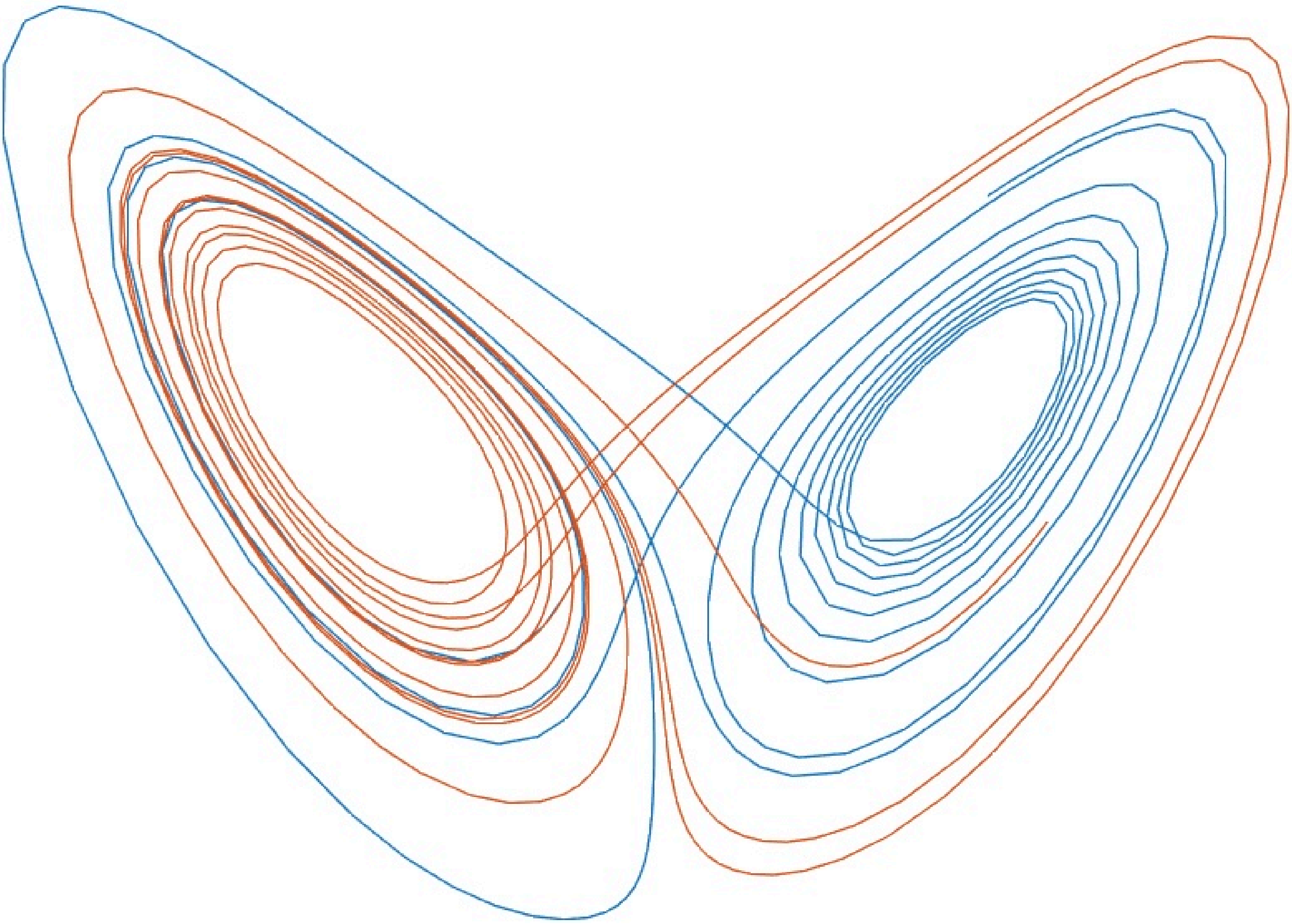

常微分方程

作者：王子毅

组织：扬州大学数学科学学院

时间：August 22, 2024

版本：0.0

Bio:Information

ElegantLATEX Program

求知若饥，虚心若愚

目录

前言

第 1 章 基本概念

内容提要

- 常微分方程的概念
- 解的基本概念
- 积分曲线与方向场

1.1 常微分方程的概念

定义 1.1 (PDE 和 ODE)

含有未知函数的导数 (或偏导) 的方程称为微分方程. 若未知函数为一元函数, 则方程为常微分方程 (ODE); 若未知函数为多元函数, 则方程为偏微分方程 (PDE).

定义 1.2 (微分方程的阶)

方程中出现的未知元对自变量最高阶导数的阶数称为该微分方程的阶.

n 阶常微分方程的一般式为

$$F(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

其中 F 为已知函数且含有 $y^{(n)}$.

定义 1.3 (微分方程的线性)

若方程1.1中 F 是关于 $y, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}$ 的一次有理整式, 此时的方程1.1称为线性方程, 否则称为非线性方程.

定义 1.4 (标准形式)

n 阶线性方程的标准式为

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + a_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \ldots + a_n(x)y = f(x)$$

其中 $a_i(x), f(x)(i = 1, 2, \ldots, n)$ 为已知函数.

1.2 解的基本概念

定义 1.5 (解与隐式解)

若 $y = \varphi(x)$ 满足 $F\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\right) = 0$, 则称 $y = \varphi(x)$ 为方程 1.1 的解.

若关系式 $\Phi(x, y) = 0$ 所确定的隐函数 $y = \varphi(x)$ 为方程1.1 的解, 则称 $\Phi(x, y) = 0$ 为方程1.1 的隐式解.

例题 1.1 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 为方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{x}{y}$ 的显式解, $x^2 + y^2 = 1$ 为该方程的隐式解.

定义 1.6 (通解)

称方程 1.1含有 n 个独立的任意常数 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 的解 $y = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ 为方程 1.1的通解. 所谓独立, 即指

$$\frac{\partial\left(\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n-1)}\right)}{\partial\left(C_1, C_2, \ldots, C_n\right)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial C_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi}{\partial C_n} \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial C_1} & \frac{\partial \varphi'}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi'}{\partial C_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi^{(n-1)}}{\partial C_1} & \frac{\partial \varphi^{(n-1)}}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi^{(n-1)}}{\partial C_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

♣

定义 1.7 (特解)

方程1.1 满足特定条件的解称为特解. 方程1.1的特定条件通常指初始条件, 即

$$y\left(x_0\right) = y_0, \quad y'\left(x_0\right) = y_0^{(1)} \quad \ldots \quad y^{(n-1)}\left(x_0\right) = y_0^{(n-1)}.$$

求方程满足初始条件的问题称为**初值问题**或 **Cauchy 问题**.

♣

练习 1.1 验证 $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ 为方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的通解, 并求满足 $y(0) = 0, y'(0) = 1$ 的特解. 这里 c_1, c_2 为任意常数.

解 $y' = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x}, \quad y'' = c_1 e^x + 4c_2 e^{2x}$, 则 $y'' - 3y' + 2y = 0$. 从而 $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ 为方程的解.

又因为

$$\frac{\partial\left(y, y'\right)}{\partial\left(c_1, c_2\right)} = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = e^{3x} \neq 0$$

从而 $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ 为通解.

又有初始条件得 $\left\{\begin{array}{l} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + 2c_2 = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 = -1 \\ c_2 = 1 \end{array}\right.$ 则所求特解为 $y = -e^x + e^{2x}$.

1.3 积分曲线与方向场

定义 1.8 (积分曲线)

一阶微分方程 $y' = f(x, y)$ 的解 $y = \varphi(x)$ 在 xoy 平面上所表示的曲线称为该方程的积分曲线. 通解 $y = \varphi(x, c)$ 表示一族积分曲线, 满足条件 $y\left(x_0\right) = x_0$ 的特解 $y = \varphi\left(x, x_0, y_0\right)$ 为过点 $\left(x_0, y_0\right)$ 的积分曲线.

