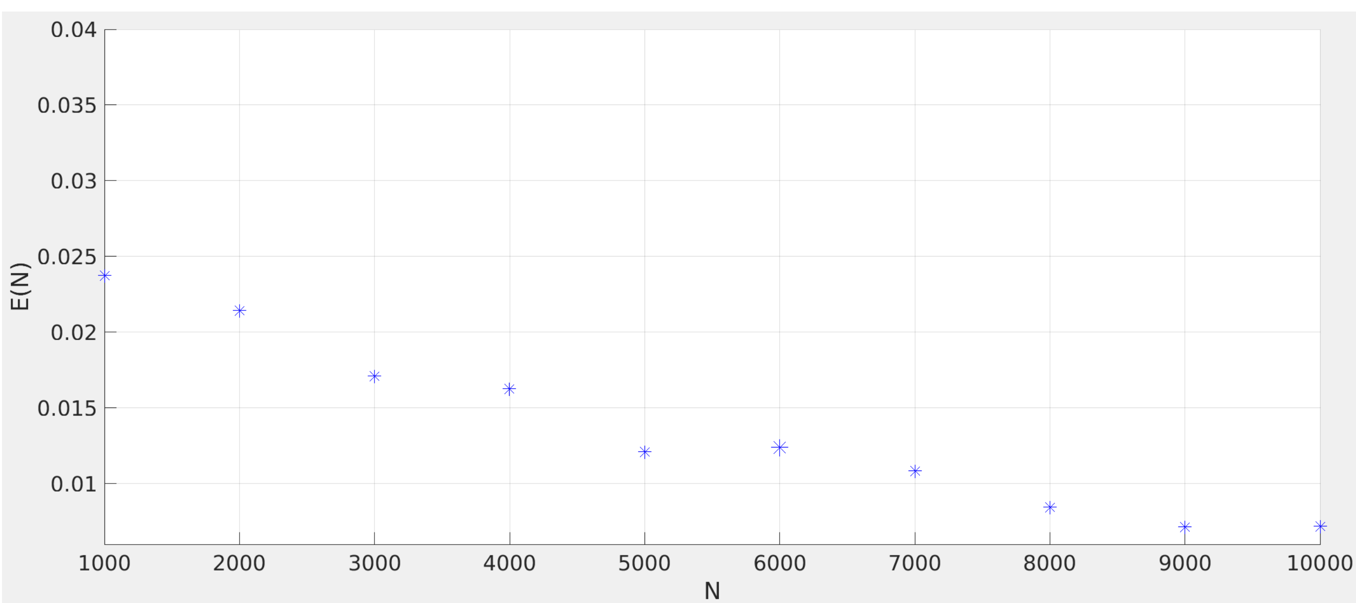
```
clear all;
close all;

phi = [3;2;1];

for N = 100:500:10000

    for r = 1:1:10 %5 estymatorow dla kazdej liczby probek

        i = N;

        % GENEROWANIE DANYCH
        uk = zeros(i, 1);
        yk = zeros(i, 1);
        m = zeros(i, 2);

        for j = 3:1:i
            uka = randn();
            uk(j) = uka;
            zk = rand() - 0.5;
            yka = 3*uk(j) + 2*uk(j-1) + uk(j-2) + zk;
            yk(j) = yka;
            m(j, 1) = uka;
            m(j, 2) = yka;
        end

