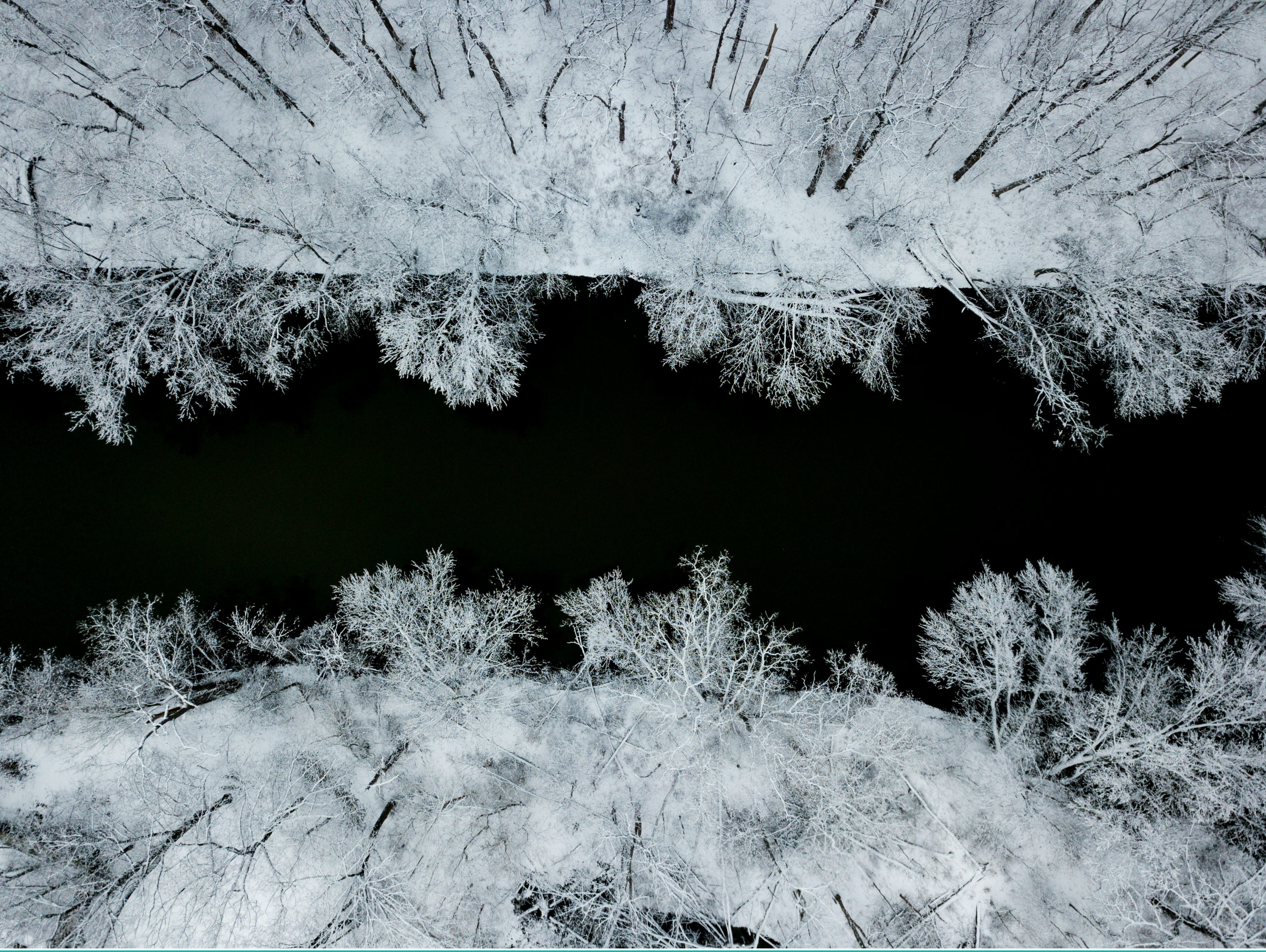

代数

作者：王子毅

组织：扬州大学数学科学学院

时间：August 28, 2024

版本：0.0

Bio:Information

ElegantLATEX Program

求知若饥，虚心若愚

目录

第 1 章　多项式　2

1.1　一元多项式代数 2
1.2　整除 4
1.3　最大公因式 5
1.4　因式分解 6
1.5　多项式函数 8
1.6　复系数多项式 9
1.7　实系数多项式和有理系数多项式 9
1.8　多元多项式 11
1.9　对称多项式 12
1.10　结式和判别式 14

第 2 章　特征值　17

2.1　特征值和特征向量 17
2.2　对角化 18
2.3　极小多项式与 Cayley-Hamilton 定理 20
2.4　特征值的估计 * 22

第 3 章　相似标准型　23

3.1　多项式矩阵 23
3.2　矩阵的法式 25
3.3　不变因子 26
3.4　有理标准型 29
3.5　初等因子 31
3.6　Jordan 标准型 33
3.7　Jordan 标准型进阶 39
3.8　矩阵函数 * 43

第 4 章　二次型　44

4.1　二次型化简和矩阵合同 44
4.2　二次型的化简 46
4.3　惯性定理 48
4.4　正定型和正定矩阵 49
4.5　Hermite 型 * 51

第 5 章　内积空间　52

5.1　内积空间概念 52
5.2　内积的表示与正交基 54

5.3 伴随 57
5.4 内积空间同构，正交变换和酉变换 58
5.5 自伴随算子 60
5.6 复正规算子 62
5.7 实对称矩阵特征值的估计 * 64
5.8 实正规算子 64
5.9 谱分解与极分解 66
5.10 奇异值分解 66

第 6 章 群论 **67**
6.1 67

前言

这份笔记是笔者在 2024 年 8 月复习《高等代数》时阅读复旦大学谢启鸿教授编写的《高等代数学》第四版时所整理的，主要整理了所有书中的定义、定理、命题、推论，a.e. 没有证明。

这份笔记的主要目的是帮助已经学过一遍高等代数的同学在复习的时候提纲挈领地快速掌握一些结果。

第 1 章 多项式

内容提要

- 一元多项式代数
- 整除
- 最大公因式
- 因式分解
- 多项式函数
- 复系数多项式
- 实系数多项式和有理系数多项式
- 多元多项式
- 对称多项式
- 结式和判别式

1.1 一元多项式代数

定义 1.1 (一元多项式)

设 $\mathbb{K}$ 是数域, x 为一个形式符号 (称为未定元), 若 $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{K}\,(a_n \neq 0, n \geqslant 0)$，称形式表达式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

为数域 $\mathbb{K}$ 上关于未定元 x 的一元 n 次多项式. $\mathbb{K}$ 上的一元多项式全体记为 $\mathbb{K}[x]$.

定义 1.2 (多项式的次数)

如果多项式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 中 $a_n \neq 0$, 则定义 $f(x)$ 的次数为 $\deg f(x) = n$ 称 $f(x)$ 是一个 n 次多项式，$a_n x^n$ 为 $f(x)$ 的首项或最高次项，a_0 为常数项.

若 $f(x) = a \in \mathbb{K}$，则称 $f(x)$ 为常数多项式，

1. 当 $a \neq 0$ 时，称之为零次多项式;
2. 当 $a = 0$ 时，称之为零多项式，规定其次数为 $-\infty$.

定义 1.3 (多项式的相等)

两个多项式相等当且仅当它们次数相同且各次项的系数相等, 即若

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

则 $f(x) = g(x)$ 当且仅当 $m = n, a_i = b_i (i = 0, 1, \cdots, n)$.

定义 1.4 (多项式的运算)

设 $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$，适当增加几个系数为零的项, 可设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

1. 加法

$$f(x) + g(x) = (a_n + b_n)\, x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})\, x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)\, x + (a_0 + b_0)\,,$$

2. 数乘

   若 $c \in \mathbb{K}$, 定义
   $$cf(x) = ca_nx^n + ca_{n-1}x^{n-1} + \cdots + ca_1x + ca_0,$$

3. 乘法
   $$h(x) = c_{n+m}x^{n+m} + c_{n+m-1}x^{n+m-1} + \cdots + c_1x + c_0,$$
   其中 $c_{n+m} = a_nb_m, \ldots, c_k = \sum_{i+j=k} a_ib_j = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \cdots + a_kb_0, c_0 = a_0b_0.$

命题 1.1 (乘法性质)

1. 交换律
   $$f(x)g(x) = g(x)f(x)$$
2. 结合律
   $$(f(x)g(x))h(x) = f(x)(g(x)h(x))$$
3. 分配律
   $$(f(x) + g(x))h(x) = f(x)h(x) + g(x)h(x)$$
4. 乘法数乘相容性
   $$c(f(x)g(x)) = (cf(x))g(x) = f(x)(cg(x))$$
5. 若把 c 看成是常数多项式, 则 c 与 $f(x)$ 的作为多项式的积与 c 作为数乘以 $f(x)$ 的积相同.

注 $\mathbb{K}[x]$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 (交换) 代数，通常称 $\mathbb{K}[x]$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的一元多项式代数. 由于 $\mathbb{K}[x]$ 中的加法及乘法适合环的条件, 因此 $\mathbb{K}[x]$ 也称为 $\mathbb{K}$ 上的一元多项式环。

引理 1.1

若 $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$, 则
$$\deg(f(x)g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x).$$

命题 1.2 (整性)

若 $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$ 且 $f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$, 则
$$f(x)g(x) \neq 0$$

推论 1.1 (乘法消去律)

若 $f(x) \neq 0$ 且 $f(x)g(x) = f(x)h(x)$, 则
$$g(x) = h(x).$$

、

命题 1.3

设 $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$, 则

1. $\deg(cf(x)) = \deg f(x), 0 \neq c \in \mathbb{K}$;
2. $\deg(f(x)+g(x)) \leqslant \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}$.

   等号当且仅当 $\deg f(x) \neq \deg g(x)$ 或者 $\deg f(x) = \deg g(x)$ 且 $a_n + b_m \neq 0$

1.2 整除

定义 1.5 (整除)

设 $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$, 若存在 $h(x) \in \mathbb{K}[x]$, 使

$$f(x) = g(x)h(x),$$

则称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的因式，或 $g(x)$ 可以整除 $f(x)$ ，或 $f(x)$ 可以被 $g(x)$ 整除，记为 $g(x) \mid f(x)$.
否则称 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$, 或 $f(x)$ 不能被 $g(x)$ 整除, 记作 $g(x) \nmid f(x)$.

