GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ

ELM 368 SAYISAL İŞARET İŞLEME LABORATUVARI

ÖN HAZIRLIK ÇALIŞMASI

VE

ÖDEV-4

1 AMAÇ

- Z-dönüşümü ve özelliklerinin incelenmesi,
- Sistem fonksiyonunun formlarının öğrenilmesi,
- Sonlu uzunluklu ve sonsuz uzunluklu işaretlerin Z-dönüşümlerine aşinalık kazanmak,
- Yakınsama bölgesi (Region of Convergence, ROC) ve sistemlerde etkisini öğrenmek,
- Kutup-sıfır diyagramları, ROC ve DZD sistem özelliklerinin öğrenilmesi,
- *Python* yardımıyla, DZD sistemlerin ve ayrık zamanlı işaretlerin Z-dönüşümü ile analiz edilmesi,
- Ters Z-Dönüşümü ve *Python* ile ters dönüşüm hesaplanması.
- Z-Dönüşümü ve Fourier Dönüşümü arasındaki ilişkinin incelenmesi,
- Kutup-sıfır diyagramından frekans cevabının kestirilmesi.

2 Z-DÖNÜŞÜMÜ

Bu bölümde, Z-dönüşümü ve özellikleri incelenecektir. Z-dönüşümü, doğrusal ayrık zamanlı sistemlerin, polinom ve rasyonel fonksiyonlar aracılığıyla analiz edilmesini sağlamaktadır. Sonlu dürtü cevaplı (*finite impulse response, FIR*) konvolüsyonun, Z-dönüşümü ile polinom çarpmasına eşdeğer olduğu ve polinomlar üzerinde çarpma, bölme, çarpanlarına ayırma gibi işlemlerin Doğrusal Zamanda Değişmez, DZD (*Linear Time Invariant, LTI*) sistemlerin birleştirilmesi veya ayrıştırılması olarak yorumlanabileceği gösterilecektir.

Rasyonel fonksiyonlar olarak karşılaşılan dönüşümler iki polinomun oranı olarak yorumlanır. Eşitlik (1)'de verilen gösterim "*transfer fonksiyonu*" olarak adlandırılmaktadır. Pay polinomunun kökleri "*sıfırlar*", payda polinomunun kökleri ise "*kutuplar*" olarak adlandırılır ve ayrık zamanlı sistemler ve sayısal filtreler bu kutup-sıfırlar aracılığıyla tanımlanıp, analiz edilebilir. Kutup-sıfır formu Eşitlik (2)'de verilmiştir.

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}} \tag{1}$$

$$X(z) = \frac{(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1}) \ldots (1 - z_M z^{-1})}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1}) \ldots (1 - p_N z^{-1})} \tag{2}$$

Sinyaller ve sistemlerin (ayrık zamanlı) gösterimi için üç farklı uzay kullanılmaktadır:

- Zaman uzayı (*n-domain*)
- Frekans uzayı (*ω-domain*)
- *Z*-uzayı (*z-domain*).

Farklı gösterimler kullanmadaki amaç, bir gösterimdeki zor bir analizin, genellikle, bir diğer gösterimde daha kolay olabilmesidir. Bununla, bir gösterimden diğerine geçerek, problemin doğasını anlamayı ve yorumlamayı kolaylaştırmak amaçlanmaktadır.

Ek olarak, sinyallerin oluşturulduğu, işlendiği, filtrelerin yürütüldüğü uzay "zaman uzayı"dır. Frekans uzayı, özellikle, ses işaretlerinin analizinde fiziksel öneme sahiptir. Z-uzayı ise temelde matematiksel analiz ve sentez yapılırken sağladığı kolaylıklar için kullanılmaktadır. Dolayısıyla, herhangi bir ayrık zamanlı işaret/sistem, belirtilen uzaylardan herhangi birinde tüm özellikleri ile tanımlanabilmektedir.

2.1 Sonlu Uzunluklu İşaretlerin Z-Dönüşümü

Sonlu uzunluklu bir $x[n]$ ayrık zamanlı işaretinin Z-dönüşümü,

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N} x[n] z^{-n} \tag{3}$$

ile tanımlıdır. Eşitlik (3)'den görüldüğü üzere, sonlu uzunluklu bir ayrık zamanlı işaretin *z*-dönüşümü *X(z)*, katsayıları işaretin aldığı değerler olan *N*'inci mertebeden bir polinomdur. Yani, $a_k z^{-k}$, *X(z)* işaretinin k'nci mertebe terimi ise, tanım gereği, $a_k = x[k]$ olmaktadır.

<u>Örnek-1</u>: Aşağıda parçalı fonksiyon olarak verilmiş, *N* örnek uzunluklu ayrık zamanlı $x[n]$ işaretini ele alalım.

