# 实分析


作者：王子毅

组织：扬州大学



时间：May 11, 2024

版本：0.0


Bio：Information

ElegantLATEX Program

求知若饥，虚心若愚

# 目录

# 第 1 章 Lebesgue 测度

## 1.1 外测度

**定义 1.1 (Lebesgue 外测度)**

设 $E \subset \mathbb{R}^n$. 若 $\{I_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可数个开区间, 且有

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k,$$

则称 $\{I_k\}$ 为 $E$ 的一个 **L-覆盖** (显然, 这样的覆盖有很多, 且每一个 $L-$ 覆盖 $\{I_k\}$ 确定一个非负广义实值 $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k|$ (可以是 $+\infty$, $|I_k|$ 表示 $I_k$ 的体积)). 称

$$m^*(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| : \{I_k\} \text{ 为} E \text{ 的} L-\text{覆盖}\right\}$$

为点集 $E$ 的 Lebesgue 外测度, 简称外测度.

注 这里不能像数学分析那样用覆盖 $E$ 的有限个区间体积和的下确界定义 $E$ 的测度. 例如覆盖 $[0,1]$ 区间中有理数集的有限个区间与它们的端点一起也一定覆盖 $[0,1]$, 结果 $[0,1]$ 中有理数集的测度为 1 , 同理 $[0,1]$ 中无理数集的测度也为 1 , 由可加性得 $[0,1]$ 区间的长度为 2 , 这显然是不合情理的.

注 若 $E$ 的任意的 $L$-覆盖 $\{I_k\}$ 均有

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| = +\infty,$$

则 $m^*(E) = +\infty$, 否则 $m^*(E) < +\infty$.

**命题 1.1**

1. $\mathbb{R}$ 中的单点集的外测度为零, 即 $m^*(\{x_0\}) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$.
2. $\mathbb{R}$ 中的有限点集的外测度为零, 即 $m^*(\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}) = 0, x_i (i = 1, 2, \ldots, k) \in \mathbb{R}$.
3. $\mathbb{R}$ 中的可数点集的外测度为零, 即 $m^*(\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}) = 0, x_i (i = 1, 2, \ldots, n, \ldots) \in \mathbb{R}$.

注 $\mathbb{R}^n$ 中至多可数点集的外测度为 0.

证明

1. $\forall \varepsilon > 0$, 取 $I = [x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2}]$, 则 $\mid I \mid = \varepsilon, \{x_0\} \subset I$

$$m^*(\{x_0\}) \leqslant \mid I \mid = \varepsilon$$

   由 $\varepsilon$ 任意性, $m^*(\{x_0\}) = 0$
2. 同理, 取 $I_i = [x_i - \frac{\varepsilon}{2i}, x_i + \frac{\varepsilon}{2i}]$

$$m^*(\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \mid I_i \mid = \varepsilon$$

3. 同理, 取 $I_i = [x_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, x_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}]$

$$m^*(\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mid I_i \mid = \varepsilon$$

**命题 1.2 ($\mathbb{R}^n$ 中点集的外测度性质)**

1. 非负性: $m^*(E) \geqslant 0, m^*(\varnothing) = 0$;
2. 单调性: 若 $E_1 \subset E_2$, 则 $m^*(E_1) \leqslant m^*(E_2)$;
3. 次可数可加性:
$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i)$$
.

**证明**

1. Trivial.
2. 任取 $E_2$ 的开区间覆盖 $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$, 一定也是 $E_1$ 的开区间覆盖, 故 $m^*(E_1) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} |I_i|$
由外测度定义和下确界定义
$$m^*(E_2) \geqslant m^*(E_1)$$
3. $\forall \varepsilon > 0, \exists E_i$ 的开区间覆盖 $\bigcup_{m=1}^{\infty} I_{i,m} \supset E_i$,s.t.
$$m^*(E_i) \geqslant \sum_{m=1}^{\infty} |\ I_{i,m}\ | - \frac{\varepsilon}{2^i}$$
故
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{m,i=1}^{\infty} I_{i,m}$$
则
$$\begin{aligned} m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) &\leqslant \sum_{i,m=1}^{\infty} |I_{i,m}| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i) + \varepsilon \end{aligned}$$
由 $\varepsilon$ 任意性,
$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i)$$
.

□

**定理 1.1 (正则性)**

$I$ 是任意区间 (开、闭、半开半闭), $m^*(I) = |I|$

**证明**

1. 先证 $I$ 是闭区间的情形
$\forall \varepsilon > 0, \exists$ 开区间 $I' \supset I$, s.t. $|I'| \leqslant |I| + \varepsilon$
$$m^*(I) \leqslant |I'| \leqslant |I| + \varepsilon$$

由 $\varepsilon$ 任意性，

$$m^*(I) \leqslant |I|$$

反过来，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists I$ 的开区间覆盖 $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ s.t.

$$m^*(I) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| - \varepsilon$$

由有限覆盖定理，存在 $I$ 的有限覆盖 $\{I_i\}_{i=1}^{m}$
又因为，

$$I = \bigcup_{i=1}^{m} (I \cap I_i)$$

$$| I | \leqslant \sum_{i=1}^{m} |I \cap I_i| \leqslant \sum_{i=1}^{m} |I_i| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < m^*(I) + \varepsilon$$

$$m^*(I) \geqslant \sum_{i=1}^{m} |I_i| - \varepsilon$$

由 $\varepsilon$ 任意性，

$$m^*(I) \geqslant |I|$$

综上，

$$m^*(I) = |I|$$

□

2. 下证一般情况，$I$ 是任意区间
$\forall \varepsilon > 0$，$\exists$闭区间$I_1, I_2$，使得 $I_1 \subset I \subset I_2$

$$|I_2| - \varepsilon < |I| < |I_1| + \varepsilon$$

$$|I| - \varepsilon \leqslant m^*(I_1) \leqslant m^*(I) \leqslant m^*(I_2) < |I| + \varepsilon$$

由 $\varepsilon$ 任意性，

$$m^*(I) = |I|$$

□

**例题 1.1** 设 $E$ 为 $[0,1]$ 中的全体有理数, 求 $E$ 的外测度.

**解** 设 $E = |r_1, r_2, \cdots|$. 对任给 $\varepsilon > 0$, 令

$$I_i = \left(r_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, r_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\right),$$

则 $|I_i| = \frac{\varepsilon}{2^i}$, 且 $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, 而

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon, m^*E \leqslant \inf \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|,$$

所以

$$m^*E = 0.$$

## 1.2 可测集

**定义 1.2 (可测集的等价定义)**

1. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 任意开区间 $I \subset \mathbb{R}^n$
$$m^*(I) = m^*(I \cap E) + m^*\left(L \cap E^c\right)$$
2. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 若对任意的点集 $T \subset \mathbb{R}^n$, 有
$$m^*(T) = m^*(T \cap E) + m^*\left(T \cap E^c\right)$$
3. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$,$\forall A \subset E, \forall B \subset E^c$
$$m^*(A) + m^*(B) = m^*(A \cup B)$$

只要满足上述三个等价条件的一个，则称 $E$ 为 Lebesgue 可测集 (或 $m^*$-可测集), 简称为可测集, 其中 $T$ 称为试验集 (这一定义可测集的等式也称为 Carathéodory 条件). 可测集的全体称为可测集类, 简记为 $\mathscr{M}$.

注 可测集 $E$ 的外测度叫做 $E$ 的测度，记作 $M(E)$ ♣

证明 下面证明三个条件的等价性质

1. $1 \Longleftrightarrow 2$

   $2 \Longrightarrow 1$ 是显然的

   下面证明 $1 \Longrightarrow 2$

   (a).
   $$m^*(T) \leqslant m^*(T \cap E) + m^*\left(T \cap E^c\right) \quad \text{(次可数可加性)}$$
   (b). $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 开区间覆盖，使得
   $$m^*(T) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty}\left(I_i\right) - \varepsilon.$$
   $$T \cap E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}\left(I_i \cap E\right)$$
   $$m^*\left(T \cap E\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m^*\left(I_i \cap E\right)$$
   $$m^*\left(T \cap E^c\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m^*\left(I_i \cap E^c\right)$$
   $$m^*\left(T \cap E\right) + m^*\left(T \cap E^c\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*\left(I_i\right) \leqslant m^*(T) + \varepsilon$$
   □

2. $2 \Longleftrightarrow 3$

   (a). $2 \Longrightarrow 3$

取 $T=A\cup B$

$$m^*(A\cup B)=m^*((A\cup B)\cap E)+m^*\left((A\cup B)\cap E^c\right)$$
$$=m^*(A)+m^*(B)$$

(b). $3\Longrightarrow 2$

取 $A=T\cap E, B=T\cap E^c$

$$m^*(A)+m^*(B)=m^*(A\cup B)$$
$$m^*\left(T\cap E\right)+m^*\left(T\cap E^c\right)=M^*(T)$$

□

**命题 1.3 (可测集的性质)**

1. $\varnothing\in\mathscr{M}$.
2. 若 $E\in\mathscr{M}$，则 $E^c\in\mathscr{M}$
3. 若 $E_1\in\mathscr{M}, E_2\in\mathscr{M}$, 则 $E_1\cup E_2, E_1\cap E_2$ 以及 $E_1\backslash E_2$ 皆属于 $\mathscr{M}$.
   (由此知, 可测集任何有限次取交、并运算后所得的集皆为可测集.)
4. 若 $E_i\in\mathscr{M}(i=1,2,\cdots)$, 且 $E_i\cap E_j=\varnothing(i\neq j)$, 则其并集也属于 $\mathscr{M}$. 且还有
$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}m^*\left(E_i\right),$$
   即 $m^*$ 在 $\mathscr{M}$ 上满足可数可加性 (或称为 $\sigma$-可加性).

**证明**

1. Trivial.
2. 
$$m^*(T)=m^*\left(T\cap(E^c)^c\right)+m^*(T\cap E^c)$$
3. (a). 证明 $E_1\cup E_2\in\mathscr{M}$
$$\begin{aligned}m^*(T)&=m^*\left(T\cap E_1\right)+m^*\left(T\cap E_1^c\right)\\&=m^*\left(T\cap E_1\right)+m^*\left[(T\cap E_1^c)\cap E_2\right]+m^*\left[(T\cap E_1^c)\cap E_2^c\right],\\&=m^*\left[T\cap(E_1\cup(E_1^c\cap E_2))\right]+m^*\left[T\cap(E_1\cup E_2)^c\right]\\&=m^*\left[T\cap(E_1\cup E_2)\right]+m^*\left[T\cap(E_1\cup E_2)^c\right]\end{aligned}$$
   (b). 证明 $E_1\cap E_2\in\mathscr{M}$
   为证 $E_1\cap E_2$ 是可测集, 只需注意 $E_1\cap E_2=(E_1^c\cup E_2^c)^c$ 即可.
   (c). 证明 $E_1\backslash E_2\in\mathscr{M}$
   又由 $E_1\backslash E_2=E_1\cap E_2^c$ 可知, $E_1\backslash E_2$ 是可测集
   (d). 有限次运算的证明直接数学归纳法
   Trivial.
4. (a). 先证明可测性

$$
\begin{aligned}
m^*(T) &= m^*\left(T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right)\right) + m^*\left(T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right)^c\right) \\
&\geqslant m^*\left(T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right)\right) + m^*\left(T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)^c\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} m^*\left(T \cap E_i\right) + m^*\left(T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)^c\right)
\end{aligned}
$$

两边对 $k$ 取极限

$$
\begin{aligned}
m^*(T) &\geqslant \sum_{i=1}^{\infty} m^*\left(T \cap E_i\right) + m^*\left(T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)^c\right) \\
&\geqslant m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (T \cap E_i)\right) + m^*\left(T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)^c\right) \\
&= m^*\left(T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)\right) + m^*\left(T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)^c\right)
\end{aligned}
$$

又因为

$$
\begin{aligned}
m^*(T) &= m^*\left(T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right)\right) + m^*\left(T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right)^c\right) \\
&\leqslant m^*\left(T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)\right) + m^*\left(T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)^c\right)
\end{aligned}
$$

综上

$$
m^*(T) = m^*\left(T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)\right) + m^*\left(T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)^c\right)
$$

□

(b). 再证明可数可加性

令

$$
T = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \quad T \cap E_i = E_i
$$

$$
m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} m\left(E_i\right)
$$

由外测度的次可数可加性

$$
m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m\left(E_i\right)
$$

综上

$$
m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m\left(E_i\right)
$$

□

**定理 1.2**

设 $\{E_i\}$ 是一列可测集合, 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ 也是可测集合.

**证明** 取 $E_0=\varnothing$，构造 $\tilde{E}_i=E_i-\bigcup\limits_{k=1}^{i-1} E_k$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i=\bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{E}_i$$

$\{\tilde{E}_i\}_{i=1}^{\infty}$ 互不相交且可测，故 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \tilde{E}_i$ 可测，即 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ 可测

□

**推论 1.1**

设 $\{E_i\}$ 是一列可测集合, 则 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ 也是可测集合.