命题 1.4

设 $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{K}[x], 0 \neq c \in \mathbb{K}$, 则

1. 若 $f(x) \mid g(x)$ ，则 $cf(x) \mid g(x)$ ，因此非零常数多项式 c 是任一非零多项式的因式;
2. $f(x) \mid f(x)$;
3. 若 $f(x)|g(x), g(x)|h(x)$, 则 $f(x) \mid h(x)$;
4. 若 $f(x)|g(x), f(x)|h(x)$ ，则对任意的多项式 $u(x), v(x)$ ，有

$$f(x) \mid g(x)u(x) + h(x)v(x)$$

5. 设 $f(x)|g(x), g(x)|f(x)$ 且 $f(x), g(x)$ 都是非零多项式，则存在 $\mathbb{K}$ 中非零元 c, 使

$$f(x) = cg(x)$$

注 适合命题中条件 (5) 的两个多项式 (即可以互相整除的两个多项式) 称为相伴多项式,
记为 $f(x) \sim g(x)$.

定理 1.1 (带余除法)

设 $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x], g(x) \neq 0$, 则必存在唯一的 $q(x), r(x) \in \mathbb{K}[x]$ ，使

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

且 $\deg r(x) < \deg g(x)$.

推论 1.2

设 $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x], g(x) \neq 0$, 则 $g(x) \mid f(x)$ 的充分必要条件是 $g(x)$ 除 $f(x)$ 后的余式为零.

1.3 最大公因式

定义 1.6 (最大公因式)

设 $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$, 若 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式, 且对 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的任一公因式 $h(x)$ 均有 $h(x) \mid d(x)$, 则称 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式, 记为 $d(x) = (f(x), g(x)) = gcd(f(x), g(x))$. ♣

定义 1.7 (最小公倍式)

若 $m(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公倍式, 且对 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的任一公倍式 $l(x)$ 均有 $m(x) \mid l(x)$, 则称 $m(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最小公倍式, 记为 $m(x) = [f(x), g(x)] = lcm(f(x), g(x))$. ♣

定理 1.2

设 $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式 $d(x)$ 必存在, 且有 $u(x), v(x) \in \mathbb{K}[x]$, 使

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = d(x).$$

♡

注 若 $d_1(x)$ 与 $d_2(x)$ 都是 $f(x), g(x)$ 的最大公因式, 则 $d_1(x) \,|d_2(x), d_2(x)|\, d_1(x)$, 因此必存在 $c \in \mathbb{K}$, 使 $d_2(x) = cd_1(x)$, 即 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的两个最大公因式最多相差一个非零常数. 若规定 $f(x), g(x)$ 的最大公因式首项系数为 1 (首项系数等于 1 的多项式称为首一多项式), 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式就唯一确定了.

定义 1.8

设 $f_i(x)(i = 1, 2, \cdots, m) \in \mathbb{K}[x]$, 若 $d(x) \mid f_i(x)(i = 1, 2, \cdots, m)$, 则称 $d(x)$ 是 $\{f_i(x)\}$ 的公因式. 如果对 $\{f_i(x)\}$ 的任一公因式 $h(x), h(x) \mid d(x)$, 则称 $d(x)$ 为 $\{f_i(x)\}$ 的最大公因式, 记为 $d(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x))$. ♣

命题 1.5

设 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x) \in \mathbb{K}[x]$, 则

$$((f_1(x), f_2(x)), f_3(x), \cdots, f_m(x)) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)).$$

♠

定义 1.9 (互素)

设 $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$, 若 $(f(x), g(x)) = 1$, 则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素。 ♣

定理 1.3

设 $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素的充分必要条件是存在 $u(x), v(x) \in \mathbb{K}[x]$, 使

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1.$$

♡

推论 1.3

若 $f_1(x) \,|g(x), f_2(x)|\, g(x)$, 且 $(f_1(x), f_2(x)) = 1$, 则 $f_1(x)f_2(x) \mid g(x)$. ♡

推论 1.4

若 $(f(x),g(x))=1$, 且 $f(x)\mid g(x)h(x)$, 则

$$f(x)\mid h(x).$$

♡

推论 1.5

设 $(f(x),g(x))=d(x), f(x)=f_1(x)d(x), g(x)=g_1(x)d(x)$, 则

$$(f_1(x),g_1(x))=1.$$

♡

推论 1.6

设 $(f(x),g(x))=d(x)$, 则

$$(t(x)f(x),t(x)g(x))=t(x)d(x).$$

♡

推论 1.7

若 $(f_1(x),g(x))=1,(f_2(x),g(x))=1$, 则

$$(f_1(x)f_2(x),g(x))=1.$$

♡

推论 1.8

设 $f(x),g(x)$ 是非零多项式, 则

$$f(x)g(x)\sim(f(x),g(x))[f(x),g(x)].$$

♡

定理 1.4 (中国剩余定理)

设 $g_1(x),\ldots,g_n(x)$ 是两两互素的多项式, $r_1(x),\ldots,r_n(x)\in\mathbb{K}[x]$,
则存在多项式 $f(x),q_1(x),\cdots,q_n(x)$, 使

$$f(x)=g_i(x)q_i(x)+r_i(x), i=1,\cdots,n.$$

♡

1.4 因式分解

定义 1.10 (可约)

设 $f(x)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的非常数多项式, 若 $f(x)$ 可以分解为两个次数严格小于 $f(x)$ 次数的 $\mathbb{K}$ 上多项式之积, 则称 $f(x)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的可约多项式. 否则, 称 $f(x)$ 为 $\mathbb{K}$ 上的不可约多项式.

♣

注

1. 多项式的是否可约依赖于数域选取.
2. 一次多项式在任何数域上不可约.

引理 1.2

设 $f(x)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的不可约多项式, 则对 $\mathbb{K}$ 上任一多项式 $g(x)$, 或者 $f(x)\mid g(x)$, 或者 $(f(x),g(x))=1$.

♡

定理 1.5 (素性)

设 $p(x)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的不可约多项式, $f(x), g(x)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的多项式且 $p(x) \mid f(x)g(x)$, 则或者 $p(x) \mid f(x)$, 或者 $p(x) \mid g(x)$.

推论 1.9

设 $p(x)$ 为不可约多项式且

$$p(x) \mid f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x),$$

则 $p(x)$ 必可整除其中某个 $f_i(x)$.

定理 1.6

设 $f(x)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的多项式且 $\deg f(x) \geqslant 1$, 则

1. $f(x)$ 可分解为有限个 $\mathbb{K}$ 上的不可约多项式之积;
2. 若

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x) = q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x)$$

是 $f(x)$ 的两个不可约分解，即 $p_i(x), q_j(x)$ 都是 $\mathbb{K}$ 上的次数大于零的不可约多项式，则 $s = t$ ，且经过适当调换因式的次序以后，有

$$q_i(x) \sim p_i(x), i = 1, 2, \cdots, s.$$

注 任一多项式在相伴意一下可唯一地分解为若干个不可约多项式之积.

推论 1.10 (标准因式分解)

设 $f(x) \in \mathbb{K}[x], \deg f(x) \geqslant 1$, 则 $f(x)$ 可得到如下标准分解

$$f(x) = cp_1(x)^{e_1}p_2(x)^{e_2}\cdots p_m(x)^{e_m},$$

其中 $c \neq 0, p_i(x)$ 是互异的首一不可约多项式, $e_i \geqslant 1(i = 1, 2, \cdots, m)$.

注 首一不可约多项式互素等价于互异.

命题 1.6

设 $f(x), g(x)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的两个多项式，在它们的标准分解式中适当添加零次项，故不妨设它们有如下的分解式:

$$f(x) = c_1p_1(x)^{e_1}p_2(x)^{e_2}\cdots p_n(x)^{e_n};$$
$$g(x) = c_2p_1(x)^{f_1}p_2(x)^{f_2}\cdots p_n(x)^{f_n},$$

其中 $e_i \geqslant 0, f_i \geqslant 0(i = 1, 2, \cdots, n)$, 则

1. $f(x), g(x)$ 的最大公因式

$$(f(x), g(x)) = p_1(x)^{k_1}p_2(x)^{k_2}\cdots p_n(x)^{k_n},$$

其中 $k_i = \min\{e_i, f_i\}\ (i = 1, 2, \cdots, n)$.

2. $f(x), g(x)$ 的最小公倍式

$$[f(x), g(x)] = p_1(x)^{h_1}p_2(x)^{h_2}\cdots p_n(x)^{h_n}$$

其中 $h_i = \max\{e_i, f_i\}\ (i = 1, 2, \cdots, n)$.

3. $f(x) \mid g(x) \Longleftrightarrow e_i \leqslant f_i$
4. $f(x)g(x) \sim (f(x), g(x))[f(x), g(x)]$

命题 1.7

设 $d(x) = (f(x), f'(x))$, 则 $f(x)/d(x)$ 是一个没有重因式的多项式, 且这个多项式的不可约因式与 $f(x)$ 的不可约因式相同 (不计重数).

定理 1.7

数域 $\mathbb{K}$ 上的多项式 $f(x)$ 没有重因式的充分必要条件是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 互素.

1.5 多项式函数

定义 1.11

设 $f(x) \in \mathbb{K}[x], b \in \mathbb{K}$, 若 $f(b) = 0$, 则称 b 是 $f(x)$ 的一个根或零点.

定理 1.8 (余数定理)

设 $f(x) \in \mathbb{K}[x], b \in \mathbb{K}$, 则存在 $g(x) \in \mathbb{K}[x]$, 使

$$f(x) = (x - b)g(x) + f(b).$$

特别, b 是 $f(x)$ 的根当且仅当 $(x - b) \mid f(x)$.

定义 1.12 (重根)

设 $f(x) \in \mathbb{K}[x], b \in \mathbb{K}$, 若存在 $k \in \mathbb{Z}^+$, 使 $(x - b)^k \mid f(x)$, 但 $(x - b)^{k+1}$ 不能整除 $f(x)$, 则称 b 是 $f(x)$ 的一个 k 重根. 若 $k = 1$, 则称 b 为单根.

引理 1.3

设 $f(x)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的不可约多项式且 $\deg f(x) \geqslant 2$, 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{K}$ 中没有根.

定理 1.9

若 $f(x)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 次多项式, 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{K}$ 中最多只有 n 个根。

推论 1.11

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的次数不超过 n 的两个多项式, 若存在 $\mathbb{K}$ 上 $n+1$ 个不同的数 $b_1, b_2, \cdots, b_{n+1}$, 使

$$f(b_i) = g(b_i), i = 1, 2, \cdots, n+1,$$

则 $f(x) = g(x)$.

