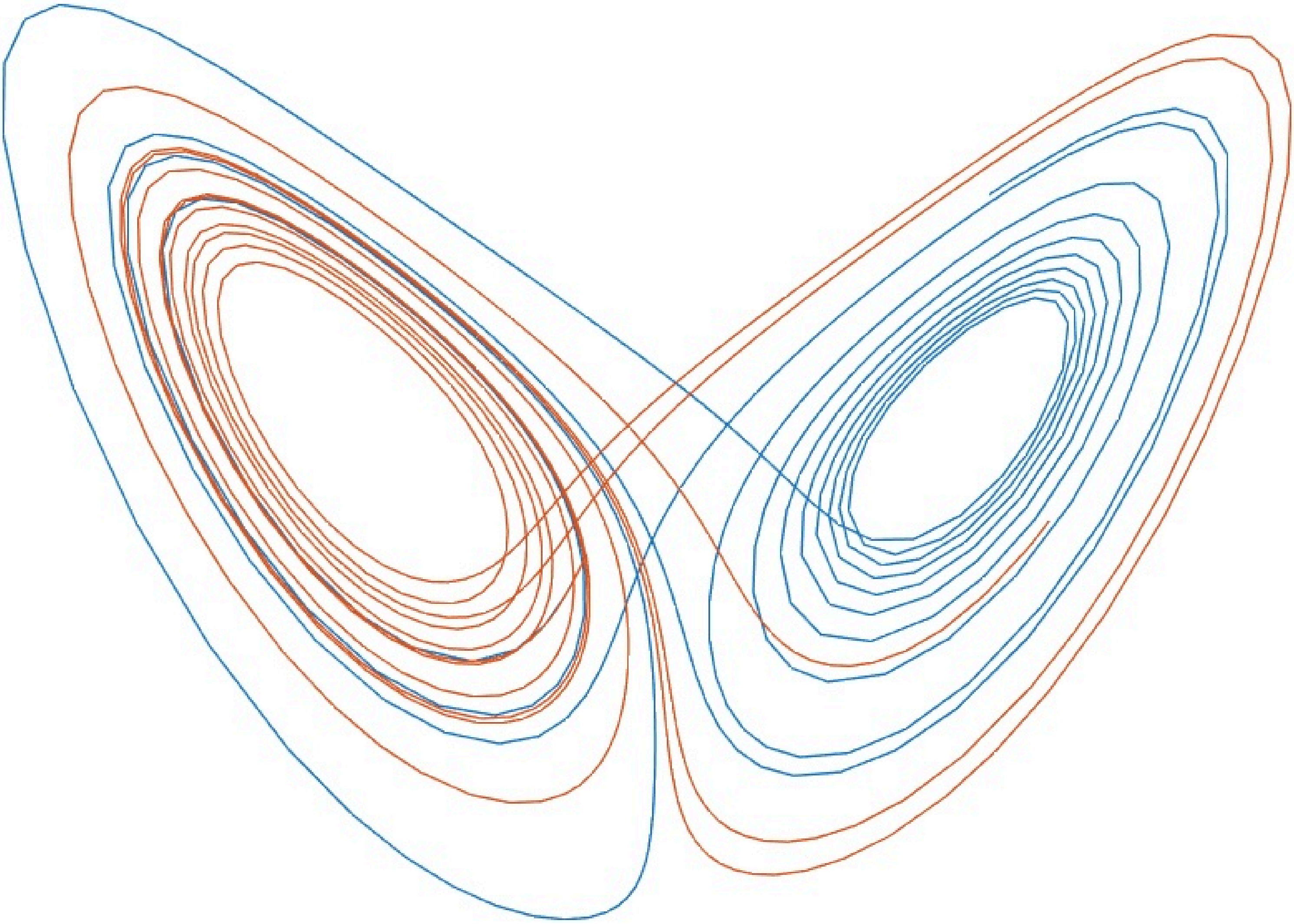

常微分方程

作者：王子毅

组织：扬州大学数学科学学院

时间：August 14, 2024

版本：0.0

Bio:Information

求知若饥，虚心若愚

目录

前言

第 1 章 基本概念

内容提要

- 常微分方程的概念
- 解的基本概念
- 积分曲线与方向场

1.1 常微分方程的概念

定义 1.1 (PDE 和 ODE)

含有未知函数的导数 (或偏导) 的方程称为微分方程. 若未知函数为一元函数, 则方程为常微分方程 (ODE); 若未知函数为多元函数, 则方程为偏微分方程 (PDE).