♣

定义 1.9 (方向场)

用 $f(x, y)$ 在 oxy 平面某区域 D 上定义过各点的小线段的斜率方向, 这样的区域 D 称为方程 $y' = f(x, y)$ 所定义的方向场. 方向场中方向相同的曲线称为等斜线或等倾斜线.

♣

第 2 章 一阶微分方程的初等解法

内容提要

❏ 恰当方程

一阶微分方程有如下的对称形式

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{2.1}$$

2.1 恰当方程

定义 2.1 (恰当方程)

若存在可微函数 $\phi(x,y)$, 使得 $\mathrm{d}\phi(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$, 即

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=P(x,y),\quad \frac{\partial\phi}{\partial y}=Q(x,y)$$

则称方程 2.1 是恰当方程 (或全微分方程).

♣

定理 2.1 (恰当方程的解)

若 $P(x,y),Q(x,y)\in C(D),D\subset\mathbb{R}^2$, 且 $\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x}\in C(D)$, 则 2.1 是恰当方程的充要条件为 $\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$. 此时, 2.1 的通积分为

$$\begin{aligned}\phi(x,y)&=\int_{x_0}^{x}P(x,y)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q\left(x_0,y\right)\mathrm{d}y\\&=\int_{x_0}^{x}P\left(x,y_0\right)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\mathrm{d}y\\&=C,\quad\forall\left(x_0,y_0\right)\in D\subset\mathbb{R}^2\end{aligned}$$

♡

注 还可以通过解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\phi}{\partial x}=P(x,y)\\ \dfrac{\partial\phi}{\partial y}=Q(x,y)\end{cases}$$

注 验证是否恰当时应该注意偏导数的连续性.

证明

1. 必要性

   若 2.1恰当, 则 $\exists\phi(x,y)\in C(D)$, s.t. $\frac{\partial\phi}{\partial x}=P(x,y),\frac{\partial\phi}{\partial y}=Q(x,y)$ 成立. 由 $\phi(x,y)$ 二阶连续可微得

   $$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

2. 充分性

   令 $\phi(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)\mathrm{d}x+\varphi(y),\varphi(y)$ 为待定函数, 则此时 $\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\int_{x_0}^{x}P(x,y)\mathrm{d}x=P(x,y)$.

由于

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x}P(x,y)\mathrm{d}x+\varphi'(y)\\&=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}x+\varphi'(y)\\&=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}x+\varphi'(y)\\&=Q(x,y)-Q\left(x_0,y\right)+\varphi'(y)\end{aligned}$$

令 $\frac{\partial\phi}{\partial y}=Q(x,y)$, 则有 $\varphi'(y)=Q\left(x_0,y\right)$, 即 $\varphi(y)=\int_{y_0}^{y}Q\left(x_0,y\right)\mathrm{d}y$, 这样就构造出了满足要求的函数 ϕ, 且推得方程通解为

$$\phi(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q\left(x_0,y\right)\mathrm{d}y=C,\quad\forall\left(x_0,y_0\right)\in D\subset\mathbb{R}^2$$

□

例题 2.1 求解方程

$$\left(2x\sin y+3yx^2\right)\mathrm{d}x+\left(x^3+x^2\cos y+y^2\right)\mathrm{d}y=0$$

解 由于原方程为恰当方程，则由定理得

$$\begin{aligned}\phi&=\int_{0}^{x}P(x,0)\mathrm{d}x+\int_{0}^{y}Q(x,y)\mathrm{d}y\\&=0+\int_{0}^{y}\left(x^3+x^2\cos y+y^2\right)\mathrm{d}y\\&=x^3y+x^2\sin y+\frac{1}{3}y^3\end{aligned}$$

从而原方程的通解为

$$x^3y+x^2\sin y+\frac{1}{3}y^3=C$$

其中 C 为任意常数.

命题 2.1

一些简单的二元函数的全微分公式:

$$\begin{aligned}&y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\mathrm{d}(xy);\quad x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)\\&\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}=\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right);\quad\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{y^2}=\mathrm{d}\left(-\frac{x}{y}\right)\\&\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\mathrm{d}\left(\arctan\frac{y}{x}\right);\quad\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2-y^2}=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+y}{x-y}\right|\right)\end{aligned}$$

♠

注 分项组合: (全微分法) 即先把已经构成全微分的项分出来，再把剩余的项凑成全微分.

给出例题2.1的用分项组合凑全微分的解法

解 将原方程改写为

$$\left(2x\sin y\mathrm{d}x+x^2\cos y\mathrm{d}y\right)+\left(3x^2y\mathrm{d}x+x^3\mathrm{d}y\right)+y^2\mathrm{d}y=0$$

$$\left(\sin y\mathrm{d}x^2+x^2\mathrm{d}\sin y\right)+\left(y\mathrm{d}x^3+x^3\mathrm{d}y\right)+\mathrm{d}\left(\frac{y^3}{3}\right)=0$$

应用全微分公式得

$$\mathrm{d}\left(x^2\sin y+yx^3+\frac{y^3}{3}\right)=0$$

从而原方程的通解为

$$x^3y+x^2\sin y+\frac{1}{3}y^3=C$$

其中 C 为任意常数.

例题 2.2 求解方程 $\left(\cos x+\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y=0$

解 易验证, 该方程为恰当方程, 分项组合

$$\cos x\mathrm{d}x+\frac{1}{y}\mathrm{d}y+\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}=0$$

其原函数为

$$u=\sin x+\ln|y|+\frac{x}{y}$$

通解为

$$\sin x+\ln|y|+\frac{x}{y}=C$$

其中 C 为任意常数.

例题 2.3 求解方程

$$\left(\frac{y^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{y}-\frac{x^2}{(x-y)^2}\right)\mathrm{d}y=0$$

解 易验证该方程为恰当方程.

由公式法得其原函数

$$\begin{aligned}
u&=\int_1^x P(x,2)\mathrm{d}x+\int_2^y Q(x,y)\mathrm{d}y\\
&=\int_1^x\left(\frac{4}{(x-2)^2}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x+\int_2^y\left(\frac{1}{y}-\frac{x^2}{(x-y)^2}\right)\mathrm{d}y\\
&=-\frac{4}{x-2}-4-\ln|x|+\ln|y|-\ln 2-\frac{x^2}{x-y}+\frac{x^2}{x-2}\\
&=\ln\left|\frac{y}{x}\right|-\frac{xy}{x-y}-2-\ln 2
\end{aligned}$$

则原方程的通解: $\ln\left|\frac{y}{x}\right|-\frac{xy}{x-y}=C$, 其中 C 为任意常数.

练习 2.1 求解下列各方程

1. $\left(ye^x+2e^x+y^2\right)\mathrm{d}x+\left(e^x+2xy\right)\mathrm{d}y=0$
2. $(x\cos(x+y)+\sin(x+y))\mathrm{d}x+x\cos(x+y)\mathrm{d}y=0$

解

1. $u=ye^x+2e^x+xy^2$
2. $u=x\sin(x+y)$

2.2 非恰当方程

定义 2.2 (积分因子)

考虑非恰当微分方程

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0 \tag{2.2}$$

其中

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

若存在连续可微函数 $\mu = \mu(x,y) \neq 0$ 使得

$$\mu(x,y)(P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y) = \mathrm{d}phi(x,y)$$

则称 $\mu(x,y)$ 为非恰当方程2.2的积分因子.

例题 2.4 方程

$$x\mathrm{d}y - \mathrm{d}x = 0$$

为非恰当方程. 其积分因子为

$$\frac{1}{x^2}; \frac{1}{y^2}; \frac{1}{x^2+y^2}; \frac{1}{x^2-y^2}, \frac{1}{xy}$$

命题 2.2 (积分因子的求法)

一元积分因子求法如下

1. $$\mu = \mu(x) \Longleftrightarrow \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \varphi(x) \Leftrightarrow \mu = e^{\int \varphi(x)\mathrm{d}x}$$

2. $$\mu = \mu(y) \Longleftrightarrow \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{-P} = \psi(y) \Leftrightarrow \mu = e^{\int \psi(y)\mathrm{d}y}$$

证明 由积分因子的定义

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mu = \frac{\partial \mu}{\partial x}Q - \frac{\partial \mu}{\partial y}P$$

□

注 这只是求一元函数的积分因子的方法，其它多元函数积分因子只能用观察法，或其它方法.