注 上述结论在一般域上不一定成立, 即存在两个不同的多项式在有限域上的值处处相等.

1.6 复系数多项式

定理 1.10 (代数学基本定理)

次数大于零的复数域上的一元多项式至少有一个复数根.

命题 1.8

设 $n \geqslant 1$, 则以下命题等价

1. 复数域上的一元 n 次多项式至少有 1 个复根.
2. 复数域上的不可约多项式都是一次多项式.
3. 复数域上的一元 n 次多项式必可分解为一次因式的乘积.
4. 复数域上的一元 n 次多项式恰有 n 个复根（计重数）.

定理 1.11 (Vieta 定理)

若数域 $\mathbb{K}$ 上的一元 n 次多项式

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n$$

在 $\mathbb{K}$ 中有 n 个根 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，则

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = -\frac{a_1}{a_0},$$

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j = \frac{a_2}{a_0},$$

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \ldots < i_r \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r} = (-1)^r \frac{a_r}{a_0},$$

$$\cdots \cdots \cdots$$

$$x_1 x_2 \cdots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.$$

1.7 实系数多项式和有理系数多项式

引理 1.4 (虚根成对出现)

设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

是实系数多项式, 若复数 $a + b\mathrm{i} (b \neq 0)$ 是其根, 则 $a - b\mathrm{i}$ 也是它的根.

定理 1.12

$\mathbb{R}$ 上的不可约多项式为一次多项式或下列二次多项式:

$$ax^2 + bx + c, \text{ 其中} b^2 - 4ac < 0.$$

推论 1.12

$\mathbb{R}$ 上的多项式 $f(x)$ 必可分解为有限个一次因式及不可约二次因式的乘积.

♡

定理 1.13

设有 n 次整系数多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

则有理数 $\dfrac{p}{q}$ 是 $f(x)$ 的根的必要条件是 $q\,|a_n, p|\,a_0$, 其中 p, q 是互素的整数.

♡

定义 1.13 (本原多项式)

设多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

是整系数多项式，若 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ 的最大公约数等于 1 ，则称 $f(x)$ 为**本原多项式**.

♣

引理 1.5 (Gauss 引理)

两个本原多项式之积仍是本原多项式.

♡

定理 1.14

若整系数多项式 $f(x)$ 在有理数域上可约 $\iff f(x)$ 在 $\mathbb{Z}$ 上可约，即它必可分解为两个次数较低的整系数多项式之积.

♡

定理 1.15 (Eisenstein 判别法)

设多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

是整系数多项式，$a_n \neq 0, n \geqslant 1, p$ 是一个素数. 若 $p \mid a_i(i = 0, 1, \cdots, n-1)$ ，但 $p \nmid a_n$ 且 $p^2 \nmid a_0$, 则 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

♡

定理 1.16 (Osada 判别法)

设多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

是整系数多项式，且 $|a_0| > 1 + \sum\limits_{i=1}^{n-1} |a_i|$，$a_0$ 是素数，则 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

♡

1.8 多元多项式

定义 1.14

设 $\mathbb{K}$ 是数域，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 n 个未定元，它们彼此无关.

1. 单项式
   (a). 称 $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ 为一个单项式，其中 a 是这个单项式的系数，k_j 为非负整数.
   (b). 如果 $a \neq 0$，则称该单项式的次数为 $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$.
   (c). 如果两个单项式除相差一个系数外, 其余都相同, 即每个 x_i 的次数都相同, 则称这两个单项式为同类项. 同类项相加, 可将它们的系数相加.
2. n 元多项式
   (a). 有限个单项式的和称为一个 n 元多项式，它的一般形式为
   $$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum a_{i_1 i_2 \cdots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}.$$
   (b). n 元多项式的系数非零的单项式的最大次数称为这个多项式的次数.
   (c). 两个 n 元多项式相等当且仅当它们同类项的系数全都相等.
   (d). 两个 n 元多项式相加，即将它们同类项的系数相加.
   (e). 两个单项式 $ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}, bx_1^{j_1}x_2^{j_2}\cdots x_n^{j_n}$ 相乘, 其积为
   $$abx_1^{i_1+j_1}x_2^{i_2+j_2}\cdots x_n^{i_n+j_n}.$$
   (f). 两个多项式相乘按分配律可化为各单项式乘积之和.

♣

定义 1.15 (字典排序法)

1. n 个未定元按自然足标为序排列, 即为 $x_1 \succ x_2 \succ \cdots \succ x_n$;
2. 若有两个非零单项式:
   $$ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}, \quad bx_1^{j_1}x_2^{j_2}\cdots x_n^{j_n},$$
   若 $\exists k$,s.t. $i_1 = j_1, i_2 = j_2, \cdots, i_{k-1} = j_{k-1}$, 但 $i_k > j_k \iff ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n} \succ bx_1^{j_1}x_2^{j_2}\cdots x_n^{j_n}$.

♣

注

1. 按字典序排列, 任一多项式都只有唯一的方法把它的各单项式排序.
2. 字典序要注意第一项即首项未必是最高次项, 末项也未必是次数最低的项.

引理 1.6

若 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 及 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 都是 $\mathbb{K}$ 上非零的 n 元多项式, 则按字典排列法排列后乘积的首项等于 f 的首项与 g 的首项之积.

♡

命题 1.9 (整性)

若 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \neq 0, g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \neq 0$, 则
$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \neq 0.$$

♠

推论 1.13 (乘法消去律)

若 $h(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0$ ，且

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,h(x_1,x_2,\cdots,x_n)=g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,h(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

则

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=g(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

♡

定义 1.16 (齐次型)

若一个多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的每个单项式都是 k 次式, 则称之为 k 次齐次多项式或 k 次型 ♣

定理 1.17 (齐次分解)

1. 两个次数相同的齐次多项式之和若不为零, 则必仍是同次齐次多项式.
2. 设 $f(x)\neq 0$ 为 m 次齐次型，$g(x)\neq 0$ 为 n 次齐次型, 则 $f\cdot g(x)$ 为 $m+n$ 齐次型.
3. 任一 n 元多项式均可表示为若干个齐次多项式之和, 这只需要将各次数相等的项放在一起即可.

♡

引理 1.7

设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 $\mathbb{K}$ 上非零的 n 元多项式, 则必存在 $\mathbb{K}$ 中的数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$, 使

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_n)\neq 0$$

♡

命题 1.10

数域 $\mathbb{K}$ 上的两个 n 元多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 相等的充分必要条件是对一切 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbb{K}$, 均有

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=g(a_1,a_2,\cdots,a_n).$$

♠

1.9 对称多项式

定义 1.17 (对称多项式)

设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 元多项式，若对任意的 $1\leqslant i<j\leqslant n$, 均有

$$f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots,x_n),$$

则称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 元对称多项式.

♣

引理 1.8

设 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 是数组 $(1,2,\cdots,n)$ 的一个全排列. 若 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一个对称多项式, 则

$$f(x_{k_1},x_{k_2},\cdots,x_{k_n})=f(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

♡

引理 1.9

若 $f_1, f_2, \cdots, f_m$ 是 m 个 n 元对称多项式，$g(y_1, y_2, \cdots, y_m)$ 是 m 元多项式，则将 $f_1, f_2, \cdots, f_m$ 代替 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 后得到的多项式

$$h(x_1, x_2, \cdots, x_n) = g(f_1, f_2, \cdots, f_m)$$

仍是一个 n 元对称多项式.

定义 1.18 (初等对称多项式)

下列多项式称为初等对称多项式:

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \\
&\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} x_i x_j \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\sigma_r = \sum_{1 \leqslant i_1<i_2<\ldots<i_r \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\sigma_n = x_1 x_2 \cdots x_n
\end{aligned}$$

定理 1.18 (对称多项式基本定理)

设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的对称多项式, 则必存在 $\mathbb{K}$ 上唯一的多项式 $g(y_1, \cdots, y_n)$, 使

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = g(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n).$$

引理 1.10

设

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \\
&= x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} + \cdots + (-1)^n \sigma_n,
\end{aligned}$$

则对 $\forall k \geqslant 1$

$$x^{k+1} f'(x) = \left(s_0 x^k + s_1 x^{k-1} + \cdots + s_k\right) f(x) + g(x),$$

其中 $g(x)$ 作为 x 的多项式次数小于 n.

命题 1.11 (Newton 公式)

记号同上,

1. 若 $k \leqslant n-1$, 则
$$s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 - \cdots + (-1)^{k-1} s_1 \sigma_{k-1} + (-1)^k k \sigma_k = 0;$$
2. 若 $k \geqslant n$ ，则
$$s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 - \cdots + (-1)^n s_{k-n}\sigma_n = 0.$$

1.10 结式和判别式

引理 1.11

设 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式，则 $d(x)\neq 1$ 的充分必要条件是存在 $\mathbb{K}$ 上的非零多项式 $u(x), v(x)$, 使

$$f(x)u(x)=g(x)v(x),$$

且 $\deg u(x)<\deg g(x), \deg v(x)<\deg f(x)$.

定义 1.19 (结式/Sylvester 行列式)

设

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n, \\ g(x) &= b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m. \end{aligned}$$

定义下列 $m+n$ 阶行列式:

$$R(f,g)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & \cdots & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & \cdots & \cdots & b_m & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & \cdots & b_{m-1} & b_m & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & \cdots & b_m \end{vmatrix}$$

为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的结式或称为 Sylvester 行列式.

定义 1.20 (结式的另一种定义)

$f(x), g(x)$ 同上, 设

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_0,a_1,\ldots,a_{n-1},a_n,\underbrace{0,\ldots,0}_{m-1})$$

$$\boldsymbol{\beta}=(b_0,b_1,\ldots,b_{m-1},b_m,\underbrace{0,\ldots,0}_{n-1})$$

定义循环映射 $r:\mathbb{K}_{n+m}\to\mathbb{K}_{n+m}\quad(c_1,c_2,\dots,c_{n+m})\mapsto(c_{n+m},c_1,\dots,c_{n+m-1})$, 则称

$$R(f,g)=\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\ r(\boldsymbol{\alpha})\\ \vdots\\ r^{m-1}(\boldsymbol{\alpha})\\ \boldsymbol{\beta}\\ \vdots\\ r^{n-1}(\boldsymbol{\beta})\end{pmatrix}$$

为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的结式.

定理 1.19

多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有公根（在复数域中）的充分必要条件是它们的结式 $R(f,g)=0$.

推论 1.14

多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素的充分必要条件是 $R(f,g)\neq 0$.