**定理 1.3 (递增可测集列的测度运算)**

若有递增可测集列 $E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_k\cdots$, 则

$$m\left(\lim_{k\to\infty} E_k\right)=\lim_{k\to\infty} m\left(E_k\right).$$

**证明** $\lim\limits_{k\to\infty} E_k=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ 可测

设 $E_0=\varnothing, \tilde{E}_k=E_k-E_{k-1}$，则 $\{\tilde{E}_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是不相交的可测集

$$\lim_{k\to\infty} E_k=\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\tilde{E}_k\right).$$

再应用测度的可数可加性, 我们有

$$\begin{aligned}
m\left(\lim_{k\to\infty} E_k\right) &= m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(E_k-E_{k-1}\right)\right)\\
&=\sum_{k=1}^{\infty} m\left(E_k-E_{k-1}\right)\\
&=\lim_{i\to\infty}\sum_{k=1}^{i} m\left(E_k-E_{k-1}\right)\\
&=\lim_{i\to\infty} m\left(\bigcup_{k=1}^{i}\left(E_k-E_{k-1}\right)\right)\\
&=\lim_{i\to\infty} m(E_k)
\end{aligned}$$

□

**推论 1.2 (递减可测集列的测度运算)**

若有递减可测集列 $E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_k\supset\cdots$, 且 $m\left(E_1\right)<+\infty$, 则

$$m\left(\lim_{k\to\infty} E_k\right)=\lim_{k\to\infty} m\left(E_k\right).$$

**证明** 显然, $\lim\limits_{k\to\infty} E_k = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ 是可测集.

构造 $\tilde{E_k} = E_1 - E_k$，则 $\{\tilde{E_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 递增

$$
\begin{aligned}
m\left(\lim_{k\to\infty} \tilde{E_k}\right) &= \lim_{k\to\infty} m\left(\tilde{E_k}\right) \\
m\left(E_1 - \lim_{k\to\infty} E_k\right) &= \lim_{k\to\infty} m(E_1 - E_k) \\
m(E_1) - m\left(\lim_{k\to\infty} E_k\right) &= m(E_1) - \lim_{k\to\infty} m\left(E_k\right) \\
m\left(\lim_{k\to\infty} E_k\right) &= \lim_{k\to\infty} m\left(E_k\right).
\end{aligned}
$$

□

**注** 上面的证明中用到了

$$m((E_1 - E_k) \cup E_k) = m(E_1 - E_k) + m(E_k) = m(E_1)$$

**注** 思考：$m(S_1) < \infty$，这个条件能换成什么

**注** 给出递减序列的一个反例

$$
\begin{aligned}
&S_n = (n, \infty) \quad S_1 \supset S_2 \supset \ldots S_n \\
&\lim_{n\to\infty} S_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \varnothing, \quad m\left(\lim_{n\to\infty} S_n\right) = 0 \\
&m\left(S_n\right) = \infty
\end{aligned}
$$

**定理 1.4**

若有可测集列 $\{E_k\}$, 且有 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} m\left(E_k\right) < +\infty$, 则

$$m\left(\overline{\lim_{k\to\infty}} E_k\right) = 0.$$

**证明**

$$m\left(\overline{\lim_{k\to\infty}} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} m\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i\right) \leqslant \lim_{k\to\infty} \sum_{i=k}^{\infty} m\left(E_i\right) = 0$$

**推论 1.3**

设 $\{E_k\}$ 是可测集列, 则

$$m\left(\underline{\lim_{k\to\infty}} E_k\right) \leqslant \underline{\lim_{k\to\infty}} m\left(E_k\right).$$

**证明** 因为 $\bigcap\limits_{j=k}^{\infty} E_j \subset E_k (k = 1, 2, \cdots)$, 所以有

$$m\left(\bigcap_{j=k}^{\infty} E_j\right) \leqslant m\left(E_k\right) \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

令 $k\to\infty$, 则得 $\left(\bigcap_{j=k}^{\infty}E_j\text{随}k\text{增大而递增}\right)$

$$m\left(\varliminf_{k\to\infty}E_k\right)=\lim_{k\to\infty}m\left(\bigcap_{j=k}^{\infty}E_j\right)\leqslant\varliminf_{k\to\infty}m\left(E_k\right).$$

注 一般的集合列 $E_k$，且 $m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)<\infty$，则

$$m\left(\varliminf_{i\to\infty}E_i\right)\leqslant\varliminf_{i\to\infty}m\left(E_i\right)\leqslant\varlimsup_{i\to\infty}m\left(E_i\right)\leqslant m\left(\varlimsup_{i\to\infty}E_i\right)$$

## 1.3 可测集类

**定义 1.3 ($\sigma$ 代数)**

$\Omega$ 是 $X$ 的某些子集组成的集合类，满足

1. $X$ 在其中
2. 可数并封闭
   若 $E_n\in\Omega,n=1,2,\cdots$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\in\Omega.$
3. 取余集封闭
   $E\in\Omega$, 则 $E^c\in\Omega;$

则称 $\Omega$ 为 $X$ 上的 $\sigma$ 代数 ♣

注

$$\varnothing\in\Omega,\quad\Omega\text{在至多可数并、交、差、上下极限封闭}$$

注 **为什么叫 $\sigma$ 代数**

$$\sigma:\text{德语}Summe:\text{总和, 首字母}$$
$$\text{“并“是集合”求和”，出现在“可数并”}$$
$$F:\text{法语-fermé: 闭}$$
$$F_\sigma\text{集: 闭集可数并}$$
$$\text{G: 德语-Gebiet: 区域}$$
$$\delta:\text{德语-Durchschnitt: 横断, 相交}$$
$$G_\delta\text{开集可数交}$$

注 可测集类是 $\mathbb{R}^n$ 上的 $\sigma$ 代数

**定义 1.4**

$\Sigma$ 是 X 中某些子集组成的集合类, 称 X 上所有包含 $\Sigma$ 的 $\sigma$ 代数之交为 $\Sigma$ 生成的 $\sigma$ 代数 (包含 $\Sigma$ 的最小 $\sigma$ 代数) ♣

注 给定 $\Sigma$，确实存在 $\Sigma$ 生成的 $\sigma$ 代数。

因为取 $X$ 的幂集 $P(x)=2X^x$, x 的所有子集全体，则 $z^X$ 是 $X$ 上的 $\sigma$ 代数，且 $\Sigma\subset 2^X$ 因此

$$\{\Sigma\subset\Omega:\Omega\text{是 X 上}\sigma\text{代数}\}\neq\varnothing$$

$$\varnothing \neq \bigcap_{\substack{\Sigma\subset\Omega \\ \Omega\text{是 X 上}\sigma\text{代数}}} \Omega \supset \Sigma$$

**定义 1.5**

$\mathbb{R}^n$ 上所有开集生成的 $\sigma$ 代数称 $Borel-\sigma$ 代数，其中集合称为 $Borel$ 集

**注** 区间,开集闭集、$G_\delta$ 型集,$F\sigma$ 型集,$Borel$ 集应该为可测集

**注** 开集 = 可数个区间之并

**注** $Borel$ 集应该为可测集

**注** 闭集、$G_\delta$ 型集,$F\sigma$ 型集为 $Borel$ 集

**定理 1.5**

$\mathbb{R}^n$ 中的区间 (开、闭、半开半闭) 可测

**证明** $n=1$ 对区间 $I$，任取开区间 $I'=(c,d), I=(a,b)$

(1) $I\cap I'=\varnothing$ $\quad m^*\left(I'\right)=\left|I'\right|+0=m^*\left(I'\cap I^c\right)+m^*\left(I'\cap I\right)$

(2) $I\cap I'\neq\varnothing$，不妨设 $a<c<b<d$ $\quad I_1=(c,b)$ $\quad I_2=(b,d)$

$$m^*\left(I_1\right)+m^*\left(I_2\right)=\left|I_1\right|+\left|I_2\right|=\left|I'\right|=m^*\left(I'\right)$$

证明不严谨

**定理 1.6**

$Borel$ 集都是可测集

**命题 1.4**

1. 零测集是可测集
2. 零测集的任何子集都是零测集
3. 至多可数个零测集之并是零测集

**证明** 零测集 $A$，任取 $T$

$$0\leqslant m^*(T\cap A)\leqslant m^*(A)=0$$
$$0\leqslant m^*\left(T\cap A^c\right)\leqslant m^*(T)$$
$$m^*(T)\geqslant m^*(T\cap A)+m^*\left(T\cap A^c\right)$$
$$m^*(T)\leqslant m^*(T\cap A)+m^*\left(T\cap A^c\right)\quad \text{(次可数可加)}$$
$$m^*(T)=m^k(T\cap A)+m^*\left(T\cap A^c\right)$$

其余的类似可证，都是显然的 □

**注**

$$E=\mathring{E}\cap(\partial E\cap E)\text{ 可能有问题}$$

1. $E$ 的开核 $\mathring{E}$(E 的所有内点，巨的“内部”）是开集，即它是可测集
2. $E$ 的“外部”(E 所有外点) 是开集，故可测
3. “边”会出问题 $\partial E\cap E$

$$\inf\{m(G): E \subset G, G \text{ 开集}\} \quad \text{从外向内测之结果}$$
$$\sup\{m(k): K \subset E, K \text{ 紧集}\} \quad \text{从内向外测之结果}$$

**引理 1.1**

若 $E$ 是可测集

1. 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $G$, 使 $G \supset E$, 且 $m(G-E) < \varepsilon$.
2. 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在闭集 $F$, 使 $E \supset F$, 且 $m(E-F) < \varepsilon$

♡

**证明** 只证明第一个，另一个是对偶情况

1. 若 $m(E) < \infty$

   存在 $E$ 的开区间覆盖 $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < m(E) + \varepsilon$$
$$\text{令} G = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \text{，G 是开集}$$
$$m(E) \leqslant m(G) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < m(E) + \varepsilon$$
$$m(G) - m(E) < \varepsilon$$
$$m(G-E) < \varepsilon$$

2. 若 $m(E) = \infty$

   记 $B(0,n) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leqslant n\}$ 即中心在原点、半径为 $n$ 的闭球

   令 $E_n = E \cap B(0,n)$

   则 $m(E_n) < \infty$. 且 $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$

   $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 开集 $G_n$，$G_n \supset E_n$，$\quad m(G_n - E_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$

   $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ 是开集, 且 $G \supset E$

$$G - E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n - E_n)$$

$$m(G-E) \leqslant m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n - E_n)\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(G_n - E_n) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

□

**注** 事实上，在 $\mathbb{R}^n$ 中一个无界集可以被分解为可数多个互不相交的有界可测集的并集

在这个证明中，可以直接构造出 $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \, (m(E_n) < \infty)$

**定理 1.7**

若 $E$ 是可测集，则

$$\begin{aligned} m(E) &= \inf\{m(G): E \subset G, G \text{ 开集}\}(\text{外正规性}) \\ &= \sup\{m(K): K \subset E, K \text{ 紧集}\}(\text{内正规性}) \end{aligned}$$

♡

**证明**

1. 外正规性

   $m(E)<\infty, \forall \varepsilon>0, \exists$ 开集 $G \supset E$, s.t. $m(G-E)<\varepsilon$

   $$m(G)=m(E)+m(G-E)<m(E)+\varepsilon$$

   即

   $$m(E)>m(G)-\varepsilon$$

   由单调性，$m(E) \leqslant m(G)$，由下确界定义可知 $m(E)=\inf\{m(G): E \subset G\}$

   当 $m(E)=\infty$ 时，显然

2. 内正规性

   (a). 当 $E$ 是有界集　$\forall \varepsilon>0, \exists$ 闭集 $K \subset E$, s.t. $m(E-K)<\varepsilon$

   所以 $K$ 是有界闭集 (紧集)。

   $$m(E)=m(K)+m(E-K)<m(K)+\varepsilon$$

   由单调性, $m(K) \leqslant m(E)$，由上确界定义等式成立。

   (b). 若 $E$ 是任意集合

   $E_n=E \cap B(0, n)$，则 $E_n$ 有界且 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$,　$E_1 \subset E_2 \ldots$

   $$m(E)=\lim_{n \rightarrow \infty} m\left(E_n\right)$$

   取紧集 $K_n$ 使得

   $$m\left(K_n\right) \geqslant m\left(E_n\right)-\frac{1}{n}$$

   而

   $$m\left(K_n\right) \leqslant m\left(E_n\right)$$

   $$\lim_{n \rightarrow \infty} m\left(K_n\right)=\lim_{n \rightarrow \infty} m\left(E_n\right)=m(E)$$

