Rúmfræði fyrir ólympíufara

1 Grunnur rúmfræðinnar

1.1 Undirstöðuatriði

Í Frumatriðunum ritaði forngríski stærðfærðingurinn Evklíð 13 bækur sem drógu saman nær alla þekkta stærðfræði á hans dögum. Grundvöllur verka hans var rúmfræði en framan af var hún meginuppistaða fræðilegrar stærðfræði. Í bókinni gerir Evklíð tilraun til að smíða rökfræðilegt rúmfræðikerfi í fletinum þar sem hann gefur sér eins fáar frumreglur og þurfa þykir og leiðir út frá þeim helstu eiginleika rúmsins.

Frumreglur Evklíðs eru fimm og eru eftirtaldar:

1. Draga má línu á milli sérhverra tveggja punkta.
2. Framlengja má sérhvert strik eins langt og þurfa þykir í hvora átt.
3. Teikna má hring með hvaða geisla og miðju sem er.
4. Öll rétt horn eru eins.
5. Ef lína l sker tvær aðrar línur og innanverð hornin, sem l myndar við hinar og liggja sömu megin við l, eru saman minna en tvö rétt horn þá skerast hinar tvær þeim megin við l sem innanverðu hornin lágu.

Af þessum reglum er sú fimmta sú lengsta og frægasta. Mörgum þótti hún of flókin til að gefa sér og vildu sýna að hægt væri með einhverjum hætti að leiða hana út frá hinum. Þetta var óleyst vandamál framan af en seint á 19. öld uppgötvuðu menn að hægt var að smíða áhugaverð rúmfræðikerfi (s.k. óevklíðsk kerfi) sem uppfylltu fyrstu fjórar frumsendurnar en ekki þá fimmtu. Því er ljóst að fimmta frumsendan verður ekki flúin. Til eru ýmsar jafngildar umorðanir á frumreglunni og er kannski vert að taka fram eina:

Frumsetning 1. *Einslæg horn við samsíða línur eru jafnstór.*

Í hefðbundinn rúmfræði, þeirri sem verður til umræðu í þessu kveri, gildir fimmta frumsenda Evklíðs. Slík rúmfræði kallast evklíðsk rúmfræði.

Einnig viljum við bæta við einni frumreglu, sem Evklíð láðist að minnast á. Hún er umorðun á því að hliðrun í fletinum skilur lengdir eftir óbreyttar.

Frumsetning 2. *(Þríhyrningaregla I) Ef horn og aðlægar hliðar þess í einum þríhyrningi eru jafnstór tilsvarandi horni og hliðum í öðrum þá eru þríhyrningarnir eins að öllu leyti.*

Sum hugtök flatarfræðinnar verða ekki útskýrð nema út frá helstu eiginleikum sínum. Þetta eru hugtökin *puntkur* og *lína*. Við gerum okkur grein fyrir ákveðnum eiginleikum þeirra s.s. að lína getur legið um punkt og að punktur geti legið á línu. Einnig höfum við einhverja hugmynd um að punktur sé óaðskiljanlegur, ákveðinn staður og að lína sé flatarmynd sem hefur lengd en enga breidd. Segja mætti að lína væri safn þeirra punkta sem á henni liggja og punktur sniðmengi þeirra lína sem um hann liggja.

Formleg skilgreining er samt sem áður ónáanleg og eiginleikarnir sjálfir verða að nægja í þessu samhengi. Við gerum ráð fyrir að þessi hugtök séu nokkurn veginn þekkt.

Hefðbundið er að tákna punkta með hástöfum en línur og strik með lágstöfum. Ekki er gerður greinarmunur á striki og lengd þess.

Þegar grunnurinn er kominn má smíða stærðfræðina upp frá honum. Skilgreina má önnur hugtök út frá hinum þekktari.

Skilgreining 1. *Hringur nefnist safn þeirra punkta sem eru í ákveðinni fjarlægð frá tilteknum punkti. Hinn tiltekni punktur nefnist miðja hringsins og hin ákveðna fjarlægð geisli hans. Strik, sem hefur báða endapunkta á hringnum, kallast strengur í hringnum.*

Strengur, sem gengur um miðju hrings, kallast miðstrengur en lengd hans kallast þvermál hringsins.