定义 1.2 (微分方程的阶)

方程中出现的未知元对自变量最高阶导数的阶数称为该微分方程的阶.

n 阶常微分方程的一般式为

$$F(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

其中 F 为已知函数且含有 $y^{(n)}$.

定义 1.3 (微分方程的线性)

若方程1.1中 F 是关于 $y, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}$ 的一次有理整式, 此时的方程1.1称为线性方程, 否则称为非线性方程.

定义 1.4 (标准形式)

n 阶线性方程的标准式为

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + a_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \ldots + a_n(x)y = f(x)$$

其中 $a_i(x), f(x)(i = 1, 2, \ldots, n)$ 为已知函数.

1.2 解的基本概念

定义 1.5 (解与隐式解)

若 $y = \varphi(x)$ 满足 $F\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\right) = 0$, 则称 $y = \varphi(x)$ 为方程 1.1 的解.

若关系式 $\Phi(x, y) = 0$ 所确定的隐函数 $y = \varphi(x)$ 为方程1.1 的解, 则称 $\Phi(x, y) = 0$ 为方程1.1 的隐式解.

例题 1.1 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 为方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{x}{y}$ 的显式解, $x^2 + y^2 = 1$ 为该方程的隐式解.

定义 1.6 (通解)

称方程 1.1含有 n 个独立的任意常数 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 的解 $y = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ 为方程 1.1的通解.
所谓独立, 即指

$$\frac{\partial\left(\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n-1)}\right)}{\partial\left(C_1, C_2, \ldots, C_n\right)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial C_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi}{\partial C_n} \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial C_1} & \frac{\partial \varphi'}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi'}{\partial C_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi^{(n-1)}}{\partial C_1} & \frac{\partial \varphi^{(n-1)}}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi^{(n-1)}}{\partial C_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

♣

定义 1.7 (特解)

方程1.1 满足特定条件的解称为特解. 方程1.1的特定条件通常指初始条件, 即

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0^{(1)} \quad \ldots \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

求方程满足初始条件的问题称为**初值问题**或 **Cauchy** 问题.

♣

练习 1.1 验证 $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ 为方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的通解, 并求满足 $y(0) = 0, y'(0) = 1$ 的特解. 这里 c_1, c_2 为任意常数.

解 $y' = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x}, \quad y'' = c_1 e^x + 4c_2 e^{2x}$, 则 $y'' - 3y' + 2y = 0$. 从而 $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ 为方程的解.

又因为

$$\frac{\partial(y, y')}{\partial(c_1, c_2)} = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = e^{3x} \neq 0$$

从而 $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ 为通解.

又有初始条件得 $\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + 2c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 1 \end{cases}$ 则所求特解为 $y = -e^x + e^{2x}$.

1.3 积分曲线与方向场

定义 1.8 (积分曲线)

一阶微分方程 $y' = f(x, y)$ 的解 $y = \varphi(x)$ 在 xoy 平面上所表示的曲线称为该方程的积分曲线.
通解 $y = \varphi(x, c)$ 表示一族积分曲线, 满足条件 $y(x_0) = x_0$ 的特解 $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ 为过点 (x_0, y_0) 的积分曲线.

♣

定义 1.9 (方向场)

用 $f(x, y)$ 在 oxy 平面某区域 D 上定义过各点的小线段的斜率方向, 这样的区域 D 称为方程 $y' = f(x, y)$ 所定义的方向场. 方向场中方向相同的曲线称为等斜线或等倾斜线.

