TP : Théorie du signal

CHOUKROUN Simon et SYLLA Houssein

20 septembre 2021

1 Introduction

Les signaux que nous observons dans la nature présentent un comportement "localement" périodique et oscillatoire. Dans ses travaux sur la propagation de la chaleur, le physicien Joseph Fourier proposa de décomposer les signaux T_0-périodique en une somme de sinusoïdes.

On sait qu'avec les séries de Fourier, on peut reconstituer des signaux (sous réserve d'existence).La question qu'on peut se poser : Quelle est l'influence de l'irrégularité du signal de départ, le nombre d'harmonique utilisé dans la reconstitution du signal ?

De plus,en théorie , le développement en séries de Fourier converge vers le signal de départ. Retrouvons-nous ce signal en pratique ? Que peut-on dire de la vitesse de cette convergence ?Est-elle lente ? Rapide ?

Dans un premier temps, nous calculerons les coefficients de Fourier puis, nous déterminerons la densité spectrale de puissance x avec $r = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right]$

2 Partie théorique

Calcul théorique des coefficients de Fourier et représentation spectrale.

2.1 Coefficients de Fourier

Donner l'expression de la DSF réelle du signal suivants T_0-périodiques :

$$x(t) = \begin{cases} 1 \ \ \forall t \in [-\frac{T_0 r}{2}; \frac{T_0 r}{2}] \\ 0 \qquad\qquad\qquad \text{sinon} \end{cases}$$

avec r le rapport cyclique tel que $r < 1$ et $T_0 = 0.5s$

2.1.1 Résolution :

Par définition , tout signal $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, T_0$-périodique, continu ou continu par morceaux, intégrable une fois dans $\mathbb{R}$ (conditions de Dirichlet), peut se décomposer en une somme de sinus et de cosinus. Cette décomposition est appelée Décomposition en Série de Fourier (DSF) et est telle que :

$$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

Dans un repère orthogonal ,on constate que le signal réel ci-dessus, est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Ce signal réel est donc pair.(i.e : $b_n = 0$) On a donc :

$$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t)] = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t)]$$

Condition d'existence Soit $s(t)$ un signal T_0-périodique de forme quelconque. Pour que $s(t)$ admette une DSF, il suffit que $s(t)$ soit un signal de carré sommable sur une période (c-a-d à énergie finie sur une période) :

$$\int_{[T_0]} |s(t)|^2 dt < \infty$$

Déterminons le coefficient de Fourier réel a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{\frac{-T_0 r}{2}}^{\frac{T_0 r}{2}} x(t)\mathrm{d}t \Leftrightarrow a_0 = \frac{1}{T_0}[t]_{\frac{-T_0 r}{2}}^{\frac{T_0 r}{2}} = r$$

Déterminons maintenant tous les coefficients réels de Fourier $a_{n\geq 1}$:

$\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{a_n = \frac{2}{T_0}\int_{\frac{-T_0 r}{2}}^{\frac{T_0 r}{2}} \cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t}$$

Passons maintenant au calcul des a_n.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{\frac{-T_0 r}{2}}^{\frac{T_0 r}{2}} \cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = \frac{4}{T_0}[\frac{\sin(n\omega_0 t)}{n\omega_0}]_0^{\frac{T_0 r}{2}} = \frac{4\sin(n\omega_0\frac{T_0 r}{2})}{T_0 n\omega_0} = \frac{2\sin(n\pi r)}{n\pi}$$

Pour quelle valeur de n, on a : $a_n = 0$
$\forall k \in \mathbb{Z} n\pi r = k\pi \Leftrightarrow n = \frac{k}{r}$

2.1.2 Densité spectrale de Puissance

$$S_x(f) = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n)^2 = \frac{(a_0)^2}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n)^2 = \frac{r^2}{4} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{2\sin(n\pi r)}{n\pi})^2 = \frac{r^2}{4} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(n\pi r)}{n^2}$$

► Pour $r = \frac{1}{2}$, de manière générale :

$$S_x(f) = \frac{1}{16} + \frac{1}{4\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(\frac{n\pi}{2})}{n^2}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{n_{(\text{paire})}}^{+\infty} \frac{\sin^2(\frac{n\pi}{2})}{n^2} = 0$

Calculons les premiers termes.

