

实变函数习题

王子毅

210803133@stu.yzu.edu.cn

2024 年 5 月 5 日

目录

1 Homework 1	2
2 Homework 2	5
3 Homework 3	6
4 Homework 4	7
5 Homework 5	8
6 Homework 6	9
7 Homework 7	11
8 Homework 8	15

1 Homework 1

Exercise 1. 证明下面的等式

$$1. \bigcup_{i=1}^n A_i - \bigcup_{j=1}^m B_j = \bigcup_{i=1}^n \bigcap_{j=1}^m (A_i - B_j);$$

$$2. A \cap \left(\bigcup_{a \in I} B_a \right) = \bigcup_{a \in I} (A \cap B_a);$$

$$3. E - \bigcup_{a \in I} A_a = \bigcap_{a \in I} (E - A_a);$$

Proof.

1.

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^n A_i - \bigcup_{j=1}^m B_j &= \bigcup_{i=1}^n A_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^m B_j \right)^c \\ &= \bigcup_{i=1}^n \left(A_i \cap \bigcap_{j=1}^m B_j^c \right) \\ &= \bigcup_{i=1}^n \left(\bigcap_{j=1}^m A_i \cap B_j^c \right) \\ &= \bigcup_{i=1}^n \left(\bigcap_{j=1}^m A_i - B_j \right) \\ &= \bigcup_{i=1}^n \bigcap_{j=1}^m (A_i - B_j) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \forall x \in A \cap \left(\bigcup_{a \in I} B_a \right) &\iff x \in A, \text{ 且 } x \in B_1 \text{ 或 } x \in B_2 \dots \\ &\iff x \in A \text{ 且 } x \in B_1, \text{ 或 } x \in A \text{ 且 } x \in B_2, \dots \\ &\iff x \in \bigcup_{a \in I} (A \cap B_a) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \forall x \in E - \bigcup_{a \in I} A_a &\iff x \in E \text{ 且 } x \notin A_1 \text{ 且 } x \notin A_2 \dots \text{ 且 } x \notin A_\alpha (\alpha \in I) \\ &\iff x \in E \text{ 且 } x \notin A_1, \text{ 且 } x \in E \text{ 且 } x \notin A_2, \dots, \text{ 且 } x \in E \text{ 且 } x \notin A_\alpha (\alpha \in I) \\ &\iff x \in \bigcap_{a \in I} (E - A_a) \end{aligned}$$

□

Exercise 2. 设 $\{A_n\}$ 是一列集. 令 $B_1 = A_1, B_n = A_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i (n \geq 2)$. 证明 $\{B_n\}$ 中的集互不相交, 并且

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n B_i, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Proof.

1. 对 $i \neq j$, 不妨设 $i < j$, 则 $B_i = A_i - \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k \subset A_i, B_j = A_j - \bigcup_{k=1}^{j-1} A_k \subset A_j - A_i$, 故

$$B_i \cap B_j = \left(A_i - \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k \right) \cap \left(A_j - \bigcup_{k=1}^{j-1} A_k \right) \subset A_i \cap (A_j - A_i) = \emptyset,$$

2. (a) $B_i \subset A_i$, 则 $\bigcup_{i=1}^n B_i \subset \bigcup_{i=1}^n A_i$

- (b) 任取 $x \in \bigcup_{i=1}^n A_i$, 则 $\exists i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 使得 $x \in A_i$, 取 $1, 2, \dots, n$ 中 k 使得 $x \in A_k$

且 $x \notin A_j (j = 1, 2, \dots, k-1)$, 则 $x \in A_k - \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i = B_k \subset \bigcup_{i=1}^n B_i$, 即 $\bigcup_{i=1}^n A_i \subset \bigcup_{i=1}^n B_i$

综上, $\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n B_i$

3. 令 $n \rightarrow \infty$, 同理可证 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$

□

Exercise 3. 设 $\{f_n(x)\}$ 是 \mathbf{R}^n 上的一列实值函数. 试用形如 $\{x : f_n(x) > k\}$ 的集表示集

$$\left\{ x : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = +\infty \right\}.$$

Solution.

$$\forall x \in \left\{ x : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = +\infty \right\} \iff \forall k > 0, \exists m > 0, \forall n \geq m, x \in \{x : f_n(x) > k\}$$

$$\iff \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \{x \in \mathbf{R}^n : f_n(x) > k\}$$