Einnig má sanna ýmis hugtök út frá frumreglunum og einföldum afleiddum reglum. Hér verður tekið dæmi um þekkta reglu sem byggir fyrst og fremst á fimmtu frumsendunni.

Setning 1. *Hornasumma þríhyrnings er tvö rétt horn.*

Sönnun. Látum þríhyrning ABC vera gefinn. Drögum línu l samsíða strikinu AB og látum hornin u og v vera eins og á mynd. Athugum að samkvæmt frumreglu um einslæg horn er u jafnstórt horninu við B og v jafnstórt horninu við A. Því er $\angle A + \angle B + \angle C = u + v + \angle C = 180°$.

Þar með er hornasumma þríhyrningsins ABC jöfn tveimur réttum hornum $\square$

Þessi regla og sönnun hennar sýnir okkur eitt mikilvægasta tól rúmfræðings: hjálparlínur. Oftar en ekki reynist dæmi þungt þangað til rétta línan hefur verið dregin og þá blasir lausnin við.

Athugum að sumar línur geta verið gagnlegar en flestar eru það ekki. Til að öðlast færni í rúmfræði þurfum við því að vera óhrædd við að gera tilraunir til að sjá hvað reynist vel. Með reynslunni fáum við á tilfinninguna hvaða línur er heppilegt að draga og verðum þá eins og töframenn fyrir hinum reynsluminni sem finnst við draga hjálparlínur á flötin eins og kanínur úr hatti. Þetta er þó að sjálfsögðu enginn galdur og felst lykillinn oftar en ekki í því að setja fyrir sig þekktar staðreyndir og reyna að nota þær með frumlegum hætti.

1.2 Horn og þríhyrningar

Hringir eru meðal einföldustu flatarmyndanna en þó svo torskildir að flest erfið rúmfræðidæmi tengjast þeim. Ástæðan fyrir þessu er meðal annars sú að hringir tengjast hornum með mjög beinum hætti.

Frá Babýloníumönnum kemur hefð sú að skipta hringboga upp í 360 lengdareiningar sem kallast gráður. Þá svarar fjöldi gráða ákveðins hringboga til hlutfalls lengdar hans af heildarummáli hringsins. Við skilgreinum stærð horns í gráðum út frá þessari hugmynd um hringi.

Skilgreining 2. *Horn nefnist sú mynd sem fram kemur þegar tvær hálflínur eru dregnar frá sama endapunkti. Hann kallast oddpunktur hornsins en hálflínurnar armar þess.*

Ef hringur hefur miðju í oddpunkti hornsis er stærð hornsins jöfn gráðutali hringbogans sem verður milli arma þess.

Þegar við iðkum rúmfræði högum við stærð horns þannig að hún liggi á bilinu $(0, 180^{circ})$. Í öðrum aðstæðum eru horn tekin fastari tökum og oftar en ekki mæld í annarri einingu sem kallast bogamál.

Við höfum ýmis orð yfir ólík horn.

Skilgreining 3. *Tvö horn kallast*

1. *frændhorn ef summa þeirra er* $180°$.
2. *Grannhorn ef þau hafa einn arm sameiginlegan en hinir armar þeirra eru framhald hvor af öðrum.*

3. *lagshorn ef þau eru hvöss og hafa einn arm sameiginlegan en hinir tveir eru þverstæðir.*

4. *Topphorn ef hvorir tveggja samkynja armar þeirra eru framhald hvor af öðrum.*

Auðvelt er að sjá að öll grannhorn eru frændhorn og að topphorn eru jafnstór. Þá sjáum við að tvö rétt horn eru frændhorn. Lítum á eftirfarandi reglu um grannhorn eins horns við þríhyrning.

Setning 2. *Grannhorn eins horns við þríhyrning er jafnstórt summu hinna tveggja.*

Sönnun. Látum þríhyrning ABC vera gefinn og gerum ráð fyrir að x sé grannhorn hornsins $\angle A$. Þá eru x og $\angle A$ frændhorn svo að $x + \angle A = 180^{circ}$ en þá er $x = 180^{circ} - \angle A$.