On sait que $c_n = \frac{a_n}{2}$ donc $|c_n|^2 = \frac{\sin^2(\frac{\pi n}{2})}{\pi^2 n^2}$

$$|C_0|^2 = r^2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$
$$|C_1|^2 = \frac{\sin^2(\frac{\pi}{2})}{\pi^2} = \frac{1}{\pi^2}$$
$$|C_2|^2 = 0$$
$$|C_3|^2 = \frac{\sin^2(\frac{3\pi}{2})}{9\pi^2} = \frac{1}{9\pi^2}$$
$$|C_4|^2 = 0$$
$$|C_5|^2 = \frac{\sin^2(\frac{5\pi}{2})}{25\pi^2} = \frac{1}{25\pi^2}$$

► Pour $r = \frac{1}{4}$, On a , de manière générale :

$$S_x(f) = \frac{1}{64} + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(\frac{n\pi}{4})}{n^2}$$

On sait que $c_n = \frac{a_n}{2}$ donc $|c_n|^2 = \frac{\sin^2(\frac{n\pi}{4})}{n^2\pi^2}$

$$|C_0|^2 = r^2 = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$$
$$|C_1|^2 = \frac{\sin^2(\frac{\pi}{4})}{\pi^2} = \frac{1}{2\pi^2}$$
$$|C_2|^2 = \frac{\sin^2(\frac{\pi}{2})}{4\pi^2}\frac{1}{4\pi^2}$$
$$|C_3|^2 = \frac{\sin^2(\frac{3\pi}{4})}{9\pi^2} = \frac{1}{18\pi^2}$$
$$|C_4|^2 = \frac{\sin^2(\pi)}{n^2\pi^2} = 0$$
$$|C_5|^2 = \frac{\sin^2(\frac{5\pi}{4})}{25\pi^2} = \frac{1}{50\pi^2}$$
$$|C_6|^2 = \frac{\sin^2(\frac{3\pi}{2})}{6^2\pi^2} = \frac{1}{36\pi^2}$$
$$|C_7|^2 = \frac{\sin^2(\frac{7\pi}{4})}{49\pi^2} = \frac{1}{98\pi^2}$$
$$|C_8|^2 = \frac{\sin^2(2\pi)}{8^2\pi^2} = 0$$
$$|C_9|^2 = \frac{\sin^2(\frac{9\pi}{4})}{9^2\pi^2} = \frac{1}{162\pi^2}$$

On constate que tous les termes en n multiple de 4 seront nuls. (congruence modulo 4)

► Pour $r = \frac{1}{3}$: En utilisant la congruence modulo 3 (pour séparer les sommes) , on a :

$$S_x(f) = \frac{1}{36} + \frac{1}{4\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\sin^2(\frac{n\pi}{3})}{n^2}$$

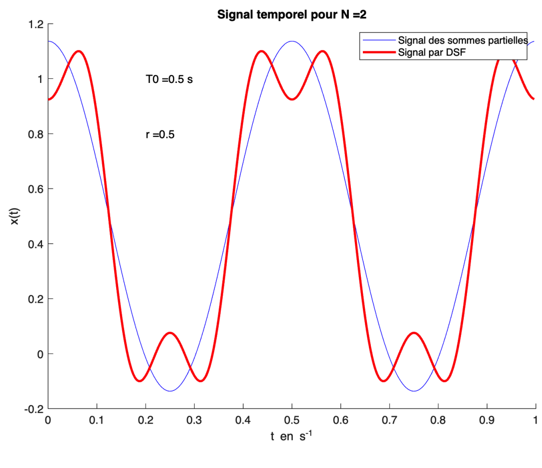
On sait que $c_n = \frac{a_n}{2}$ donc $|c_n|^2 = \frac{\sin^2(\frac{n\pi}{3})}{n^2\pi^2}$

