Laboratoire 3 – Résolution d'un S.E.L.

But :

Construire un algorithme permettant de résoudre un S.E.L. à 3 équations et 3 inconnues selon la méthode de Cramer.

Consignes :

L'algorithme doit être conçu en respectant les principes de programmation vus en cours (commentaires, indentation, etc.).

L'algorithme doit accepter en paramètre :

- une matrice 3x3 sous la forme d'un tableau de nombres réels représentant la matrice des coefficients du S.E.L. à résoudre;
- une matrice 1x3 sous la forme d'un tableau de nombres réels représentant la matrice des constantes du S.E.L. à résoudre.

L'algorithme doit déterminer le nombre de solutions à l'aide du théorème du déterminant et en informer l'utilisateur à l'aide d'une phrase complète.

Ensuite, le cas échéant, l'algorithme doit calculer la solution à l'aide de boucles et présenter les résultats avec les variables x, y et z.

Votre programme peut réutiliser ce que vous avez fait au laboratoire 2.

Vous devez tester votre algorithme avec un jeu d'essais.

Vous devez remettre votre travail sur Omnivox en deux fichiers : un fichier exécutable et un fichier Word dans lequel on y retrouve votre code (format texte ou image) et l'ensemble des essaies effectués à l'aide de capture d'écran. **Ne pas remettre de fichier compressé.**

Critères d'évaluation

Théorème du déterminant (35)	Tous les cas sont traités	10
	Commentaire	10
	Bon résultat (logique)	10
	Message cohérent pour chaque cas	5
Règle de Cramer (65)	Bon résultat	30
	Commentaires	10
	Substitution des colonnes dans une boucle	10
	Calcul de chaque solution	10
	Affichage du résultat avec x, y et z	5

Un nombre ou une qualité de tests insuffisant(e) entraînera une pénalité pouvant aller jusqu'à 10%.

Dans tous les cas, si le programme compile avec <u>erreur</u>, au moins 50% des points seront retranchés.

10% par jour de retard seront retranchés.

Valeur relative : 2%

Rappel – Algèbre linéaire

Déterminant d'une matrice d'ordre 3

Soit A une matrice 3×3, alors

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underbrace{a_{11}\left(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}\right)}_{a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \underbrace{-a_{12}\left(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23}\right)}_{-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}} \underbrace{+a_{13}\left(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}\right)}_{a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}.$$

Systèmes d'équations linéaires (SEL)

Soit le système d'équations linéaires (SEL) comportant n équations et n inconnues suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

La **matrice des coefficients** de ce SEL contient tous les coefficients des inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

La **matrice des inconnues** de ce SEL contient toutes les inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$$

La **matrice des constantes** de ce SEL contient toutes les constantes $b_1, b_2, \ldots, b_n$:

$$B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Un SEL $AX = B$ est **homogène** si $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$. Par exemple, $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ est homogène.

Théorème du déterminant

Un SEL à n équations et n inconnues admet une solution unique si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Dans le cas contraire, si $AX = B$ est homogène, il admet une infinité de solutions et si $AX = B$ est non-homogène, il admet soit une infinité de solutions, soit aucune solution.

Règle de Cramer

Soit un système d'équations linéaires à n équations et n inconnues où A est la matrice des coefficients, X la matrice des inconnues et B la matrice des constantes.

Soit $\Delta = \det(A)$ et Δ_{x_i} le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant la i-ème colonne de A par B, la matrice des constantes.

Alors, X , la matrice des inconnues, est donnée par

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} \\ \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} \\ \dots \\ \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta} \end{bmatrix} \text{ où } \Delta \neq 0.$$

Exemple

Résoudre les SEL suivants par la règle de Cramer.

1. $\begin{cases} a+b-c=2 \\ 2a-b-c=3 \\ -b-c=1 \end{cases}$

$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \; et \; X=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ et le SEL est non-homogène.

$\det(A)=1\cdot((-1\cdot-1)-(-1\cdot-1))-1\cdot((2\cdot-1)-(0\cdot-1))+(-1)\cdot((2\cdot-1)-(0\cdot-1))=4$

$\det(A)=4\neq 0$, donc le SEL admet une solution unique (théorème du déterminant)

$A_a=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \det(A_a)=4$

$A_b=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \det(A_b)=0$

$A_c=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det(A_c)=-4$

Donc, $a=\dfrac{\det(A_a)}{\det(A)}=1$, $b=\dfrac{\det(A_b)}{\det(A)}=0$ et $c=\dfrac{\det(A_c)}{\det(A)}=-1$.

2. $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -1 \\ -4x_1 + x_2 - 8x_3 = 0 \end{cases}$ Rép : Infinité de solutions ou aucune solution.

3. $\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ 3y - 2z = -1 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ Rép : $x = \frac{1}{7},\ y = \frac{-1}{7},\ z = \frac{2}{7}$