   此时 $m(E)=\sup\{m(K): E \subset K, K \text{紧集}\}$

**定理 1.8**

若 $E$ 是有界集，且有

$$m(E)=\inf\{m(G): E \subset G, G \text{ 开集}\}=\sup\{m(K): K \subset E, K \text{ 紧集}\}$$

则 $E$ 是可测集

**证明** 当 $E$ 是有界集。

分析:

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists$ 开集 $G_n \supset E$, 紧集 $K_n \subset E$

s.t.

$$m\left(G_n\right)<m(E_n)+\frac{1}{2 n} \quad m\left(K_n\right)>m(E_n)-\frac{1}{2 n}$$

$$0 \leqslant m(G_n) - m(K_n) < \frac{1}{n}$$

取

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n, \quad B = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$$

$A, B$ 可测，$m(A) = m(B)$

事实上

$$m(A) \leqslant m(G_n)$$
$$m(B) \geqslant m(K_n)$$
$$m(A) \geqslant m(B)$$

$$0 \leqslant m(A) - m(B) \leqslant m(G_n) - m(k_n) < \frac{1}{n}$$

故 $m(A) = m(B)$

$E - B \subset A - B$，$E$ 有界 $B$ 有界, 故 $m(B) < \infty$

$$m(A - B) = m(A) - m(B) = 0$$

于是 $E - B$ 是零测集 $\Longrightarrow E = B \cup (E - B)$ 可测

□

**定理 1.9**

E 是可测集。

1. 则存在 $G_\delta$ 型集 $G$, 使得 $G \supset E$, 且 $m(G - E) = 0$
2. 则存在 $F_\sigma$ 型集 $F$, 使得 $F \subset E$, 且 $m(E - F) = 0$

♡

**证明** 下面只证明第一个结论，另一个是类似的

$\forall n \in \mathbb{N}$，由引理，$\exists$ 开集 $G_n$,s.t.$m(G_m - E) < \frac{1}{n}$

取 $G = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ 是 $G_\delta$ 型集

$$G - E \subset G_n - E$$
$$m(G - E) \leqslant m(G_n - E) < \frac{1}{n}$$

□

**注** 上面两个定理告诉我们: 只要有了全部 $G_\delta$ 型集 (或 $F_\sigma$ 型集)（它们只是博雷尔集合类的一部分) 和全部 $L$ 零测度集, 那么, 一切 $L$ 可测集都可以获得. 它们一律可以表示成 $E = G - M$ 或 $E = F \cup M$ 的形式, 其中 $G$ 是 $G_\delta$ 型集, $F$ 是 $F_\sigma$ 型集, 而 $M$ 是零测度集.

## 1.4 不可测集

**定义 1.6 (等价关系)**

集合 X 上的一个等价关系是 $X \otimes X$ 上的一个子集 $R$，若 $(x, y) \in R$，记 $xRy$，满足

1. 反身性: $xRx$
2. 对称性: 若 $xRy$ 则 $yRx$
3. 传递性: 若 $xRy, yRz$, 则 $xRz$

称 $xRy$ 是相等价的, 记作 $x \sim y$

集合 $\{y \in R : xRy\}$ 称为 $x$ 所在的等价类

在等价关系中取一个元素, 这个元素是等价类代表元

**命题 1.5**

等价类要么相等, 要么不相交

**证明** $A_1 = \{y \in X : yRx\} \neq A_2 = \{y \in X : yRx'\}$

若交集非空, 取交集元素 $y$, 取 $y_1 \in A_1$ ，则 $y_1Ry$, 由于 $yRx'$ ，则 $y_1 \in A_2$，于是 $A_1 \subset A_2$

同理 $A_2 \subset A_1$

**注**

1. 集合的对等关系是等价关系
2. 爱不是等价关系
3. 模 3 余数相等是等价关系

**定理 1.10**

对任何集 $E \subset \mathbb{R}$, 具有 $m^*E = m^*(\tau_\alpha E)$, 且当 $E$ 为 $L$ 可测时, $\tau_\alpha E$ 也为 $L$ 可测的.

**证明** 任取 $E$ 开区间覆盖 $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$, 则 $\tau_\alpha I_i$ 仍为开区间, 以及 $\tau_\alpha E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(\tau_\alpha I_i)$, 所以

$$m^*(\tau_\alpha E) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}|\tau_\alpha I_i| = \sum_{i=1}^{\infty}|I_i|$$

$$m^*E = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|I_i| : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\right\} \geqslant m^*(\tau_\alpha E).$$

但 $\tau_\alpha E$ 再平移 $\tau_{-\alpha}$ 后就是 $E$, 所以 $m^*(\tau_\alpha E) \geqslant m^*E$. 这样就得到 $m^*E = m^*(\tau_\alpha E)$. 如果 $E$ 为 $L$ 可测, 那么对于任何 $T \subset \mathbb{R}$, 有

$$m^*T = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c).$$

由于 $\tau_\alpha(T \cap E) = \tau_\alpha T \cap \tau_\alpha E, \tau_\alpha(T \cap E^c) = \tau_\alpha T \cap \tau_\alpha E^c$, 因此从上式得到

$$m^*(\tau_\alpha T) = m^*(\tau_\alpha T \cap \tau_\alpha E) + m^*(\tau_\alpha T \cap \tau_\alpha E^c),$$

而上式中 $\tau_\alpha T$ 是任意集, 因此 $\tau_\alpha E$ 为 $L$ 可测.

**注** 定理说明, 集 $E \subset \mathbb{R}$ 经过平移后, 它的外测度不变, 而 $L$ 可测集经过平移后仍为 $L$ 可测集 (当然它的测度也不变). 这个性质称为勒贝格测度的平移不变性.

用类似的方法还可以证明勒贝格测度的反射不变性, 就是说, 如果记 $\tau$ 是 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的如下映射:

$$\tau : x \to -x, \quad \tau E = \{-x : x \in E\},$$

那么对任何 $L$ 可测集 $E \subset \mathbb{R}, mE = m(\tau E)$. 证明是显然的.

**下面开始构造不可测集**

**定义 1.7 (Vitali 集)**

在 $[0,1]$ 中引入等价关系:$x-y \sim x-y \in \mathbb{Q}$, 按照这个等价关系, 可以有等价类, 每个等价类中取一个代表元 (承认选择公理), 称这些所有代表元组成的集合为 $Z$, 叫作"Vitali 集" ♣

**命题 1.6**

Vitali 集是一个不可测集 ♠

**证明** 任取 $\xi + r \in Z$ , $r \in [-\xi, 1-\xi]$

$$\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \tau_r Z \supset [0,1]$$

$$\bigcup_{\substack{-r \leqslant r \leqslant 1 \\ r \in \mathbb{Q}}} \tau_r Z \supset [0,1]$$

$\tau_r Z$ 互不相交, 如果 $\xi \in \tau_{r_1} Z \cap \tau_{r_2} Z \quad r_1 \neq r_2$, 则 $\xi - r_1, \xi - r_2 \in Z$, 与 $\xi - r_1, \xi - r_2$ 矛盾

$$\xi - r_1 \{-r_2 \in Z, f - r_1 \sim \{-r_2\} / \hbar$$

$\mathbb{Q} \cap [-1,1]$ 中元素排序为: $r_1, r_2, r_3, \ldots,$ 令 $Z_n = \tau_{r_n} Z \subset [-1,2]$

$Z_n$ 有界且两两不相交, $[0,1] \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Z_n, m^*\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Z_n\right) > 0$

若 $Z$ 可测, 则 $Z_n$ 可测

$$\infty > m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*\left(Z_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(Z)$$

$$\Rightarrow m^*(Z) = 0 \Rightarrow m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n\right) = 0$$

矛盾! 故 $Z$ 不是一个可测集!

□

**注**

1. 事变上, 任何一个测度大于 0 的集合中, 都有不可测子集。
2. $\mathbb{R}^n$ 中也可以构造不可测集
3. 只要一种测度满足正则性、可数可加性、全等不变, 就一定有不可测集

**注** 有了 Vitali 集之后就可以构造下面一些反例

1. 可数可加性的反例

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n\right) \neq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(Z_n)$$

2. $E$ 满足外正规等于内正规，但是无界，则 $E$ 不一定可测
   取 $E = Z \cup [2, +\infty)$ 不是有界集 E 不可测

$$E \cap [0,1] = Z$$

$$\inf\{m(G) : G \supset E, G\text{开集}\} = \infty$$

$$\sup\{m(F) : K \subset E, K\text{闭集}\} = \infty$$

**例题 1.2** 求证 $\mathbb{R}$ 中可测集全体基数 =$\mathbb{R}$ 中子集全体基数

## 1.5 连续变换

**定义 1.8 (连续变换的定义)**

设有变换 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. 若对任一开集 $G \subset \mathbb{R}^n$, 逆像集

$$T^{-1}(G) \text{ 即 } \{x \in \mathbb{R}^n : T(x) \in G\}$$

是一个开集, 则称 $T$ 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的连续变换.

♣

**定理 1.11 (连续变换的判定定理)**

变换 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是连续变换的充分必要条件是, 对任一点 $x \in \mathbb{R}^n$ 以及任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|y - x| < \delta$ 时, 有

$$|T(y) - T(x)| < \varepsilon.$$

♡

**证明**

1. 必要性
   对任一点 $x \in \mathbb{R}^n$ 以及任意的 $\varepsilon > 0$, 有 $x$ 属于开集

$$T^{-1}(B(T(x), \varepsilon)),$$

   从而存在 $\delta > 0$, 使得

$$B(x, \delta) \subset T^{-1}(B(T(x), \varepsilon)).$$

   这说明, 当 $|y - x| < \delta$ 时, 有 $y \in T^{-1}(B(T(x), \varepsilon))$, 即

$$|T(y) - T(x)| < \varepsilon.$$

2. 充分性
   设 $G$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中任一开集, 且 $T^{-1}(G)$ 不是空集, 则对任一点 $x \in T^{-1}(G)$, 有 $T(x) \in G$, 因此, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B(T(x), \varepsilon) \subset G$. 根据充分性的假定, 对此 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|y - x| < \delta$ 时, 有

$$|T(y) - T(x)| < \varepsilon, \text{即} T(y) \in B(T(x), \varepsilon).$$

   这就是说 $B(x, \delta) \subset T^{-1}(G)$, 即 $T^{-1}(G)$ 是开集.

## 1.6 非 Borel 集的可测集

注 可测集类 =$Borel$ 集和零测集生成的 $\sigma$ 代数

**例题 1.3 零测集的例子**

1. 至多可数个点的集合
2. $Cantor$ 集 (子集)。

   想法: 找一个非 $Borel$ 集的零测集

**引理 1.2**

设 $f(x)$ 是定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的实值函数, $\Sigma$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中一些子集构成的 $\sigma$-代数, 且 $E \in \Sigma$. 若令

$$\mathscr{A} = \left\{A \subset \mathbb{R} : f^{-1}(A) \in \Sigma\right\},$$

则 $\mathscr{A}$ 是 $\sigma$ 代数.

**证明**

1. 因为 $f^{-1}(\mathbb{R}) = E \in \Sigma$, 所以 $\mathbb{R} \in \mathscr{A}$.
2. 若 $A \in \mathscr{A}$, 则由 $f^{-1}\left(A^c\right) = E - f^{-1}(A)$, 可知 $f^{-1}\left(A^c\right) \in \Sigma$, 从而得 $A^c \in \mathscr{A}$.
3. 若 $\{A_k\}$ 是 $\mathscr{A}$ 中一集合列 (即 $f^{-1}\left(A_k\right) \in \Sigma$ ), 则由

$$f^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}\left(A_k\right)$$

   可知 $f^{-1}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) \in \Sigma$, 从而得 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{A}$.

   上述三条性质说明 $\mathscr{A}$ 是一个 $\sigma$-代数.

**推论 1.4**

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数. 若 $A \subset \mathbb{R}$ 是 $Borel$ 集, 则 $f^{-1}(A)$ 也是 $Borel$ 集.

**证明** 令 $\Sigma$ 是 $\mathbb{R}$ 中的 $Borel$ $\sigma$-代数, $G$ 是 $\mathbb{R}$ 中的开集. 根据 $f$ 的连续性, $f^{-1}(G)$ 也是开集. 因此, 若令

$$\mathscr{A} = \left\{A : f^{-1}(A) \in \Sigma\right\},$$

则 $f^{-1}(G) \in \Sigma$. 从而 $G \in \mathscr{A}$, 上述引理指出 $\mathscr{A}$ 是一个 $\sigma$ 代数. 由此知一切 $Borel$ 集皆属于 $\mathscr{A}$ , 这说明若 $A$ 是 $Borel$ 集, 则 $f^{-1}(A) \in \Sigma$, 即 $f^{-1}(A)$ 是 $Borel$ 集.