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n < N-1 \; ve \; |a| < \infty \\ 0\ , & otherwise \end{cases}$$

Verilen işaretin *Z*-dönüşümü şu şekilde hesaplanır:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} (az^{-1})^n = a^0 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \cdots + a^{N-1} z^{-(N-1)}$$

şeklinde, *(N-1)*'inci mertebeden bir polinom olmaktadır. Elde edilen polinom, sonlu sayıda katsayıya sahip olmasından dolayı, **mutlak toplanabilirdir** ve kapalı formda şu şekilde ifade edilebilir[1]:

$$X(z) = \frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - az^{-1}}$$

<u>Örnek-2:</u> Ayrık zamanlı bir $x[n] = [1\ 3\ 3\ 1], 0 \leq n \leq 3$ olarak verilmiş olsun. Yukarıdaki tanım uyarınca, $x[n]$ işaretinin *Z*-dönüşümü olan fonksiyon,

$$X(z) = \sum_{n=0}^{3} x[n] z^{-n} = 1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + z^{-3}$$

[1] Kapalı forma geçiş için ders kitabı Eşitlik (2.55)'e başvurulabilir.

olacaktır. Yukarıdaki ifadeden görüldüğü üzere, sonlu uzunluklu ayrık zamanlı işaretin Z-dönüşümü, katsayıları işaretin aldığı değerlerden oluşan bir polinomdur. Ters Z-dönüşümü alınmak istendiğinde, polinomun katsayılarından faydalanılabilir.

Bu örneklerde, $x[n]$ işareti sonlu uzunluklu ve aldığı değerler de sonlu olduğu için, Z-dönüşümü her zaman yakınsayacaktır, yani her zaman tanımlı olacaktır. Dolayısıyla, yakınsama bölgesi (R*egion of Convergence, ROC*), *z=0* hariç tüm z düzlemidir.

2.2 Sonsuz Uzunluklu İşaretlerin Z-Dönüşümü

Ayrık zamanlı bir $x[n]$ işaretinin Z-dönüşümü

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \mathcal{Z}\{x[n]\} \tag{4}$$

ile tanımlıdır. z, kompleks bir değişken olmak üzere, bu toplam, sonsuz bir toplam veya sonsuz kuvvet serisidir ve $\mathcal{Z}\{*\}$ operatörü ile gösterilebilir.

Eşitlik (4) ile verilen kuvvet serisi, tüm $x[n]$ dizileri için kapalı bir forma **yakınsamamaktadır**. Verilen herhangi bir $x[n]$ dizisi için, z-dönüşümünün yakınsadığı *z* değerlerini veren kümeye *yakınsama bölgesi* (*region of convergence, ROC*) denilmektedir ve ROC, kompleks düzlem üzerinde gösterilmektedir. Verilen ayrık zamanlı işaretin z-dönüşümü, ilgili ROC içinde var olmaktadır. Bir başka deyişle, ROC, $X(z)$ işaretinin sonlu değer aldığı kompleks *z* değerlerinin kümesini göstermektedir ve *Z*-dönüşümünü göstermek için **mutlaka** belirtilmelidir. Fourier dönüşümü yakınsamadığında dahi, *Z*-dönüşümü yakınsayabilir[2].

Örnek-3: $x[n] = a^n u[n]$ ayrık zamanlı işareti verilsin. Birim basamak fonksiyonu $u[n]$'den ötürü, $x[n]$ işaretinin tanım aralığı $0 \le n \le \infty$ olmaktadır. Dolayısıyla, verilen işaret sonsuz uzunluklu bir işarettir. Eşitlik (4) aracılığıyla z-dönüşümü alındığında,

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

kuvvet serisi (geometrik seri) karşımıza çıkmaktadır. Yakınsama için,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |az^{-1}|^n < \infty$$

eşitsizliğinin sağlanması (mutlak toplanabilirlik) gerekmektedir. Bu eşitsizlik, $|az^{-1}| < 1$ halinde, alternatif olarak, $|z| > |a|$ halinde sağlanmaktadır. Bu durumda, ders kitabındaki, eşitlik (2.55), $N_1 = 0, N_2 = \infty$ için uygulandığında,

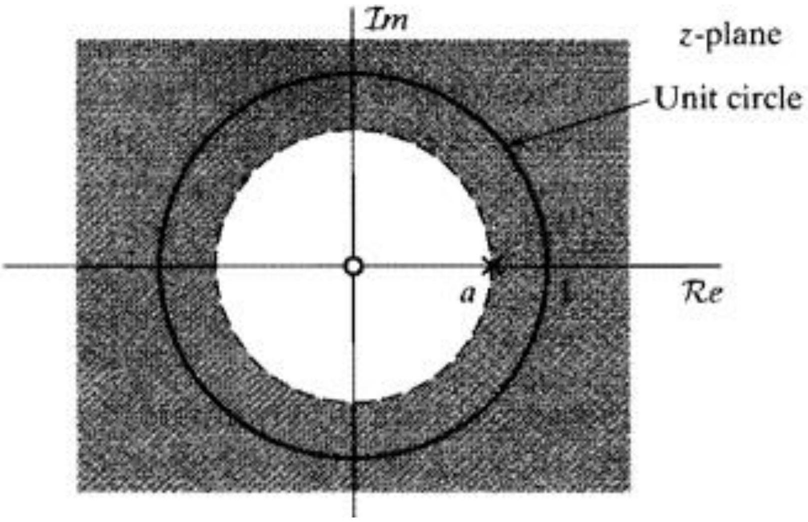
[2] Z-dönüşümü ve Fourier dönüşümü arasındaki ilişki için ders kitabında Bölüm 3.1'e başvurulabilir.

