CS:3330, Algorithms

HW08 - Dynamic Programming

Logan Zweifel September 26, 2021

---

1 Binomial Coefficient

Use the equation

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

to show

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & \text{if } k = 0 \text{ or } k = n \\ \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} & \text{if } 0 < k < n \end{cases}$$

For $k = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{n!}{k!(n-k)!} &= \frac{n!}{0!(n-0)!} \\ &= \frac{n!}{1(n)!} \\ &= \frac{n!}{n!} \\ &= 1 \end{aligned}$$

For $k = n$,

$$\begin{aligned} \frac{n!}{k!(n-k)!} &= \frac{n!}{n!(n-n)!} \\ &= \frac{n!}{n!(0)!} \\ &= \frac{n!}{n!} \\ &= 1 \end{aligned}$$

For $0 < k < n$, $\binom{n-1}{k-1}$ per the definition of $\binom{n}{k}$ can be simplified to

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-2)!} * \frac{k}{k} = \frac{k*(n-1)!}{k!(n-k-2)!}$$

and $\binom{n-1}{k}$ can be simplified to

$$\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}$$

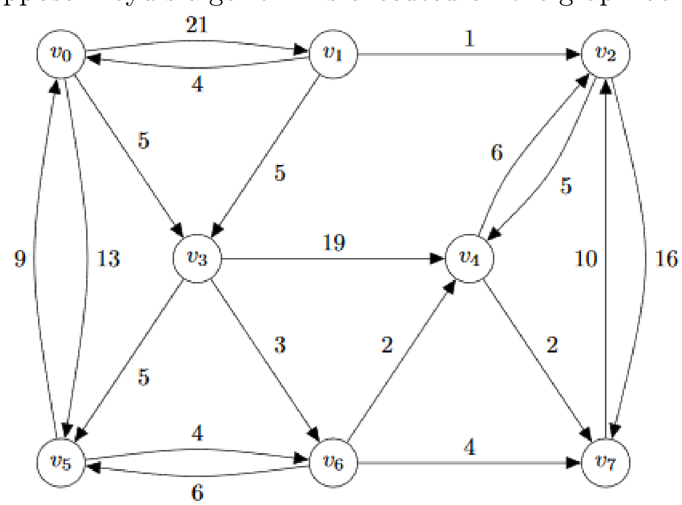
Then the following can be done.

$$\begin{aligned}
\frac{k*(n-1)!}{k!(n-k-2)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} &= \frac{(n-1)!}{k!}\left[\frac{k}{(n-k-2)!} + \frac{1}{(n-k-1)!}\right] \\
&= \frac{(n-1)!}{k!}\left[\frac{k}{(n-k-2)!} + \frac{1}{(n-k-1)(n-k-2)!}\right] \\
&= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-2)!}\left[k + \frac{1}{n-k-1}\right] \\
&= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-2)!} * \frac{k+n-k-1}{n-k-1} \\
&= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-2)!} * \frac{n-1}{n-k-1} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}
\end{aligned}$$

Therefore verifying the recurrence for $\binom{n}{k}$.

2 Shortest Paths

Supppose Floyd's algorithm is executed on the graph below



a) Show the contents of the matrix W

v_j

	x	0	1	2	3	4	5	6	7
	0	0	21	∞	5	∞	13	∞	∞
	1	4	0	1	5	∞	∞	∞	∞
	2	∞	∞	0	∞	5	∞	∞	16
v_i	3	∞	∞	∞	0	19	5	3	∞
	4	∞	∞	6	∞	0	∞	∞	2
	5	9	∞	∞	∞	∞	0	4	∞
	6	∞	∞	∞	∞	2	6	0	4
	7	∞	∞	10	∞	∞	∞	∞	0

W

b) Show the contents of the Matrix D

v_j

	x	0	1	2	3	4	5	6	7
	0	0	21	16	5	10	10	8	12
	1	4	0	1	5	6	10	8	12
	2	∞	∞	0	∞	5	∞	∞	7
v_i	3	14	35	11	0	5	5	3	7
	4	∞	∞	6	∞	0	∞	∞	2
	5	9	30	12	14	6	0	4	8
	6	15	36	8	20	2	6	0	4
	7	∞	∞	10	∞	15	∞	∞	∞

D

In this table, ∞ represents paths that aren't possible for the given graph because vertexes 2, 4 and 7 are in a permanent cycle and have no way/path to reach other vertices.

c) What is the shortest path from v_0 to v_2

The shortest path from v_0 to v_2 is $[v_0, v_3, v_6, v_4, v_2]$ with a length/weight of 16.