□

Exercise 4. 设 $\{f_n(x)\}$ 是 \mathbf{R}^n 上的一列实值函数, 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) (x \in \mathbf{R}^n)$. 证明对任意实数 a , 有

$$\{x : f(x) \leq a\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{x : f_n(x) < a + \frac{1}{k}\right\}.$$

Proof. 记 $E_{n,k} = \left\{x : f_n(x) < a + \frac{1}{k}\right\}$

$$1. \forall x_0 \in \{x : f(x) \leq a\}, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0) \leq a,$$

则对 $\forall k \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}$, 当 $n \geq m$ 时, 有 $f_n(x_0) < a + \frac{1}{k}$, 即 $x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E_{n,k}$

$$2. \forall x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E_{n,k}, \text{ 对于任意给定的 } k \in \mathbb{N}, x_0 \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E_{n,k}, \text{ 则 } x_0 \in \varliminf_{n \rightarrow \infty} E_{n,k}$$

故 $\exists m \in \mathbb{N}, \forall x_0 \in E_{n,k}$, 一切 $n > m$ 时, 有 $f_n(x_0) < a + \frac{1}{k}$, 令 $n \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$, 可得 $f(x_0) \leq a$, 故 $x_0 \in \{x : f(x) \leq a\}$

□

Exercise 5. 设 $A_{2n-1} = \left(0, \frac{1}{n}\right), A_{2n} = (0, n) (n \geq 1)$. 求 $\varlimsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ 和 $\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n$.

Solution.

$$1. \forall x \leq 0, x \notin A_n, \text{ 故 } x \notin \varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n, x \notin \varlimsup_{n \rightarrow \infty} A_n$$

$$\forall x > 0, \exists N, \text{ s.t. } x < N, \text{ 故 } \forall n > N, x \in (0, n) = A_{2n}, \text{ 故 } x \in \varlimsup_{n \rightarrow \infty} A_n$$

$$\varlimsup_{n \rightarrow \infty} A_n = (0, +\infty)$$

$$2. \forall x > 0, \exists n_0, \text{ s.t. } x > \frac{1}{n_0}, \text{ 故 } \forall n > n_0, x \notin \left(0, \frac{1}{n}\right) = A_{2n-1}, \text{ 故 } x \notin \varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n$$

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \emptyset$$

□

2 Homework 2

Exercise 1. 证明可列集的有限子集的全体是可列集.

Exercise 2. 设 A 是无限集, B 是可列集. 证明若存在一个 A 到 B 的单射, 则 A 是可列集.

Exercise 3. 设 A 是直线上以有理数为端点的开区间的全体. 证明 A 是可列集.

Exercise 4. 作出下面的集与集之间的一个双射:

1. 实数集到无理数集;
2. 平面上的闭单位圆盘 $\overline{U(0, 1)}$ 到开单位圆盘 $U(0, 1)$.

Exercise 5. 设 A 是平面上圆的全体所成之集. 求证 $\overline{\overline{A}} = c$.

3 Homework 3

Exercise 1. 设 $f(x)$ 是 \mathbf{R}^n 上的实值函数. 证明若对任意常数 a , $\{x : f(x) < a\}$ 和 $\{x : f(x) > a\}$ 都是开集, 则 $f(x)$ 在 \mathbf{R}^n 上连续.

Exercise 2. 设 $A, B \subset \mathbf{R}^n$. 证明:

1. $(A^c)^\circ = (\overline{A})^c, \quad \overline{A^c} = (A^\circ)^c;$
2. $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ;$
3. $(A \cup B)' = A' \cup B', \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$

Exercise 3. 设 $A, B \subset \mathbf{R}^n, A \cap B = \emptyset$. 证明 $\overline{A} \cap B^\circ = \emptyset$.

Exercise 4. 设 $A \subset \mathbf{R}^n$. 证明: A° 是包含在 A 中的最大开集, \overline{A} 是包含 A 的最小闭集.

Exercise 5. 设 A 是 \mathbf{R}^n 的非空子集. 证明:

1. $d(x, A) = 0$ 当且仅当 $x \in \overline{A}$. (特别地, 若 A 是闭集, $x \notin A$, 则 $d(x, A) > 0$.)
2. $f(x) = d(x, A) (x \in \mathbf{R}^n)$ 是 \mathbf{R}^n 上的连续函数.