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} (az^{-1})^n = \frac{\overbrace{(az^{-1})^{N_1}}^{p_1} - \overbrace{(az^{-1})^{N_2}}^{p_2}}{1 - az^{-1}}, \qquad ROC: |z| > |a|$$

ifadesi elde edilir. $|az^{-1}| < 1$ için, $p_1 = 1$ ve $p_2 = 0$ olacaktır. Dolayısıyla, ayrık zamanlı işaretin Z-dönüşümü

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \qquad ROC: |z| > |a|$$

olacaktır.



Şekil 1 *X(z)* işaretine ait ROC

Şekil 1'den görüldüğü üzere, verilen işaretin ROC'u, kompleks düzlemde, a yarıçaplı çemberden dışarıda (büyük) kalan bölgedir. Bir başka deyişle, "*X(z)* sağ yanlıdır". Sağ yanlı işaretler, N_1 anında başlar ve **yalnızca** $0 \leq N_1 \leq n < \infty$ aralığında **sıfırdan farklı** değer alırlar.

Benzer şekilde, $-\infty \leq n \leq -1$ aralığında tanımlı işaretler ise "sol yanlı" işaretlerdir.

Örnek-4: Ayrık zamanlı ve sol yanlı $x[n]$ işareti,

$$x[n] = -a^n u[-n-1] = \begin{cases} -a^n, & n \leq -1 \\ 0, & n > -1 \end{cases}$$

verilmiş olsun. Bu işaretin Z-dönüşümü,

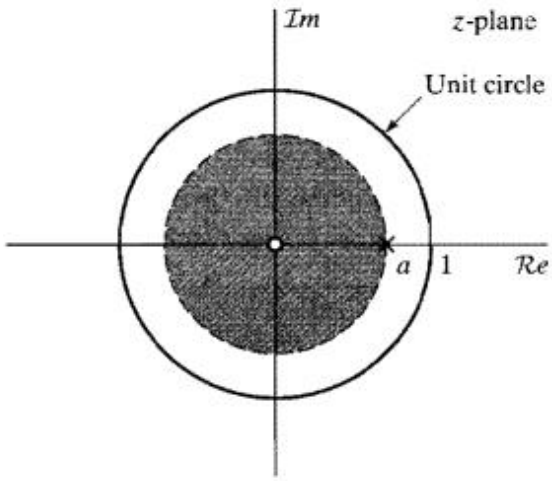
$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[-n-1] z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1} z)^n$$

olarak hesaplanmaktadır. $|a^{-1}z| < 1$ veya $|z| < |a|$ şartı sağlandığında, elde edilen seri toplamı, aşağıda kapalı formda verilen ifadeye yakınsamaktadır.

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1}z} = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \qquad ROC: |z| < |a|$$

Örnek-3 ve Örnek-4'te kapalı formda elde edilen $X(z)$ işaretlerine bakıldığında, birebir aynı oldukları görülmektedir. Burada şu sonuç çıkarılmalıdır: zaman uzayında birbirinden farklı iki ayrık zamanlı işaret, Z-uzayında aynı fonksiyona sahip olabilmektedir. Bu işaretleri Z-uzayında birbirinden ayıran özellik ise ROC'tur. ROC, kompleks düzlemde *"kutup-sıfır diyagramı"* adı verilen grafiklerde gösterilir ve bir işareti/sistemi tam olarak tanımlamak için gereklidir.



Şekil 2 *X(z)* işaretine ait ROC

Verilen örneklerden çıkarılacak bir diğer sonuç, üstel (ve sonsuz uzunluklu) işaretlerin Z-dönüşümleri rasyonel fonksiyonlar olmaktadır. Ek olarak, reel veya kompleks üstellerin doğrusal kombinasyonu olarak ifade edilen her $x[n]$ işareti için, $X(z)$ rasyonel bir fonksiyon olacaktır[3].