♣

第 2 章 一阶微分方程的初等解法

内容提要

- 恰当方程

2.1 恰当方程

定义 2.1 (恰当方程)

2.2 可分离变量方程

2.2.1 可直接分离变量

定义 2.2 (可分离变量方程)

若常微分方程具有如下形式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y) \tag{2.1}$$

则称之为可分离变量的常微分方程.

命题 2.1 (可分离变量方程的解)

1. 若 $g(y) \neq 0$, 则 $\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x$, 两边积分可得
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x + C$$
称之为方程2.1的隐式通解或者通积分
2. 若 $g(y) = 0, y = y_0$ 为方程2.1的解.

练习 2.1 求解初值问题

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 \cos x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

解 分离变量:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \cos x \mathrm{d}x \quad (y \neq 0)$$

两边积分:

$$\int y^{-2}\mathrm{d}y = \int \cos x \mathrm{d}x + C$$

通解为:

$$y = -\frac{1}{\sin x + C}$$

由初始条件 $y(0)=1$ 代入通解可得 $C=-1$,
从而得特解为:

$$y=\frac{1}{1-\sin x}$$

练习 2.2 求解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1+y^2}{xy+x^3y}$.

解 分离变量:

$$\frac{y\mathrm{d}y}{1+y^2}=\frac{\mathrm{d}x}{x\left(1+x^2\right)}$$

两边积分:

$$\int\frac{y\mathrm{d}y}{1+y^2}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x+C$$

通解:

$$\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)=(Cx)^2\quad(\text{其中 } C \text{ 为任意常数})$$

2.2.2 齐次方程

命题 2.2 (可化为分离变量方程的齐次方程)

齐次方程可化为形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g\left(\dfrac{y}{x}\right)$

解法: 令 $u=\dfrac{y}{x}\Longrightarrow\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{g(u)-u}{x}$(可分离变量)

练习 2.3 解方程:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x-y}{x+y}$$

解 原方程改写为:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$$

令 $u=\dfrac{y}{x}$ 该方程化为

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1-2u-u^2}{1+u}$$

分离变量积分得:

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1-2u-u^2\right|=\ln|x|+\ln|C|$$

代回原变量得原方程的通解为: $x^2-2xy-y^2=C$, 其中 C 为任意常数.

练习 2.4 练习: 求解下列方程

1. $\sec^2x\tan y\mathrm{d}x+\sec^2y\tan x\mathrm{d}y=0$
2. $y'=x^2+4y^2+4x^2y^2+1$

练习 2.5 求解方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{(x+y)^2+1}$

2.2.3 形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(ax+by+c)$

命题 2.3

若微分方程形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(ax+by+c)\quad(a,b,c$ 为常数$)$

解法: 作变换 $u=ax+by+c\Longrightarrow\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a+bf(u)$(可分离变量)

练习 2.6 求解方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+2xy+y^2+3$

解 原方程改写为: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x+y)^2+3$, 作变换 $u=x+y$

原方程变为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u^2+4$$

积分得通解:

$$\arctan\frac{u}{2}=2x+c$$

代回原变量得原方程的通解: $y=2\tan(2x+c)-x$

2.2.4 形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

命题 2.4

若微分方程形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ $(a_i,b_i,c_i(i=1,2)$ 为常数$)$

1. $c_1^2+c_2^2=0$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}\right)=f\left(\frac{a_1+b_1\frac{y}{x}}{a_2+b_2\frac{y}{x}}\right)=g\left(\frac{y}{x}\right)$$

2. $c_1^2+c_2^2\neq0,\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=k$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{k\left(a_2x+b_2y\right)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)=g\left(a_2x+b_2y\right)$$

3. $c_1^2+c_2^2\neq0,\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$

   解方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}\Longrightarrow x=\alpha,y=\beta$$

   作平移变换 $\quad X=x-\alpha,Y=y-\beta\Longrightarrow\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=f\left(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right)=g\left(\frac{Y}{X}\right)$

练习 2.7 求解

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x+y+4}{x-y-6}\\y(2)=-5\end{cases}$$