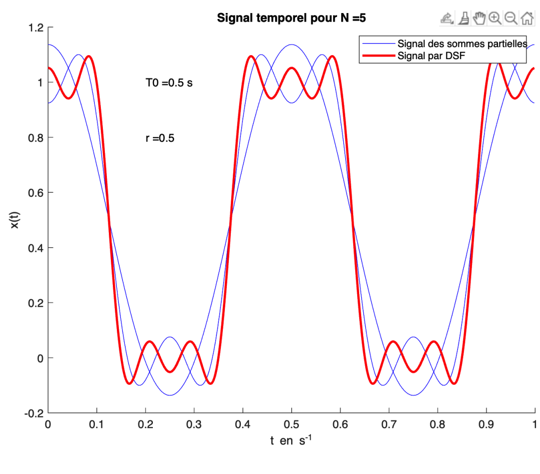
$$|C_0|^2 = r^2 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$
$$|C_1|^2 = \frac{3}{4\pi^2}$$
$$|C_2|^2 = \frac{3}{16\pi^2}$$
$$|C_3|^2 = 0$$
$$|C_4|^2 = \frac{3}{64\pi^2}$$
$$|C_5|^2 = \frac{3}{100\pi^2}$$
$$|C_6|^2 = 0$$
$$|C_7|^2 = \frac{3}{196\pi^2}$$

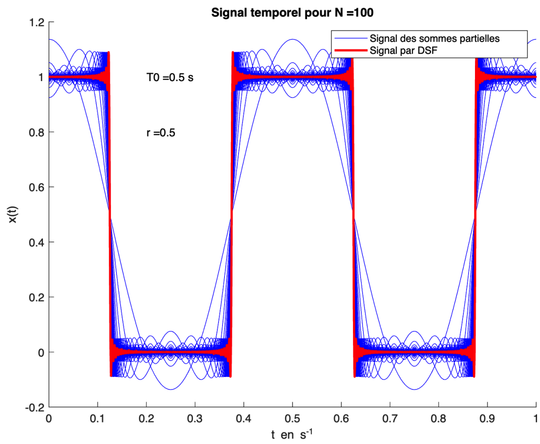
On constate que tous les termes en n multplie de 3 s'annulent. (congruence modulo)

3 Partie expérimentale

1. Réprésenter le signal temporel x pour $r = \frac{1}{2}$ et pour toutes les valeurs de N. (i.e : Pour $N = 2$,$N = 5$,$N = 100$ avec N qui correspond au nombre d'harmonique.)



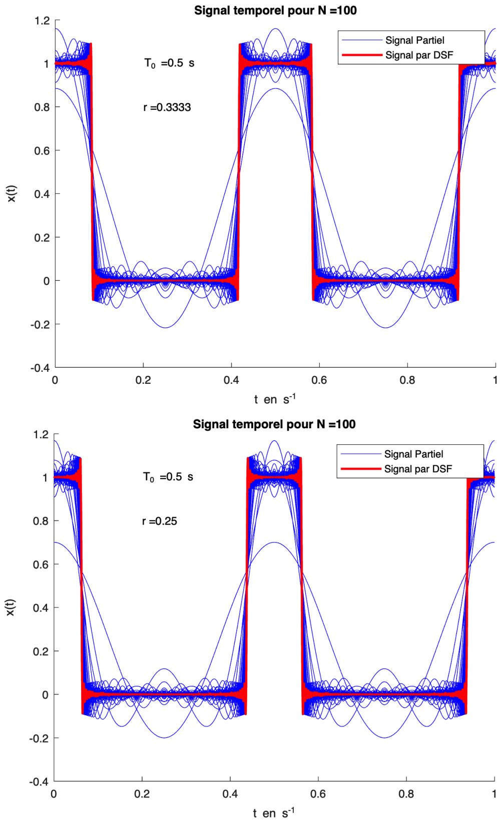




Conclusion : Plus N augmente, plus on se rapproche d'un signal carré. Toutefois des oscillations apparaîssent au niveau des sauts de discontinuités.Cela peut s'expliquer par la modélisation d'une fonction dérivable par morceaux par une série de Fourier faisant apparaître des formes d'oscillations importantes au voisinage des discontinuités de la fonction. C'est le phénomène de Gibbs.
Lorsque le nombre d'harmoniques N augmente, l'amplitude de ces oscillations augmente et elles se font sur un intervalle de temps de plus en plus petit : elles se localisent/resserent autour des discontinuités.