例题 2.5 求解方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y} + \sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \quad (y>0)$

解 解: 原方程改写为 $x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x$ 即

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}\left(x^2+y^2\right) = \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x$$

观察得积分因子为

$$\mu = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{-1}$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}\left(x^2+y^2\right)}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\mathrm{d}x$$

故通解为

$$\sqrt{x^2+y^2}=x+C$$

C 为任意常数.

例题 2.6 求解方程 $\left(2xy+x^2y+\frac{1}{3}y^3\right)\mathrm{d}x+\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}y=0$

解

$$P_y=2x+x^2+y^2,\quad Q_x=2x$$

$$\Longrightarrow \varphi(x)=\frac{P_y-Q_x}{Q}=1$$

积分因子为 $\mu=e^x$ ，乘原方程并整理得

$$\left(2x+x^2\right)ye^x\mathrm{d}x+x^2e^x\mathrm{d}y+\left(\frac{1}{3}y^3e^x\mathrm{d}x+y^2e^x\mathrm{d}y\right)=0$$

即

$$\mathrm{d}\left(x^2ye^x+\frac{1}{3}y^3e^x\right)=0$$

通解为

$$\left(x^2y+\frac{1}{3}y^3\right)e^x=C$$

C 为任意常数.

练习 2.2 课后思考题: 求解方程

1. $\left(x^2+y+x^3\cos y\right)\mathrm{d}x+\left(x^2y-x-\frac{x^4}{2}\sin y\right)\mathrm{d}y=0$
2. $(y\cos x-x\sin x)\mathrm{d}x+(y\sin x+x\cos x)\mathrm{d}y=0.$

练习 2.3 寻求方程 $P(x,y)ddx+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$

具有

$$\mu=\mu(x+y),\mu=\mu(xy)$$

的充要条件.

2.3 可分离变量方程

2.3.1 可直接分离变量

定义 2.3 (可分离变量方程)

若常微分方程具有如下形式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y) \tag{2.3}$$

则称之为可分离变量的常微分方程.

命题 2.3 (可分离变量方程的解)

1. 若 $g(y) \neq 0$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x$, 两边积分可得
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x + C$$
称之为方程2.3的隐式通解或者通积分
2. 若 $g(y) = 0, y = y_0$ 为方程2.3的解.

练习 2.4 求解初值问题
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 \cos x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

解 分离变量:
$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \cos x \mathrm{d}x \quad (y \neq 0)$$
两边积分:
$$\int y^{-2}\mathrm{d}y = \int \cos x \mathrm{d}x + C$$
通解为:
$$y = -\frac{1}{\sin x + C}$$
由初始条件 $y(0) = 1$ 代入通解可得 $C = -1$,
从而得特解为:
$$y = \frac{1}{1 - \sin x}$$

练习 2.5 求解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1+y^2}{xy + x^3 y}$.

解 分离变量:
$$\frac{y\mathrm{d}y}{1+y^2} = \frac{\mathrm{d}x}{x\left(1+x^2\right)}$$
两边积分:
$$\int \frac{y\mathrm{d}y}{1+y^2} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x + C$$
通解:
$$\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right) = (Cx)^2 \quad (\text{其中 } C \text{ 为任意常数})$$

2.3.2 齐次方程

命题 2.4 (可化为分离变量方程的齐次方程)

齐次方程可化为形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g\left(\dfrac{y}{x}\right)$

解法: 令 $u = \dfrac{y}{x} \Longrightarrow \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{g(u) - u}{x}$(可分离变量)

练习 2.6 解方程:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x-y}{x+y}$$

解 原方程改写为:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$$

令 $u=\frac{y}{x}$ 该方程化为

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1-2u-u^2}{1+u}$$

分离变量积分得:

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1-2u-u^2\right|=\ln|x|+\ln|C|$$

代回原变量得原方程的通解为: $x^2-2xy-y^2=C$, 其中 C 为任意常数.

练习 2.7 练习: 求解下列方程

1. $\sec^2 x\tan y\mathrm{d}x+\sec^2 y\tan x\mathrm{d}y=0$
2. $y'=x^2+4y^2+4x^2y^2+1$

练习 2.8 求解方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{(x+y)^2+1}$

2.3.3 形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(ax+by+c)$

命题 2.5

若微分方程形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(ax+by+c)\quad(a,b,c$ 为常数)

解法: 作变换 $u=ax+by+c\Longrightarrow\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a+bf(u)$(可分离变量)

练习 2.9 求解方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+2xy+y^2+3$

解 原方程改写为: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x+y)^2+3,$ 作变换 $u=x+y$

原方程变为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u^2+4$$

积分得通解:

$$\arctan\frac{u}{2}=2x+c$$

代回原变量得原方程的通解: $y=2\tan(2x+c)-x$

2.3.4 形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

命题 2.6

若微分方程形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ $(a_i,b_i,c_i(i=1,2)$ 为常数)

1. $c_1^2+c_2^2=0$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}\right)=f\left(\frac{a_1+b_1\frac{y}{x}}{a_2+b_2\frac{y}{x}}\right)=g\left(\frac{y}{x}\right)$$

2. $c_1^2+c_2^2\neq 0,\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=k$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{k\left(a_2x+b_2y\right)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)=g\left(a_2x+b_2y\right)$$

3. $c_1^2+c_2^2\neq 0,\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$

   解方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}\Longrightarrow x=\alpha,y=\beta$$

作平移变换 $X=x-\alpha,Y=y-\beta\Longrightarrow\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=f\left(\dfrac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right)=g\left(\dfrac{Y}{X}\right)$

练习 2.10 求解

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x+y+4}{x-y-6}\\ y(2)=-5\end{cases}$$

解 令

$$\begin{cases}x+y+4=0\\ x-y-6=0\end{cases}\Longrightarrow x=1,y=-5$$

令 $X=x-1,Y=y+5\Longrightarrow\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\dfrac{X+Y}{X-Y}$

再令 $u=\dfrac{Y}{X}\Longrightarrow\dfrac{1-u}{1+u^2}\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}X}{X}$

积分得通解: $\arctan u-\dfrac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right)=\ln|CX|$

代回原变量, 得原方程的特解:

$$\arctan\frac{y+5}{x-1}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{y+5}{x-1}\right)^2\right)=\ln|(x-1)|$$

练习 2.11 求解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x^3+xy^2+x}{yx^2-y^3-y}$

2.4 一阶线性方程的解

定义 2.4 (一阶线性方程)

一阶齐次线性方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=0. \tag{2.4}$$

一阶非齐次线性方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x). \tag{2.5}$$

其中 $p(x),q(x)$ 为 I 上的连续函数. ♣

命题 2.7 (一阶齐次线性方程的解)

一阶齐次线性方程2.4的解为

$$y=Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x},\forall C\in\mathbb{R}. \tag{2.6}$$

♠

证明

1. $y=0$ 为特解.
2. $y\neq 0$ 时方程2.4可化简为可分离变量的方程
$$\frac{\mathrm{d}y}{y}+p(x)\mathrm{d}x=0$$
化简即得
$$y=\pm e^{C-\int p(x)\mathrm{d}x}.$$
故方程的解为 $y=Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x},\forall C\in\mathbb{R}$.