定理 1.20

设

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,$$
$$g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m,$$

$f(x)$ 的根为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, $g(x)$ 的根为 $y_1,y_2,\cdots,y_m$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的结式为

$$R(f,g)=a_0^m b_0^n\prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n}(x_i-y_j)$$

定义 1.21

多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

的判别式定义为

$$\Delta(f)=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}a_0^{-1}R\left(f,f'\right).$$

定理 1.21

多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

的判别式

$$\Delta(f)=a_0^{2n-2}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(x_i-x_j\right)^2,$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 $f(x)$ 的根.

推论 1.15

多项式 $f(x)$ 有重根的充分必要条件是它的判别式 $\Delta(f)=0$.

例题 1.1 求解二元高次方程组. 设

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

是由两个二元多项式组成的方程组。我们的目的是把求解这组方程先归结为求解一个一元高次方程. 将 $f(x,y),g(x,y)$ 整理为关于 x 的多项式:

$$f(x,y)=a_0(y)x^n+a_1(y)x^{n-1}+\cdots+a_n(y),$$
$$g(x,y)=b_0(y)x^m+b_1(y)x^{m-1}+\cdots+b_m(y),$$

一般解法如下

1. 求解 $R_x(f,g)$, 这是关于 y 的多项式.
2. 求 $R_x(f,g)$ 的根 $\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_r$
3. 将 $y=\beta_j$ 代入 $f(x,\beta_j)=0$, 求解出根 $x=\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$.
4. 验证 (α_i,β_j) 是否为原方程组的解.

用结式来计算多元高次方程组的计算效率不高，该方法主要停留在理论层面，在计算代数几何中的 Grobner 理论提供了高效计算多元高次方程组根的算法.

第 2 章 特征值

内容提要

- 特征值和特征向量
- 对角化
- 极小多项式与 Cayley-Hamilton 定理
- 特征值的估计

2.1 特征值和特征向量

定义 2.1 (特征向量)

设 φ 是数域 $\mathbb{K}$ 上线性空间 V 上的线性变换, 若 $\lambda_0 \in \mathbb{K}, \boldsymbol{x} \in V$ 且 $\boldsymbol{x} \neq 0$, 使

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \lambda_0 \boldsymbol{x},$$

则称 λ_0 是线性变换 φ 的一个特征值, 向量 $\boldsymbol{x}$ 称为 φ 关于特征值 λ_0 的特征向量. ♣

定义 2.2 (特征子空间)

φ 的关于特征值 λ_0 的全体特征向量加上零向量构成 V 的子空间, 记为 V_{λ_0}, 称为 φ 的关于特征值 λ_0 的特征子空间. 显然 V_{λ_0} 是 φ 的不变子空间. ♣

定义 2.3 (特征子空间 (代数))

设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵, 若存在 $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ 及 n 维非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 满足

$$\boldsymbol{A\alpha} = \lambda_0 \boldsymbol{\alpha}$$

则称 λ_0 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 关于特征值 λ_0 的特征向量.

齐次线性方程组 $(\lambda_0 \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解空间 V_{λ_0} 称为 $\boldsymbol{A}$ 关于特征值 λ_0 的特征子空间. ♣

定义 2.4 (特征多项式)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 称 $|\lambda I_n - A|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式. ♣

注 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值就是它的特征多项式的根

定理 2.1

若 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相似, 则 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 具有相同的特征多项式, 从而具有相同的特征值 (计重数). ♡

定义 2.5

设 φ 是线性空间 V 上的线性变换, φ 在 V 的某组基下的表示矩阵为 $\boldsymbol{A}$, $|\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}|$ 与基或表示矩阵的选取无关, 称 $|\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}|$ 为 φ 的特征多项式, 记为 $|\lambda \boldsymbol{I}_V - \varphi|$. ♣

命题 2.1

设

$$\begin{aligned}|\lambda \boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}| &= \lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n \\ &= (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n).\end{aligned}$$

由 Vieta 定理知 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=-a_1, \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=(-1)^n a_n$.
由行列式不难看出 $a_1=-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})=-\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}), a_n=(-1)^n|\boldsymbol{A}|$.
因此 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值的和与积分别为

$$\begin{aligned}\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n &= \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}), \\ \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n &= |\boldsymbol{A}|.\end{aligned}$$

定理 2.2

任一复方阵必相似于一上三角阵.

注 虽然一般数域 $\mathbb{K}$ 上的矩阵未必相似于上三角阵, 但是若数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全在 $\mathbb{K}$ 中, 则存在 $\mathbb{K}$ 上的非异阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 是一个上三角阵.

命题 2.2

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n, f(x)$ 是一个多项式, 则 $f(\boldsymbol{A})$ 的全部特征值为 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$.

命题 2.3

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 适合一个多项式 $g(x)$, 即 $g(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值 λ_0. 也必适合 $g(x)$, 即 $g(\lambda_0)=0$.

命题 2.4

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的全部特征值为 $\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1},\cdots,\lambda_n^{-1}$.

2.2 对角化

定义 2.6 (可对角化的定义)

若 $\varphi\in\mathcal{L}(V_{\mathbb{K}}^n)$ 在某组基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 下的表示矩阵为对角阵:

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

则称 φ 为可对角化线性变换. 此时 $\varphi(\boldsymbol{e}_i)=\lambda_i\boldsymbol{e}_i$, 即 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是 φ 的特征向量, 于是 φ 有 n 个线性无关的特征向量.

定理 2.3

设 $\varphi \in \mathcal{L}(V_{\mathbb{K}}^{n})$，则 φ 可对角化的充分必要条件是 φ 有 n 个线性无关的特征向量.

定义 2.7 (可对角化 (代数版))

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，若 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵, 即存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为可对角化矩阵.

定理 2.4

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

定理 2.5

设 n 维线性空间 V 上的线性变换 φ 有 k 个不同特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$, 相应的特征子空间为 $V_1, V_2, \cdots, V_k$, 则

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_k = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k.$$

推论 2.1

线性变换 φ 属于不同特征值的特征向量必线性无关.

推论 2.2

若 n 维线性空间 V 上的线性变换 φ 有 n 个不同的特征值, 则 φ 必可对角化.

注 只是可对角化的充分条件而非必要条件, 比如说纯量变换 $\varphi = c\boldsymbol{I}_V$ 当然可对角化, 但 φ 的 n 个特征值都是 c.

推论 2.3

设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 是 φ 的全部不同的特征值, $V_i(i = 1, 2, \cdots, k)$ 是特征值 λ_i 的特征子空间, 则 φ 可对角化的充分必要条件是

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k.$$

定义 2.8

设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, λ_0 是 φ 的一个特征值, V_0 是属于 λ_0 的特征子空间，称

1. $\dim V_0$ 为 λ_0 的**度数或几何重数**.
2. λ_0 作为 φ 的特征多项式根的重数称为 λ_0 的**重数或代数重数**.

注 由线性映射的维数公式可知, 特征值 λ_0 的度数

$$\dim V_0 = \dim \operatorname{Ker}(\lambda_0 \boldsymbol{I}_V - \varphi) = n - \mathrm{r}(\lambda_0 \boldsymbol{I}_V - \varphi)$$

而特征值 λ_0 的重数则由特征多项式 $|\lambda \boldsymbol{I}_V - \varphi|$ 的因式分解决定.

引理 2.1

设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, λ_0 是 φ 的一个特征值, 则 λ_0 的**几何重数**总是小于等于 λ_0 的**代数重数**.

定义 2.9

设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 若 φ 的任一特征值的度数等于重数, 则称 φ 有完全的特征向量系.

定理 2.6

设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 则 φ 可对角化的充分必要条件是 φ 有完全的特征向量系.

已知可对角化矩阵 $\boldsymbol{A}$, 如何求出 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 是对角阵? 下面我们来讨论这个问题. 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 可逆阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$ 为其列分块. 因为

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$$

所以

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$$

即

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_n)=(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1, \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \lambda_n\boldsymbol{\alpha}_n).$$

因此 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i=\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i$, 即 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 就是属于特征值 λ_i 的特征向量，于是 $\boldsymbol{P}$ 的 n 个列向量就是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个线性无关的特征向量. 这表明，只要我们求出 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个线性无关的特征向量，并将它们按列分块的方式拼成一个矩阵就是要求的 $\boldsymbol{P}$.

注 因为特征向量不唯一，所以 $\boldsymbol{P}$ 不唯一. 另外，还要注意 $\boldsymbol{P}$ 的第 i 个列向量对应于 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个特征值.

2.3 极小多项式与 Cayley-Hamilton 定理

数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵全体组成了 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, 其维数等于 n^2. 因此对任一 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, 下列 n^2+1 个矩阵必线性相关:

$$\boldsymbol{A}^{n^2}, \boldsymbol{A}^{n^2-1}, \cdots, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{I}_n.$$

也就是说, 存在 $\mathbb{K}$ 中不全为零的数 $c_i\,(i=0,1,2,\cdots,c_{n^2})$, 使

$$c_{n^2}\boldsymbol{A}^{n^2}+c_{n^2-1}\boldsymbol{A}^{n^2-1}+\cdots+c_1\boldsymbol{A}+c_0\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{O}.$$

这表明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 适合数域 $\mathbb{K}$ 上的一个非零多项式.

定义 2.10 (极小多项式)

若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ (或 n 维线性空间 V 上的线性变换 φ) 适合一个非零首一多项式 $m(x)$, 且 $m(x)$ 是 $\boldsymbol{A}$ (或 φ) 所适合的非零多项式中次数最小者, 则称 $m(x)$ 是 $\boldsymbol{A}$(或 φ) 的**一个极小多项式或最小多项式**.

引理 2.2

若 $f(x)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 适合的一个多项式, 则 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式 $m(x)$ 整除 $f(x)$.

命题 2.5

任一 n 阶矩阵的极小多项式必存在且唯一.

命题 2.6

相似的矩阵具有相同的极小多项式.

命题 2.7 (分块对角矩阵的极小多项式)

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个分块对角阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_k\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_i$ 都是方阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式为 $m(x)$, $\boldsymbol{A}_i$ 的极小多项式分别为 $m_i(x)$, 则

$$m(x)=\mathrm{lcm}(m_1(x),m_2(x),\dots,m_k(x))$$

命题 2.8

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式无重根.

引理 2.3

设 $m(x)$ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式, λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值, 则

$$(x-\lambda_0)\mid m(x).$$

命题 2.9

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个上三角阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ & \lambda_2 & \cdots & a_{2n}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A}$ 适合它的特征多项式, 即

$$\prod_{i=1}^{n}(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{I}_n)=\boldsymbol{O}$$

定理 2.7 (Cayley-Hamilton 定理)

设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵, $f(x)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式, 则 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

推论 2.4 (Cayley-Hamilton 定理)

设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, $f(x)$ 是 φ 的特征多项式, 则 $f(\varphi)=\mathbf{0}$.