Þar sem hornasumma þríhyrnings er 180^{circ} fæst að

$$x = \angle A + \angle B + \angle C - \angle A = \angle B + \angle C.$$

Því er x, grannhornið við A, summa hinna tveggja horna þríhyrningsins.

□

Einshyrndir þríhyrningar, þ.e.a.s. þríhyrningar sem hafa öll horn jafnstór, eru afar gagnleg fyrirbæri þegar kemur að dæmum í rúmfræði. Við táknum að $\triangle ABC$ og $\triangle A'B'C'$ séu einshyrndir (þ.e. að $\angle BAC = \angle B'A'C'$, $\angle ABC = \angle A'B'C'$ og $\angle ACB = \angle A'C'B'$) með $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Lítum á eftirfarandi reglu sem lýsir einum af grundvallareiginleikum einshyrndra þríhyrninga.

Setning 3. *Í einshyrndum þríhyrningum er hlutfall á milli einslægra hliða jafnt.*

Sönnun. Látum þríhyrninga ABC og DEF vera gefna og gerum ráð fyrir að $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Látum E' og F' liggja á AB og AC í þessari röð (g.r.f. að E' liggi innan striksins AB) þannig að $AE' = DE$ og $AF' = DF$. Nú er $\angle F'AE' = \angle FDE$ og því sést af þríhyrningareglu I að $\triangle AE'F' \cong \triangle DEF$.

Þá er

$$\angle F'E'A = \angle FED = \angle CBA$$

og línurnar BC og $E'F'$ því samsíða (skv. fimmtu frumreglu Evklíðs).

Flatarmál þríhyrninga, sem eru á sönu grunnlínu og liggja innan samsíða lína, er jafnt og því er

$$F_{\triangle BCE'} = F_{\triangle BCF'}.$$

Fáum að

$$F_{\triangle AE'C} = F_{\triangle ABC} - F_{\triangle BCE'} = F_{\triangle ABC} - F_{\triangle BCF'} = F_{\triangle AF'B}.$$

Hlutfall flatarmáls þríhyrninga með sömu hæð er hlutfall grunnflata þeirra og því er

$$\frac{F_{\triangle AE'C}}{F_{\triangle ABC}} = \frac{AE'}{AB}$$

og

$$\frac{F_{\triangle AF'B}}{F_{\triangle ABC}} = \frac{AF'}{AC}.$$

Þar sem $F_{\triangle AE'C} = F_{\triangle AF'B}$ er því

$$\frac{AE'}{AB} = \frac{F_{\triangle AE'C}}{F_{\triangle ABC}} = \frac{F_{\triangle AF'B}}{F_{\triangle ABC}} = \frac{AF'}{AC}.$$

Þ.e.

$$\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC}.$$

Þar með er sýnt að hlutfall á milli einslægu hliðanna DE og AB er jafnt hlutfalli hiðanna DF og AC. Eins fæst að það er einnig hlutfall hliðanna EF og BC.

□

Mikilvægi þessarar reglu verður seint ofmetið. Hún segir okkur að hornin þrjú ákvarða lögun þríhyrnings. Andhverfa hennar er einnig sönn, þ.e. ef hlutfall einslægra hliða í tveimur þríhyrningum er jafnt þá eru þríhyrningarnir einshyrndir.

Þetta er gagnlegt þegar sýna á að horn við grunnlínuna BC í jafnarma þríhyrningnum ABC séu jafnstór. Út frá reglu um einshyrnda þríhyrninga er ljóst að $\triangle ABC \sim \triangle ACB$ og þess vegna er $\angle ABC = \angle ACB$.

Hagnýtingar reglunnar um einshyrnda þríhyrninga eru umtalsverðar vegna þess að hún byggir á reglum um flatarmál. Flest sem má sýna með henni er bein afleiðing flatarmálsreikninga en oftast er einfaldara að vísa í einshyrnda þríhyrninga en flatarmál. Með þessu móti kemst rúmfræðingur hjá því að draga hæðir í þríhyrningum og skýringarmyndin verður fyrir vikið hreinlegri.