注 连续函数不一定把 $Borel$ 集映成 $Borel$ 集

**Cantor 函数后续再补，纸质笔记 34 页**

**这节还没写完。。。。。。**

# 第 2 章 可测函数

## 2.1 可测函数定义与性质

**定义 2.1 (广义实值函数)**

$$f:E\to\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$$

♣

**定义 2.2 (有限函数)**

$$f:E\to\mathbb{R}$$

♣

注 有界一定有限, 有限不一定有界

$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}\quad x\mapsto\frac{1}{x}$ 有限但不是有界!

**定义 2.3 (可测函数的定义)**

设 $f(x)$ 是定义在可测集 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的广义实值函数. 若对于任意的实数 $t$, 点集

$$\{x\in E:f(x)>t\}\ (\text{或简写为}\{x:f(x)>t\}\text{或者}E[f>t]\ )$$

是可测集, 则称 $f(x)$ 是 $E$ 上的可测函数, 或称 $f(x)$ 在 $E$ 上可测.

♣

注 可测函数的本质是广义实数 $Borel$ 集的原像是可测集

注 $f(x)>t$ , 实际上 $f(x)\in(a,+\infty]$ , $f$ 可取 $t+\infty$.

注 这一定义中虽然指的是对任意 $t\in\mathbb{R}$, 但下一定理说明, 我们只需对 $\mathbb{R}$ 中的一个稠密集中的元 $r$, 指出集合 $\{x:f(x)>r\}$ 是可测集就可以了.

**定理 2.1**

设 $f(x)$ 是可测集 $E$ 上的函数, $D$ 是 $\mathbb{R}$ 中的一个稠密集. 若对任意的 $r\in D$, 点集 $\{x:f(x)>r\}$ 都是可测集, 则对任意的 $t\in\mathbb{R}$, 点集 $\{x:f(x)>t\}$ 也是可测集.

♡

**证明** 证明对任一实数 $t$, 选取 $D$ 中的点列 $\{r_k\}$, 使得

$$r_k\geqslant t(k=1,2,\cdots);\qquad \lim_{k\to\infty}r_k=t.$$

我们有

$$\{x:f(x)>t\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x:f(x)>r_k\}.$$

因为每个点集 $\{x:f(x)>r_k\}$ 都是可测集, 所以 $\{x:f(x)>t\}$ 是可测集.

□

**命题 2.1 (可测函数的充要条件)**

设 $f(x)$ 是定义在可测集 $E$ 上的实函数, 下列任一条件都是 $f(x)$ 在 $E$ 上可测的充要条件:

1. 对任何有限实数 $a$, $E[f\geqslant a]$ 都可测;
2. 对任何有限实数 $a$, $E[f<a]$ 都可测;

3. 对任何有限实数 $a, E[f \leqslant a]$ 都可测;
4. 对任何有限实数 $a, b(a < b), E[a \leqslant f < b]$ 都可测 (但充分性要假定 $f(x)$ 是有限函数).

**证明**

1. (a). 必要性

$$
\begin{aligned}
E[f \geqslant a] &= f^{-1}([a, +\infty]) \\
&= f^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a - \frac{1}{n}, +\infty\right]\right) \\
&= \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left(a - \frac{1}{n}, +\infty\right]\right) \\
&= \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left[f > a - \frac{1}{n}\right]\right)
\end{aligned}
$$

   (b). 充分性

$$
\begin{aligned}
E[f > a] &= f^{-1}((a, +\infty]) \\
&= f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[a + \frac{1}{n}, +\infty\right]\right) \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left[a + \frac{1}{n}, +\infty\right]\right) \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left[f \geqslant a + \frac{1}{n}\right]\right)
\end{aligned}
$$

2. 和 1 互余
3. 和原定义互余
4. (a). 必要性

$$E[a \leqslant f < b] = E[f \geqslant a] - E[f \geqslant b]$$

   (b). 充分性

$$E[f \geqslant a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E[a \leqslant f < a + n]$$

□

**推论 2.1**

$f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ 是可测函数，则

1. $E[f = a]$ 可测
2. $E[f = +\infty]$ 可测
3. $E[f = -\infty]$ 可测

**证明**

1. 

$$E[f = a] = E[f \geqslant a] - E[f > a]$$

2.

$$E[f=+\infty]=\bigcap_{n=1}^{\infty} E[f>n]$$

3.

$$E[f=-\infty]=\bigcap_{n=1}^{\infty} E[f<-n]$$

**引理 2.1**

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为 $E$ 上的可测函数, 则 $E[f>g]$ 与 $E[f \geqslant g]$ 都是可测集.

**证明** 因 $E[f \geqslant g]=E-E[f<g]$, 故只需证明 $E[f>g]$ 可测. 设 $x_0 \in E[f>g]$, 亦即 $f(x_0)>g(x_0)$, 则必存在有理数 $r$, 使 $f(x_0)>r>g(x_0)$, 亦即

$$x_0 \in E[f>r] \cap E[g<r],$$

反之亦然. 因此, 设有理数全体为 $r_1, r_2, \cdots$, 则

$$E[f>g]=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(E\left[f>r_n\right] \cap E\left[g<r_n\right]\right),$$

等式右边显然是可测集.

□

**命题 2.2**

常值函数是可测函数，且常值函数与任一可测函数的四则运算仍为可测函数

**证明** 证明常值函数是可测的

$g: E \rightarrow \mathbb{R} \cup\{+\infty,-\infty\}$ 是常值函数，$g \equiv c \in \mathbb{R}$

$\forall a \in \mathbb{R}$

$$E[f>a]=\begin{cases} E & a<c \\ \varnothing & a \geqslant c\end{cases}$$

1. 关于 $f(x)+c$ 只需注意 $E[f+c>a]=E[f>a-c]$.
2. 关于 $c f(x)$, 则当 $c=0$ 时, 显然是可测的; 当 $c \neq 0$ 时只需注意

$$E[c f>a]=\begin{cases}E\left[f>\frac{a}{c}\right], & \text{当} c>0, \\ E\left[f<\frac{a}{c}\right], & \text{当} c<0.\end{cases}$$

3. 关于 $\frac{1}{f(x)}$

$$E\left[\frac{1}{f}>a\right]=\begin{cases}E[f>0] \cap E\left[f<\frac{1}{a}\right], & \text{当} a>0, \\ E[f>0]-E[f=+\infty], & \text{当} a=0, \\ E[f>0] \cup E\left[f<\frac{1}{a}\right], & \text{当} a<0.\end{cases}$$

□

**定理 2.2**

任意可测函数的四则运算、绝对值运算仍是可测函数

**证明**

1.
$$E[f+g>a]=E[f>a-g]$$

2. 对于 $E\left[f\cdot g>a\right]$ $\quad f\cdot g=\frac{1}{4}\left[(f+g)^2-(f-g)^2\right]$，只需看 $f^2$ 是否可测
$$E\left[f^2>a\right]=\begin{cases}E & a<0\\ E[f>\sqrt{a}]\cup E[f<-\sqrt{a}] & a\geqslant 0\end{cases}$$

3.
$$E[|f|>a]=\begin{cases}E & a<0\\ E[f>a]\cup E[f<-a] & a\geqslant 0\end{cases}$$

□

**注** 上述定理所说的运算性质对于取广义实值的可测函数也是成立的. 事实上, 只需注意下列点集:
$$\{x:f(x)=+\infty\},\quad \{x:f(x)=-\infty\},$$
$$\{x:g(x)=+\infty\},\quad \{x:g(x)=-\infty\}$$
都是可测集即可.

**命题 2.3**

若 $\{f_k(x)\}$ 是 $E$ 上的可测函数列, 则下列函数都是 $E$ 上的可测函数

1. $\sup\limits_{k\geqslant 1}\{f_k(x)\}$;
2. $\inf\limits_{k\geqslant 1}\{f_k(x)\}$;
3. $\varlimsup\limits_{k\to\infty} f_k(x)$;
4. $\varliminf\limits_{k\to\infty} f_k(x)$

**证明**

1. 因为我们有
$$\left\{x:\sup_{k\geqslant 1}\{f_k(x)\}>t\right\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x:f_k(x)>t\},\quad t\in\mathbb{R},$$
所以 $\sup\limits_{k\geqslant 1}\{f_k(x)\}$ 是 $E$ 上的可测函数.
2. 由于 $\inf\limits_{k\geqslant 1}\{f_k(x)\}=-\sup\limits_{k\geqslant 1}\{-f_k(x)\}$, 故可知 $\inf\limits_{k\geqslant 1}\{f_k(x)\}$ 在 $E$ 上可测.
3. 只需注意到 $\varlimsup\limits_{k\to\infty} f_k(x)=\inf\limits_{i\geqslant 1}\left(\sup\limits_{k\geqslant i}\left[f_k(x)\right]\right)$ 即可.
4. 根据等式 $\varliminf\limits_{k\to\infty} f_k(x)=-\varlimsup\limits_{k\to\infty}\left(-f_k(x)\right)$ 可知, $\varliminf\limits_{k\to\infty} f_k(x)$ 是 $E$ 上的可测函数.

□

**注**

1. 至多可数个可测函数上下确界函数仍可测
2. 但至多可数个连续函数的上下确界函数未必连续

**例题 2.1 连续函数的上下确界函数未必连续的例子**
$$f_n(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ nx & 0<x\leqslant\frac{1}{n}\\ 1 & x>\frac{1}{n}\end{cases}$$

显然 $f_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 连续

$$f(x)=\sup_{n\geqslant 1} f_n(x)=\begin{cases} 0 & x\leqslant 0\\ 1 & x>0\end{cases}\qquad \text{不连续.}$$

**推论 2.2**

若 $\{f_k(x)\}$ 是 $E$ 上的可测函数列, 且有

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x)=f(x)\quad (x\in E),$$

则 $f(x)$ 是 $E$ 上的可测函数.

**定义 2.4 (正部和负部)**

设 $f(x)$ 是定义在 $E$ 上的广义实值函数, 令

$$f^+(x)=\max\{f(x),0\}=\begin{cases} f(x) & f(x)\geqslant 0\\ 0 & f(x)<0\end{cases}$$

$$f^-(x)=-\min\{f(x),0\}=\begin{cases} -f(x) & f(x)\leqslant 0\\ 0 & f(x)>0\end{cases}$$

并分别称它们为 $f(x)$ 的正部与负部

**命题 2.4**

$f(x)$ 在 $E$ 上是可测的充要条件是 $f^+(x), f^-(x)$ 都是 $E$ 上的可测函数

**证明**

$$f(x)=f^+(x)-^-(x)$$

## 2.2 可测函数的例子

**命题 2.5**

$\mathbb{R}^n$ 中可测集 E 上连续函数是可测函数

**证明**

$$E\subset\mathbb{R}^n \text{ 的开集} V=\mathbb{R}^n \text{ 的开集} U\cap E$$

$\forall a\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} E[f>a]&=\left\{x\in E: f^{-1}((a,+\infty])\right\}\\ &=U\cap E\end{aligned}$$

**命题 2.6**

$[a,b]$ 上的单调函数是可测函数

**证明** $\forall c\in\mathbb{R}$.

$$E[f\geqslant c]$$

不妨设 $f$ 单调增，$\forall c \in \mathbb{R}$，若 $E[f \geqslant c] \neq \varnothing$, 记 $x_0 = \inf E[f \geqslant c]$

1. $\forall x > x_0$

   假设 $f(x) < c$，$\forall z \in E[f \geqslant c], z > x$

   $x_0 \geqslant x$, 矛盾！

   故 $f(x) \geqslant c$

2. $\forall y < x_0$

   由 $x_0$ 是 $E[f \geqslant c]$ 下确界，$y \notin E[f \geqslant c]$

当 $x_0 \in E[f \geqslant c], E[f \geqslant c] = [x_0, b]$

当 $x_0 \notin E[f \geqslant c], E[f \geqslant c] = (x_0, b]$

故 $f$ 是可测函数

**定义 2.5 (示性函数)**

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E, \\ 0 & x \notin E. \end{cases}$$

♣

**定义 2.6 (简单函数的定义)**

$\mathbb{R}^n$ 中可测集 $E$ 分成有限个互不相交的可测集 $E_1, E_2 \dots E_s$

$$E = \bigcup_{i=1}^{s} E_i \quad f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

$f$ 在 $E_i$ 上都是常值函数 $c_i$, 此时 $f$ 为简单函数

$$f(x) = \sum_{i=1}^{s} c_i \chi_{E_i}(x) \quad x \in E$$

♣

**命题 2.7**

简单函数是可测函数

♠

**引理 2.2**

1. $f$ 是可测集 $E$ 上的可测函数，$E_1$ 是 $E$ 的可测子集，$f|_{E_1}$ 是 $E_1$ 上的可测函数
2. $f$ 是可测集 $E_1, \dots E_s$ 的并集 $E = \bigcup\limits_{i=1}^{s} E_i$ 上的函数，$f$ 在 $E_i (i = 1, 2 \dots s)$ 都可测，则 $f$ 在 $E$ 上也可测