□

命题 2.8 (一阶非齐次线性方程的解)

一阶非齐次线性方程2.5的解为

$$y=e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right),\forall C\in\mathbb{R}. \tag{2.7}$$

为了确定起见，通常把上面的不定积分写成变上限的定积分

$$y=e^{-\int_{x_0}^{x}p(s)\mathrm{d}s}\left(\int_{x_0}^{x}q(s)e^{\int_{x_0}^{s}p(t)\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}s+C\right),\forall C\in\mathbb{R} \tag{2.8}$$

♠

证明

1. 常数变易法
设方程 2.5 的解为
$$y=C(x)e^{-\int_{x_0}^{x}p(s)\mathrm{d}s}.$$
则
$$C'(x)e^{-\int_{x_0}^{x}p(s)\mathrm{d}s}-C(x)e^{-\int_{x_0}^{x}p(s)\mathrm{d}s}p(x)+p(x)C(x)e^{-\int_{x_0}^{x}p(s)\mathrm{d}s}=q(x).$$
即
$$C'(x)e^{-\int_{x_0}^{x}p(s)\mathrm{d}s}=q(x).$$

积分得

$$C(x)=\int_{x_0}^{x} q(s)e^{\int_{x_0}^{s} p(t)\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}s+C$$

带入可得方程的解为

$$y=e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s}\left(\int_{x_0}^{x} q(s)e^{\int_{x_0}^{s} p(t)\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}s+C\right),\forall C\in\mathbb{R}.$$

写成不定积分为

$$y=e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(C+\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right).$$

其中 C 为任意常数.

2. 积分因子法

将方程2.5改写成

$$\mathrm{d}y+p(x)y\mathrm{d}x=q(x)\mathrm{d}x$$

两边同时乘 $\mu(x)=e^{\int p(x)\mathrm{d}x}$, 得到

$$e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}y+e^{\int p(x)\mathrm{d}x}p(x)y\mathrm{d}x=e^{\int p(x)\mathrm{d}x}q(x)\mathrm{d}x$$

这是全微分的形式

$$\mathrm{d}(e^{\int p(x)\mathrm{d}x}y)=\mathrm{d}(\int e^{\int p(x)\mathrm{d}x}q(x)\mathrm{d}x)$$

直接积分得到通积分

$$e^{\int p(x)\mathrm{d}x}y=\int e^{\int p(x)\mathrm{d}x}q(x)\mathrm{d}x+C$$

可得通解

$$y=e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(C+\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right)$$

□

练习 2.12 解方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^{5/2}$

解 对应的齐线性方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2y}{x+1}=0$, 分离变量得齐线性方程的通解

$$y=c(x+1)^2$$

变易常数令

$$y=c(x)\cdot(x+1)^2$$

为非齐方程的解代入得

$$c'(x)=(x+1)^{1/2}$$

解得

$$c(x)=\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}+c$$

故非齐次线性方程通解为

$$y=(x+1)^2\left[\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}+c\right]$$

其中 c 为任意常数.

练习 2.13 求解方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{2x-y^2}$$

解 将方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{2}{y}x-y$$

这是关于未知元 x 的线性方程，由常数变易公式得其通解为

$$\begin{aligned}x&=e^{\int\frac{2}{y}\mathrm{d}y}\left[c-\int ye^{\int-\frac{2}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y\right]\\&=y^2[c-\ln|y|]\end{aligned}$$

其中 c 为任意常数.

练习 2.14 求解方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{e^y+3x}{x^2}$$

解 将等式两边同乘 e^{-y} 得

$$e^{-y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}e^{-y}$$

令 $u=e^{-y}$, 该方程变为 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\frac{3}{x}u-\frac{1}{x^2}$ 由常数变易公式得其通解为:

$$u=e^{-\int\frac{3}{x}\mathrm{d}x}\left[c-\int\frac{1}{x^2}e^{\int\frac{3}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]=x^{-3}\left[c-\frac{x^2}{2}\right]$$

代回原变量得原方程的通解为: $e^{-y}x^3+\frac{x^2}{2}=c$ 其中 c 为任意常数.

2.5 可化为一阶线性的方程

2.5.1 Bernoulli 方程

定义 2.5 (Bernoulli 方程)

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)y^n \tag{2.9}$$

的方程称作 Bernoulli 方程. 其中 n 为常数, 且 $n\neq 0,1$.

命题 2.9 (Bernoulli 方程的解法)

求解方法:

1. $y=0$ 为方程的特解.
2. $y\neq 0$ 时, 有

$$\frac{1}{y^n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{p(x)}{y^{n-1}}=q(x)$$

注意到

$$\frac{1}{y^n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{1-n}\frac{\mathrm{d}\left(y^{1-n}\right)}{\mathrm{d}x}.$$

令 $z=y^{1-n}$, 即有

$$\frac{1}{1-n}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+p(x)z=q(x)$$

即转化为一阶线性方程.

练习 2.15 求解方程

$$3xy'-3x\ln xy^4-y=0$$

解 该方程可改写为

$$y'=\frac{1}{3x}y+y^4\ln x$$

令 $z=y^{-3}$ 得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{x}z-3\ln x$$

由常数变易公式得其通解为

$$z=e^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[c+\int-3\ln xe^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\right]=\frac{1}{x}\left[c-\frac{3}{2}x^2\ln x+\frac{3}{4}x^2\right]$$

代回原变量得原方程的通解为

$$xy^{-3}+\frac{3}{4}x^2(2\ln x-1)=c$$

这里 c 为任意常数。

练习 2.16 求解方程 $\left(x^2y^3+xy\right)y'=1$

解 将方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=yx+y^3x^2$$

令 $z=x^{-1}$ 得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=-yz-y^3$$

由常数变易公式得其通解为

$$z=e^{-\int y\mathrm{d}y}\left[c+\int-y^3e^{\int y\mathrm{d}y}\mathrm{d}y\right]=e^{-\frac{1}{2}y^2}\left[c-\left(y^2-2\right)e^{\frac{1}{2}y^2}\right]$$

代回原变量得原方程的通解

$$x\left(2-y^2+Ce^{-\frac{y^2}{2}}\right)=1$$

这里 C 为任意常数。

2.5.2 Riccati 方程

定义 2.6 (Riccati 方程)

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(x)y^2+q(x)y+r(x). \tag{2.10}$$

的方程称作 Riccati 方程. 其中 $p(x),q(x),r(x)$ 在区间上连续, 且 $p(x)\neq 0$.

注

1. 当 $p(x) \equiv 0$ 时, 该方程为一阶线性方程.
2. 当 $r(x) \equiv 0$ 时, 该方程为 Bernoulli 方程.
3. 在一般情况下, Riccati 方程没有初等解法.
   但是, 在已知其一个特解时, 该方程可化为 Bernoulli 方程.

命题 2.10

设 Riccati 方程的一个特解为 $y = \varphi(x)$, 则可用积分法求得通解.

证明 设 $y(x) = u(x) + \varphi(x)$, 则

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = p(u+\varphi)^2 + q(u+\varphi) + r.$$

将 φ 为特解的条件带入, 即有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = (2\varphi p + q)u + pu^2.$$

即转化为 Bernoulli 方程求解.

□

练习 2.17 求解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + ay^2 = bx^{-2}$$

其中 a, b 为常数.

解

1. $y = 0$ 不是解.
2. $y \neq 0$ 时, 有

$$\frac{1}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a = b \cdot \frac{1}{x^2y^2}.$$

即

$$-\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{y}\right)}{\mathrm{d}x} + a = b \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^2.$$

令 $z = \frac{1}{y}$, 则有

$$-\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + a = b \cdot \frac{1}{x^2} \cdot z^2$$

即转化为齐次方程.

定理 2.2

对 Riccati 方程的特殊情形

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + ay^2 = bx^m$$

其中 $a \neq 0, b, m$ 均为常数. 又设 $x \neq 0, y \neq 0$ 时, 当

$$m = 0, -2, \frac{-4k}{2k+1}, \frac{-4k}{2k-1} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

时, 该形式可化为可分离变量的方程.