解 令

$$\begin{cases} x+y+4=0 \\ x-y-6=0 \end{cases} \Longrightarrow x=1, y=-5$$

令 $X=x-1, Y=y+5 \Longrightarrow \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\dfrac{X+Y}{X-Y}$

再令 $u=\dfrac{Y}{X} \Longrightarrow \dfrac{1-u}{1+u^2}\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}X}{X}$

积分得通解: $\arctan u-\dfrac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right)=\ln|CX|$

代回原变量, 得原方程的特解:

$$\arctan\frac{y+5}{x-1}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{y+5}{x-1}\right)^2\right)=\ln|(x-1)|$$

✍ **练习 2.8** 求解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x^3+xy^2+x}{yx^2-y^3-y}$

2.3 一阶线性方程的解

定义 2.3 (一阶线性方程)

一阶齐次线性方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=0. \tag{2.2}$$

一阶非齐次线性方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x). \tag{2.3}$$

其中 $p(x), q(x)$ 为 I 上的连续函数. ♣

命题 2.5 (一阶齐次线性方程的解)

一阶齐次线性方程2.2的解为

$$y=Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x}, \forall C\in\mathbb{R}. \tag{2.4}$$

♠

证明

1. $y=0$ 为特解.
2. $y\neq 0$ 时方程2.2可化简为可分离变量的方程

   $$\frac{\mathrm{d}y}{y}+p(x)\mathrm{d}x=0$$

   化简即得

   $$y=\pm e^{C-\int p(x)\mathrm{d}x}.$$

   故方程的解为 $y=Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x}, \forall C\in\mathbb{R}$.

□

命题 2.6 (一阶非齐次线性方程的解)

一阶非齐次线性方程2.3的解为

$$y=e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right),\forall C\in\mathbb{R}. \tag{2.5}$$

为了确定起见，通常把上面的不定积分写成变上限的定积分

$$y=e^{-\int_{x_0}^{x}p(s)\mathrm{d}s}\left(\int_{x_0}^{x}q(s)e^{\int_{x_0}^{s}p(t)\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}s+C\right),\forall C\in\mathbb{R} \tag{2.6}$$

证明

1. 常数变易法

   设方程 2.3 的解为

   $$y=C(x)e^{-\int_{x_0}^{x}p(s)\mathrm{d}s}.$$

   则

   $$C'(x)e^{-\int_{x_0}^{x}p(s)\mathrm{d}s}-C(x)e^{-\int_{x_0}^{x}p(s)\mathrm{d}s}p(x)+p(x)C(x)e^{-\int_{x_0}^{x}p(s)\mathrm{d}s}=q(x).$$

   即

   $$C'(x)e^{-\int_{x_0}^{x}p(s)\mathrm{d}s}=q(x).$$

   积分得

   $$C(x)=\int_{x_0}^{x}q(s)e^{\int_{x_0}^{s}p(t)\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}s+C$$

   带入可得方程的解为

   $$y=e^{-\int_{x_0}^{x}p(s)\mathrm{d}s}\left(\int_{x_0}^{x}q(s)e^{\int_{x_0}^{s}p(t)\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}s+C\right),\forall C\in\mathbb{R}.$$

   写成不定积分为

   $$y=e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(C+\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right).$$

   其中 C 为任意常数.

2. 积分因子法

   将方程2.3改写成

   $$\mathrm{d}y+p(x)y\mathrm{d}x=q(x)\mathrm{d}x$$

   两边同时乘 $\mu(x)=e^{\int p(x)\mathrm{d}x}$，得到

   $$e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}y+e^{\int p(x)\mathrm{d}x}p(x)y\mathrm{d}x=e^{\int p(x)\mathrm{d}x}q(x)\mathrm{d}x$$

   这是全微分的形式

   $$\mathrm{d}(e^{\int p(x)\mathrm{d}x}y)=\mathrm{d}(\int e^{\int p(x)\mathrm{d}x}q(x)\mathrm{d}x)$$