♡

**证明**

1. $\forall a \in \mathbb{R}$

$$E_1[f > a] = E_1 \cap E[f > a]$$

2. $\forall a \in \mathbb{R}$

$$E[f > a] = \bigcup_{i=1}^{s} E_i[f > a]$$

**例题 2.2 简单函数的例子**

$[0, 1]$ 上的 $Dirichlet$ 函数是简单函数

**定理 2.3 (简单函数逼近定理)**

$E$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集

1. $f(x)$ 在 $E$ 上非负可测，则存在非负简单递增函数列 $\{\varphi_k(x)\}$,$(\forall x\in E,\varphi_k(x)\leqslant\varphi_{k+1}(x))$
$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x)$$
2. $f(x)$ 在 $E$ 上可测, 则存在简单函数列 $\{\varphi_k(x)\}$ ,$\forall x\in E$ ，使得 $|\varphi_k(x)|\leqslant|f(x)|$ 且
$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x)$$
当 $f(x)$ 有界时，则可以是一致收敛

**证明**

1.
$$E_{k,j}=E\left[\frac{j-1}{2^k}\leqslant f<\frac{j}{2^k}\right],\left(j=1,2,\ldots k\cdot 2^k\right)$$
$$E_k=E[f\geqslant k]$$
取函数
$$\varphi_k(x)=\begin{cases}\frac{j-1}{2^k} & x\in E_{k,j}\\ k & x\in E_k\end{cases}$$
可以改写成
$$\varphi_k(x)=k\chi_{E_k}(x)+\sum_{j=1}^{k2^k}\frac{j-1}{2^k}\chi_{E_{k,j}}(x),\quad x\in E$$
所以每一个 $\varphi(x)$ 都是非负可测简单函数，且有
$$\varphi_k(x)\leqslant\varphi_{k+1}(x)\leqslant f(x),\quad\varphi_k(x)\leqslant k$$
(a). 若 $f(x)\neq+\infty$
$\exists k$, 使得 $f(x)<k$, 故 $x\in E_{k,j}$
$$0\leqslant f(x)-\varphi_k(x)\leqslant\frac{1}{2^k}$$
(b). 若 $f(x)=+\infty$
$\varphi_k(x)=k(k=1,2,\cdots)$, 从而得 $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x),\quad x\in E.$

2.
$$f(x)=f^+(x)-f^-(x)$$
由 (1) 存在简单函数列 $\{\varphi_k^+(x)\}\,\{\varphi_k^-(x)\}$
使得
$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k^+(x)=f^+(x).\quad\lim_{k\to\infty}\varphi_k^-(x)=f^-(x)$$
显然 $\varphi(x)=\varphi_k^+(x)-\varphi_k^-(x)$ 是简单函数
$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x)$$
当 $f(x)$ 有界，$\exists M>0$，使得 $|f(x)|\leqslant M$
$\forall x\in E,\forall\varepsilon>0,\exists k>M,\frac{1}{2^{k-1}}<\varepsilon,E_k=\varnothing$

$x$ 落在某个 $E_{k,j}$

$$0 \leqslant f^{+}(x) - \varphi_k^{+}(x) \leqslant \frac{1}{2^k}$$
$$0 \leqslant f^{-}(x) - \varphi_k^{-}(x) \leqslant \frac{1}{2^k}$$

$\forall n \geqslant k,$

$$\begin{aligned} 0 \leqslant f^{+}(x) - \varphi_n^{+}(x) &\leqslant \frac{1}{2^k} \\ 0 \leqslant f^{-}(x) - \varphi_n^{-}(x) &\leqslant \frac{1}{2^k} \\ |f(x) - \varphi_n(x)| \leqslant \left|f^{+}(x) - \varphi_n^{+}(x)\right| &+ |\ f^{-}(x) - \varphi_n^{-}(x)\ | \\ &\leqslant \frac{1}{2^{k-1}} \end{aligned}$$

□

## 2.3 可测函数列的收敛

### 2.3.1 函数列的收敛

**定义 2.7 (逐点收敛)**

$\{f_k\}, f$ 定义在 $E$ 上函数，$\forall x \in E, f_k(x) \to f(x)$

则 $\{f_k\}$ 逐点收敛于 $f$ 。

$\forall x \in E, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geqslant N.$

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$$

此处 $N(x, \varepsilon)$

♣

**定义 2.8 (一致收敛)**

$\{f_k\}, f$ 定义于 $E.$

$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in E, \quad \forall k \geqslant N$

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$N(\varepsilon)$ 只和 $\varepsilon$ 有关

一个等价条件

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

♣

**例题 2.3 不一致收敛例子**

$$\left\{f_k(x) = x^k\right\}.E = [0,1]$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) \quad \text{逐点收敛}$$

$$\text{不一致收敛} \quad \begin{cases} f_k(x) \text{ 连续} \\ f(x) \text{ 不连续} \end{cases}$$

**注** 一列连续函数一致收敛到连续函数

易验证 $\forall\delta > 0, \{f_k\}$ 在 $[0,1-\delta]$ 上一致收敛于 $f$

### 2.3.2 几乎处处收敛与一致收敛

**定义 2.9 (几乎处处 a.e.)**

如果某个性质在去掉一个零测集之后成立，我们就说它几乎处处成立。

**定义 2.10 (几乎处处收敛)**

设 $f_k(x)$ 是定义在点集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的广义实值函数. 若存在 $E$ 中的点集 $Z$, 有 $m(Z) = 0$ 及

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \quad x \in E \backslash Z,$$

则称 $\{f_k(x)\}$ 在 $E$ 上几乎处处收敛于 $f(x)$, 并记为

$$f_k(x) \to f(x), \text{a. e. } x \in E.$$

显然, 若 $\{f_k(x)\}$ 是 $E$ 上的可测函数列, 则 $f(x)$ 也是 $E$ 上的可测函数.

**例题 2.4 几乎处处收敛的例子**

1. *Dirichlet* 函数

$$D(x) = 0 \quad \text{a. e. 于}[0,1]$$

2. $|\tan x| < \infty \quad$ a. e. 于$\mathbb{R}$
3. $f(x) = g(x)$ a. e. 于 $E, g(x) = h(x)$ a. e. 于 $E$

   则 $f(x) = h(x)$ a. e. 于$E$

**引理 2.3**

设 $f_k(x)$ 是 $E$ 上几乎处处有限的可测函数, 且 $m(E) < +\infty$. 若 $f_k(x) \to f(x)$, a. e. $x \in E$, 则对任给 $\varepsilon > 0$, 令

$$E_k(\varepsilon) = \{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\},$$

有

$$\lim_{N\to\infty} m\left(\bigcup_{k=N}^{\infty} E_k(\varepsilon)\right) = 0$$

**证明** $\bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=N}^{\infty} E_k(\varepsilon)$ 中点都不收敛

由题设 $m\left(\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{k=N}^{\infty}E_k(\varepsilon)\right)=0$
$m(E)<\infty$，由测度的上连续性，

$$\lim_{N\to\infty}\left(\bigcup_{k=N}^{\infty}E_k(\varepsilon)\right)=0$$

□

**定理 2.4 (Egorov 定理)**

$\{f_k\}, f$ 定义在 $E$ 上可测函数，且几乎处处有限，$m(E)<\infty$. 若 $f_k(x)\to f(x)$ a. e. $x\in E$
则对 $\forall\delta>0, \exists$ 可测子集 $E_\delta\subset E, m\left(E_\delta\right)\leqslant\delta$，使 $\{f_k\}$ 在 $E-E_\delta$ 一致收敛于 $f$.

**证明** 不妨设 $f, f_k(k\geqslant 1)$ 在 $E$ 上有限，由引理，$\forall i\in\mathbb{N}, \exists N(i)\in\mathbb{N}$,

$$m\left(\bigcup_{k\geqslant N(i)}E_k\left(\frac{1}{i}\right)\right)<\frac{\delta}{2^i}$$

记

$$E_\delta=\bigcup_{i\geqslant 1}\bigcup_{k\geqslant N(i)}E_k\left(\frac{1}{i}\right)$$

则

$$m\left(E_\delta\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}m\left(\bigcup_{k\geqslant N(i)}E_k\left(\frac{1}{i}\right)\right)<\delta$$

$$E-E_\delta=\bigcap_{i\geqslant 1}\bigcap_{k\geqslant N(i)}E_k\left(\frac{1}{i}\right)^c$$

$\forall\varepsilon>0$, 取 $i$, s.t. $\frac{1}{i}<\varepsilon, \forall k\geqslant N(i), \forall x\in E-E_\delta$

$$\left|f_k(x)-f(x)\right|<\frac{1}{i}<\varepsilon$$

即 $f_k$ 在 $E-E_\delta$ 上一致收敛于 $f$

□

**例题 2.5** $m(E)=\infty$ 不成立

$E=(0,+\infty)\quad f_k(x)=\begin{cases}1 & x\in(0,n)\\ 0 & x\in[n,+\infty)\end{cases}$
$f_k$ 在 $(0,+\infty)$ 处处收敛于 $f(x)\equiv 1$
但是 $(0,+\infty)$ 中任一个有限测度集之处不一致收敛

### 2.3.3 几乎处处收敛与依测度收敛

**定义 2.11 (依测度收敛)**

$f,\{f_n\}$ 在 $E$ 上 a. e. 有限的可测函数，若 $\forall\sigma>0$

$$\lim_{n\to\infty} m\left(E\left[|f-f_n|\geqslant\sigma\right]\right)=0$$

则称 $\{f_n\}$ 在 $E$ 上依测度收敛于 $f$. 记为 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$ 。

**命题 2.8**

若 $\{f_k(x)\}$ 在 $E$ 上同时依测度收敛于 $f(x)$ 与 $g(x)$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $E$ 上几乎处处相等

**证明**

$$E[f\neq g]=\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left[|f-g|\geqslant\frac{1}{n}\right]$$

$$|f-g|\leqslant|f-f_k|+|g-f_k|$$

若 $|f-f_k|<\frac{1}{2n}$ 且 $|g-f_k|<\frac{1}{2n}$, 则 $|f-g|<\frac{1}{n}$

即

$$E\left[|f-g|<\frac{1}{n}\right]\supset E\left[|f-f_k|<\frac{1}{2n}\right]\cap E\left[|g-f_k|<\frac{1}{2n}\right]$$

故

$$E\left[|f-g|\geqslant\frac{1}{n}\right]\subset E\left[|f-f_k|\geqslant\frac{1}{2n}\right]\cup E\left[|g-f_k|\geqslant\frac{1}{2n}\right]$$

$$\begin{aligned}m\left(E\left[|f-g|\geqslant\frac{1}{n}\right]\right)&\leqslant m\left(E\left[|f-f_k|\geqslant\frac{1}{2n}\right]\cup E\left[|g-f_k|\geqslant\frac{1}{2n}\right]\right)\\&\leqslant m\left(E\left[|f-f_k|\geqslant\frac{1}{2n}\right]\right)+m\left(E\left[|g-f_k|\geqslant\frac{1}{2n}\right]\right)\end{aligned}$$

$k\to\infty$ 时, 右边趋于 0，故

$$m\left(E\left[|f-g|\geqslant\frac{1}{n}\right]\right)=0$$

所以

$$m\left(E[f\neq g]\right)=m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left[|f-g|\geqslant\frac{1}{n}\right]\right)=0$$

□

**依测度收敛不能推出几乎处处收敛**

**例题 2.6 依测度收敛但不处处收敛的例子**

$$f_n(x)=\begin{cases}1 & x\in(0,n)\\ 0 & x\in[n,+\infty)\end{cases}$$

**定理 2.5**

若 $\{f_n\}_{n\geqslant1}$ , $f$, 是 a. e 有限的可测函数，且 $m(E)<\infty$，若 $f_n\to f$, a.e. $x\in E$

则 $f_n(x)$ 依测度收敛于 $f(x)$

**证明** $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} m\left(\bigcup_{k\geqslant n} E\left[|f_k - f| \geqslant \varepsilon\right]\right) = 0$$

而

$$E\left[|f_n - f| \geqslant \varepsilon\right] \subset \bigcup_{k\geqslant n} E\left[|f_k - f| \geqslant \varepsilon\right]$$

故

$$0 \leqslant m\left(E\left[|f_n - f| \geqslant \varepsilon\right]\right) \leqslant m\left(\bigcup_{k\geqslant n} E\left[|f_n - f| \geqslant \varepsilon\right]\right)$$

取 $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} m\left(E\left[|f_n - f| \geqslant \varepsilon\right]\right) = 0$$

即 $f_n(x)$ 依测度收敛于 $f$

□

**定理 2.6**

设 $f(x), f_k(x)(k = 1, 2, \ldots)$ 是 $E$ 上几乎处处有限的可测函数. 若对任给的 $\delta > 0$, 存在 $E_\delta \subset E$ 且 $m\left(E_\delta\right) < \delta$, 使得 $\{f_k(x)\}$ 在 $E \backslash E_\delta$ 上一致收敛于 $f(x)$, 则 $\{f_k(x)\}$ 在 $E$ 上依测度收敛于 $f(x)$. 若 $m(E) < +\infty$, 则 $\{f_k(x)\}$ 在 $E$ 上 a. e. 收敛于 $f(x)$.