证明 不妨设 $a = 1$, 否则可以通过令 $x' = ax$ 化简. 故讨论方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y^2 = bx^m.$$

1. $m=0$ 时
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+ay^2=b$$
2. $m=-2$, 由上面例题可知已转化为齐次方程, 进而可转化为可分离变量的方程.
3. $m=\dfrac{-4k}{2k+1}$ 或 $m=\dfrac{-4k}{2k-1}$ 时, 请参考丁同仁老师常微分方程 P43 定理 2.3, 变换较为神奇, 比较难理解.

□

注 本充分条件为 1725 年 Daniel Bernoulli 得到的结果. 事实上该条件同样为**必要条件**, 在 1841 年被 Liouville 证明. 表明即使是形式简单的 Riccati 方程, 大部分也是不能用初等积分的办法解的.

练习 2.18 求解方程
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-y^2+2y\sin x+\cos x-\sin^2 x$$

解 $y_1=\sin x$ 为该方程的一个特解, 令 $z=y-\sin x$ 原方程化为
$$z'=y'-\cos x=-z^2$$
分离变量得其通解
$$z=\frac{1}{x+c}$$
代回原变量得原方程的通解
$$y=\frac{1}{x+c}+\sin x, y=\sin x$$
这里 c 为任意常数

练习 2.19 计算下列 ODE

1. $y'e^{-x}+y^2-2ye^x=1-e^{2x}$
2. $4x^2\left(y'-y^2\right)=1$

解

1. $y_1=e^x, y=\dfrac{1}{c+e^x}+e^x$
2. $y_1=-\dfrac{1}{2x},\quad y=\dfrac{1}{x(c-\ln|x|)}-\dfrac{1}{2x}$

练习 2.20 计算

1. $y'=4e^{-y}\sin x-1$
2. $\left(\sin^2 y+xc\tan y\right)y'=1;$
3. $\left(x-2xy-y^2\right)dy+y^2dx=0;$
4. $y=e^x+\displaystyle\int_0^x y(t)\mathrm{d}t$
5. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{e^{2y}+3x}{x^2}$

2.6 一阶隐式方程

一阶显式方程
$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

若无法显示表达，则考虑一般的一阶隐方程

$$F\left(x,y,y'\right)=0 \tag{2.11}$$

本节讨论一阶隐方程的解法.

2.6.1 形如 $y=f(x,y')$

令 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p$ 则变为

$$y=f(x,p)$$

两边关于 x 求导

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{p-f_x}{f_p}$$

这是一个关于 x,p 的显式方程.

1. 若 $p=\varphi(x,C)$ 则通解:

$$y=f(x,\varphi(x,C)) \quad \forall C\in\mathbb{R}$$

2. 若 $x=\psi(p,C)$ 则通解:

$$\begin{cases} x=\psi(p,C) \\ y=f(x,p) \end{cases} \quad \forall C\in\mathbb{R}$$

3. 若 $\Phi(x,p,c)=0$ 则通解:

$$\begin{cases} \Phi(x,p,c)=0, \\ y=f(x,p) \end{cases} \quad \forall C\in\mathbb{R}$$

注 上述步骤称为微分法，微分法适用于可用 x,p 表示 y 的部分方程.

例题 2.7 求解方程

$$y'^3+2xy'-y=0$$

解 令 $y'=p$, 原方程变为

$$y=2xp+p^3$$

将此式两边关于 x 求导得

$$p=2p+2x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+3p^2\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

整理得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}=-\frac{2}{p}x-3p$$

这是关于 x 的一阶线性方程，其通解为

$$x=e^{-\int\frac{2}{p}\mathrm{d}p}\left[c-3\int pe^{\int\frac{2}{p}\mathrm{d}p}\mathrm{d}p\right]=\frac{1}{p^2}\left[c-\frac{3}{4}p^4\right]$$

原方程的通解为

$$\begin{cases} x = cp^{-2} - \frac{3}{4}p^2 \\ y = 2cp^{-1} - \frac{1}{2}p^3 \end{cases}$$

这里 p 为参数, c 为任意常数.

例题 2.8 求解方程 $y = y'^2 - xy' + \frac{1}{2}x^2$

解 令 $y' = p$ 原方程化为

$$y = p^2 - xp + \frac{1}{2}x^2$$

将此式两边关于 x 求导得

$$p = 2p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - p + x$$

整理得

$$(2p - x)\left(1 - \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right) = 0$$

即 $p = \frac{x}{2}$ 或 $p = x + c$

原方程的通解为

$$y = \frac{x^2}{2} + cx + c^2, \quad y = \frac{x^2}{4}$$

注 抛物线 $y = \frac{x^2}{4}$ 为曲线族 $y = \frac{x^2}{2} + cx + c^2$ 包络, 这个解称为该方程的奇解. c 为任意常数.

2.6.2 形如 $x = f(y, y')$

令 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p$ 　则变为

$$x = f(y, p)$$

两边关于 y 求导

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$

即

$$\frac{1}{p} = f_y + f_p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$

这是一个关于 y,p 的显式方程. 关于通解的结论类比上一种类型.

例题 2.9 求解方程 $y'^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0$

解 令 $y' = p$ 则有

$$x = \frac{2y}{p} + \frac{p^2}{4y}$$

两边关于 y 求导得

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{p^2}{4y^2}\right)\left(2\frac{y}{p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - 1\right) = 0$$

由此得

$$\frac{2}{p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{y} \text{ 或} p^3 = 4y^2$$

解得

$$p = \pm 2\sqrt{cy} \text{ 或} p = \left(4y^2\right)^{\frac{1}{3}}$$

则原方程的通解为

$$y = c(x-c)^2$$

特解为

$$y = \frac{4}{27}x^3$$

c 为任意常数.

✍ **练习 2.21** 求解方程

$$xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$$

解 通解: $y = \frac{1}{2c}\left(4 + c^2x^2\right)$ 和 $y = \pm 2x$

2.6.3 形如 $F(x, y') = 0$ 不显含 y

令 $y' = p$ 得

$$F(x, p) = 0$$

将该曲线方程写成恰当的参数式 $x = \varphi(t), p = \psi(t)$, 则由 $\mathrm{d}y = p\mathrm{d}x$ 得

$$y = \int \psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t + c$$

则原方程的通解为

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \displaystyle\int \psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t + c \end{cases}$$

其中 t 为参数, c 为任意常数.

例题 2.10 求解方程 $x^3 + y'^3 - 3xy' = 0$

解 令 $y' = p$ 则得

$$x^3 + p^3 = 3xp$$

令 $p = xt$ 代入上式得

$$x^3 + t^3x^3 = 3tx^2$$

$$x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad p = \frac{3t^2}{1+t^3}$$

从而

$$\begin{aligned} y &= \int p\mathrm{d}x = \int \frac{3t^2}{1+t^3}\mathrm{d}\frac{3t}{1+t^3} \\ &= \frac{1}{2}\int t\mathrm{d}\left(\frac{3t}{1+t^3}\right)^2 \\ &= \frac{t}{2}\left(\frac{3t}{1+t^3}\right)^2 - \frac{1}{2}\int\left(\frac{3t}{1+t^3}\right)^2\mathrm{d}t \\ &= \frac{9}{2}\frac{t^3}{(1+t^3)^2} + \frac{3}{2}\frac{1}{1+t^3} + c \end{aligned}$$

原方程的通解为

$$\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{9}{2}\dfrac{t^3}{(1+t^3)^2} + \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{1+t^3} + c \end{cases}$$

其中 t 为参数, c 为任意常数.

2.6.4 形如 $F(y, y') = 0$ 不显含 x

令 $y' = p$ 得

$$F(y,p) = 0$$

将该曲线方程写成恰当的参数式 $y = \varphi(t), p = \psi(t)$,
则由 $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{p}\mathrm{d}y = \dfrac{1}{\psi(t)}\varphi'(t)\mathrm{d}t$ 得

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\mathrm{d}t + c$$

则原方程的通解为

$$\begin{cases} y = \varphi(t) \\ x = \displaystyle\int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\mathrm{d}t + c \end{cases}$$

其中 t 为参数, c 为任意常数.