Exercise 6. 设 A 是 \mathbf{R}^n 中的非空闭集. 证明对任意 $x \in \mathbf{R}^n$, 存在 $y_0 \in A$ 使得

$$d(x, A) = d(x, y_0).$$

Exercise 7. 设 A 和 B 分别是 \mathbf{R}^p 和 \mathbf{R}^q 中的闭集, 证明 $A \times B$ 是 $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$ 中的闭集.

Exercise 8. 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的非负连续函数. 证明 $f(x)$ 的下方图形

$$E = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

是 \mathbf{R}^2 中的闭集.

Exercise 9. 求证 \mathbf{R}^n 中的每个闭集是 G_δ 型集, 每个开集是 F_σ 型集.

4 Homework 4

Exercise 1. 设 $A \subset \mathbf{R}^n$. 求证若 A 有界, 则 $m^*(A) < \infty$.

Exercise 2. 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数. 求证曲线 $y = f(x)$ 的作为 \mathbf{R}^2 的子集, 其外测度为零

Exercise 3. 设 $A \subset \mathbf{R}^n$. 若对任意 $x \in A$, 存在 x 的邻域 $U(x, \varepsilon)$, 使得 $m^*(A \cap U(x, \varepsilon)) = 0$, 求证 $m^*(A) = 0$.

5 Homework 5

Exercise 1. 设 $A, B \subset \mathbf{R}^n$. 若 A 是可测集, $m^*(A \triangle B) = 0$, 求证 B 是可测集, 并且

$$m(B) = m(A).$$

Exercise 2. 设 $A \subset \mathbf{R}^n$. 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在可测集 $E \subset A$ 使得 $m^*(A - E) < \varepsilon$. 求证 A 是可测集

Exercise 3. 设 A, B, C 是 \mathbf{R}^n 中的可测集. 若 A, B, C 的测度都是有限的, 求证:

$$\begin{aligned} m(A \cup B \cup C) = & m(A) + m(B) + m(C) - m(A \cap B) - \\ & m(A \cap C) - m(B \cap C) + m(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Exercise 4. 设 $\{A_n\}$ 是 \mathbf{R}^n 中的一列可测集. 求证:

1. 若 $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$, 则 $m\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n\right) \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} m(A_n)$;
2. 若 $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$, 并且极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n)$ 存在, 并且

$$m\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n).$$

6 Homework 6

Exercise 1. 设 $\{A_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中的一列可测集, 并且 $m(A_n) = 1 (n \geq 1)$. 求证

$$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1.$$

Exercise 2. 设 A_1, A_2, \dots, A_n 是 $[0, 1]$ 中的可测集, $\sum_{i=1}^n m(A_i) > n-1$. 求证 $m\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) > 0$.

Exercise 3. 计算 E 的测度, 这里

$$E = \{x \in (0, 1) : x \text{ 的十进制无限小数表示中不出现 } 7\}.$$

Exercise 4. 求证: 非空开集的测度大于零.

Exercise 5. 设 $0 < \varepsilon < 1$. 在区间 $[0, 1]$ 中作出一个开集 G , 使得 $m(G) \leq \varepsilon$, 并且 $\overline{G} = [0, 1]$.

Exercise 6. 设 $0 < c < 1$. 在 $[0, 1]$ 中作出一个无内点的闭集 F , 使得 $m(F) = c$.

Exercise 7. 设 $A \subset \mathbf{R}^n$. 求证 A 是可测集当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 G 和闭集 F , 使得 $F \subset A \subset G$, 并且 $m(G - F) < \varepsilon$.

Exercise 8. 设 E 为 \mathbf{R}^n 中的可测集, $m(E) < \infty$. 求证对任意 $\varepsilon > 0$, 存在有界闭集 $F \subset E$, 使得 $m(E - F) < \varepsilon$.

Exercise 9. 设 f 是定义在 (a, b) 上的函数. 求证若 f 在每个 $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ 上可测, 则 f 在 (a, b) 上可测.

Proof. 取 $N = \left\lfloor \frac{2}{b-a} \right\rfloor + 1$, 对任意的正整数 $n > N$, f 在每个 $\left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right]$ 上可测,

从而对 $\forall c \in \mathbf{R}$, 集 $\left\{x \in \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right] : f(x) > c\right\}$ 可测,

$$\{x \in (a, b) : f(x) > c\} = \bigcup_{n=N}^{\infty} \left\{x \in \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right] : f(x) > c\right\} \text{ 可测}$$

即 f 在 (a, b) 可测

□

Exercise 10. 设 $\{f_n\}$ 是 E 上的实值可测函数列. 求证 A 是可测集, 这里

$$A = \left\{x \in E : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ 存在并且有限}\right\}.$$

Proof. 由 Cauchy 收敛准则, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ 存在当且仅当对 $\forall k \geq 1, \exists N \geq 1$, 对 $\forall m, n \geq N$, 都有 $|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{1}{k}$.