**证明** 对任给的 $\varepsilon, \delta > 0$, 依假设存在 $E_{\hat{\delta}} \subset E$ 且 $m\left(E_{\hat{\delta}}\right) < \delta$, 以及自然数 $k_0$, 使得当 $k \geqslant k_0$ 时, 有

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad x \in E \backslash E_{\hat{\beta}}.$$

由此可知

$$\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} \subset E_\delta.$$

这说明, 当 $k \geqslant k_0$ 时, 有

$$m\left(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}\right) < \delta.$$

□

**定义 2.12 (依测度基本列)**

设 $\{f_k(x)\}$ 是 $E$ 上几乎处处有限的可测函数列. 若对任给的 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{\substack{k\to\infty \\ j\to\infty}} m\left(\{x \in E : |f_k(x) - f_j(x)| > \varepsilon\}\right) = 0,$$

则称 $\{f_k(x)\}$ 为 $E$ 上的依测度 Cauchy(基本) 列.

**定理 2.7**

若 $\{f_k(x)\}$ 是 $E$ 上的依测度 Cauchy 列, 则在 $E$ 上存在几乎处处有限的可测函数 $f(x)$, 使得 $\{f_k(x)\}$ 在 $E$ 上依测度收敛于 $f(x)$.

**证明** 对每个自然数 $i$, 可取 $k_i$, 使得当 $l, j \geqslant k_i$ 时, 有

$$m\left(E\left[|f_i(x) - f_j(x)| \geqslant \frac{1}{2^i}\right]\right) < \frac{1}{2^i}.$$

从而我们可以假定 $k_i < k_{i+1}(i = 1, 2, \cdots)$, 令

$$E_i = E\left[\left|f_{k_i}(x) - f_{k_{i+1}}(x)\right| \geqslant \frac{1}{2^i}\right], \quad i = 1, 2, \cdots,$$

则 $m(E_i) < 2^{-i}$. 现在研究 $\{E_i\}$ 的上限集 $S = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty}\bigcup\limits_{i=j}^{\infty} E_i$, 易知 $m(S) = 0$.

若 $x \notin S$, 则存在 $j$, 使得 $x \in E \backslash \bigcup_{i=j}^{\infty} E_i$.

从而当 $i \geqslant j$ 时, 有 $\left|f_{k_{i+1}}(x) - f_{k_i}(x)\right| < 2^{-i}$. 由此可知当 $l \geqslant j$ 时, 有

$$\sum_{i=l}^{\infty}\left|f_{k_{i+1}}(x) - f_{k_i}(x)\right| \leqslant \frac{1}{2^{l-1}}.$$

这说明级数 $f_{k_1}(x) + \sum\limits_{i=1}^{\infty}\left[f_{k_{i+1}}(x) - f_{k_i}(x)\right]$ 在 $E \backslash S$ 上是绝对收敛的, 因此 $\{f_{E_i}(x)\}$ 在 $E$ 上是几乎处处收敛的, 设其极限函数为 $f(x)$, $f(x)$ 是 $E$ 上几乎处处有限的可测函数. 此外, 易知 $\{f_{k_i}(x)\}$ 在 $E \backslash \bigcup_{i=j}^{\infty} E_i$ 上是一致收敛于 $f(x)$ 的. 由于

$$m\left(\bigcup_{i=j}^{\infty} E_i\right) < \frac{1}{2^{j-1}},$$

故 $f(x)$ 及 $\{f_{k_i}(x)\}$ 在 $E$ 上满足上述定理的条件, 于是 $\{f_{k_i}(x)\}$ 在 $E$ 上依测度收敛于 $f(x)$。最后, 由不等式

$$m\left(E\left[\left|f_k(x) - f(x)\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) \leqslant m\left(E\left[\left|f_k(x) - f_{k_i}(x)\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right]\right) + m\left(E\left[\left|f_{k_i}(x) - f(x)\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right]\right)$$

故

$$\lim_{k \to \infty} m\left(E\left[\left|f_k(x) - f(x)\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) = 0$$

**定理 2.8 (Riesz 定理)**

设在 $E$ 上 $\{f_n\}$ 依测度收敛于 $f$ ，则存在子列 $\{f_{n_s}\}$ 在 $E$ 上 a.e. 收敛于 $f$

**证明** 下面提供两种证明，一种用到依测度基本列（证明起来比较简单，但是依测度基本列本身的证明有点复杂），另一种则是很朴素的证明

1. 使用依测度基本列的证明

   由上面定理构造的过程，存在 $f_{n_s}$ 几乎处处收敛到 $g$，按照假设 $f_{n_s}$ 几乎处处收敛到 $f$，所以 $f$ 和 $g$ 几乎处处相等

2. 朴素证明

   $\exists n_s \geqslant 1, \forall n \geqslant n_s$

$$m\left(E\left[\left|f_n - f\right| \geqslant 1\right]\right) < \frac{1}{2}$$

   假设已找到 $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_{s-1}$, 使 $\forall n \geqslant n_i(i = 1, 2 \cdots, s-1)$

$$m\left(E\left[\left|f_n - f\right| \geqslant \frac{1}{i}\right]\right) < \frac{1}{2^i}.$$

   由 $f_n$ 依测度收敛到 $f$ 知，$\exists \tilde{n}_s \geqslant 1$ 当 $n \geqslant \tilde{n}_s$

$$m\left(E\left[\left|f_n - f\right| \geqslant \frac{1}{s}\right]\right) < \frac{1}{2^s}$$

   取 $n_s = \max\{\tilde{n}_s, n_{s-1} + 1\}$ 此时, $n_1 < n_2 < \cdots < n_{s-1} < n_s$,

$\forall n \geqslant n_s$,

$$m\left(E\left[|f_n - f| \geqslant \frac{1}{s}\right]\right) < \frac{1}{2^s}$$

由数学归纳法，

$$\exists n_1 < n_2 < n_2 < \cdots < n_s < \cdots$$
$$\forall n \geqslant n_s, m\left(E\left[|f_n - f| \geqslant \frac{1}{s}\right]\right) < \frac{1}{2^s}.$$

下面证明:

(a). $\{f_{n_s}\}$ 在 $\bigcap\limits_{N\geqslant 1}\bigcup\limits_{s\geqslant N} E\left[|f_{n_s} - f| \geqslant \frac{1}{s}\right]$ 之外收敛

即证 $\{f_{n_s}\}$ 在 $\bigcup\limits_{N\geqslant 1}\bigcap\limits_{s\geqslant N} E\left[|f_{n_s} - f| < \frac{1}{s}\right]$ 收敛

$\forall x \in \bigcup\limits_{N\geqslant 1}\bigcap\limits_{s\geqslant N} E\left[|f_{n_s} - f| < \frac{1}{s}\right]$ $\quad \exists N \geqslant 1, \quad \forall s \geqslant N$

$$|f_{n_s}(x) - f(x)| < \frac{1}{s}$$

$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists k \geqslant 1, \varepsilon > \frac{1}{k}$. 取 $\widetilde{N} = \max\{N, k\}$,

$\forall s \geqslant \widetilde{N}$

$$|f_{n_s}(x) - f(x)| < \frac{1}{s} < \frac{1}{k} < \varepsilon$$

因此 $f_{n_s}(x) \to f(x), s \to \infty$

(b). $m\left(\bigcap\limits_{N\geqslant 1}\bigcup\limits_{s\geqslant N} E\left[|f_{n_s} - f| \geqslant \frac{1}{s}\right]\right) = 0.$

$\forall n \geqslant 1$,

$$\bigcap_{N\geqslant 1}\bigcup_{s\geqslant N} E\left[|f_{n_s} - f| \geqslant \frac{1}{s}\right] \subset \bigcup_{s\geqslant N} E\left[|f_{n_s} - f| \geqslant \frac{1}{s}\right]$$

故

$$\begin{aligned}
0 \leqslant m\left(\bigcap_{N\geqslant 1}\bigcup_{s\geqslant N} E\left[|f_{n_s} - f| \geqslant \frac{1}{s}\right]\right) &\leqslant m\left(\bigcup_{s\geqslant N} E\left[|f_{n_s} - f| \geqslant \frac{1}{s}\right]\right) \\
&\leqslant \sum_{s\geqslant n} m\left(E\left[|f_{n_s} - f| \geqslant \frac{1}{s}\right]\right) \\
&\leqslant \sum_{s\geqslant n} \frac{1}{2^s} = \frac{1}{2^{n-1}}.
\end{aligned}$$

故

$$m\left(\bigcap_{N\geqslant 1}\bigcup_{s\geqslant N} E\left[|f_{n_s} - f| \geqslant \frac{1}{s}\right]\right) = 0$$

综上, 可找到 $\{f_{n_s}]$ 在 $E$ 上几乎处处收敛于 $f$ 。

$\square$

## 2.4 可测函数与连续函数

**定理 2.9** ($Lusin$ 定理)

设 $f(x)$ 是 $E$ 上几乎处处有限的可测函教, $\forall\delta>0$, 存在闭集 $F_\delta\subset E$ 使得 $m(E-F_\delta)<\delta$ 且 $f(x)$ 在 $F_\delta$ 上连棱

**证明**

1. 简单函数情形

$$f(x)=\sum_{i=1}^{p}c_i\chi_{E_i}(x), x\in E=\bigcup_{i=1}^{s}E_i, E_i\cap E_j=\varnothing(i\neq j).$$

此时, 对任给的 $\delta>0$ 以及每个 $E_i$, 可作 $E_i$ 中的闭集 $F_i$, 使得

$$m\left(E_i-F_i\right)<\frac{\delta}{s},\quad i=1,2,\cdots,s.$$

因为当 $x\in F_i$ 时, $f(x)=c_i$, 所以 $f(x)$ 在 $F_i$ 上连续. 而 $F_1,F_2,\cdots,F_s$ 是互不相交的, 可知 $f(x)$ 在 $F_\delta=\bigcup\limits_{i=1}^{s}F_i$ 上连续. 显然, $F_\delta$ 是闭集, 且有

$$m(E-F_\delta)=\sum_{i=1}^{s}m\left(E_i-F_i\right)<\sum_{i=1}^{s}\frac{\delta}{s}=\delta.$$

2. 有界可测情形

故不妨假定 $f(x)$ 是有界函数. 故存在可测简单函数列 $\{\varphi_k(x)\}$ 在 $E$ 上一致收敛于 $f(x)$.

现在对任给的 $\delta>0$ 以及每个 $\varphi_k(x)$, 均作 $E$ 中的闭集 $F_k: m\left(E-F_k\right)<\frac{\delta}{2^k}$, 使得 $\varphi_k(x)$ 在 $F_k$ 上连续. 令 $F_\delta=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}F_k$, 则 $F\subset E$, 且有

$$m\left(E-F_\delta\right)=m\left(E-\bigcap_{k=1}^{\infty}F_k\right)=m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(E-F_k\right)\right)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m\left(E-F_k\right)\leqslant\delta$$

因为每个 $\varphi_k(x)$ 在 $F_\delta$ 上都是连续的, 所以根据一致收敛性, 易知 $f(x)$ 在 $F_\delta$ 上连续.

3. 一般可测情形

由 $m(x:|f(x)=+\infty|)=0$ ，故可设 $f(x)$ 在 $E$ 上有限

可作变换

$$g(x)=\frac{f(x)}{1+|f(x)|}\quad\left(f(x)=\frac{g(x)}{1-|g(x)|}\right),$$

$g(x)$ 在 $E$ 上有界可测，由（有界可测情形），存在闭集 $F_\delta\subset E, m(E-F_\delta)<\delta$

$g(x)$ 在 $F_\delta$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $F_\delta$ 上连续.