Lítum á eitt tiltekið dæmi um hagnýtingar þessarar reglu. Það er frægasta setning allrar stærðfræði. Evklíð sannar þessa reglu (I.47) með flatarmálsreikningum svo að sönnunin verður að sumra mati heldur löng og myndin stór en okkur er unnt að nota reglu um einshyrnda þríhyrninga.

Í þessari sönnun beitum við þeirri viðteknu venju að tákna hliðar í $\triangle ABC$ með a, b og c þannig að a er mótlæg horninu A, b er mótlæg horninu B og c mótlæg horninu C.

Setning 4. *(Regla Pýþagórasar) Í rétthyrndum þríhyrningi er summa ferninga skammhliðanna jöfn ferningnum á langhliðina.*

Sönnun. Látum $\triangle ABC$ vera gefinn með $\angle C = 90^{circ}$. Drögum hæðina frá C og látum fótpunkt hennar á AB vera D.

Nú er $\triangle ABC$ rétthyrndur og því er

$$\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle CBD.$$

Látum $x = AD$ og $y = DB$. Þar sem $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ er

$$\frac{a}{c} = \frac{x}{a}$$

og þar sem $\triangle ABC \sim \triangle CBD$ er

$$\frac{b}{c} = \frac{y}{b}.$$

Þá fáum við að $a^2 = xc$ og $b^2 = yc$.

Leggjum þessar jöfnur saman og fáum að

$$a^2 + b^2 = xc + yc = (x + y)c = c^2.$$

Því er summa ferninganna á skammhliðarnar jöfn ferningnum á langhliðina.

□

Vitaskuld eru ýmsar nálganir til að sýna þetta (þó að þær byggi oftast á flatarmálsreikningum beint eða óbeint) og eru verðandi rúmfræðingar eindregið hvattir til að finna sem flestar.

Dæmi:
Sýna á að topphorn séu jafnstór.
Sanna á andhverfu reglu Pýþagórasar.
Sanna á reglu um helmingalínur.
Sanna á sínusreglu fyrir eitt tilvik. Eitt tilvik tekið í texta síðar.
Sanna á þríhyrningareglur II og III.
E-r fleiri.

1.3 Horn í hringjum

Út frá skilgreiningu á stærð horns er tenging þess við hringi ljós. Gráðutal horns við miðju hrings er jafnt gráðutali bogans sem það spannar í honum. Þessi niðurstaða reynist oft gagnleg þegar vinna á með horn í rúmfræði en þó er hún ekki sú sem oftast kemur fyrir, heldur afleidd niðurstaða hennar.

Setning 5. *Ef horn hefur oddpunkt á hring og strengi fyrir arma þá er stærð þess jafnt hálfum boganum sem það spannar.*

(Slíkt horn nefnist ferilhorn í hringnum.)

Sönnun. Sönnun á þessu er skipt upp í þrjú tilvik. Fyrsta tilvikið er sýnt hér og eru hin tvö tilvikin leyst í æfingum.

1. Gerum ráð fyrir að miðja hringsins liggi fyrir innan hornið eins og á mynd.

   Látum O vera miðju hringsins og punktana A, B og C vera á hringnum þannig að B sé oddpunktur hornsins og AB, BC séu armar þess. Látum BO skera hringinn í punktinum D.

   Lítum á þríhyrningana $\triangle AOB$ og $\triangle COB$. Þar sem O er miðja hringsins eru þeir jafnarma með $AO = BO = CO$ og því er $\angle BAO = \angle ABO$ og $\angle OCB = \angle OBC$.

   Við fáum að

$$\begin{aligned}
2\angle ABC &= 2(\angle ABO + \angle OBC) \\
&= \angle ABO + \angle BAO + \angle OBC + \angle OCB \\
&= \angle AOD + \angle DOC \\
&= \angle AOC.
\end{aligned}$$

Og því er $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$.

2. Sambærilega má sýna að reglan gildir ef miðja hringsins liggur fyrir utan hornið eða á öðrum armi hornsins. Þetta fá lesendur að sanna í æfingu.