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{m=N}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \left\{ x \in E : |f_m(x) - f_n(x)| < \frac{1}{k} \right\}$$

由于每个 f_n 可测, 故 $\left\{ x \in E : |f_m(x) - f_n(x)| < \frac{1}{k} \right\}$ 是可测集, 因此 A 是可测集. \square

Exercise 11. 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的可导函数. 求证 $f'(x)$ 是 $[a, b]$ 上的可测函数.

Proof. 证明. 补充定义当 $x > b$ 时 $f(x) = f(b)$. 对每个 $n \geq 1$, 令

$$f_n(x) = n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right], \quad x \in [a, b],$$

则由 $f(x)$ 在 $[a, b+1]$ 上连续可得每个 $f_n(x)$ 在 $[a, b+1]$ 上可测.

注意到 $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), x \in [a, b)$, 因此 $f'(x)$ 在 $[a, b)$ 上是可测的. 由于对任何 $c \in \mathbb{R}$,

$$\{x \in [a, b] : f'(x) > c\} = \begin{cases} \{x \in [a, b) : f'(x) > c\}, & f'(b) \leq c, \\ \{x \in [a, b) : f'(x) > c\} \cup \{b\}, & f'(b) > c, \end{cases}$$

故 $\{x \in [a, b] : f'(x) > c\}$ 是可测集, 因此 $f'(x)$ 是 $[a, b]$ 上的可测函数. \square

Exercise 12. 设 $f(x)$ 在 \mathbf{R}^n 上可测, $a \in \mathbf{R}^1$. 求证 $f(ax)$ 在 \mathbf{R}^n 上可测.

Proof. 若 $a = 0$, 显然.

若 $a \neq 0$

$$\{x \in \mathbf{R}^n : f(ax) > c\} = \frac{1}{a} \{x \in \mathbf{R}^n : f(x) > c\}$$

\square

7 Homework 7

Exercise 1. 设 f 和 g 是 \mathbf{R}^1 上的两个连续函数. 求证若在 \mathbf{R}^1 上 $f = g$ a.e., 则 f 和 g 在 \mathbf{R}^1 上处处相等.

Proof. 方法 1

反证: 设存在 $x_0 \in \mathbf{R}^1$ 使 $f(x_0) \neq g(x_0)$, 则 $f(x_0) - g(x_0) \neq 0$, 不妨设 $f(x_0) - g(x_0) > 0$.
 f, g 为连续函数, 故 $f - g$ 在 \mathbf{R}^1 上连续, 则由连续函数的局部保号性, 存在 $\delta > 0$,

$$f(x) - g(x) > 0 \quad (x \in U(x_0, \delta)),$$

即当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时 $f(x) \neq g(x)$. 而 $m(U(x_0, \delta)) = 2\delta > 0$, 与 $f = g$ a.e. 矛盾.

因此 f 和 g 在 \mathbf{R}^1 上处处相等.

方法 2

设 $A = \{x : f(x) \neq g(x)\} = \{x : f(x) - g(x) > 0\} \cup \{x : f(x) - g(x) < 0\}$,

则由 $f - g$ 连续可得 A 是开集. 下证 $A = \emptyset$.

若存在 $x_0 \in A$, 则存在 $\delta > 0$, 使得 $U(x_0, \delta) \subset A$, 从而

$$m(A) \geq m(U(x_0, \delta)) = 2\delta > 0,$$

这与 $f = g$ a.e. 矛盾! □

Exercise 2. 用定义直接证明 $f_n(x) = \ln(1 + x^n)$ 在 $[0, 1]$ 上依测度收敛于 0.