□

**定理 2.10** ($Lusin$ 定理另一形式)

设 $f(x)$ 是 $E\subset\mathbb{R}^1$ 上 a.e. 有限的可测函数，$\forall\delta>0$，存在闭集 $F_\delta$ 以及 $\mathbb{R}^1$ 上的连续函数 $g_\delta(x)$ 。使 $m\left(E-F_\delta\right)<\delta$ ，$f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $F_\delta$ 上相等，且

$$\sup_{\mathbb{R}^1}g_\delta(x)=\sup_{F_\delta}f(x)$$
$$\inf_{\mathbb{R}^1}g_\delta(x)=\inf_{F_\delta}f(x)$$

**定理 2.11** ($Tietze$ **延拓定理**)

$X$ 是正规拓扑空间, $F \subset X$ 的闭子集, 则可将 $F$ 上连续函数延拓成 $X$ 上的连续函数 ♡

**引理 2.4** ($Urysuhn$ **引理**)

$X$ 是正规拓扑空间，$A, B \subset X$ 闭子集，存在连续函数 $f : x \to [0,1]$ 使得 $f|_A \equiv 0.\ f|_B \equiv 1$ ♡

**本章最重要的也是最本质的就是证明了 Littlewood 三原则**

1. 每一个可测集都近乎是有限个区间的并
2. 每一个可测函数都近乎是连续的
3. 每一个收敛的序列都近乎是一致收敛的

**这里的近乎和 a.e. 是不一样的**

**近乎使用的是 $\varepsilon - \delta$ 语言, 而几乎处处则建立在零测集的概念下。"几乎处处"$\Rightarrow$ "近乎"。**

# 第 3 章 Lebesgue 积分

## 3.1 非负简单函数的 Lebesgue 积分

**定义 3.1**

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非负可测简单函数, 它在点集 $E_i\ (i=1,2,\cdots,s)$ 上取值 $c_i$ :

$$f(x)=\sum_{i=1}^{s} c_i \chi_{E_i}(x), \quad \bigcup_{i=1}^{s} E_i=\mathbb{R}^n, \quad E_i \cap E_j=\varnothing(i \neq j).$$

若 $E \in \mathscr{M}$, 则定义 $f(x)$ 在 $E$ 上的积分为

$$\int_E f(x) \mathrm{d} x=\sum_{i=1}^{s} c_i \cdot m\left(E \cap E_i\right).$$

♣

**命题 3.1**

$A, B$ 是互不相交的 $E$ 的可测子集

$$\int_{A \cup B} f(x) \mathrm{d} x=\int_A f(x) \mathrm{d} x+\int_B f(x) \mathrm{d} x$$

♠

**证明**

$$\begin{aligned}
\int_{A \cup B} f(x) \mathrm{d} x & =\sum_{i=1}^{s} c_i \cdot m\left((A \cup B) \cap E_i\right) \\
& =\sum_{i=1}^{s} c_i \cdot m\left[\left(A \cap E_i\right) \cup\left(B \cap E_i\right)\right] \\
& =\sum_{i=1}^{s} c_i \cdot m\left(A \cap E_i\right)+\sum_{i=1}^{s} c_i \cdot m\left(B \cap E_i\right) \\
& =\int_A f(x) \mathrm{d} x+\int_B f(x) \mathrm{d} x
\end{aligned}$$

□

**命题 3.2**

若 $\{A_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的递增可测集列, $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非负可测简单函数, 则

$$\int_E f(x) \mathrm{d} x=\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_k} f(x) \mathrm{d} x, \quad E=\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

♠

**证明**

$$\begin{aligned}\int_E f(x)\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{s} c_i \cdot m\left(E_i\right)\\ &= \sum_{i=1}^{s} c_i \cdot \lim_{n\to\infty} m\left(A_n\cap E_i\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{s} c_i \cdot m\left(A_n\cap E_i\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{A_n} f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

□

**命题 3.3 (积分的线性性质)**

设 $f(x), g(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非负可测简单函数, $f(x)$ 在点集 $A_i(i=1,2,\cdots,p)$ 上取值 $a_i$, $g(x)$ 在点集 $B_j(j=1,2,\cdots,q)$ 上取值 $b_j$, $E\in\mathscr{M}$, 则有

1. 若 $c$ 是非负常数, 则
$$\int_E cf(x)\mathrm{d}x = c\int_E f(x)\mathrm{d}x$$
2. $$\int_E (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x + \int_E g(x)\mathrm{d}x$$

♠

**证明**

1. $$\begin{aligned}\int_E cf(x)\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{s} c\cdot c_i\cdot m\left(E\cap E_i\right)\\ &= c\cdot\sum_{i=1}^{s} c_i\cdot m\left(E\cap E_i\right)\\ &= c\int_E f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$
2. 由于 $f(x)+g(x)$ 在 $A_i\cap B_j$ (假定非空) 上取值 $a_i+b_j$, 故有
$$\begin{aligned}\int_E (f(x)+g(x))\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\left(a_i+b_j\right) m\left(E\cap A_i\cap B_j\right)\\ &= \sum_{i=1}^{p} a_i\sum_{j=1}^{q} m\left(E\cap A_i\cap B_j\right) + \sum_{j=1}^{q} b_j\sum_{i=1}^{p} m\left(E\cap A_i\cap B_j\right)\\ &= \sum_{i=1}^{p} a_i m\left(E\cap A_i\right) + \sum_{j=1}^{q} b_j m\left(E\cap B_j\right)\\ &= \int_E f(x)\mathrm{d}x + \int_E g(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

□

## 3.2 非负可测函数的 Lebesgue 积分

**定义 3.2**

设 $f(x)$ 是 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的非负可测函数, 定义 $f(x)$ 在 $E$ 上的积分为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sup\left\{\int_E \varphi(x)dx,\varphi(x)\text{是}E\text{上非负简单函数},\varphi(x)\leqslant f(x)\right\}$$

注 这里的积分可以是 $+\infty$;

若 $\int_E f(x)\mathrm{d}x<+\infty$, 则称 $f(x)$ 在 $E$ 上是可积的, 或称 $f(x)$ 是 $E$ 上的可积函数.

**命题 3.4**

$f(x),g(x)$ 在 $E$ 上非负可测函数, 且 $f(x)\leqslant g(x)$ , 则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E g(x)\mathrm{d}x$$

**证明** 对 $\forall 0\leqslant\varphi(x)\leqslant f(x)$, $x\in E$ , $\varphi(x)$ 是 $E$ 上的简单函数

则 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant g(x),x\in E$

由定义可得

$$\int_E\varphi(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E g(x)\mathrm{d}x$$

则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sup_{\substack{\varphi(x)\leqslant f(x)\\x\in E}}\left\{\int_E\varphi(x)\mathrm{d}x\right\}\leqslant\int_E g(x)\mathrm{d}x$$

**推论 3.1**

$f(x)$ 在 $E$ 上非负可测函数

1. 若存在 $E$ 上非负 *Lebesgue* 可积函数 $F(x)$, 使得
$$f(x)\leqslant F(x),\quad x\in E,$$
则 $f(x)$ 在 $E$ 上可积.
2. 若 $f(x)$ 在 $E$ 上有界, 且 $m(E)<+\infty$, 则 $f(x)$ 在 $E$ 上 *Lebesgue* 可积.

**命题 3.5**

若 $f(x)$ 是 $E$ 上的非负可测函数, $A$ 是 $E$ 中可测子集, 则

$$\int_A f(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\chi_A(x)\mathrm{d}x$$

**证明** 事实上, 我们有

$$\begin{aligned}\int_A f(x)\mathrm{d}x &= \sup_{\substack{\varphi(x)\leqslant f(x)\\ x\in A}}\left\{\int_A \varphi(x)\mathrm{d}x\right\}\\ &= \sup_{\substack{\varphi(x)\chi_A(x)\leqslant f(x)\chi_A(x)\\ x\in E}}\left\{\int_A \varphi(x)\mathrm{d}x\right\}\\ &= \int_E f(x)\chi_A(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

**定理 3.1**

若非负可测函数 $f$ 在 $E$ 上 *Lebesgue* 可积, 则 $f$ 在 $E$ 上几乎处处有限，即

$$m(E[f=+\infty])=0$$

**证明** 令 $E_k=\{x\in E: f(x)>k\}$, 则有

$$\{x\in E: f(x)=+\infty\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k.$$

对于每个 $k$, 可得

$$km\left(E_k\right)\leqslant\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}x<+\infty,$$

从而知道 $\lim\limits_{k\to\infty}m\left(E_k\right)=0$. 这就是说

$$m(\{x\in E: f(x)=+\infty\})=0.$$

**命题 3.6**

$A,B$ 是 $E$ 互不相交可测子集，则

$$\int_{A\cup B}f(x)\mathrm{d}x=\int_A f(x)\mathrm{d}x+\int_B f(x)\mathrm{d}x$$

**证明** 话取 $\varphi(x)$ 是 $A\cup B$ 上简单函数

$$\begin{aligned}0\leqslant\varphi(x)\leqslant f(x),&\quad\forall x\in E\\ \int_{A\cup B}\varphi(x)\mathrm{d}x&\leqslant\int_A\varphi(x)\mathrm{d}x+\int_B\varphi(x)\mathrm{d}x\\ &\leqslant\int_A f(x)\mathrm{d}x+\int_B f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

则

$$\int_{A\cup B}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_A f(x)\mathrm{d}x+\int_B f(x)\mathrm{d}x$$

任取 $A$ 上简单函数 $0\leqslant\varphi_1(x)\leq f(x)$，$B$ 上简单函数 $0\leqslant\varphi_2(x)\leq f(x)$，$\quad\forall x\in B$

$$\varphi(x)=\begin{cases}\varphi_1(x) & x\in A\\ \varphi_2(x) & x\in B\end{cases}$$

$\varphi(x)$ 是 $A\cup B$ 上简单函数，且 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant f(x)$

$$\begin{aligned}\int_{A\cup B} f(x)\mathrm{d}x &\geqslant \int_{A\cup B}\varphi(x)\mathrm{d}x\\ &=\int_A\varphi(x)\mathrm{d}x+\int_B\varphi(x)\mathrm{d}x\\ &=\int_A\varphi_1(x)\mathrm{d}x+\int_B\varphi_2(x)\mathrm{d}x\\ \int_{A\cup B} f(x)\mathrm{d}x &\geqslant \int_A f(x)\mathrm{d}x+\int_B f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

综上

$$\int_{A\cup B} f(x)\mathrm{d}x=\int_A f(x)\mathrm{d}x+\int_B f(x)\mathrm{d}x$$

**定理 3.2 (*Levi* 单调性定理)**

设有定义在 $E$ 上的非负递增可测函数列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_k(x)\leqslant\cdots,$$

且有 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)=f(x), x\in E$, 则

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

**证明**

1. $f(x)$ 在 $E$ 上非负可测。且 $f_k(x)\leqslant f(x)\quad\forall n\in\mathbb{N}.$

   则

$$\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E f_{k+1}(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}x\quad\text{上界}$$

   故

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}x$$

2. 设 $\varphi(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上任一非负可测简单函数，且 $\varphi(x)\leqslant f(x)$

   任取 $0<c<1$，令

$$E_k=E\left[f_k(x)\geqslant c\varphi(x)\right]$$

   是 $E$ 的可测子集

   显然 $E_k\subseteq E_{k+1}\left(f_k(x)\leqslant f_{k+1}(x), \text{故} f_k(x)\geqslant c\varphi(x)\Rightarrow f_{k+1}(x)\geqslant c\varphi(x)\right)$

   且 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k=E$

   故

$$\int_E\varphi(x)dx=\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x &\geqslant \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f_k(x)\mathrm{d}x\\ &\geqslant \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} c\varphi(x)\mathrm{d}x\\ &= c\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}\varphi(x)\mathrm{d}x\\ &= c\int_E\varphi(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

令 $c\to 1$

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_E\varphi(x)\mathrm{d}x$$

由定义

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_E f(x)\mathrm{d}x$$

综上

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

□

**注** 这个证明可能还不够严谨，但是周民强的书也只写到这

**注** 对于非负可测递增函数列，极限和积分可以换序

**定理 3.3 (积分的线性性质)**

$f(x),g(x)$ 是 $E$ 上非负可测函数，$\alpha,\beta$ 非负，则

$$\int_E(\alpha f(x)+\beta g(x))\mathrm{d}x=\alpha\int_E f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_E g(x)\mathrm{d}x$$

♡

**证明**

1. 取 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant c\cdot f(x)$，$\varphi(x)$ 在 $E$ 上非负简单函数，$0\leqslant\psi(x)=\frac{1}{c}\varphi(x)\leqslant f(x)$，$\psi(x)$ 也是 $E$ 上非负简单函数

$$\begin{aligned}\int_E cf(x)\mathrm{d}x &= \sup\left\{\int_E\varphi(x)\mathrm{d}x\right\}\\ &= \sup\left\{\int_E c\cdot\psi(x)\mathrm{d}x\right\}\\ &= c\cdot\sup\left\{\int_E\psi(x)\mathrm{d}x\right\}\\ &= c\cdot\int_E f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

2. $\{\varphi_n(x)\},\{\psi_n(x)\}$ 在 $E$ 上非负递增简单函数列，满足

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x)\qquad\lim_{n\to\infty}\psi_n(x)=g(x)$$

$\varphi_n(x)+\psi_n(x)$ 在 $E$ 上是非负简单函数

$$\varphi_n(x)+\psi_n(x)\leqslant\varphi_{n+1}(x)+\psi_{n+1}(x)\leqslant f(x)+g(x)$$

