Essence of the lecture (29)

凸问题：

- lagrangian function, lagrange dual function

Lagrangian function/Lagrangian: $L(x,\lambda,\upsilon)=f_0(x)+\sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x)+\sum_{i=1}^p \upsilon_i h_i(x)$

Lagrange dual function/Dual function: $g(\lambda,\upsilon)=\inf\limits_{x\in D} L(x,\lambda,\upsilon)$

两条结论：

1）$g(\lambda,\upsilon)$ 一定是凹函数，因为 $\sup_{x\in D} L(x,\lambda,\upsilon)$ 是凸函数（分段极大，保凸操作）

2）$\forall\lambda\geq 0,\ \forall\upsilon,\ g(\lambda,\upsilon)\leq p^*$，其中 p^* 为原问题的最优值

证明：设 x^* 为原问题的最优解，则 $f_i(x^*)\leq 0,\ h_i(x^*)=0$

回代有 $L(x^*,\lambda,\upsilon)=f_0(x^*)+\sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x^*)+\sum_{i=1}^p \upsilon_i h_i(x^*)\leq f_0(x^*)=p^*$

例：$\min\ c^Tx\quad s.t.\ Ax=b,\ x\geq 0$

首先列出其拉格朗日方程

$$
\begin{aligned}
L(x,\lambda,\upsilon)&=c^Tx+\lambda^T(-x)+\upsilon^T(Ax-b)\\
&=(c^T-\lambda^T+\upsilon^TA)x-\upsilon^Tb
\end{aligned}
$$

$$
g(\lambda,\upsilon)=\inf_{x\in D} L(x,\lambda,\upsilon)=\begin{cases}-b^T\upsilon & A^T\upsilon-\lambda+c=0\\ -\infty & otherwise\end{cases}
$$

例：$\min\ X^TWX\quad s.t. x_i=\pm 1,\ i=1,\ldots,m$

该例中目标函数不一定是凸函数，同时约束条件不是凸集