Zad. 10. Stosując kwadraturę Gaussa-Hermite'a dla pięciu węzłów zbadaj zbieżność całki.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{x^2 e^{(-x^2)} dx}$$

Porównaj otrzymany wynik z wynikiem otrzymanym za pomocą Symbolic Math Toolbox. Przyjąć arytmetykę double.

Kod:

```
w=5
syms x
hermiteH(0:w,x)

%%[ 1, 2*x, 4*x^2 - 2, 8*x^3 - 12*x, 16*x^4 - 48*x^2 + 12,
32*x^5 - 160*x^3 + 120*x]

A =[0 0 0 0 2 0;0 0 0 4 0 -2;0 0 8 0 -12 0;0 16 0 -48 0 12; 32
0 -160 0 120 0]

r=A(w,:)
zera=roots(r)
Wi=zeros(w,1)
for i=1:w
    wi=(2.^(w-1)*factorial(w).*sqrt(pi))./(w.^2.*(polyval(A(w-
1,:),zera(i))).^2);
    Wi(i)=wi
end
fxi=zera.^2
I=sum(Wi.*fxi)

z=int(x.^2*exp(-x.^2),-inf,inf)
double(z)
```

Wyniki:

Wynik uzyskany za pomocą kwadratury Gaussa-Hermite'a:

I = 0.8862

Wynik uzyskany za pomocą Symbolic Math Toolbox:

z= 0.8862

Wyniki są zgodne. Całka jest zbieżna, co jest zgodne z oczekiwaniami, bo waga $p(x) = e^{-x^2}$ zapewnia zbieżność całki.

Opis metody:

Metoda rozwiązania w oparciu o kwadraturę Gaussa-Hermite'a:

Kwadratura taka to kwadratura z wagą $w(x) = e^{-x^2}$. Wzór przybliżonego całkowania wygląda następująco:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)w(x)dx \sim \sum_{i=1}^{n} W_i f(x_i)$$

W zadaniu $f(x) = x^2$

Współczynniki:

$$W_i = \frac{2^{n-1} n! \sqrt{\pi}}{n^2 [H_{n-1}(x_i)]^2}$$

Oraz x_i to zera wielomianu Hermite'a $H_{n+1}(x)$. Do wyznaczenia wielomianów Hermite'a w Matlabie służy polecenie $hermiteH(n, x)$ gdzie n to stopień wielomianu, a x to zmienna. W zadaniu wyznaczono 6 pierwszych wielomianów Hermite'a (bo n+1=6). Następnie stworzono macierz z współczynników wyznaczonych wielomianów (poza $H_0(x)$, bo według wzoru sumować zaczyna się od i=1). W następnym kroku wyznaczono zera wielomianu Hermite'a dla pięciu węzłów, do wyznaczania zer wielomianu skorzystano z polecenia $roots()$. Kolejnym krokiem było wyznaczenie współczynników Wi dla 5 węzłów. W zadaniu $f(x) = x^2$, dlatego wyznaczone x_i (zera) podniesiono do kwadratu, aby ostatecznie obliczyć sumę $\sum_{i=1}^{n} W_i f_i(x)$.

Metoda wykorzystująca Symbolic Math Toolbox: Funkcja $int()$ podaje rezultat całkowania w postaci wzoru, dlatego po otrzymaniu wyniku należy użyć polecenia double().