Proof. 当 $x \geq 0$ 时, $\ln(1 + x^n) \leq x^n$, 所以对任何 $\varepsilon > 0$,

$$\{x \in [0, 1] : |\ln(1 + x^n)| \geq \varepsilon\} \subset \{x \in [0, 1] : |x^n| \geq \varepsilon\}$$

从而

$$\begin{aligned} m(\{x \in [0, 1] : |\ln(1 + x^n)| \geq \varepsilon\}) &\leq m(\{x \in [0, 1] : |x^n| \geq \varepsilon\}) \\ &= m\left(\left\{x \in [0, 1] : |x| \geq \varepsilon^{\frac{1}{n}}\right\}\right) \\ &= m\left(\left[\varepsilon^{\frac{1}{n}}, 1\right]\right) = 1 - \varepsilon^{\frac{1}{n}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

因此在 $[0, 1]$ 上 $\ln(1 + x^n) \xrightarrow{m} 0$. □

Exercise 3. 求证:

1. 若 $f_n \rightarrow f$ a.e., $f_n \rightarrow g$ a.e., 则 $f = g$ a.e.;
2. 若 $f_n \xrightarrow{m} f, f_n \xrightarrow{m} g$, 则 $f = g$ a.e.

Proof.

1. 由于 $f_n \rightarrow f$ a.e., $f_n \rightarrow g$ a.e., 存在 $E_1 \subset E, E_2 \subset E, m(E_1) = m(E_2) = 0$,

使得当 $x \in E - E_1$ 时 $f_n(x) \rightarrow f(x)$, 当 $x \in E - E_2$ 时 $f_n(x) \rightarrow g(x)$.

令 $E_0 = E_1 \cup E_2$, 则 $m(E_0) = 0$,

$E - E_0 \subset (E - E_1) \cap (E - E_2)$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = g(x) \quad (x \in E - E_0)$$

因此 $f = g$ a.e..

2. 方法 1

设 $f_n \xrightarrow{m} f$, 由 Riesz 定理, 存在 $\{f_n\}$ 的子列 $\{f_{n_k}\}$, 使得 $f_{n_k} \rightarrow f$ a.e.

由 $f_n \xrightarrow{m} g$ 可得 $f_{n_k} \xrightarrow{m} g$, 从而由 Riesz 定理, 存在 $\{f_{n_k}\}$ 的子列 $\{f_{n_{k_j}}\}$,

使得 $f_{n_{k_j}} \rightarrow g$ a.e., 显然也有 $f_{n_{k_j}} \rightarrow f$ a.e., 因此由 (1) 得 $f = g$ a.e..

方法 2

$$|f - g| \leq |f - f_k| + |f_k - g|$$

$$m\left(E\left(|f - g| \geq \frac{1}{n}\right)\right) \leq m\left(E\left(|f - f_k| \geq \frac{1}{2n}\right)\right) + m\left(E\left(|f_k - g| \geq \frac{1}{2n}\right)\right)$$

令 $n \rightarrow \infty$

$$m\left(E\left(|f - g| \geq \frac{1}{n}\right)\right) = 0$$

$$E(f \neq g) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left(|f - g| \geq \frac{1}{n}\right)$$

故 $m(E(f \neq g)) = 0$, 即 $f = g$ a.e.

□

Exercise 4. 求证:

1. 若 $f_n \rightarrow f$ a.un., 则 $f_n \rightarrow f$ a.e.;

2. 若 $f_n \rightarrow f$ a.un., 则 $f_n \xrightarrow{m} f$.

Proof.

1. 设在 E 上 $f_n \rightarrow f$ a.un., 则对 $\forall k \geq 1$, 存在可测集 $E_k \subset E$ 使得 $m(E - E_k) < \frac{1}{k}$, 并且在 E_k 上 f_n 一致收敛 (逐点收敛) 于 f .

令 $E_0 = E - \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} (E - E_k)$, 则

$$m(E_0) \leq m(E - E_k) < \frac{1}{k} \quad (k \geq 1)$$

令 $k \rightarrow \infty$, 故 $m(E_0) = 0$, 且当 $x \in E - E_0$ 时 $f_n(x) \rightarrow f(x)$, 即 $f_n \rightarrow f$ a.e..

2. 设在 E 上 $f_n \rightarrow f$ a.un., 则对 $\forall \delta \geq 0$, 存在可测集 $E_\delta \subset E$ 使得 $m(E - E_\delta) < \delta$, 并且在 E_δ 上 f_n 一致收敛于 f .