命题 2.10

n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $f(\lambda)$, 极小多项式为 $m(\lambda)$, 则

1. $m(\lambda) \mid f(\lambda) \quad \deg m(\lambda) \leqslant n$
2. $f(\lambda)$ 和 $m(\lambda)$ 有相同的根 (不计重数).
3. $f(\lambda) \mid (m(\lambda))^n$

2.4 特征值的估计 *

第 3 章 相似标准型

内容提要

- 多项式矩阵
- 矩阵的法式
- 不变因子
- 有理标准型
- 初等因子
- Jordan 标准型
- Jordan 标准型进阶
- 矩阵函数

3.1 多项式矩阵

定义 3.1 (多项式矩阵)

下列形式的矩阵:

$$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \cdots & a_{mn}(\lambda) \end{pmatrix}$$

其中 $a_{ij}(\lambda)$ 是以 λ 为未定元的数域 $\mathbb{K}$ 上的多项式，称为多项式矩阵，或 λ-矩阵.

注 λ-矩阵的加法、数乘及乘法与数域上的矩阵运算一样，只需在运算过程中将数的运算代之以多项式运算即可.

定义 3.2 (多项式矩阵初等变换)

对 λ-矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 施行的下列 3 种变换称为 λ-矩阵的初等行变换:

1. 将 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的两行对换;
2. 将 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的第 i 行乘以 $\mathbb{K}$ 中的非零常数 c;
3. 将 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的第 i 行乘以 $\mathbb{K}$ 上的多项式 $f(\lambda)$ 后加到第 j 行上去.

同理我们可以定义 3 种 λ-矩阵的初等列变换.

定义 3.3 (初等 λ-矩阵)

下列 3 种矩阵称为初等 λ-矩阵:

1. 将 n 阶单位阵的第 i 行与第 j 行对换，记为 $\boldsymbol{P}_{ij}$;
2. 将 n 阶单位阵的第 i 行乘以非零常数 c, 记为 $\boldsymbol{P}_i(c)$;
3. 将 n 阶单位阵的第 i 行乘以多项式 $f(\lambda)$ 后加到第 j 行上去得到的矩阵, 记为 $\boldsymbol{T}_{ij}(f(\lambda))$.

定理 3.1

对 λ-矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 施行第 $k(k=1,2,3)$ 类初等行 (列) 变换等于用第 k 类初等 λ-矩阵左 (右) 乘以 $\boldsymbol{A}(\lambda)$.

定义 3.4

若 $\boldsymbol{A}(\lambda), \boldsymbol{B}(\lambda)$ 是同阶 λ-矩阵且 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 经过 λ-矩阵的初等变换后可变为 $\boldsymbol{B}(\lambda)$, 则称 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 相抵. ♣

定义 3.5

若 $\boldsymbol{A}(\lambda), \boldsymbol{B}(\lambda)$ 都是 n 阶 λ-矩阵，且

$$\boldsymbol{A}(\lambda)\boldsymbol{B}(\lambda) = \boldsymbol{B}(\lambda)\boldsymbol{A}(\lambda) = \boldsymbol{I}_n$$

则称 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 是 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的逆 λ-矩阵. 这时称 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 为可逆 λ-矩阵, 在不引起混淆的情形下, 有时简称为可逆阵. ♣

注 容易证明，有限个可逆 λ-矩阵之积仍是可逆 λ-矩阵，而初等 λ-矩阵都是可逆 λ-矩阵，因此有限个初等 λ-矩阵之积也是可逆 λ-矩阵.

定义 3.6

设 $\boldsymbol{M}(\lambda)$ 是一个 n 阶 λ-矩阵, 则 $\boldsymbol{M}(\lambda)$ 可以化为如下形状:

$$\boldsymbol{M}(\lambda) = \boldsymbol{M}_m\lambda^m + \boldsymbol{M}_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + \boldsymbol{M}_0$$

其中 $\boldsymbol{M}_i$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶数字矩阵. 因此，一个多项式矩阵可以化为系数为矩阵的多项式，反之亦然. ♣

注 若 $\boldsymbol{M}_m \neq 0$, 定义 $\deg(\boldsymbol{M}(\lambda)) = m$. 约定 $\deg 0 = -\infty$.

引理 3.1

设 $\boldsymbol{M}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{N}(\lambda)$ 是两个 n 阶 λ-矩阵且都不等于零.

$$\deg(\boldsymbol{M}(\lambda) \cdot \boldsymbol{N}(\lambda)) \leqslant \deg(\boldsymbol{M}(\lambda)) + \deg(\boldsymbol{N}(\lambda))$$

♡

引理 3.2 (带余除法)

设 $\boldsymbol{M}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{N}(\lambda)$ 是两个 n 阶 λ-矩阵且都不等于零. 又设 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶数字矩阵，则必存在 λ-矩阵 $\boldsymbol{Q}(\lambda)$ 及 $\boldsymbol{S}(\lambda)$ 和数字矩阵 $\boldsymbol{R}$ 及 $\boldsymbol{T}$，使下式成立:

$$\boldsymbol{M}(\lambda) = (\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})\boldsymbol{Q}(\lambda) + \boldsymbol{R}$$

$$\boldsymbol{N}(\lambda) = \boldsymbol{S}(\lambda)(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{T}$$

♡

定理 3.2

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似的充分必要条件是 λ-矩阵 $\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ 与 $\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}$ 相抵. ♡

3.2 矩阵的法式

引理 3.3

设 $\boldsymbol{A}(\lambda)=(a_{ij}(\lambda))_{m\times n}$ 是任一非零 λ-矩阵, 则 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 必相抵于 λ-矩阵 $\boldsymbol{B}(\lambda)=(b_{ij}(\lambda))_{m\times n}$, 其中 $b_{11}(\lambda)\neq 0$ 且 $b_{11}(\lambda)$ 可整除 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 中的任一元素 $b_{ij}(\lambda)$.

定理 3.3

设 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 是一个 n 阶 λ-矩阵, 则 $A(\lambda)$ 相抵于对角阵

$$\operatorname{diag}\left\{d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_r(\lambda);\underbrace{0,\cdots,0}_{n-r}\right\}\tag{3.1}$$

其中 $d_i(\lambda)$ 是非零首一多项式且 $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)(i=1,2,\cdots,r-1)$.

注

1. 事实上，对 $\boldsymbol{A}(\lambda)_{m\times n}$, 则 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 相抵于左上分块对角阵
$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}(\lambda) & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$$
其中 $\boldsymbol{D}(\lambda)=\operatorname{diag}\{d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_r(\lambda)\}$.
2. 式3.1中的 r 通常称为 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的秩.
3. 但要注意即使某个 n 阶 λ-矩阵的秩等于 n, 它也未必是可逆 λ-矩阵.

定义 3.7 (矩阵法式)

称 3.1 式中的对角 λ-矩阵为 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的法式或相抵标准型.

引理 3.4

设 $\boldsymbol{A}(\lambda),\boldsymbol{B}(\lambda)$ 是 n 阶 λ-矩阵, 则

1. $|\boldsymbol{A}(\lambda)\boldsymbol{B}(\lambda)|=|\boldsymbol{A}(\lambda)|\cdot|\boldsymbol{B}(\lambda)|$
2. $\boldsymbol{A}(\lambda)\boldsymbol{A}(\lambda)^*=\boldsymbol{A}(\lambda)^*\boldsymbol{A}(\lambda)=|\boldsymbol{A}(\lambda)|\cdot\boldsymbol{I}_n$

命题 3.1

设 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 是 n 阶 λ-矩阵, 则以下等价

1. $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 是可逆 λ-矩阵.
2. $|\boldsymbol{A}(\lambda)|$ 为非零常数.
3. $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 相抵标准型 $\boldsymbol{I}_n$.
4. $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 只通过初等行 (列) 变换得到 $\boldsymbol{I}_n$.
5. $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 是初等 λ-阵的乘积.

注

$$\boldsymbol{A}(\lambda)^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}(\lambda)^*}{|\boldsymbol{A}(\lambda)|}$$

定理 3.4

设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征矩阵 $\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}$ 必相抵于

$$\operatorname{diag}\{1,\cdots,1,d_1(\lambda),\cdots,d_m(\lambda)\}$$

其中 $d_i(\lambda)$ 非零首一且 $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)(i=1,2,\cdots,m-1)$.

例题 3.1 若 $\deg d_i(x)\geqslant 1$, 则 $\boldsymbol{A}=c\boldsymbol{I}_n$.

练习 3.1 求 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的法式, 其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\3&-2&0\\-1&1&-1\end{pmatrix}$$

3.3 不变因子

本节研究的问题是，即如果两个 λ-矩阵的法式不相同, 是否它们必不相抵?

假如我们能证明这一点, 那么我们就找到了 λ-矩阵相抵关系的全系不变量, 即 r 个首一多项式序列:

$$d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_r(\lambda)\tag{3.2}$$

适合 $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)(i=1,\cdots,r-1)$.

为了证明这一点, 我们只要证明式3.2中的多项式在相抵关系下具有不变性就可以了. 为此, 我们需引进行列式因子的概念.

定义 3.8

设 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 是 n 阶 λ-矩阵, k 是小于等于 n 的正整数.

1. 如果 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 有一个 k 阶子式不为零，则定义 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子 $D_k(\lambda)$ 为 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的所有 k 阶子式的最大公因式（首一多项式）.
2. 如果 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的所有 k 阶子式都等于零，则定义 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子 $D_k(\lambda)$ 为零.

例题 3.2 求下列矩阵的行列式因子:

$$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{pmatrix}d_1(\lambda)&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&d_r(\lambda)&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{pmatrix}$$

其中 $d_i(\lambda)$ 为非零首一多项式且 $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)(i=1,2,\cdots,r-1)$.

解 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的非零行列式因子为

$$D_1(\lambda)=d_1(\lambda),\quad D_2(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda),\quad\cdots,\quad D_r(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_r(\lambda)$$

引理 3.5

设 $D_1(\lambda), D_2(\lambda), \cdots, D_r(\lambda)$ 是 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的非零行列式因子, 则

$$D_i(\lambda) \mid D_{i+1}(\lambda), \quad i = 1, 2, \cdots, r-1$$

注 证明非常 Trivial，考虑一些整除关系即可.