Eşitlik (4) ile gösterilen Z-dönüşümü operasyonu, aslında, katsayıları $x[n]$ ile verilen bir doğrusal kombinasyondur. Yani, Z-dönüşümü *"doğrusal"* bir operatördür. Dolayısıyla, eğer $x[n]$ iki terimin toplamından oluşuyorsa, $X(z)$ bu terimlerin Z-dönüşümlerinin toplamı olarak kolayca hesaplanabilir. ROC ise, her iki terimin yakınsadığı ortak bölge, yani ROC'ların kesişim bölgesi olarak tanımlı olacaktır. Bu anlatım, matematiksel olarak şu şekilde ifade edilmektedir:

$$x[n] = Ax_1[n] + Bx_2[n],$$

$$x_1[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X_1(z), \qquad ROC: R_1,$$

[3] Ders kitabı, Example 3.3'e başvurunuz.

$$x_2[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X_2(z), \qquad ROC: R_2$$

olsun. Bu durumda,

$$X(z) = AX_1(z) + BX_2(z), \qquad ROC: R_1 \cap R_2$$

olacaktır[4].

2.3 ROC Özellikleri

Verilen örnekler ile ROC özelliklerinin işaretin doğasına bağlı olduğu önerilmektedir. Bu başlıkta, ROC özellikleri özetlenecektir.

1. ROC, sol yanlı $|z| \leq R_L \leq \infty$, sağ yanlı $0 \leq R_R \leq |z|$ veya çift yanlı $0 \leq R_R \leq |z| \leq R_L \leq \infty$ olabilir.
2. $x[n]$ işaretinin Fourier dönüşümü, ancak ve ancak ROC **birim çemberi içeriyorsa** yakınsar.
3. ROC içinde **kutup** bulunamaz.
4. Eğer $x[n]$ sonlu uzunluklu bir işaretse, ROC, $z = 0$ veya $z = \infty$ hariç **tüm z düzlemidir**.
5. Birden fazla kutup bulunması durumunda;
   - Sağ yanlı bir işaret için ROC **en dıştaki kutuptan dışarı** doğrudur. Ayrıca, sağ yanlı bir işaret (veya sistem) **nedensel** bir işarettir.
   - Sol yanlı bir işaret için ROC **en içteki kutuptan içeri** doğrudur. Ayrıca, sol yanlı bir işaret (veya sistem) **nedensel olmayan** bir işarettir.
6. Çift yanlı bir işaret, zaman uzayında sonsuz uzunluklu bir işarettir ve ne sağ yanlı ne de sol yanlıdır. Çift yanlı bir işaret için ROC, z düzleminde, iki kutup arasında bir “halka” şekli alır ve kutup içeremez.
7. ROC bağlı bir bölge olmalıdır, parçalı olamaz.

1 numaralı özellik, ROC’un genel şeklini özetlemektedir. Özellik 2, Eşitlik (3)’ün $|z| = 1$ (birim çember) için Fourier dönüşümüne indirgenmesinin bir sonucudur ve sistemin kararlı (stable) olduğunu belirtir. Özellik 3, $X(z)$’nin bir kutup noktasında aldığı değerin “sonsuz” (yani, paydada bulunan polinomun kökü) olmasından ötürü yakınsamayacağını işaret etmektedir. Bir başka deyişle, ROC, $X(z)$’nin sonlu değer aldığı bölge olarak tanımlandığı için, bu bölge içinde $X(z)$’yi sonsuz yapan bir nokta bulunamaz.

Özellik 4, sonlu uzunluklu bir dizinin Z-dönüşümünün, sonlu sayıda terimi olan bir kuvvet serisi olmasından yola çıkmaktadır.

[4] Example 3.5

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]z^{-n} \tag{5}$$

Yukarıdaki ifadede, $N_2 > 0$ olduğunda $z = 0$ hariç ve/veya $N_1 < 0$ olduğunda $z = \infty$ noktası hariç tüm z-düzlemi için $|X(z)| < \infty$ sağlanır. Dolayısıyla ROC tüm z-düzlemidir.

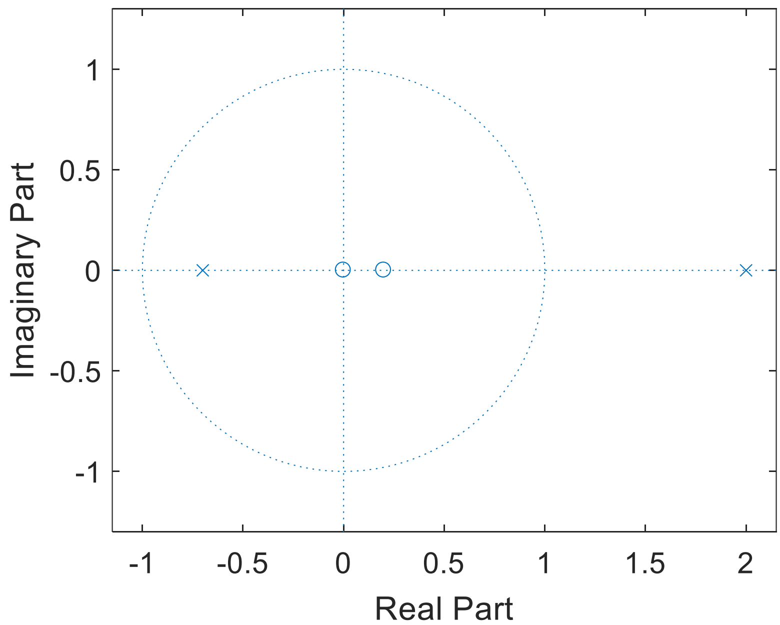
Özellik 5, Özellik 1'in özel bir durumudur. Özellik 7, çift yanlı işaretler için dikkat edilmesi gereken bir özelliktir ve Özellik 6'yı ima etmektedir. Not etmek gerekirse, eğer çift yanlı işaretler için sol yanlı parçanın ROC'u ve sağ yanlı parçanın ROC'u kesişmiyorsa, bu çift yanlı işaretin Z-dönüşümü yoktur.