且

$$\lim_{n\to\infty}(\varphi_n(x)+\psi_n(x))=f(x)+g(x)$$

由 *Levi* 定理

$$\begin{aligned}\int_E (f(x)+g(x))\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\int_E (\varphi_n(x)+\psi_n(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_E \varphi_n(x)\mathrm{d}x+\int_E \psi_n(x)\mathrm{d}x\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_E \varphi_n(x)\mathrm{d}x+\lim_{n\to\infty}\int_E \psi_n(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_E f(x)\mathrm{d}x+\int_E g(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

□

**定理 3.4 (逐项积分定理)**

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $E$ 上非负可测函数, 则

$$\int_E\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x$$

♡

**证明** 令 $g_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$，$g_n(x)$ 在 $E$ 上非负递增可测

由 *Levi* 定理以及积分的线性性

$$\int_E \lim_{n\to\infty} g_n(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_E g_n(x)\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int_E\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

□

**引理 3.1 (*Fatou* 引理)**

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $E$ 上非负可测函数列, 则

$$\int_E\left(\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x\leqslant \underline{\lim}_{n\to x}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x$$

♡

**证明** $\{\inf\limits_{k\geqslant n} f_k(x)\}$ 是递增可测函数列

由 *Levi* 定理

$$\int_E\left(\lim_{n\to\infty}\inf_{k\geqslant n} f_k(x)\right)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_E\left(\inf_{k\geqslant n} f_k(x)\right)\mathrm{d}x$$

$$\int_E\left(\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x\leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x$$

□

**注** *Fatou* 引理用于判断极限函数的可积性

**注**

$$\int_E\left(\inf_{k\geqslant n} f_k(x)\right)\mathrm{d}x\leqslant \inf_{k\geqslant n}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x$$

**例题 3.1** *Fatou* **引理等号不总成立的例子**

$$f_n(x)=\begin{cases} n & 0<x<\frac{1}{n} \\ 0 & x\geqslant \frac{1}{n} \end{cases}$$

对 $\forall x\in(0,+\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$$

$$\int_{(0+\infty)}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x=0$$

$$\begin{aligned}\int_{(0,+\infty)} f_n(x)\mathrm{d}x &= \int_{(0,\frac{1}{n})} f_n(x)\mathrm{d}x+\int_{(\frac{1}{n},+\infty)} f_n(x)\mathrm{d}x \\ &=1\end{aligned}$$

**命题 3.7**

$E$ 是零测集, $f$ 是 $E$ 上非负可测函数，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=0$$

**证明** $0\leqslant\varphi(x)\leqslant f(x)$，$\varphi(x)$ 是 $E$ 上简单函数

$$\begin{aligned}\int_E f(x)\mathrm{d}x &= \sup\left\{\int_E \varphi(x)\mathrm{d}x\right\} \\ &=\sup\{0\} \\ &=0\end{aligned}$$

□

**命题 3.8**

$f,g$ 是 $E$ 上非负可测函数，$f\leqslant g$ a. e. $x\in E$，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E g(x)\mathrm{d}x$$

**证明** $E_1=E[f\leqslant g]$ $E_2=E[f>g]$ $E=E_1\cup E$, $E_1\cap E_2=\varnothing$

$$\begin{aligned}\int_E f(x)\mathrm{d}x &= \int_{E_1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{E_2} f(x)\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_{E_1} g(x)\mathrm{d}x+\int_{E_2} g(x)\mathrm{d}x \\ &=\int_E g(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

□

**推论 3.2**

$f,g$ 是 $E$ 上非负可测函数，$f=g$ a. e. $x\in E$

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E g(x)\mathrm{d}x$$

**推论 3.3**

$f$ 是 $E$ 上非负可测函数，$f=0\quad$ a. e. $x\in E$ 的充要条件是

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=0$$

**证明**

1. 必要性

   Trivial

2. 充分性

   $E_k=E[f>\frac{1}{k}]$

$$\frac{1}{k}m(E_k)=\int_{E_k}\frac{1}{k}\mathrm{d}x\leqslant\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}x=0$$

故 $m(E_k)=0(k=0,1,2\ldots)$

$$m(E[f>0])=m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m\left(E_k\right)=0$$

□

## 3.3 可测函数的 Lebesgue 积分

**定义 3.3**

$f$ 是可测集 $E$ 上的有限函数，当 $\int_E f^+(x)\mathrm{d}x$,$\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$ 至少一个有限，称 $f$ 在 $E$ 上积分确定，记

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E f^+(x)\mathrm{d}x-\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$$

为 $f$ 在 $E$ 上的勒贝格积分

若 $\int_E f^+(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$ 都有限 (即 $\int_E f(x)\mathrm{d}x$) 有限)，称 $f$ 在 $E$ 上勒贝格可积

$E$ 上全体可测函数记为 $L(E)$

**定理 3.5** (*Lebesgue* 可积等价条件)

若 $f$ 是可测函数

$$f\in L(E)\Longleftrightarrow|f|\in L(E)$$

**证明** 只需注意到

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E\left(f^+(x)-f^-(x)\right)\mathrm{d}x=\int_E f^+(x)\mathrm{d}x-\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$$
$$\int_E|f(x)|\mathrm{d}x=\int_E\left(f^+(x)+f^-(x)\right)\mathrm{d}x=\int_E f^+(x)\mathrm{d}x+\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$$

□

**推论 3.4**

$|f(x)| \leqslant g(x)$ a. e 于 $E$, 且 $g(x)$ 是 $E$ 上非负可积函数，则 $f \in L(E)$, 且

$$\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_E |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_E g(x)\mathrm{d}x$$

**证明** $|f(x)| \leqslant g(x)$ a. e. 于 $E$，$|f(x)|, g(x)$ 是 $E$ 上非负可测函数

$$\int_E |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_E g(x)\mathrm{d}x < +\infty$$

故 $|f(x)| \in E$，故 $f(x) \in L(E)$

$$\begin{aligned}
\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_E f^+(x)\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \left|\int_E f^+(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_E f^-(x)dx\right| \\
&= \int_E \left(f^+(x) + f^-(x)\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_E |f(x)|\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

□

**定理 3.6 (积分的线性性)**

$f, g \in L(E)$，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 则 $\alpha f + \beta g \in L(E)$，且

$$\int_E (\alpha f(x) + \beta g(x))\mathrm{d}x = \alpha \int_E f(x)\mathrm{d}x + \beta \int_E g(x)\mathrm{d}x$$

**证明**

1. 先证明 $cf(x) \in L(E)$
   (a). $c = 0$ 显然
   (b). $c > 0$

$$(cf)^+ = cf^+ \quad (cf)^- = cf^-$$

$f \in L(E)$

$$\begin{gathered}
\int_E f^+(x)\mathrm{d}x < +\infty, \int_E f^-(x)\mathrm{d}x < +\infty \\
\int_E cf^+(x)\mathrm{d}x = c\int_E f^+(x)\mathrm{d}x < +\infty \\
\int_E cf^-(x)\mathrm{d}x = c\int_E f^-(x)\mathrm{d}x < +\infty
\end{gathered}$$

故 $cf \in L(E)$，且

$$\begin{aligned}
\int_E cf(x)\mathrm{d}x &= \int_E c(f)^+(x)\mathrm{d}x - \int_E c(f)^-(x)\mathrm{d}x \\
&= c\int_E f^+(x)\mathrm{d}x - c\int_E f^-(x)\mathrm{d}x \\
&= c\int_E f(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

(c). $c < 0$

$$(cf)^+ = |c|f^- \quad (cf)^- = |c|f^+$$

$$\int_E (cf)^+(x)\mathrm{d}x = \int_E |c|f^-(x)\mathrm{d}x = |c|\int_E f^-(x)\mathrm{d}x < +\infty$$
$$\int_E (cf)^-(x)\mathrm{d}x = \int_E |c|f^+(x)\mathrm{d}x = |c|\int_E f^+(x)\mathrm{d}x < +\infty$$

故 $cf \in L(E)$，且

$$\begin{aligned}\int_E cf(x)\mathrm{d}x &= \int_E (cf)^+(x)\mathrm{d}x - \int_E (cf)^-(x)\mathrm{d}x \\ &= |c|\left(\int_E f^-(x)\mathrm{d}x - \int_E f^+(x)\mathrm{d}x\right) \\ &= -|c|\int_E f(x)\mathrm{d}x \\ &= c\int_E f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

2. 再证 $f+g \in L(E)$

$|f|, |g| \in L(E) \to |f|+|g| \in L(E)$，又因为 $|f+g| \leqslant |f|+|g|$，所以 $|f+g| \in L(E)$，所以 $f+g \in L(E)$

$$\begin{aligned}f+g =& (f+g)^+ - (f+g)^- \\ =& f^+ - f^- + g^+ - g^-\end{aligned}$$
$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$$

由非负可测函数的线性性

$$\int_E (f+g)^+(x)\mathrm{d}x + \int_E f^-(x)\mathrm{d}x + \int_E g^-(x)\mathrm{d}x = \int_E (f-g)^-(x)\mathrm{d}x + \int_E f^+(x)\mathrm{d}x + \int_E g^+(x)\mathrm{d}x$$

由于每一项积分值有限，所以可以移项得到

$$\int_E (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x + \int_E g(x)\mathrm{d}x$$

□

**定理 3.7 (积分对定义域的可数可加性)**

$E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \quad E_i \cap E_j = \varnothing (i \neq j)$，设 $f$ 在 $E$ 积分确定，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f(x)\mathrm{d}x$$

♡

**证明**

1. $f$ 非负可测

$$\int_{E_n} f(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\chi_{E_n}(x)\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f(x)\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_E f(x)\chi_{E_n}(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_E \sum_{n=1}^{\infty} f(x)X_{E_n}(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_E f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

2. 当 $f$ 是一般可测函数，$f$ 在 $E$ 上积分确定
则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f^+(x)\mathrm{d}x$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f^-(x)\mathrm{d}x$ 至少一个收敛

$$\begin{aligned}\int_E f(x)\mathrm{d}x &= \int_E f^+(x)\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f^+(x)\mathrm{d}x - \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f^-(x)\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

□

**命题 3.9**

可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$

1. $E \neq \varnothing, m(E) = 0$，则 $E$ 上任意实函数 $f$ 在 $E$ 上 $L$ 可积且 $\int_E f(x)dx = 0$
2. 若 $f \in L(E)$. 则 $f$ 在 $E$ 上几乎处处有限 $(m(E[f = \infty]) = 0)$
3. $f$ 在 $E$ 上积分确定，则 $f$ 在 $E$ 的任一可测子集 $A$ 上积分确定，又若 $E = A \cup B, A \cap B = \varnothing$ 则
$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_A f(x)\mathrm{d}x + \int_B f(x)\mathrm{d}x$$
4. $f$ 在 $E$ 上积分确定，且 $f$ 与 $g$ 在 $E$ 上几乎处处相等，则 $g$ 在 $E$ 上积分确定且
$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E g(x)\mathrm{d}x$$
5. $f$ 与 $g$ 在 $E$ 上积分确定且 $f \leqslant g$ a. e. 于 $E$，则
$$\int_E f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E g(x)\mathrm{d}x$$
注 特别地，若 $m(E) < +\infty, b \leqslant f(x) \leqslant B$，a .e. 于 $E$，则
$$b \cdot m(E) \leqslant \int_E f(x)\mathrm{d}x \leqslant B \cdot m(E)$$

**证明**

$$\begin{aligned}\int_{x\in E} f(x)\mathrm{d}x &= \int_E f^+(x)\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_E g^+(x)\mathrm{d}x - \int_E g^-(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_E g(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

□

**定理 3.8 (积分的绝对连续性)**

$f \in L(E), \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当可测集 $A \subset E$ 满足 $m(A) < \delta$. 则

$$\left|\int_A f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_A |f(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon$$

♡

**证明**

1. 当 $f$ 是非负简单函数，设 $f(x) \leqslant M$，取

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2(M+1)}$$

   当 $m(A) < \delta$ 时,

$$\int_A f(x)dx \leqslant M \cdot m(A) < \frac{\varepsilon}{2}$$

2. $f$ 一般可测，$|f|$ 非负可测

   有非负简单函数 $\varphi(x) \leqslant |f(x)|$

$$\int_E \varphi(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_E \varphi(x)\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}$$

   $\forall\varepsilon > 0$，取 $\delta$ 使得 $m(A) < \delta$ 时,

$$\int_A \varphi(x)\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}$$

   故

$$\begin{aligned}
\int_A |f(x)|\mathrm{d}x &= \int_A \varphi(x)\mathrm{d}x + \int_A (|f(x)| - \varphi(x))\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_A \varphi(x)\mathrm{d}x + \int_E (|f(x)| - \varphi(x))\mathrm{d}x \\
&= \int_A \varphi(x)\mathrm{d}x + \int_E |f(x)|\mathrm{d}x - \int_E \varphi(x)\mathrm{d}x \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

□

# 第 4 章  微分与不定积分

# 第 5 章 LP 空间