定义 3.9 (不变因子)

设 $D_1(\lambda), D_2(\lambda), \cdots, D_r(\lambda)$ 是 λ-矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的非零行列式因子, 则

$$g_1(\lambda) = D_1(\lambda), \quad g_2(\lambda) = D_2(\lambda)/D_1(\lambda), \quad \cdots, \quad g_r(\lambda) = D_r(\lambda)/D_{r-1}(\lambda)$$

称为 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的不变因子。

注 例3.2中矩阵的不变因子为

$$d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda)$$

定理 3.5

相抵的 λ-矩阵有相同的行列式因子, 从而有相同的不变因子.

证明 只需证明行列式因子在三类初等变换下不改变就可以了.

推论 3.1

设 n 阶 λ-矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的法式为

$$\boldsymbol{\Lambda} = \operatorname{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda); 0, \cdots, 0\}$$

其中 $d_i(\lambda)$ 是非零首一多项式且 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)(i = 1, 2, \cdots, r-1)$, 则 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的不变因子为 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda)$.

注 特别, 法式和不变因子之间相互唯一确定.

证明 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 有相同的不变因子. 再由例3.2, $\boldsymbol{\Lambda}$ 的不变因子为 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda)$, 从而它们也是 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的不变因子.

□

推论 3.2

设 $\boldsymbol{A}(\lambda), \boldsymbol{B}(\lambda)$ 为 n 阶 λ-矩阵，则 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 相抵当且仅当它们有相同的法式.

证明 若 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 有相同的法式，显然它们相抵.

若 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 相抵，由定理3.5 知 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 有相同的不变因子，从而有相同的法式.

命题 3.2

1. λ-矩阵在相抵关系下的全系不变量是它们行列式因子组或不变因子组.
2. n 阶 λ-矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的法式/相抵标准型与初等变换的选取无关.

证明

1.
$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{A}(\lambda),\boldsymbol{B}(\lambda)\text{相抵} \arrow[rr] & & \text{有相同行列式因子/不变因子} \arrow[dl] \\
& \text{相同法式} \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

2. 设 $\boldsymbol{\Lambda}_1,\boldsymbol{\Lambda}_2$ 是 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 通过不同的初等变换得到的两个法式，则 $\boldsymbol{\Lambda}_1$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}_2$ 相抵, 可得 $\boldsymbol{\Lambda}_1=\boldsymbol{\Lambda}_2$.

□

定理 3.6

数域 $\mathbb{K}$ 上 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似的充分必要条件是它们的特征矩阵 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 与 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$ 具有相同的行列式因子组或不变因子组.

注 特征矩阵 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的行列式因子和不变因子均简称为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式因子和不变因子.

推论 3.3

设 $\mathbb{F}\subseteq\mathbb{K}$ 是两个数域, $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的两个矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 在 $\mathbb{F}$ 上相似的充分必要条件是它们在 $\mathbb{K}$ 上相似.

证明 必要性是显然的，下证充分性.

若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 在 $\mathbb{K}$ 上相似, 则 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 与 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$ 在 $\mathbb{K}$ 上有相同的不变因子, 也就是说它们有相同的法式. 求法式与初等变换的选取无关.

注意到 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 与 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 λ-矩阵，故可用 $\mathbb{F}$ 上 λ-矩阵的初等变换就能将它们变成法式，其中只涉及 $\mathbb{F}$ 中数的加、减、乘、除运算以及 $\mathbb{F}$ 上的多项式的加、减、乘、数乘运算，最后得到法式中的不变因子 $d_i(\lambda)$ 仍是 $\mathbb{F}$ 上的多项式.

这就是说存在 $\mathbb{F}$ 上的可逆 λ-矩阵 $\boldsymbol{P}(\lambda),\boldsymbol{Q}(\lambda),\boldsymbol{M}(\lambda),\boldsymbol{N}(\lambda)$ ，使

$$\boldsymbol{P}(\lambda)(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{Q}(\lambda)=\boldsymbol{M}(\lambda)(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{N}(\lambda)=\operatorname{diag}\{d_1(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)\}$$

从而

$$\boldsymbol{M}(\lambda)^{-1}\boldsymbol{P}(\lambda)(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{Q}(\lambda)\boldsymbol{N}(\lambda)^{-1}=\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B},$$

即 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 与 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$ 在 $\mathbb{F}$ 上相抵, 故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 在 $\mathbb{F}$ 上相似.

□

注 推论告诉我们:

1. 矩阵的相似关系在基域扩张下不变.
2. 证明过程也说明: 矩阵的不变因子在基域扩张下也不变.

3.4 有理标准型

引理 3.6

设 r 阶矩阵

$$F=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_r & -a_{r-1} & -a_{r-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}$$

则

1. $\boldsymbol{F}$ 的行列式因子为

$$\underbrace{1,\cdots,1}_{r-1\text{个}},f(\lambda)$$

   其中共有 $r-1$ 个 $1, f(\lambda)=\lambda^r+a_1\lambda^{r-1}+\cdots+a_r$.
2. $\boldsymbol{F}$ 的极小多项式等于 $f(\lambda)$.

证明

1. $\boldsymbol{F}$ 的 r 阶行列式因子就是它的特征多项式,

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}|=\lambda^r+a_1\lambda^{r-1}+\cdots+a_r$$

   对任一 $1\leqslant k<r, \lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}$ 总有一个 k 阶子式其值等于 $(-1)^k$, 故 $D_k(\lambda)=1$.
2. 因为 $\boldsymbol{F}$ 的特征多项式为 $f(\lambda)$, 所以 $\boldsymbol{F}$ 适合多项式 $f(\lambda)$.
   设 $\boldsymbol{e}_i(i=1,2,\cdots,r)$ 是 r 维标准单位行向量, 注意到:

$$e_1\boldsymbol{F}=e_2,\quad e_1\boldsymbol{F}^2=e_3,\cdots,\quad e_1\boldsymbol{F}^{r-1}=\boldsymbol{e}_r$$

   显然, $e_1,e_1\boldsymbol{F},\cdots,\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{F}^{r-1}$ 是一组线性无关的向量, 因此 $\boldsymbol{F}$ 不可能适合一个次数不超过 $r-1$ 的非零多项式, 从而 $\boldsymbol{F}$ 的极小多项式就是 $f(\lambda)$.

引理 3.7

设 λ-矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 相抵于对角 λ-矩阵

$$\operatorname{diag}\{d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)\}$$

λ-矩阵 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 相抵于对角 λ-矩阵

$$\operatorname{diag}\{d_1'(\lambda),d_2'(\lambda),\cdots,d_n'(\lambda)\}$$

且 $d_1'(\lambda),d_2'(\lambda),\cdots,d_n'(\lambda)$ 是 $d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)$ 的一个置换 (即若不计次序, 这两组多项式完全相同), 则 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 相抵于 $\boldsymbol{B}(\lambda)$.

证明 利用行对换及列对换即可变为相同, 显然两对角阵相抵, 从而 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 相抵. □

定理 3.7

设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵, $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组为

$$1,\cdots,1,d_1(\lambda),\cdots,d_k(\lambda)$$

其中 $\deg d_i(\lambda)=m_i\geqslant 1$，则 $\boldsymbol{A}$ 相似于下列分块对角阵:

$$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{F}_1 & & & \\ & \boldsymbol{F}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{F}_k\end{pmatrix} \tag{3.3}$$

其中 $\boldsymbol{F}_i$ 的阶等于 m_i，且 $\boldsymbol{F}_i$ 是形如引理3.6 中的矩阵，$\boldsymbol{F}_i$ 的最后一行由 $d_i(\lambda)$ 的系数（除首项系数之外）的负值组成.

证明 只需证明 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 相似于 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}$.

□

定义 3.10 (有理标准型)

式3.3称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的有理标准型或 Frobenius 标准型, 每个 $\boldsymbol{F}_i$ 称为 Frobenius 块.

例题 3.3 设 6 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子为

$$1,1,1,\lambda-1,(\lambda-1)^2,(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

则 $\boldsymbol{A}$ 的有理标准型为

$$\begin{pmatrix}1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & -1 & 2 & & & \\ & & & 0 & 1 & 0\\ & & & 0 & 0 & 1\\ & & & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

定理 3.8

设数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子为

$$1,\cdots,1,d_1(\lambda),\cdots,d_k(\lambda)$$

其中 $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)(i=1,\cdots,k-1)$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式 $m(\lambda)=d_k(\lambda)$.

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 的有理标准型为

$$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{F}_1 & & & \\ & \boldsymbol{F}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{F}_k\end{pmatrix}$$

因为相似矩阵有相同的极小多项式，故只需证明 $\boldsymbol{F}$ 的极小多项式是 $d_k(\lambda)$ 即可.

$\boldsymbol{F}$ 是分块对角阵，故 $\boldsymbol{F}$ 的极小多项式是诸 $\boldsymbol{F}_i$ 极小多项式的最小公倍式. 显然 $\boldsymbol{F}_i$ 的极小多项式为 $d_i(\lambda)$. 因为 $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)$，故诸 $d_i(\lambda)$ 的最小公倍式等于 $d_k(\lambda)$.

□

例题 3.4 下面两个 4 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

的不变因子分别为 $\boldsymbol{A}:1,\lambda,\lambda,\lambda^2$ 和 $\boldsymbol{B}:1,1,\lambda^2,\lambda^2$.

它们的特征多项式和极小多项式分别相等, 但它们不相似.

注 特征多项式和极小多项式不是相似关系的全系不变量.

3.5 初等因子

有理标准型对任何数域 $\mathbb{K}$ 都可以求出来，它有着诸多用途

但是有理标准型不够” 简单”，即有时每个 Frobenius 块太大，用起来不太方便。

有理标准型中 Frobenius 块太大的原因是不变因子 $d_i(\lambda)$ 的次数可能比较高. 如果我们用因式分解的方法分解每个 $d_i(\lambda)$, 这就有可能造出更” 细” 的标准型来.

定义 3.11 (准素因子)

设 $f(x)\in\mathbb{K}[x]$，$p(\lambda)$ 为不可约多项式，若存在 $e\in\mathbb{Z}^+$, 使得 $p(\lambda)^e\mid f(\lambda)$ 但 $p(\lambda)^{e+1}\nmid f(\lambda)$ 则称 $p(\lambda)^e$ 为 $f(\lambda)$ 的准素因子.