2.4 Kutup-Sıfır Diyagramı, ROC ve DZD Sistem Özellikleri

Ayrık-zamanlı işaret işleme kapsamında, amacımız, ayrık zamanlı işaretlerin, sistemlerin, filtrelerin analizini ve/veya sentezini yapmaktır. Bu sistemler, işaretler temelde zaman uzayında ifade edilmekte ve uygulanmaktadır. Fakat, analiz ve problemi anlamayı kolaylaştırmak adına, farklı matematiksel araçlara başvurulmaktadır. Bu araçlardan biri de Z-dönüşümü ve kutup-sıfır diyagramlarıdır.

Dürtü cevabı $h[n]$ olan bir DZD sistem olsun. $h[n]$'nin Z-dönüşümü $H(z)$, DZD sistemin *sistem fonksiyonu* olarak adlandırılır. $h[n]$ sistemi analiz edilirken, zaman uzayında ilk bakışta görülemeyen özellikler, $H(z)$'nin kutup-sıfır diyagramı ve ROC üzerinden daha rahat belirlenebilir.

<u>Örnek-5:</u> Aşağıda kutup-sıfır diyagramı verilen sistemi ele alalım. Kutuplar "*x*", sıfırlar ise "*o*" ile işaretlenmektedir.



Şekil 3 $\boldsymbol{H(z)}$'nin kutup-sıfır diyagramı

Şekil 3'te kutup-sıfır diyagramı verilen sistem, $z = -0.7$ ve $z = 2$'de olmak üzere iki kutba sahiptir. Bölüm 4'te verilen ROC özelliklerine göre, verilen sistemin ROC'u üç farklı bölge olabilir:

- $|z| < 0.7$
- $0.7 < |z| < 2$
- $|z| > 2$

Ancak, sadece kutup-sıfır diyagramı verildiğinde, sistemin zaman uzayı ifadesini bilmek **mümkün değildir**. Bunun yanında, eğer sistemin "kararlı" olduğu (veya eşdeğer olarak $h[n]$ mutlak toplanabilir ya da Fourier dönüşümü vardır) bilgisi de verilmiş olsun. Bu bilgi, ROC'un birim çemberi içerdiğini ima etmektedir. Dolayısıyla, ROC, $0.7 < |z| < 2$ arasındaki halka şeklindeki bölge olmalıdır (Özellik 2 ve Özellik 6). Böylece, $h[n]$ sisteminin çift yanlı ve bu yüzden nedensel olmadığı sonucuna varılmaktadır.

Eğer, **Şekil 3**'te verilen sistemin nedensel olduğu bilgisi verilmiş ise, Özellik 5 uyarınca, $h[n]$ sistemi sağ yanlı olacak ve ROC, $|z| > 2$ bölgesi olacaktır. Bu durumda, ROC birim çemberi içermeyeceği için, sistem kararlı olmayacaktır. Ek olarak, verilen bu kutup-sıfır konfigürasyonu için, sistemin hem kararlı hem de nedensel olabileceği bir ROC bulunamaz.

Benzer şekilde, kutup-sıfır diyagramı ve ROC'u verilen DZD bir sistemin özellikleri (kararlılık, nedensellik, Fourier dönüşümünün var olup olmadığı gibi) belirlenebilir.

Bu örnekte görüldüğü üzere, bir sistemin kutup konumlarının sistem özellikleri ile doğrudan ilgisi bulunmaktadır ve sistemin sıfırlarıyla birlikte sistemi karakterize ederken oldukça önemlidir.