注 若 $F(y_0, 0) = 0$, 则 $y = y_0$ 是一个平凡解.

例题 2.11 求解方程 $y^2(1 - y') = (2 - y')^2$

解 令 $y' = p$ 则得

$$y^2(1-p) = (2-p)^2$$

令 $2 - p = yt$ 代入得

$$y^2(yt - 1) = y^2t^2$$

于是 $y = t + t^{-1}, p = 1 - t^2$, 从而

$$x = \int \frac{\mathrm{d}y}{p} = \int \frac{1 - t^{-2}}{1 - t^2}\mathrm{d}t = t^{-1} + c$$

故原方程的通解为

$$\begin{cases} x = t^{-1} + c \\ y = t + t^{-1} \end{cases}$$

其中 t 为参数, c 为任意常数. 另外, $y' = 0$ 得 $y = \pm 2$ 也是其解.

例题 2.12 求解方程 $y^2y'^2 + y^2 = a^2 \quad (a > 0)$

解 令 $y' = p$ 则得

$$y^2p^2 + y^2 = a^2$$

令 $p = \tan t$ 则得 $y = \pm a\cos t$, 从而

$$x = \int \frac{\mathrm{d}y}{p} = \int \frac{\mp a \sin t}{\tan t}\mathrm{d}t = \mp a \sin t + c$$

故原方程的通解为

$$\begin{cases} x = \mp a\sin t + c \\ y = \pm a\cos t \end{cases}$$

其中 t 为参数, c 为任意常数.

另外, 还有常数解 $y = \pm a$.

练习 2.22 求解下列方程

1. $x^3 + y'^3 = 4xy'$
2. $2y^2 + 5y'^2 = 4$

命题 2.11

1. 能解出未知元或自变量的方程
   标准型: $y = f(x, y')$ 或 $x = f(y, y')$
   解法: 令 $p = y'$, 然后使用微分法.
2. 不显含未知元或自变量的方程
   标准型: $F(x, y') = 0$ 或 $F(y, y') = 0$
   解法: 令 $y' = p$ 将原方程化为参数方程, 使用参数法.

2.7 习题课

练习 2.23 判定下列方程的类型并求解

1. $y' = xye^{x^2}\ln y$
2. $x^2y\mathrm{d}x - \left(x^3 + y^3\right)\mathrm{d}y = 0$
3. $y = y'x\ln x + \left(xy'\right)^2$;
4. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2x^3 + 3xy^2 + x}{3x^2y + 2y^3 - y}$

练习 2.24 试用三种解法求解方程

$$\left(\left(2x^2 + 2\right)y + 5\right)\mathrm{d}x + \left(2x^3 + 2x\right)\mathrm{d}y = 0$$

练习 2.25 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b, a > 0$ a, b 为常数. 试证明方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + ay = f(x)$$

的一切解 $y(x)$, 均有 $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = \dfrac{b}{a}$.

证明 方程为一阶线性方程, 由常数变易公式得

$$y(x) = y_0e^{-ax} + \frac{\int_0^x f(s)e^{as}\mathrm{d}s}{e^{ax}}$$

取极限

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(s)e^{as}\mathrm{d}s}{e^{ax}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)e^{ax}}{ae^{ax}} = \frac{b}{a}$$

□

✍ **练习 2.26** 求证：若 $y(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续可微, 且有

$$\lim_{x\to+\infty}\left(y'(x)+y(x)\right)=0,$$

则有

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=0$$

证明 令 $\left(y'(x)+y(x)\right)=f(x)$, 由常数变易公式得

$$y(x)=y_0e^{-x}+\frac{\displaystyle\int_0^x f(s)e^s\mathrm{d}s}{e^x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^xf(x)}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

□

✍ **练习 2.27** 求具有性质

$$x(t+s)=\frac{x(t)+x(s)}{1-x(t)x(s)}$$

的函数 $x(t)$, 已知 $x'(0)$ 存在.

解 由导数的定义得

$$\begin{aligned}x'(t)&=\lim_{h\to0}\frac{x(t+h)-x(t)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{x(t)+x(h)}{1-x(t)x(h)}-x(t)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{x(h)\left(1+x^2(t)\right)}{h(1-x(t)x(h))}\end{aligned}$$

由题意得

$$x(0)=\frac{x(0)+x(0)}{1-x(0)^2}\Longrightarrow x(0)=0$$

从而得

$$x'(0)=\lim_{h\to0}\frac{x(h)-x(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{x(h)}{h}$$

因此

$$x'(t)=\left(1+x^2(t)\right)x'(0)$$

分离变量并积分得

$$x(t)=\tan\left(x'(0)t+c\right)$$

再由初始条件 $x(0)=0$ 得 $c=0$, 因此

$$x(t)=\tan\left(x'(0)t\right)$$

✍ **练习 2.28** 设 $\mu(x,y)$ 是方程

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{2.12}$$

的积分因子，从而求得可微函数 $U(x,y)$ ，使得

$$\mathrm{d}U=\mu(M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y)$$

试证：$\overline{\mu}(x,y)$ 也是方程 2.12 的积分因子的充要条件是

$$\overline{\mu}(x,y)=\mu\varphi(U)$$

其中 $\varphi(t)$ 是 t 的可微函数.

证明

1. 充分性

设 $\overline{\mu} = \mu\varphi(U)$ 则

$$\begin{aligned}\overline{\mu}(M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y) &= \mu\varphi(U)(M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y)\\ &= \varphi(U)[\mu(M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y)] = \varphi(U)\mathrm{d}U\\ &= \mathrm{d}\int \varphi(U)\mathrm{d}U = \mathrm{d}V\end{aligned}$$

从而 $\overline{\mu}(x, y)$ 为2.12 的积分因子.

2. 必要性

设 $\overline{\mu}$ 为 2.12 的积分因子, 则

$$\overline{\mu}(M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y) = \mathrm{d}V(x, y)$$

则

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \mu M, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \mu N, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \overline{\mu}M, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \overline{\mu}N.$$

则

$$\frac{\partial(U, V)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \mu M & \mu N \\ \overline{\mu}M & \overline{\mu}N \end{vmatrix} = 0$$

由函数相关的定义得 $U(x, y), V(x, y)$ 函数相关, 即存在函数 ψ 使得 $V = \psi(U)$ ，从而有

$$\begin{aligned}\overline{\mu}(M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y) &= \mathrm{d}V = \mathrm{d}\psi(U) = \psi'(U)\mathrm{d}U\\ &= \psi'(U)\mu(M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y)\end{aligned}$$

由此得

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \overline{\mu}M = \psi'(U)\mu M$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} = \overline{\mu}N = \psi'(U)\mu N$$

从而

$$\overline{\mu} = \mu\psi'(U) = \mu\varphi(U), \quad \varphi = \psi'$$

命题 2.12 (分组求方程的积分因子)

要求方程

$$M(x, y)\mathrm{d}x + N(x, y)\mathrm{d}y = 0$$

的积分因子, 将方程改写为

$$(M_1(x, y)\mathrm{d}x + N_1(x, y)\mathrm{d}y) + (M_2(x, y)\mathrm{d}x + N_2(x, y)\mathrm{d}y) = 0 \tag{2.13}$$

分别求得

$$\mu_1(x, y)\,(M_1\mathrm{d}x + N_1\mathrm{d}y) = \mathrm{d}U_1$$
$$\mu_2(x, y)\,(M_2\mathrm{d}x + N_2\mathrm{d}y) = \mathrm{d}U_2$$

由前面的结论得 $\mu_1\varphi_1\,(U_1)\,, \mu_2\varphi_2\,(U_2)$ 分别是方程 2.13 的第一，第二部分的积分因子，若能找到

φ_1, φ_2 使得

$$\mu_1\varphi_1 = \mu_2\varphi_2 = \mu$$

则 μ 为 2.13 即原方程的积分因子.