   直接积分得到通积分

   $$e^{\int p(x)\mathrm{d}x}y=\int e^{\int p(x)\mathrm{d}x}q(x)\mathrm{d}x+C$$

   可得通解

   $$y=e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(C+\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right)$$

□

✍ **练习 2.9** 解方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{5/2}$

解 对应的齐线性方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{2y}{x+1} = 0$, 分离变量得齐线性方程的通解

$$y = c(x+1)^2$$

变易常数令

$$y = c(x) \cdot (x+1)^2$$

为非齐方程的解代入得

$$c'(x) = (x+1)^{1/2}$$

解得

$$c(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + c$$

故非齐次线性方程通解为

$$y = (x+1)^2 \left[\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + c\right]$$

其中 c 为任意常数.

✍ **练习 2.10** 求解方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{2x - y^2}$$

解 将方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{2}{y}x - y$$

这是关于未知元 x 的线性方程，由常数变易公式得其通解为

$$\begin{aligned} x &= e^{\int \frac{2}{y}\mathrm{d}y}\left[c - \int y e^{\int -\frac{2}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y\right] \\ &= y^2[c - \ln|y|] \end{aligned}$$

其中 c 为任意常数.

✍ **练习 2.11** 求解方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{e^y + 3x}{x^2}$$

解 将等式两边同乘 e^{-y} 得

$$e^{-y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x}e^{-y}$$

令 $u = e^{-y}$, 该方程变为 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{3}{x}u - \frac{1}{x^2}$ 由常数变易公式得其通解为:

$$u = e^{-\int \frac{3}{x}\mathrm{d}x}\left[c - \int \frac{1}{x^2}e^{\int \frac{3}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right] = x^{-3}\left[c - \frac{x^2}{2}\right]$$

代回原变量得原方程的通解为: $e^{-y}x^3 + \frac{x^2}{2} = c$ 其中 c 为任意常数.

2.4 可化为一阶线性的方程

2.4.1 Bernoulli 方程

定义 2.4 (Bernoulli 方程)

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)y^n \tag{2.7}$$

的方程称作 Bernoulli 方程. 其中 n 为常数, 且 $n\neq 0,1$.

命题 2.7 (Bernoulli 方程的解法)

求解方法:

1. $y=0$ 为方程的特解.
2. $y\neq 0$ 时, 有

$$\frac{1}{y^n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{p(x)}{y^{n-1}}=q(x)$$

注意到

$$\frac{1}{y^n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{1-n}\frac{\mathrm{d}\left(y^{1-n}\right)}{\mathrm{d}x}.$$

令 $z=y^{1-n}$, 即有

$$\frac{1}{1-n}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+p(x)z=q(x)$$

即转化为一阶线性方程.

练习 2.12 求解方程

$$3xy'-3x\ln xy^4-y=0$$

解 该方程可改写为

$$y'=\frac{1}{3x}y+y^4\ln x$$

令 $z=y^{-3}$ 得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{x}z-3\ln x$$

由常数变易公式得其通解为

$$z=e^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[c+\int-3\ln xe^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\right]=\frac{1}{x}\left[c-\frac{3}{2}x^2\ln x+\frac{3}{4}x^2\right]$$

代回原变量得原方程的通解为

$$xy^{-3}+\frac{3}{4}x^2(2\ln x-1)=c$$

这里 c 为任意常数。

练习 2.13 求解方程 $\left(x^2y^3+xy\right)y'=1$

解 将方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=yx+y^3x^2$$

令 $z=x^{-1}$ 得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=-yz-y^3$$

由常数变易公式得其通解为

$$z=e^{-\int y\mathrm{d}y}\left[c+\int -y^3e^{\int y\mathrm{d}y}\mathrm{d}y\right]=e^{-\frac{1}{2}y^2}\left[c-\left(y^2-2\right)e^{\frac{1}{2}y^2}\right]$$

代回原变量得原方程的通解

$$x\left(2-y^2+Ce^{-\frac{y^2}{2}}\right)=1$$

这里 C 为任意常数。

2.4.2 Riccati 方程

定义 2.5 (Riccati 方程)

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(x)y^2+q(x)y+r(x). \tag{2.8}$$

的方程称作 Riccati 方程. 其中 $p(x),q(x),r(x)$ 在区间上连续, 且 $p(x)\not\equiv 0$.