```

Rys. 5: Cały skrypt do wyznaczenia zależności błędu od liczby pomiarów

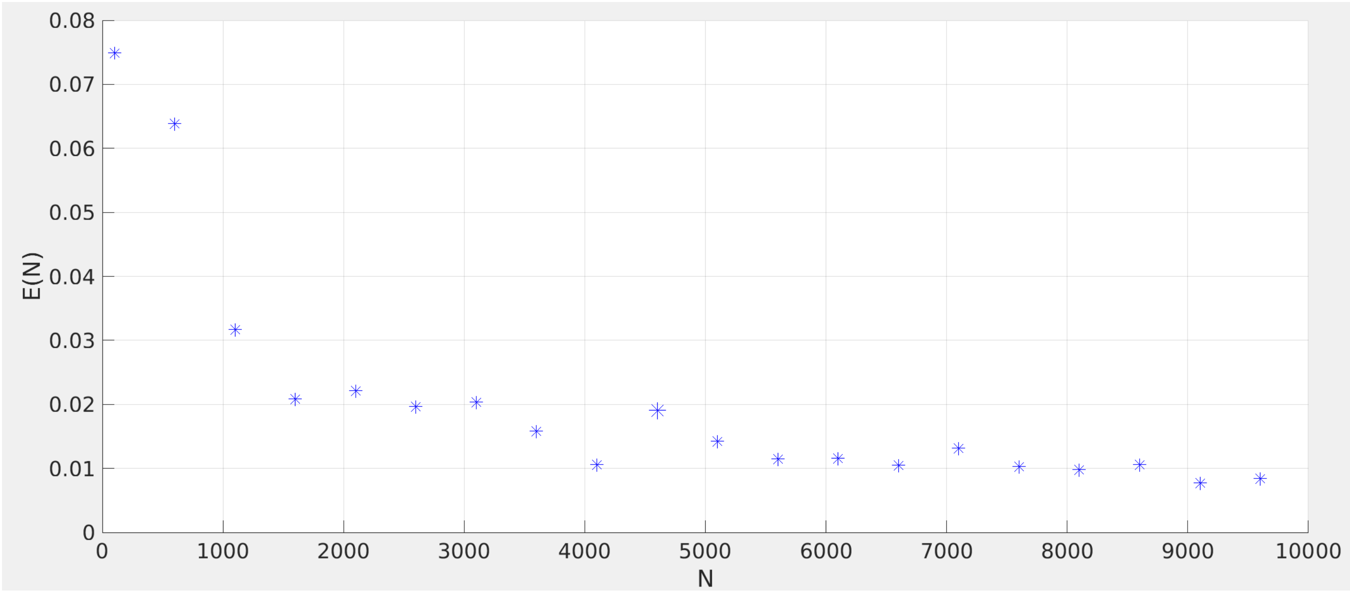
```
        % IDENTYFIKACJA
        xn = zeros(i, 3);
        yn = zeros(i, 1);

        for j = 3:1:i
            yn(j-2) = m(j,2);
            xn(j-2, 1) = m(j,1);
            xn(j-2, 2) = m(j-1, 1);
            xn(j-2, 3) = m(j-2, 1);
        end

        estymator = inv(xn' * xn) * xn' *yn;
        estymator_r(1, r) = estymator(1);
        estymator_r(2, r) = estymator(2);
        estymator_r(3, r) = estymator(3);

        norma_roznicy(1, r) = norm(estymator_r - phi);
    end
        e = 1/r *sum(norma_roznicy);
        hold on;
        plot(N, e, 'b*','MarkerSize',12);
        hold on;
        grid on;
end


```

Rys. 6: Cały skrypt do wyznaczenia zależności błędu od liczby pomiarów - kontynuacja

Dzięki temu narysowano jaki jest wpływ liczby pomiarów na średni błąd estymatora (rys. 7, 8).




Rys. 7: Zależność średniego błędu estymatora od liczby pomiarów dla 5 wygenerowanych estymatorów




Rys. 8: Zależność średniego błędu estymatora od liczby pomiarów dla 10 wygenerowanych estymatorów

# 5 Podsumowanie i wnioski

Po wykonaniu ćwiczenia sformułowano następujące wnioski:

- Identyfikacja obiektu przebiegła poprawnie i pozwoliła na dokładne wyznaczenie parametrów opisujących badany obiekt.
- Wyznaczone wartości estymatora niewiele różniły się od rzeczywistych wartości, a po zaokrągleniu były z nimi identyczne.
- Średni błąd estymatora identyfikacji jest zależny od liczby pomiarów. Im więcej pomiarów, tym błąd estymatora dąży do 0. Na rys. 8 dla 100 pomiarów błąd $E(N) \approx 0,075$, podczas gdy dla 10 000 pomiarów zmalał do wartości $E(N) \approx 0,01$.
- Funkcja błędu estymatora od liczby próbek przypomina funkcję eksponencjalną.