♣

注

1. 标准因子分解
$$f(\lambda)=c\cdot p_1(\lambda)^{e_1}p_2(\lambda)^{e_2}\dots p_m(\lambda)^{e_m}$$
其中 $c\neq 0$，$p_i(\lambda)$ 首一不可约，$e_i\geqslant 1$.
$f(\lambda)$ 的准素因子为 $p_1(\lambda)^{e_1},p_2(\lambda)^{e_2},\dots,p_m(\lambda)^{e_m}$
2. 公共因子分解
$$\begin{aligned}d_1(\lambda)=&p_1(\lambda)^{e_{11}}p_2(\lambda)^{e_{12}}\cdots p_t(\lambda)^{e_{1t}}\\d_2(\lambda)=&p_1(\lambda)^{e_{21}}p_2(\lambda)^{e_{22}}\cdots p_t(\lambda)^{e_{2t}}\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\d_k(\lambda)=&p_1(\lambda)^{e_{k1}}p_2(\lambda)^{e_{k2}}\cdots p_t(\lambda)^{e_{kt}}\end{aligned}\tag{3.4}$$
其中 e_{ij} 是非负整数 (注意 e_{ij} 可以为零!). 由于 $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)$, 因此
$$e_{1j}\leqslant e_{2j}\leqslant\cdots\leqslant e_{kj},\quad j=1,2,\cdots,t$$

定义 3.12 (初等因子)

若式3.4中的 $e_{ij}>0$, 则称 $p_j(\lambda)^{e_{ij}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个初等因子, $\boldsymbol{A}$ 的全体初等因子称为 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子组.

♣

注

1. 不变因子组唯一确定初等因子组.

$\boldsymbol{A}$ 的非常数不变因子的准素因子是 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子. 从而 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子组是 $\boldsymbol{A}$ 的所有非常数不变因子的准素因子全体.

2. 给定 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子组, 可唯一地确定 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组.

   若给定一组初等因子 $p_j(\lambda)^{e_{ij}}$, 适当增加一些 1 (表示为 $p_j(\lambda)^{e_{ij}}$, 其中 $e_{ij}=0$), 则可将这组初等因子按不可约因式的降幂排列如下:

$$
\begin{gathered}
p_1(\lambda)^{e_{k1}}, p_1(\lambda)^{e_{k-1,1}}, \cdots, p_1(\lambda)^{e_{11}} \\
p_2(\lambda)^{e_{k2}}, p_2(\lambda)^{e_{k-1,2}}, \cdots, p_2(\lambda)^{e_{12}} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
p_t(\lambda)^{e_{kt}}, p_t(\lambda)^{e_{k-1,t}}, \cdots, p_t(\lambda)^{e_{1t}}
\end{gathered}
$$

   令

$$
\begin{aligned}
d_k(\lambda) &= p_1(\lambda)^{e_{k1}} p_2(\lambda)^{e_{k2}} \cdots p_t(\lambda)^{e_{kt}} \\
d_{k-1}(\lambda) &= p_1(\lambda)^{e_{k-1,1}} p_2(\lambda)^{e_{k-1,2}} \cdots p_t(\lambda)^{e_{k-1,t}} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
d_1(\lambda) &= p_1(\lambda)^{e_{11}} p_2(\lambda)^{e_{12}} \cdots p_t(\lambda)^{e_{1t}}
\end{aligned}
$$

   则 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)(i=1,\cdots,k-1)$, 且 $d_1(\lambda),\cdots,d_k(\lambda)$ 的初等因子组就如 (7.5.2) 式所示. 因此, 给定 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子组, 我们可唯一地确定 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组.

3. $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组与初等因子组在讨论矩阵相似关系中的作用是相同的.

定理 3.9

数域 $\mathbb{K}$ 上的两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似的充分必要条件是它们有相同的初等因子组, 即矩阵的初等因子组是矩阵相似关系的全系不变量.

例题 3.5 设 9 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组为

$$1,\cdots,1,(\lambda-1)\left(\lambda^2+1\right),(\lambda-1)^2\left(\lambda^2+1\right)\left(\lambda^2-2\right)$$

试分别在有理数域、实数域和复数域上求 A 的初等因子组.

解

1. $\boldsymbol{A}$ 在有理数域上的初等因子组为

$$\lambda-1,(\lambda-1)^2,\lambda^2+1,\lambda^2+1,\lambda^2-2$$

2. $\boldsymbol{A}$ 在实数域上的初等因子组为

$$\lambda-1,(\lambda-1)^2,\lambda^2+1,\lambda^2+1,\lambda+\sqrt{2},\lambda-\sqrt{2}$$

3. $\boldsymbol{A}$ 在复数域上的初等因子组为

$$\lambda-1,(\lambda-1)^2,\lambda+\mathrm{i},\lambda+\mathrm{i},\lambda-\mathrm{i},\lambda-\mathrm{i},\lambda+\sqrt{2},\lambda-\sqrt{2}.$$

例题 3.6 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 10 阶矩阵，它的初等因子组为

$$\lambda-1,\lambda-1,(\lambda-1)^2,(\lambda+1)^2,(\lambda+1)^3,\lambda-2$$

求 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组.

解 将上述多项式按不可约因式的降幂排列:

$$\begin{array}{ccc} (\lambda-1)^2, & \lambda-1, & \lambda-1 \\ (\lambda+1)^3, & (\lambda+1)^2, & 1 \\ \lambda-2, & 1, & 1 \end{array}$$

于是

$$d_3(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda+1)^3(\lambda-2),\quad d_2(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1)^2,\quad d_1(\lambda)=\lambda-1$$

从而 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组为

$$\underbrace{1,\cdots,1}_{7\text{个}},\lambda-1,(\lambda-1)(\lambda+1)^2,(\lambda-1)^2(\lambda+1)^3(\lambda-2)$$

3.6 Jordan 标准型

引理 3.8

r 阶矩阵

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & & \\ & \lambda_0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

的初等因子组为 $(\lambda-\lambda_0)^r$.

证明 证明显然 $\boldsymbol{J}$ 的特征多项式为 $(\lambda-\lambda_0)^r$.

对任一小于 r 的正整数 $k,\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}$ 总有一个 k 阶子式，其值等于 $(-1)^k$，因此 J 的行列式因子为

$$\underbrace{1,\cdots,1}_{r-1},(\lambda-\lambda_0)^r \tag{3.5}$$

3.5式也是 $\boldsymbol{J}$ 的不变因子组, 故 $\boldsymbol{J}$ 的初等因子组只有一个多项式 $(\lambda-\lambda_0)^r$.

□

引理 3.9

设特征矩阵 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 经过初等变换化为下列对角阵:

$$\begin{pmatrix} f_1(\lambda) & & & \\ & f_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f_n(\lambda) \end{pmatrix}$$

其中 $f_i(\lambda)(i=1,\cdots,n)$ 为非零首一多项式.

将 $f_i(\lambda)$ 作不可约分解，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子组等于所有 $f_i(\lambda)$ 的准素因子组.

证明

1. **Step 1.** 先证明:

若 $f_i(\lambda), f_j(\lambda)(i \neq j)$ 的最大公因式和最小公倍式分别为 $g(\lambda), h(\lambda)$, 则

$$\operatorname{diag}\{f_1(\lambda), \cdots, f_i(\lambda), \cdots, f_j(\lambda), \cdots, f_n(\lambda)\}$$

经过初等变换可以变为

$$\operatorname{diag}\{f_1(\lambda), \cdots, g(\lambda), \cdots, h(\lambda), \cdots, f_n(\lambda)\}$$

且这两个对角阵具有相同的准素因子组.

将 $f_1(\lambda), f_2(\lambda)$ 作标准因式分解, 不难看出 $g(\lambda), h(\lambda)$ 的准素因子组与 $f_1(\lambda), f_2(\lambda)$ 的准素因子组相同.

2. **Step 2.** 证明对角阵 $\operatorname{diag}\{f_1\lambda, f_2(\lambda), \ldots, f_n(\lambda)\}$ 的法式可通过上述变换得到.

   先将第 $(1,1)$ 位置的元素依次和第 $(2,2)$ 位置, $\cdots$, 第 (n,n) 位置的元素进行上述变换, 此时第 $(1,1)$ 元素的所有一次因式的幂都是最小的; 再将第 $(2,2)$ 位置的元素依次和第 $(3,3)$ 位置, $\cdots$, 第 (n,n) 位置的元素进行上述变换; $\cdots$; 最后将第 $(n-1,n-1)$ 位置的元素和第 (n,n) 位置的元素进行上述变换.

   可以看出, 最后得到的对角阵就是定理所示矩阵的法式. 注意到在每一次变换的过程中, 准素因子组都保持不变, 这就证明了结论.

□

例题 3.7 设 $\lambda I - A$ 经过初等变换后化为下列对角阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & (\lambda-1)^2(\lambda+2) & & & \\ & & \lambda+2 & & \\ & & & 1 & \\ & . & & & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

求 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子组.

解 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子组为 $\lambda-1, (\lambda-1)^2, \lambda+2, \lambda+2$.

引理 3.10

设 $\boldsymbol{J}$ 是分块对角阵:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_{r_1}(\lambda_1) & & & \\ & \boldsymbol{J}_{r_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_{r_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}_{(r_i)}$$

其中

$$\boldsymbol{J}_{r_i}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{J}_{r_i}(\lambda_i)$ 的初等因子组为 $(\lambda-\lambda_i)^{r_i}$ ，则 $\boldsymbol{J}$ 的初等因子组为

$$(\lambda-\lambda_1)^{r_1},(\lambda-\lambda_2)^{r_2},\cdots,(\lambda-\lambda_k)^{r_k}.$$

♡

证明 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}$ 是一个分块对角 λ-矩阵. 由于对分块对角阵中某一块施行初等变换时其余各块保持不变，故由引理3.8 知，$\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}$ 相抵于下列分块对角阵：

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{H}_1 & & & \\ & \boldsymbol{H}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{H}_k\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{H}_i=\operatorname{diag}\{1,\cdots,1,(\lambda-\lambda_i)^{r_i}\}$. 再由引理 3.9即得结论.

□

定理 3.10

设 $\boldsymbol{A}$ 是复数域上的矩阵且 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子组为

$$(\lambda-\lambda_1)^{r_1},(\lambda-\lambda_2)^{r_2},\cdots,(\lambda-\lambda_k)^{r_k},$$

则 $\boldsymbol{A}$ 相似于分块对角阵:

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_{r_1}(\lambda_1) & & & \\ & \boldsymbol{J}_{r_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_{r_k}(\lambda_k)\end{pmatrix} \tag{3.6}$$

其中 $\boldsymbol{J}_i$ 为 r_i 阶矩阵，且

$$\boldsymbol{J}_{r_i}(\lambda_i)=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i\end{pmatrix}_{(r_i)}$$

♡

证明 由引理 3.10 知, $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{J}$ 有相同的初等因子组, 因此 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{J}$ 相似.