练习 2.29 求解方程

$$x(4y\mathrm{d}x + 2x\mathrm{d}y) + y^3(3y\mathrm{d}x + 5x\mathrm{d}y) = 0$$

解 分别考虑方程

$$x(4y\mathrm{d}x + 2x\mathrm{d}y) = 0$$
$$y^3(3y\mathrm{d}x + 5x\mathrm{d}y) = 0$$

容易求得 $\mu_1 = 1, U_1 = 2x^2y, \mu_2 = x^{-1}y^{-4}, U_2 = x^3y^5$ ，选取

$$\varphi_1(U_1) = U_1, \varphi_2(U_2) = 2U_2$$

则原方程的积分因子为

$$\mu = \mu_1\varphi_1(U_1) = \mu_2\varphi_2(U_2) = 2x^2y,$$

原方程的通解为

$$x^4y^2 + x^3y^5 = c$$

注 取 U_2 的时候有点神奇.

练习 2.30 求解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{1 + xy^3}{1 + x^3y} = 0$$

解 原方程变形为

$$(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y) + \left(xy^3\mathrm{d}x + yx^3\mathrm{d}y\right) = 0$$

容易求得 $\mu_1 = 1, U_1 = x + y, \mu_2 = x^{-3}y^{-3}, U_2 = x^{-1} + y^{-1}$.
寻找 φ_1, φ_2 s.t.

$$\varphi_1(x+y) = x^{-3}y^{-3}\varphi_2\left(x^{-1} + y^{-1}\right)$$

$$\varphi_1(U_1) = U_1^{-3}, \varphi_2(U_2) = U_2^{-3}$$
$$\mu = (x+y)^{-3}.$$
$$x^2y^2 - 1 = c(x+y)^2$$

练习 2.31 推导微分方程

$$M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0$$

具有形如 $\mu = f(h(x,y))$ 的积分因子的充要条件.
写出具有下列形式的积分因子的充要条件

1. $\mu = \mu(x+y)$;
2. $\mu = \mu(xy)$
3. $\mu = \mu\left(x^my^n\right)$.

第 3 章 存在唯一性定理

3.1 Gronwall 不等式

定理 3.1 (Gronwall 不等式)

令 k 是非负常数, $f(x), g(x)$ 是区间 $[\alpha, \beta]$ 上的连续非负函数, 且满足不等式

$$f(x) \leqslant k + \int_\alpha^x f(s)g(s)\mathrm{d}s, \forall \alpha \leqslant x \leqslant \beta.$$

则

$$f(x) \leqslant ke^{\int_\alpha^x g(s)\mathrm{d}s}.$$

♡

证明 令

$$A(x) = k + \int_\alpha^x f(s)g(s)\mathrm{d}s$$

则

$$A'(x) = f(x)g(x) \leqslant A(x)g(x)$$

注意到

$$\left(A(x)e^{-\int_\alpha^x g(s)\mathrm{d}s}\right)' = e^{-\int_\alpha^x g(s)\mathrm{d}s}\left(A'(x) - A(x)g(x)\right) \leqslant 0.$$

故

$$A(x)e^{-\int_\alpha^x g(s)\mathrm{d}s} \leqslant A(\alpha) = k.$$

即

$$A(x) \leqslant ke^{\int_\alpha^x g(s)\mathrm{d}s}$$

故

$$f(x) \leqslant A(x) \leqslant ke^{\int_\alpha^x g(s)\mathrm{d}s}, \forall \alpha \leqslant x \leqslant \beta$$

□

定理 3.2 (Gronwall 不等式的微分形式)

令 $f \in C^1([\alpha, \beta])$ 非负，且满足

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \leqslant g(x)f(x), \forall \alpha \leqslant x \leqslant \beta$$

其中 $g(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 非负. 则有

$$f(x) \leqslant f(\alpha)e^{\int_\alpha^x g(s)\mathrm{d}s}, \forall \alpha \leqslant x \leqslant \beta$$

♡

证明 注意到

$$\left(f(x)e^{-\int_\alpha^x g(s)\mathrm{d}s}\right)' = e^{-\int_\alpha^x g(s)\mathrm{d}s}\left(f'(x) - f(x)g(x)\right) \leqslant 0.$$

故

$$f(x)e^{-\int_\alpha^x g(s)\mathrm{d}s} \leqslant f(\alpha), \forall \alpha \leqslant x \leqslant \beta.$$

即

$$f(x) \leqslant f(\alpha) e^{\int_\alpha^x g(s) \mathrm{d} s}, \forall \alpha \leqslant x \leqslant \beta$$

□

3.2 Picard 存在和唯一性定理

本节考察 Cauchy 初值问题. 即方程3.1 的解的理论.

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x}=f(x, y) \\ y\left(x_0\right)=y_0 .\end{cases} \tag{3.1}$$

定义 3.1 (Lipschitz 条件)

若存在常数 $L>0$. 使得函数 $f(x, y)$ 在区域 D 内满足

$$\left|f\left(x, y_1\right)-f\left(x, y_2\right)\right| \leqslant L\left|y_1-y_2\right|,$$

称函数 $f(x, y)$ 在区域 D 内对 y 满足 Lip- 条件. ♣

注 若 D 为有界闭凸区域, $f_y^{\prime}$ 连续, 则 f 关于 y 满足 Lip-条件. 这是因为

$$\left|f\left(x, y_1\right)-f\left(x, y_2\right)\right|=\left|\int_{y_2}^{y_1} f_y^{\prime}(x, s) \mathrm{d} s\right| \leqslant M\left|y_1-y_2\right|$$

M 为界.

注 一般情况下, Lipschitz 条件是推不出 $f_y^{\prime}$ 连续的, 例如: $f(x, y)=|y|$

定理 3.3 (Picard 存在唯一性定理)

若 $f(x, y)$ 在矩形区域 $R:\left|x-x_0\right| \leqslant a,\left|y-y_0\right| \leqslant b$ 上连续, 且对于 y 满足 Lip- 条件, 则初值问题3.1 在区间 $\left[x_0-h, x_0+h\right]$ 上有并且只有一个解, 其中

$$h=\min \left\{a, \frac{b}{M}\right\}, M>\max _{(x, y) \in R}|f(x, y)| .$$

♡

注

1. Picard 条件只是充分的.
2. 该定理为 ODE 中最重要的定理之一, 在偏微分方程中也有重要的应用.
3. 该定理描述了, 在函数 $f(x, y)$ 连续的条件下, 且对 y 满足 Lip-条件, 则在一个区域内方程存在唯一解, 该区域取决于 a 与 $\dfrac{b}{M}$ 的大小关系.

证明

1. **Step 1.** 转化为等价积分方程

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^x f(x, y(x)) \mathrm{d} x .$$

   (a). 若满足方程3.1, 再利用初值条件, 两边同时积分即可得到积分方程.
   (b). 若满足该积分方程, 且 $y(x)$ 为连续函数, 且 $f(x, y(x))$ 应该满足定义域的限制, 由 $y(x)$ 的连续性知 $f(x, y(x))$ 连续, 则变上限积分函数可导, 即 $y(x)$ 可导, 且满足方程 3.1.