3 TERS Z-DÖNÜŞÜMÜ

Önceki bölümde de bahsedildiği üzere, Z-dönüşümü DZD sistemlerin ve ayrık zamanlı işaretlerin analizi için kullanışlı bir araçtır ve bazı durumlarda zaman uzayında analizden daha kolay olmaktadır. Ancak, birçok uygulamada, analiz sonrasında nihayetinde yeniden zaman uzayı işaretinin elde edilmesi beklenir. Bu yüzden, Z-uzayı ifadesi verilen işaret ve sistemlerin ters Z-dönüşümü ile tekrar zaman uzayı ifadesine dönüştürülmelidir. Bu işlem matematiksel olarak Cauchy integral teoremi[5] ile gerçekleştirilir. Ancak, ders ve laboratuvar kapsamında, bu ters dönüşüm integrali yerine, üç farklı alternatif ile bu işlem gerçekleştirilecektir. **Ancak, unutulmamalıdır ki, ters Z-dönüşümünün hesaplanabilmesi için, mutlaka ROC bilinmelidir.** Bu alternatifler:

- Gözlem yöntemi (inspection method)
- Basit kesirlere ayırma (partial fraction expansion)
- Ve kuvvet serisine açma (power series expansion).

[5] Bkz: Oppenheim 3rd edition, s.116 Eşitlik (3.36).

3.1 Gözlem yöntemi

Bu yöntemde, aşina olunan dönüşüm çiftlerinden yararlanılarak, verilen bir Z-dönüşümü ifadesinin ters Z-dönüşümü bulunur. Sıklıkla karşılaşılan Z-dönüşüm çiftleri[6] ders kitabında verilmiştir. Örneğin, sonsuz uzunluklu bir işaret için Z-dönüşümü çifti Eşitlik (6)'daki gibidir.

$$a^n u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1-az^{-1}}, \qquad |z| > |a| \tag{6}$$

Buna göre, Eşitlik (6)'daki gibi kesir halinde verilmiş bir Z-dönüşümü ifadesinin (ROC ile birlikte), ters dönüşüm ifadesinin sağ yanlı (nedensel) ve sonsuz uzunluklu bir işaret olduğunu bilebiliriz. Bu yöntem Tablo 3.1'deki tüm çiftler için uygulanabilir.

Ancak, karşılaşılan tüm işaretler veya sistemler, Tablo 3.1'de verilen çiftler formunda olmayabilir. Bu durumda, Z-dönüşümü özellikleri[7] kullanılarak, bilinen dönüşüm çiftleri üzerinde bu özellikler uygulanarak ters dönüşüm işlemi gerçekleştirilir.

Örnek-6: (Example 3.16) $X(z) = \log(1 + az^{-1}), \quad |z| > |a|$ işareti verilmiş olsun. Z-dönüşümü verilen işaret, gözlem yöntemi ile doğrudan tablo yardımıyla ters dönüşümü hesaplanabilecek bir işaret değildir. Çünkü, Tablo 3.2'ye bakılacak olursa, verilen dönüşüm çiftleri **rasyonel kesir** formundadır. Verilen bu işaret ise rasyonel olmayan logaritmik bir işarettir. Bu durumda, Z-dönüşümü özelliklerinden yararlanılarak verilen bu işaretin ters dönüşümü yine gözlem metoduyla hesaplanabilir.

Burada dikkat edilecek olursa, verilen logaritmik ifadenin türevi alındığında (bkz: logaritmik ifadelerin türevi), rasyonel bir ifade elde edilecek olmasıdır:

$$\frac{dX(z)}{dz} = \frac{-az^{-2}}{1+az^{-1}}. \tag{7}$$

Burada, Tablo 3.2'de verilen türevleme özelliğini hatırlarsak:

$$nx[n] \overset{z}{\leftrightarrow} -z\frac{dX(z)}{dz}, \quad ROC: R_x$$

Şimdi, Eşitlik (7)'nin her iki tarafını $-z$ ile çarptığımızda, ters dönüşümünü bildiğimiz bir forma ulaşmış oluruz. Buna göre;

$$-z\frac{dX(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{1+az^{-1}}, \qquad |z| > |a| \tag{8}$$

elde ederiz. Eşitlik (8)'in sağ yanı, artık ters dönüşümünü bildiğimiz bir forma dönüştü. Burada, artık Tablo 3.1 (ve yanında lineerlik ve zamanda kayma özellikleri yardımıyla) kullanılarak Eşitlik (8)'in ters dönüşümü şu şekilde hesaplanabilir:

[6] Bkz: Oppenheim 3rd edition, s.110 Tablo 3.1.
[7] Bkz. Oppenheim 3rd edition, s. 132, Tablo 3.2

$$-z\frac{dX(z)}{dz}=\frac{az^{-1}}{1+az^{-1}} \overset{z^{-1}}{\longleftrightarrow} nx[n]=a(-a)^{n-1}u[n-1].$$

NOT: elde edilen zaman uzayı ifadesi $nx[n]$'dir. Ancak soruda istenen $x[n]$ işaretidir. Dolayısıyla, elde edilen ifadeyi n'ye bölerek istenen zaman uzayı ifadesini elde edebiliriz:

$$x[n]=\frac{a}{n}(-a)^{n-1}u[n-1].$$

3.2 Basit kesirlere ayırma

Bu yöntemde, Z-dönüşümü ifadesi verilen bir işaret veya sistem fonksiyonunun, Eşitlik (6) ve benzeri basit rasyonel veya polinom ifadelere ayrıştırılması amaçlanmaktadır. Bu işlemin ardından, tekrar gözlem yöntemi kullanılarak Tablo 3.1 yardımıyla daha karmaşık ifadelerin ters dönüşümleri hesaplanabilir[8]. Bu işlem, kabaca, polinom kökü bulma ve çarpım durumundaki pay ve paydayı toplam formunda yazma olarak özetlenebilir.