于是对 $\forall \varepsilon \geq 0, \exists N \geq 1$, 使得当 $n \geq N$ 时, 对任意的 $x \in E_\delta, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ 即 $E(|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon) \subset E - E_\delta$. 于是,

$$m(E(|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon)) \leq m(E - E_\delta) < \delta, \quad \forall n \geq N.$$

这表明 $\lim_{n \rightarrow \infty} m(E(|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon)) = 0$, 即 $f_n \xrightarrow{m} f$.

□

Exercise 5. 求证: 若在 E 上 $f_n \xrightarrow{m} f$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \leq f \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n$ a.e.

Proof. 设 $f_n \xrightarrow{m} f$, 由 Riesz 定理, 存在 $\{f_n\}$ 的子列 $\{f_{n_k}\}$, 使得 $f_{n_k} \rightarrow f$ a.e., 即存在 E 的子集 E_0 , 使得 $m(E_0) = 0$, 当 $x \in E - E_0$ 时 $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$. 于是, 当 $x \in E - E_0$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = f(x) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x),$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \leq f \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n$ a.e.

□

Exercise 6. 设在 E 上 $f_n \xrightarrow{m} f, f_n \leq f_{n+1}$ a.e. ($n \geq 1$). 求证 $f_n \rightarrow f$ a.e.

Proof. 由 $f_n \xrightarrow{m} f$ 以及 Riesz 定理, 存在 $\{f_n\}$ 的子列 $\{f_{n_k}\}$, 使得 $f_{n_k} \rightarrow f$ a.e., 即存在 E 的零测度子集 E_1 , 使得当 $x \in E - E_1$ 时 $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$; 又由 $f_n \leq f_{n+1}$ a.e., 存在 E 的零测度子集 E_2 , 使得当 $x \in E - E_2$ 时 $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ ($n \geq 1$). 取 $E_0 = E_1 \cup E_2$, 则 $m(E_0) = 0$, 当 $x \in E - E_0$ 时 $\{f_n(x)\}$ 单调增, 且存在子列 $\{f_{n_k}(x)\}$ 使得 $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$, 从而有当 $x \in E - E_0$ 时 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = f(x)$, 即 $f_n \rightarrow f$ a.e.

□

Exercise 7. 设 $m(E) < \infty$, f 是 E 上几乎处处有限的可测函数. 求证对任意 $\delta > 0$, 存在 E 的可测子集 A , 使得 $m(E - A) < \delta$, 并且 f 在 A 上有界.

Proof. 令 $E_0 = E(|f| = \infty)$, $E_n = E(|f| > n)$, $n \geq 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = E(|f| = \infty) = E_0$$

由 f 在 E 上 a.e. 有限可得 $m(E_0) = 0$, 再由 $m(E) < \infty$ 及测度的上连续性可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(E_n) = m(E_0) = 0$$

从而 $\forall \delta > 0, \exists n_0$, 使得 $m(E_{n_0}) < \delta$. 令 $A = E - E_{n_0}$, 则 $m(E - A) = m(E_{n_0}) < \delta$, 并且在 A 上 $|f| \leq n_0$. □

Exercise 8. 设 f 是 E 上的 a.e. 有限的可测函数. 求证存在 \mathbf{R}^n 上的连续函数列 $\{g_n\}$, 使得在 E 上 $g_n \rightarrow f$ a.e., 并且

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^n} |g_n(x)| \leq \sup_{x \in E} |f(x)| \quad (n \geq 1).$$

Proof. 由于 f 是 E 上 a.e. 有限的可测函数, 由 Lusin 定理, 对任意的 $k \geq 1$, 存在 \mathbf{R}^n 上的连续函数 h_k , 使得 $m(E(f \neq h_k)) < \frac{1}{k}$, 并且 $\sup_{x \in \mathbf{R}^n} |h_k(x)| \leq \sup_{x \in E} |f(x)|$.

又对 $\forall \varepsilon > 0$,

$$E(|f - h_k| \geq \varepsilon) \subset E(f \neq h_k)$$

因而

$$m(E(|f - h_k| \geq \varepsilon)) \leq m(E(f \neq h_k)) < \frac{1}{k} \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$$

这表明在 E 上 $h_k \xrightarrow{m} f$, 故由 Riesz 定理可得存在 $\{h_k\}$ 的子列 $\{h_{k_n}\}$,

使得在 E 上 $h_{k_n} \rightarrow f$ a.e.. 令 $g_n = h_{k_n}$, 则 $\{g_n\}$ 满足要求. □

Exercise 9. (Lusin 定理的逆) 设 f 是定义在 E 上的函数. 若对任给的 $\delta > 0$, 存在闭集 $F_\delta \subset E$, 使得 $m(E - F_\delta) < \delta$, 并且 f 在 F_δ 上连续. 则 f 在 E 上可测.