注

1. 当 $p(x)\equiv 0$ 时, 该方程为一阶线性方程.
2. 当 $r(x)\equiv 0$ 时, 该方程为 Bernoulli 方程.
3. 在一般情况下, Riccati 方程没有初等解法.
   但是, 在已知其一个特解时, 该方程可化为 Bernoulli 方程.

命题 2.8

设 Riccati 方程的一个特解为 $y=\varphi(x)$, 则可用积分法求得通解.

证明 设 $y(x)=u(x)+\varphi(x)$, 则

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=p(u+\varphi)^2+q(u+\varphi)+r.$$

将 φ 为特解的条件带入, 即有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=(2\varphi p+q)u+pu^2.$$

即转化为 Bernoulli 方程求解.

□

练习 2.14 求解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+ay^2=bx^{-2}$$

其中 a,b 为常数.

解

1. $y=0$ 不是解.
2. $y\neq 0$ 时, 有

$$\frac{1}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a=b\cdot\frac{1}{x^2y^2}.$$

即

$$-\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{y}\right)}{\mathrm{d}x}+a=b\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{1}{y}\right)^2.$$

令 $z=\frac{1}{y}$, 则有

$$-\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+a=b\cdot\frac{1}{x^2}\cdot z^2$$

即转化为齐次方程.

定理 2.1

对 Riccati 方程的特殊情形

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+ay^2=bx^m$$

其中 $a\neq 0,b,m$ 均为常数. 又设 $x\neq 0,y\neq 0$ 时, 当

$$m=0,-2,\frac{-4k}{2k+1},\frac{-4k}{2k-1}\quad(k=1,2,\cdots)$$

时, 该形式可化为可分离变量的方程.

证明 不妨设 $a=1$, 否则可以通过令 $x'=ax$ 化简. 故讨论方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y^2=bx^m.$$

1. $m=0$ 时

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+ay^2=b$$

2. $m=-2$, 由上面例题可知已转化为齐次方程, 进而可转化为可分离变量的方程.
3. $m=\dfrac{-4k}{2k+1}$ 或 $m=\dfrac{-4k}{2k-1}$ 时, 请参考丁同仁老师常微分方程 P43 定理 2.3, 变换较为神奇, 比较难理解.

□

注 本充分条件为 1725 年 Daniel Bernoulli 得到的结果. 事实上该条件同样为**必要条件**, 在 1841 年被 Liouville 证明. 表明即使是形式简单的 Riccati 方程, 大部分也是不能用初等积分的办法解的.

练习 2.15 求解方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-y^2+2y\sin x+\cos x-\sin^2 x$$

解 $y_1=\sin x$ 为该方程的一个特解, 令 $z=y-\sin x$ 原方程化为

$$z'=y'-\cos x=-z^2$$

分离变量得其通解

$$z=\frac{1}{x+c}$$

代回原变量得原方程的通解

$$y=\frac{1}{x+c}+\sin x, y=\sin x$$

这里 c 为任意常数

练习 2.16 计算下列 ODE

1. $y'e^{-x}+y^2-2ye^x=1-e^{2x}$
2. $4x^2\left(y'-y^2\right)=1$

解

1. $y_1 = e^x, y = \dfrac{1}{c+e^x} + e^x$
2. $y_1 = -\dfrac{1}{2x}, \quad y = \dfrac{1}{x(c-\ln|x|)} - \dfrac{1}{2x}$

✍ **练习 2.17** 计算

1. $y' = 4e^{-y}\sin x - 1$
2. $\left(\sin^2 y + xc\tan y\right) y' = 1;$
3. $\left(x - 2xy - y^2\right) dy + y^2 dx = 0;$
4. $y = e^x + \displaystyle\int_0^x y(t)\mathrm{d}t$
5. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{e^{2y}+3x}{x^2}$

2.5

2.6