Laboratuvar kapsamında, bu işlem daha çok, *python* yardımıyla kolayca gerçekleştirilebilmektedir. El yordamıyla çözümü verilen *Example 3.9*'un, aşağıda *python* ile nasıl çözüleceğini gösteren örnek kod parçası ve *python* fonksiyonları mevcuttur:

<u>Örnek-7:</u> (Example 3.9) $X(z)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$, $|z|>\frac{1}{2}$ ifadesini zaman uzayında hesaplayınız. Bunun için, verilen $X(z)$ ifadesinin basit kesirlere ayrılması, yani $\frac{A}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}+\frac{B}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$ formuna dönüştürülmesi gerekmektedir. Bu dönüştürme işlemi için örnek *python* kod parçası ekte verilmiştir: ***OnCalismaOrnek7.ipynb***

3.3 Kuvvet serisine açma

Ters Z-dönüşümü hesaplanırken üçüncü alternatif, uzun bölme (long division) yardımıyla kuvvet serisine açma işlemidir. Z-dönüşümünün tanımı, Eşitlik (4), hatırlarsak aslında bir kuvvet serisi formunda olduğunu görürüz[9]. Dolayısıyla, eğer uygun z^n terimlerinin katsayılarını elde edebilirsek, $x[n], n=-\infty,\dots,\infty$ işaretinin ilgili değerini elde etmiş oluruz. Bunun için, $X(z)$ ifadesini önce transfer fonksiyonu formunda elde etmeliyiz (Eşitlik (1)). Ardından, uzun bölme veya polinom bölmesi işlemi **istenen terim sayısı kadar** uygulanarak ters dönüşüm bir **kuvvet serisi formunda** elde edilir. Yani, bu yöntemle ters dönüşüm hesaplandığında karşımıza **sonsuz uzunluklu bir seri** çıkacaktır. Dolayısıyla, bu seriyi belirli bir terim sayısına kadar hesaplamak yeterli olacaktır.

Bir önceki örnekte olduğu gibi, burada da el yordamıyla hesaplamadan ziyade, bilgisayar üzerinde *Python* yardımıyla nümerik olarak bu işlemin nasıl gerçekleştirileceğini inceleyeceğiz.

---

[8] Bkz: Oppenheim 3rd Edition, s.118, Example 3.9

[9] Eştlik (4) aslında, katsayıları $x[n]$ olan bir Laurent serisidir, bkz: Oppenheim 3rd Edition, s.122 Eq. (3.51)

Örnek-8: $X(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}, \quad |z| > \frac{1}{2}$ ifadesi verilmiş olsun. Bu ifadenin ters Z-dönüşümünü *Python* ile hesaplamak için örnek kod parçası ekte verilmiştir: ***OnCalismaOrnek8.ipynb***

Örnek-7 ve Örnek-8'de aynı işaretin ters dönüşümünü iki farklı yöntem ile *Python* üzerinde hesapladık. Şimdi, bu iki yöntemin sonuçlarını karşılaştırarak iki farklı formda elde ettiğimiz ayrık zamanlı işaretlerin aynı olup olmadığını kontrol edeceğiz. Aynı işaret hesaplandığı için, sonuçların aynı olması beklenmektedir. Bkz: ***OnCalismaOrnek9.ipynb***

Örnek-10: Bu örnekte ise Z dönüşümü verilen bir sistemin frekans cevabının çizilmesi ve ardından verilen bir giriş işaretinin bu sisteme nasıl uygulanacağı *python* üzerinde incelenecektir.

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{\left(1 - j\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + j\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

Sistemi verilmiş olsun. Sistemin frekans cevabını $z \to e^{j\omega}$ dönüşümü yaparak el ile yazınız. Aşağıda verilen giriş işareti, bu sisteme uygulanacaktır.

$$x[n] = 2cos(0.2\pi n) + sin(0.9\pi n)$$

Bunun için şu prosedürü izleyiniz:

1. Giriş işaretindeki her bir terimin frekansını belirleyiniz.
2. Sistemin frekans cevabını, belirlediğiniz frekans değerleri için hesaplayınız (**genlik** ve **faz** değerlerini).
3. Özfonksiyon özelliğini kullanarak, her bir terimin çıkıştaki karşılığını yazınız.
4. Süperpozisyon ilkesini kullanarak, tüm çıkışı yazınız.
5. Bulduğunuz çıkış işareti, ***OnCalismaOrnek10.ipynb*** dosyasında belirtildiği üzere, *python*'da sonuç doğrulama amacıyla kullanılacaktır. Örneğin devamında ***OnCalismaOrnek10.ipynb*** takip edilecektir.