$\square$

Ferilhorn koma oft fyrir. Ekki síður þegar sýna á að tvö horn séu jafnstór. Við athugum:

Fylgisetning 1. *Tvö ferilhorn, sem spanna sama boga í hring, eru jafnstór.*

Gott er að temja sér að hugsa um jafnstór horn sem horn innan sama boga í hring. Við vitum til dæmis að ef B og C eru gefnir punktar þá liggja þeir punktar A, sem uppfylla $\angle BAC = 90^{circ}$, á hring með miðstreng BC. (Þetta kallast setning Þalesar.)

Athugum næst hvað gerist þegar horn liggur á hring en annar armur þess sker ekki hringinn. Við byrjum á að skilgreina snertil við hring.

Skilgreining 4. *Snertill við hring er lína sem liggur um punkt á hringnum og er hornrétt á geislann sem dreginn er til þess punkts. Punkturinn kallast snertipunktur línunnar við hringinn.*

Við athugum að ef P er snertipunktur snertils við hring með miðju í O og Q er annar skurðpunktur línunnar við hringinn þá er $\triangle POQ$ jafnarma og því er $\angle OPQ = \angle OQP$. En nú er $\angle OPQ = 90^{circ}$ og því getur $\angle OQP$ aðeins verið rétt ef $\angle POQ$ er núll gráður (skv. reglu um hornasummu þríhyrnings). Því sjáum við að P og Q eru nauðsynlega sami punkturinn og við höfum sýnt að snertill snertir hringinn í nákvæmlega einum punkti.

Með svipuðum rökum má sýna að sérhver lína sem sker hringinn í aðeins einum punkti er snertill við hringinn. Þetta er einn af einkennandi eiginlekjum hringja.

Horn sem hefur oddpunkt á hring og hefur annan arminn sem snertil við hringinn kallast strengssnertilhorn við hringinn. Með svipuðum aðferðum og áður má sýna eftirfarandi reglu:

Setning 6. *Strengssnertilhorn er að gráðutali jafnt hálfum boganum sem það spannar.*

Þetta má einnig sjá fyrir sér með því að ímynda sér að ferilhorn $\angle ABC$ sé gefið í hring og athuga að þegar punkturinn B stefnir á punktinn C stefnir strengurinn BC á snertilinn í B. Þessi regla segir okkur að stærð hornsins helst óbreytt þegar markgildið er tekið og B fellur í C.

Þegar horn hefur ekki oddpunkt sinn á hring má samt segja ýmislegt um stærð þess út frá bogunum sem það spannar. Við höfum eftirfarandi reglur.

Setning 7.
1. *Horn sem hefur oddpunkt innan hrings er að gráðutali jafnt hálfri summu boganna sem það og topphorn þess spanna.*
2. *Horn sem hefur oddpunkt utan við hring er að gráðutali jafnt hálfum mismun boganna sem það spannar.*

Þessar fullyrðingar eru sannaðar í æfingum. Við vekjum athygli lesenda á því að til að sýna seinni hluta setningarinnar þarf að athuga þrjú ólík tilvik.

Lítum að lokum á svokölluð snertilhorn.

Skilgreining 5. *Ef báðir armar horns snerta hring kallast það snertilhorn við hringinn.*

Setning 8. *Armar snertilhorns eru jafnlangir frá oddpunkti til snertipunkta.*

Sönnun. Látum $\angle APB$ vera snertilhorn við hring með miðju O og lítum á $\triangle AOP$ og $\triangle BOP$. Við höfum að $\angle OAP = \angle OBP = 90^{circ}$ og einnig að $OA = OB$ því þau eru geislar í sama hring. Þá er hliðin OP sameiginleg í þríhyrningunum og því eru þríhyrningarnir eins samkvæmt þríhyrningareglu I. Sér í lagi er $BP = AP$.

□

Dæmi.

Sýna á reglu um ferilhorn.

Sýna á reglu um strengssnertilhorn.

Sýna á reglur um horn sem hafa ekki oddpunkta á hirng.

Sýna á að gráðutal snertilhorns finnst með því að draga minni bogann, sem það spannar, frá tveimur réttum hornum.