2. **Step 2.** 用逐次迭代法构造 Picard 序列

$$def. \begin{cases} y_0(x) = y_0 \\ y_n(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f\left(x, y_{n-1}(x)\right) \mathrm{d}x. \end{cases}$$

下面需要验证定义的合理性, 即证明 $|y_n(x) - y_0| \leqslant b, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(a). 当 $n = 1$, $f(x, y_0(x)) \in C\left[x_0 - h, x_0 + h\right]$. 故

$$|y_1(x) - y_0| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} \left| f\left(x, y_0(x)\right) \right| \mathrm{d}x \right| \leqslant M \left| x - x_0 \right| \leqslant Mh \leqslant b.$$

故 $f(x, y_1(x)) \in C\left[x_0 - h, x_0 + h\right]$

(b). 同理

$$|y_2(x) - y_0| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} \left| f\left(x, y_1(x)\right) \right| \mathrm{d}x \right| \leqslant M \left| x - x_0 \right| \leqslant Mh \leqslant b.$$

(c). 利用归纳: 设 $|y_n(x) - y_0| \leqslant b$, 考察 $|y_{n+1}(x) - y_0|$. 有

$$|y_{n+1}(x) - y_0| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} \left| f\left(x, y_n(x)\right) \right| \mathrm{d}x \right| \leqslant M \left| x - x_0 \right| \leqslant Mh \leqslant b$$

$n = 1, 2, \ldots$

综上，对 $\forall n = 1, 2, \ldots$ 都有 $y_n(x) \in C\left[x_0 - h, x_0 + h\right]$，且满足

$$|y_n(x) - y_0| \leqslant b$$

3. **Step 3.** 证明 Picard 序列在区间上一致收敛到积分方程的解.

注意到

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[y_{k+1}(x) - y_k(x)\right] + y_0(x)$$

故序列 $\{y_n\}$ 的一致收敛性等价于级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |y_{n+1}(x) - y_n(x)|$ 的一致收敛性.

下用归纳的办法证明

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leqslant \frac{M}{L} \frac{\left(L \left| x - x_0 \right|\right)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$n = 0$ 时已证.

设命题对 $n - 1$ 成立，对 n 的情形有：

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(x) - y_n(x)| &= \left| \int_{x_0}^{x} \left[f\left(x, y_n(x)\right) - f\left(x, y_{n-1}(x)\right) \right] \mathrm{d}x \right| \\ &\leqslant L \left| \int_{x_0}^{x} |y_n(x) - y_{n-1}(x)| \mathrm{d}x \right| \\ &\leqslant L \left| \int_{x_0}^{x} \left| \frac{M}{L} \frac{\left(L \left| x - x_0 \right|\right)^{n}}{n!} \right| \mathrm{d}x \right| \\ &= \frac{M}{L} \frac{\left(L \left| x - x_0 \right|\right)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

所以有

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leqslant \frac{M}{L} \frac{\left(L \left| x - x_0 \right|\right)^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant M \frac{L^n h^{n+1}}{(n+1)!}$$

下面考虑正项级数 $\sum u_n = \sum \dfrac{M L^n h^{n+1}}{(n+1)!}$ 的收敛性.

由于 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{Lh}{n+2}\to 0,(n\to\infty)$ 则由达朗贝尔判别法知, 该正项级数收敛.
由 Weierstrss 判别法可得 Picard 序列一致收敛, 设其收敛到函数 $\varphi(x)$.
由一致收敛的性质得, $\varphi(x)\in C\left[x_0-h,x_0+h\right]$.
又由于 $\left|y_n(x)-y_0\right|\leqslant b$, 则 $|\varphi(x)-y_0|\leqslant b$.

4. **Step 4.** 下验证 $\varphi(x)$ 为积分方程的解.

$$
\begin{gathered}
\left|f\left(x,y_n(x)\right)-f(x,\varphi(x))\right|\leqslant L\left|y_n(x)-\varphi(x)\right|\Longrightarrow 0, \\
f\left(x,y_n(x)\right)\Longrightarrow f(x,\varphi(x))
\end{gathered}
$$

又由

$$
y_{n+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^x f\left(x,y_n(x)\right)\mathrm{d}x
$$

两边取极限得

$$
\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^x f(x,\varphi(x))dx.
$$

从而 $\varphi(x)$ 为积分方程的解.

5. **Step 5.** 解的唯一性.

(a). 方法一

设 $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ 为方程的不同的解, 设 $\omega(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$, 则

$$
|\omega(x)|=\left|\int_{x_0}^x\left[f\left(x,\varphi_1(x)\right)-f\left(x,\varphi_2(x)\right)\right]\mathrm{d}x\right|\leqslant L\int_{x_0}^x\left|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\right|\mathrm{d}x=L\int_{x_0}^x|\omega(x)|\mathrm{d}x
$$

由 Gronwall 不等式知

$$
|\omega(x)|\leqslant\left|0e^{L\int_{x_0}^x 1\mathrm{d}s}\right|=0
$$

即 $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$.

(b). 方法二

设

$$
y=\varphi(x),y=\psi(x),x\in[x_0,x_0+h]
$$

为 Cauchy 问题 3.1的解. 则

$$
\varphi'(x)=f(x,\varphi(x)),\quad \psi'(x)=f(x,\psi(x)),\quad \varphi\left(x_0\right)=\psi\left(x_0\right)=y_0
$$

令

$$
h(x)=(\varphi(x)-\psi(x))^2,x\in[x_0,x_0+h]
$$

则 $h(x)\geqslant 0,x\in[x_0,x_0+h]$.

又

$$
\begin{aligned}
h'(x)&=2(\varphi(x)-\psi(x))\left(\varphi'(x)-\psi'(x)\right)\\
&\leqslant 2\left|(\varphi(x)-\psi(x))\right|\cdot\left|(f(x,\varphi(x))-f(x,\psi(x)))\right|\\
&\leqslant 2L(\varphi(x)-\psi(x))^2\\
&=2Lh(x)
\end{aligned}
$$

从而有

$$\begin{aligned}\left(h(x)e^{-2Lx}\right)' &\leqslant 0,\\ h(x)e^{-2Lx} &\leqslant h\left(x_0\right)e^{-2Lx_0}=0,\end{aligned}$$

综上 $h(x)=0$，即 $\varphi(x)=\psi(x)$.

(c). 方法三

设 $\psi(x)$ 是另一个不同于 $\varphi(x)$ 的解.

易证 $y_n(x)$ 一致收敛到 $\psi(x)$, 再由极限唯一性可知 $\psi(x)=\varphi(x)$.

□

注 唯一性的证明的方法二有些瑕疵.

例题 3.1 对 Riccati 方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+y^2$$

$f(x,y)=x^2+y^2$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上是局部 Lip 的 (即在任意一点 (x_0,y_0), 存在一个包含该点的矩形, 该矩形内满足 Lip 条件).

由 Picard 存在唯一性定理，对于任意一点 (x_0,y_0) ，在 $[x_0-h,x_0+h]$ 上存在唯一解。

注 局部 Lip 与全局 Lip 的区别在于, 局部 Lip 找不到一个 L, s.t. $\forall y_1,y_2\in\mathbb{R}$, 均有 Lip 条件成立, 如本题.

例题 3.2 考察

$$y'=x^2+y^2, R:|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1$$

试利用存在唯一性定理确定过 $(0,0)$ 的解的存在区间, 并求出在此区间上与真正解的误差不超过 0.05 的近似解.

解 由题意知:

$$a=1,b=1,x_0=y_0=0,M>\max_{(x,y)\in R}\left(x^2+y^2\right)=2$$

$$\max_{(x,y)\in R}\left|\frac{\partial\left(x^2+y^2\right)}{\partial y}\right|=2\Longrightarrow h=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\}=\frac{1}{2}$$

则解的存在区间为 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. 由于

$$\left|\varphi_3(x)-\varphi(x)\right|\leqslant\frac{1}{(3+1)!}=\frac{1}{24}<0.05$$

下面求 $\varphi_3(x)$

$$\begin{aligned}\varphi_0(x)&=y_0=0\\ \varphi_1(x)&=y_0+\int_{x_0}^x f\left(x,\varphi_0(x)\right)\mathrm{d}x=\int_0^x\left(x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3\\ \varphi_2(x)&=\int_0^x\left(x^2+\left(\frac{1}{3}x^3\right)^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{63}x^7\\ \varphi_3(x)&=\int_0^x\left(x^2+\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{63}x^7\right)^2\right)\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{63}x^7+\frac{2}{2079}x^{11}+\frac{1}{59535}x^{15}\end{aligned}$$

3.3 Peano 存在定理