Örnek-11: Bu örnek, verilen *zplane()* komutunun kutup-sıfır diyagramı çizdirmek için nasıl kullanılacağını göstermektedir. Ayrıca, z-dönüşümü ve Fourier dönüşümü arasındaki ilişki ve geçişi göstermektedir. Bkz: ***OnCalismaOrnek11.ipynb***.

4 ÖDEV-4:

1) (**35 PUAN**) Aşağıda bir DZD sistem fark denklemi olarak verilmiştir. Buna göre, aşağıdaki soruları cevaplayınız:

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] - 4y[n-2] + 2y[n-3] + x[n] + \frac{2}{3}x[n-1] + \frac{1}{9}x[n-2]$$

a) Sistem fonksiyonu $H\ (z)'yi$ el ile hesaplayınız.

b) Sistemin kutup-sıfır diyagramını Python ile çiziniz.

c) ROC bölgesini şu iki durum için ayrı ayrı belirleyiniz:

c.1. eğer $h[n] = 0,\ n < 0$.

c.2. eğer sistemin Fourier dönüşümü varsa.

d) Sistemin dürtü cevabını (c.1) durumu için bulunuz. Dürtü cevabını $n = 0,1,2,\ldots,30$ için çizdiriniz ve sistemin kararlılığını yorumlayınız. (Bahsi geçen ters dönüşüm yöntemlerinden herhangi birini kullanabilirsiniz.)

e) Bu sistem aynı anda hem kararlı hem de nedensel olabilir mi? Açıklayınız. Eğer cevabınız hayır ise, bu sistemi hem kararlı hem de nedensel yapabilmek için nasıl bir işlem uygulanmalıdır, matematiksel olarak gösteriniz.

f) Bir önceki (e) şıkkında bulduğunuz sistemin kutup-sıfır diyagramı ve dürtü cevabını bulunuz ve çizdiriniz (***OnCalismaOrnek10.ipynb***'daki *lfilter()* fonksiyonunu kullanıp, giriş işaretini de dürtü olarak tanımlayabilirsiniz). Sistemin kutup konumlarının dürtü cevabı üzerindeki etkisini gözleyiniz. Kutupların birim çembere göre konumu, reel ve imajiner eksenlerde bulunduğu bölge vb. göz önünde bulundurarak gözlemlerinizi raporlayınız.

2) (**20 PUAN**) Nedensel bir DZD sistemin sistem fonksiyonu $H(z) = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}$ olarak verilmektedir. Dürtü cevabını önce el ile bulunuz. Daha sonra ise Örnek 7 ve Örnek 8'de gösterildiği gibi iki farklı yöntemle bu sistemin dürtü cevabını bulunuz ve çizdiriniz ve Örnek 9'da gösterildiği gibi sonuçları karşılaştırınız. Elde ettiğiniz bu sonuçlar birbiri ile örtüşüyor mu? El ile bulduğunuz sonuç ile de ayrıca karşılaştırınız.

3) (**20 PUAN**) İkinci soruyu $H(z) = \frac{1+3z^{-1}+\frac{11}{6}z^{-2}+\frac{1}{3}z^{-3}}{1+\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}$ için tekrar ediniz.

4) (**25 PUAN**) İkinci soruyu $H(z) = \frac{10(1-\frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1})}{(1-e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1-e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1-0.5z^{-1})}$ için tekrar ediniz.

5) (**0 PUAN**) 2,3 ve 4 numaralı sistemlere Örnek-10'daki giriş işareti uygulandığında sistemin çıkışında elde edilecek işareti çizdiriniz. Bu sorunun puan değeri yoktur; teslim edilmesi zorunlu değildir.

5 TESLİM ŞEKLİ ve ZAMANI

Bu dokümanda ve/veya ekinde verilen kodları kendiniz bir Jupyter Notebook'ta yazarak sonuçları gözlemleyiniz. Ödev-4 bölümünde verilen soruları çözmek için Python kodu yazınız. Jupyter Notebook'ta yaptığınız çalışmaların tamamını tek bir dosya olarak **ÖDEV4_OgrenciNo_Ad_Soyad.ipynb** ismiyle kaydedip Ders Web Sayfası'na yükleyiniz. Laboratuvar ön çalışmaları (ev ödevi), haftaya Perşembe günü sabah 05:00'e kadar sisteme yüklenmelidir. Ön hazırlık çalışmasını yapmamış (sisteme ön çalışmasını yüklememiş) öğrenciler aynı yapılacak laboratuvar çalışmasına giremez. Ekte, örnek bir ödev çözümü şablonu verilmektedir (bknz: **ODEV4_101024099_ Ayse_Sen.ipynb**). Jupyter Notebook'ta yapacağınız çözümler bu şablona göre hazırlanmalıdır.