En pratique , il faut donc trouver un compromis entre qualité de l'approximation et oscillations autour des sauts de discontinuités car l'amplitude des oscillations peut devenir plus grand que l'amplitude du signal de départ.

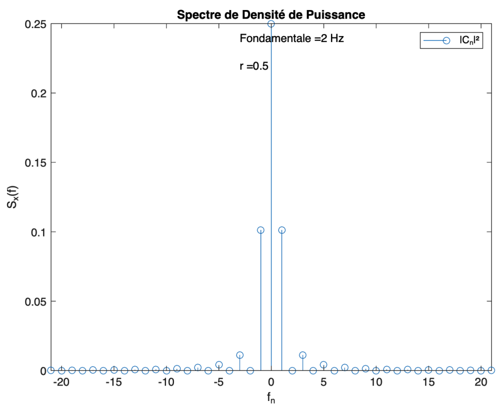
2. Représenter le signal temporel x pour $r = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right]$ et pour $N = 100$. Commentaires.

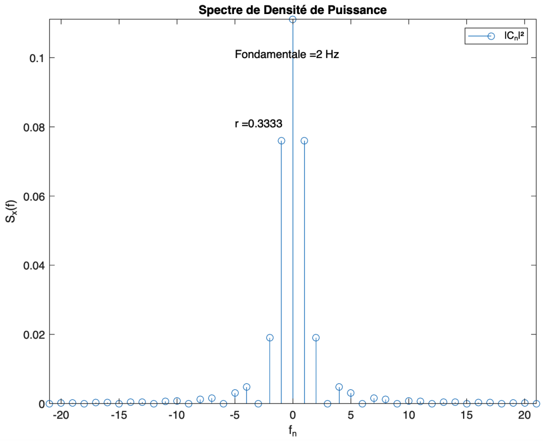


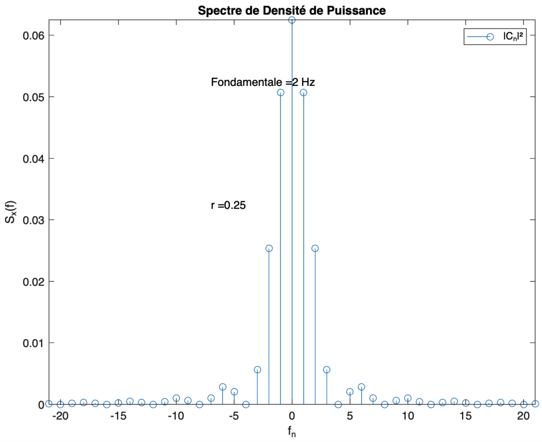
Lorsque on diminue r ,on diminue la largeur des créneaux.Cela semblent avoir pour effet d'augmenter les oscillations autour des sauts de discontinuités et cela à même une incidence sur la qualité de l'approximation : les oscillations se propagent sur les parties constantes du signal .En augmentant r , on accentue le phénomène de Gibbs.
En pratique , il faut avoir une valeur minimal pour r pour espérer avoir une bonne approximation.

Pour approximer des signaux de type impulsion, il semblerait que les séries de Fourier soient un outil qui présente des limites.

3. Représenter la densité spectrale de puissance de x pour $N = 20$ et $r = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right]$. Commentaires.







On remarque que plus r est petit , plus la contribution des autres harmoniques (autres que la fondamentale) est important. Les coefficients de Fourier tendent plus rapidement vers 0 lorsque r est grand. Ils tendent moins vite vers 0 lorsque r diminue. Le spectre des harmoniques est de plus en plus étalé lorsque r diminue.