Proof. $\forall k \geq 1, \exists F_k \subset E$, 使得 $m(E - F_k) < \frac{1}{k}$, 并且 f 在 F_k 上连续.

令 $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, 则 f 在 F 上连续, 而 F 为 F_σ 型集, 故可测, 因此 f 在 F 上可测.

又 $E - F = E - \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} (E - F_k)$, $m(E - F) \leq m(E - F_k) < \frac{1}{k} (k \geq 1)$,

故 $m(E - F) = 0$. 即 f 在 $E - F$ 可测, 综上 f 在 $(E - F) \cup F = E$ 上可测. □

8 Homework 8

Exercise 1. 设 f 是 $[a, b]$ 上的实值可测函数, 并且

$$\int_a^b |f(x)| \ln(1 + |f(x)|) dx < \infty.$$

求证 $f \in L[a, b]$.

Proof. 取 $E_1 = E(|f| \leq e - 1) \cap [a, b]$, $E_2 = [a, b] - E_1$

$$\int_{E_1} |f(x)| dx \leq \int_{E_1} (e - 1) dx \leq \int_{[a, b]} (e - 1) dx = (e - 1)(b - a) < +\infty$$

$$\int_{E_2} |f(x)| dx < \int_{E_2} |f(x)| \ln(1 + |f(x)|) dx < +\infty$$

$$\int_{[a, b]} |f(x)| dx = \int_{E_1} |f(x)| dx + \int_{E_2} |f(x)| dx < +\infty$$

即 $|f| \in L[a, b]$, 故 $f \in L[a, b]$ □

Exercise 2. 设 $f \in L(\mathbf{R}^1)$, 满足 $f(0) = 0$, $f'(0)$ 存在. 求证 $\frac{f(x)}{x} \in L(\mathbf{R}')$.

Proof. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x| < \delta$ 时. $\left| \frac{f(x)}{x} - f'(0) \right| < \varepsilon$

取 $E_1 = (-\delta, \delta)$, $E_2 = (-\infty, -\delta] \cup [\delta, +\infty)$

$$\int_{E_1} \left| \frac{f(x)}{x} \right| dx < 2\delta \cdot (|f'(0)| + \varepsilon) < +\infty$$

$$\int_{E_2} \left| \frac{f(x)}{x} \right| dx < \int_{E_2} \frac{|f(x)|}{\delta} dx < +\infty$$

$$\int_{\mathbf{R}^1} \left| \frac{f(x)}{x} \right| dx = \int_{E_1} \left| \frac{f(x)}{x} \right| dx + \int_{E_2} \left| \frac{f(x)}{x} \right| dx < \infty$$

即 $\left| \frac{f(x)}{x} \right| \in L(\mathbf{R}^1)$, 故 $\frac{f(x)}{x} \in L(\mathbf{R}^1)$ □

Exercise 3. 设 $m(E) > 0$, f 是 E 上的可测函数, 并且 $f(x) > 0 (x \in E)$. 求证 $\int_E f dx > 0$.

Proof. $E_k = E\left(f \geq \frac{1}{k}\right)$, $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$

$$m(E) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k)$$

$m(E_k) \geq 0$, 若 $m(E_k)$ 均为 0,

$$0 \leq m(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) = 0$$

与 $m(E) > 0$ 矛盾!

故至少存在一个 $m(E_k) = \mu > 0$

$$\int_E f dx > \int_{E_k} f dx = \int_{E(f \geq \frac{1}{k})} f dx \geq \int_{E(f \geq \frac{1}{k})} \frac{1}{k} dx = \frac{\mu}{k} > 0$$

□

Exercise 4. 设 $f, g \in L(E)$, 并且对 E 的任意可测子集 A , 有 $\int_A f dx = \int_A g dx$. 求证 $f = g$ a.e.

Proof. 令 $h = f - g$, 则

$$\int_A h dx = \int_A f dx - \int_A g dx = 0$$

若 $m(E(f \neq g)) > 0$, 不妨设 $m(E(f > g)) > 0$, 则

$$\int_{E(f > g)} h dx > 0$$

矛盾!

故 $m(E(f \neq g)) = 0$, 即 $f = g$ a.e. 于 E

□