□

定义 3.13

式3.6中的矩阵 $\boldsymbol{J}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型, 每个 $\boldsymbol{J}_{r_i}(\lambda_i)$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个 Jordan 块。

♣

注

1. Jordan 标准型是 $\mathbb{C}$ 上复矩阵.
2. 由引理3.10 可以看出, 若交换任意两个 Jordan 块的位置, 得到的矩阵与原来的矩阵仍有相同的初等因子组，它们仍相似. 因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型中 Jordan 块的排列可以是任意的.
   但是，由于每个初等因子唯一确定了一个 Jordan 块, 故若不计 Jordan 块的排列次序, 则矩阵的 Jordan 标准型是唯一确定的.

定理 3.11

设 φ 是复数域上线性空间 V 上的线性变换, 则必存在 V 的一组基, 使得 φ 在这组基下的表示矩阵为式3.6所示的 Jordan 标准型.

命题 3.3

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶复矩阵, 则下列结论等价:

1. $\boldsymbol{A}$ 可对角化;
2. $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式无重根;
3. $\boldsymbol{A}$ 的初等因子都是一次多项式.

证明

1. $(1) \Longrightarrow (2)$: Trivial.
2. $(2) \Longrightarrow (3)$: 设 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式 $m(\lambda)$ 无重根. 由于 $m(\lambda)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的最后一个不变因子, 故 $\boldsymbol{A}$ 的所有不变因子都无重根, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子都是一次多项式.
3. $(3) \Longrightarrow (1)$: 设 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子组为 $\lambda-\lambda_1, \lambda-\lambda_2, \cdots, \lambda-\lambda_n$, 则由定理 3.10 知, $\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵 $\operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$, 即 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

□

推论 3.4

设 φ 是复线性空间 V 上的线性变换, 则 φ 可对角化当且仅当 φ 的极小多项式无重根, 当且仅当 φ 的初等因子都是一次多项式.

命题 3.4

设 φ 是复线性空间 V 上的线性变换, V_0 是 φ 的不变子空间. 若 φ 可对角化, 则 φ 在 V_0 上的限制也可对角化.

证明 设 $\varphi, \varphi|_{V_0}$ 的极小多项式分别为 $g(\lambda), h(\lambda)$, 则 $g(\lambda)$ 无重根.

又 $g\left(\varphi|_{V_0}\right)=g(\varphi)|_{V_0}=0$, 故 $h(\lambda) \mid g(\lambda)$, 于是 $h(\lambda)$ 也无重根, $\varphi|_{V_0}$ 可对角化.

□

推论 3.5

若 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{(m)} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{(n)} \end{pmatrix}$ 可对角化, 则 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均可对角化.

证明 设 $\boldsymbol{M}$ 极小多项式为 $m(\lambda)$, 则

$$\boldsymbol{O}=m(\boldsymbol{M})=\begin{pmatrix} m(\boldsymbol{A}) & * \\ \boldsymbol{O} & m(\boldsymbol{B}) \end{pmatrix}$$

从而 $m(\boldsymbol{A})=m(\boldsymbol{B})=\boldsymbol{O}$, 由极小多项式的性质

$$m_{\boldsymbol{A}}(\lambda) \mid m(\lambda), \quad m_{\boldsymbol{B}}(\lambda) \mid m(\lambda)$$

由 $m(\lambda)$ 无重根可推出 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda), m_{\boldsymbol{B}}(\lambda)$ 无重根. 故 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 可对角化.

□

命题 3.5

设 φ 是复线性空间 V 上的线性变换, 且 $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_k$, 其中每个 V_i 都是 φ 的不变子空间, 则 φ 可对角化的充分必要条件是 φ 在每个 V_i 上的限制都可对角化.

证明

1. 必要性由命题3.4可得.
2. 下证充分性.

   若 φ 在每个 V_i 上的限制都可对角化, 则由定义存在 V_i 的一组基, 使得 $\varphi|_{V_i}$ 在这组基下的表示矩阵是对角阵. 又 V_i 的一组基可以拼成 V 的一组基, 因此 φ 在这组基下的表示阵是对角阵, 即 φ 可对角化.

□

推论 3.6

设 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\ldots,\boldsymbol{A}_k\}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 可对角化等价于 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\ldots,\boldsymbol{A}_k$ 均可对角化.

证明

$$m_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=[m_{\boldsymbol{A}_1}(\lambda),m_{\boldsymbol{A}_2}(\lambda),\ldots,m_{\boldsymbol{A}_k}(\lambda)]$$

□

推论 3.7

设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的矩阵, 如果 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全在 $\mathbb{K}$ 中, 则 $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathbb{K}$ 上相似于其 Jordan 标准型.

证明 由于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全在 $\mathbb{K}$ 中, 故 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型 $\boldsymbol{J}$ 实际上是 $\mathbb{K}$ 上的矩阵.

因为 $\boldsymbol{A}$ 在复数域上相似于 $\boldsymbol{J}$, $\mathbb{K}\subset\mathbb{C}$, 故 $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathbb{K}$ 上也相似于 $\boldsymbol{J}$.

□

例题 3.8 设 $\boldsymbol{A}$ 其初等因子组为

$$\lambda-1,(\lambda-1)^3,(\lambda+1)^2,\lambda-2,$$

求其 Jordan 标准型.

解

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&1&1&0&&&\\&0&1&1&&&\\&0&0&1&&&\\&&&&-1&1&\\&&&&0&-1&\\&&&&&&2\end{pmatrix}$$

例题 3.9 设复数域上的四维线性空间 V 上的线性变换 φ 在一组基 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 下的表示矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \\ -14 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

求 V 的一组基, 使 φ 在这组基下的表示矩阵为 Jordan 标准型, 并求出从原来的基到新基的过渡矩阵.

解 用初等变换把 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 化为对角 λ-矩阵并求出它的初等因子组为

$$(\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2$$

因此, $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型为

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

设矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是从 $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_4}\}$ 到新基的过渡矩阵, 则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$$

此即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}$$

设 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$ ，其中 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 是四维列向量，代入得

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_4)=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

化成方程组为

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha}_1&=\boldsymbol{0}\\(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha}_2&=\boldsymbol{\alpha}_1\\(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha}_3&=\boldsymbol{0}\\(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\alpha}_4&=\boldsymbol{\alpha}_3\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的特征向量，故 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$ 称为属于特征值 1 的广义特征向量. 我们可取方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})x=\boldsymbol{O}$ 的两个线性无关的解分别作为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3$ (注意不能取线性相关的两个解，因为 $\boldsymbol{P}$ 是非异阵)，然后再分别求出 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$（注意诸 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的解可能不唯一，只需取比较简单的一组解）即可. 经计算可得

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

于是

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

因此新基为

$$\{e_1 - 2e_2 + e_3 - 5e_4, e_2, e_3 - e_4, e_4\}$$

3.7 Jordan 标准型进阶

定理 3.12

1. 线性变换 φ 的特征值 λ_1 的几何重数 (度数) 等于 φ 的 Jordan 标准型中属于特征值 λ_1 的 Jordan 块的个数.
2. λ_1 的代数重数 (重数) 等于所有属于特征值 λ_1 的 Jordan 块的阶数之和.

♡

证明

□

定义 3.14 (循环矩阵)

设 V_0 是线性空间 V 的 r 维子空间, $\psi \in \mathcal{L}(V)$. 若存在 $\alpha \in V_0$, 使 $\left\{\alpha, \psi(\alpha), \cdots, \psi^{r-1}(\alpha)\right\}$ 构成 V_0 的一组基, 则称 V_0 为关于线性变换 ψ 的循环子空间.

♣

注 $\boldsymbol{\alpha}$ 称为循环向量.

例题 3.10 考虑 $\boldsymbol{J}_{r_i}(\lambda_i)$ 所对应的子空间 V_i, 可知

$$(\varphi(\boldsymbol{e}_{i1}), \varphi(\boldsymbol{e}_{i2}), \ldots, \varphi(\boldsymbol{e}_{ir_i})) = (\boldsymbol{e}_{i1}, \boldsymbol{e}_{i2}, \ldots, \boldsymbol{e}_{ir_i}) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

若记 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{e}_{ir_i}, \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varphi} - \lambda_i \boldsymbol{I}$, 则

$$\boldsymbol{e}_{ir_i} \xrightarrow{\psi} \boldsymbol{e}_{ir_{i-1}} \xrightarrow{\psi} \boldsymbol{e}_{ir_{i-2}} \xrightarrow{\psi} \ldots \xrightarrow{\psi} \boldsymbol{e}_{i1} \xrightarrow{\psi} \boldsymbol{o}$$

显然 $\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\alpha}), \ldots, \boldsymbol{\psi}^{r_i-1}(\boldsymbol{\alpha})\}$ 构成 V_i 的一组基. V_i 构成关于 $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varphi} - \lambda_i \boldsymbol{I}_V$ 的循环子空间.

引理 3.11

每个 Jordan 块 $\boldsymbol{J}_i$ 对应的子空间 V_i 是一个循环子空间. 把属于同一个特征值, 比如属于 λ_1 的所有循环子空间加起来构成 V 的一个子空间:

$$R(\lambda_1) = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$$

则

$$\begin{aligned} R(\lambda_1) &= \{\boldsymbol{v} \in V \mid (\varphi - \lambda_1 \boldsymbol{I})^n (\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\} \\ &= \operatorname{Ker} (\varphi - \lambda_1 \boldsymbol{I})^n \end{aligned}$$

♡

证明 设 $U = \{\boldsymbol{v} \in V \mid (\varphi - \lambda_1 \boldsymbol{I})^n (\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}$,

1. 先证明:$R(\lambda_1) \subset U$

   任取 $\boldsymbol{v} \in R(\lambda_1)$,$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \boldsymbol{v}_s, (\boldsymbol{v}_i \in V_i)$

   V_i 基:

$$\boldsymbol{e}_{ir_i} \xrightarrow{\varphi-\lambda_1 \boldsymbol{I}_V} \boldsymbol{e}_{ir_i-1} \xrightarrow{\varphi-\lambda_1 \boldsymbol{I}_V} \boldsymbol{e}_{ir_i-2} \xrightarrow{\varphi-\lambda_1 \boldsymbol{I}_V} \ldots \xrightarrow{\varphi-\lambda_1 \boldsymbol{I}_V} \boldsymbol{e}_{i1} \xrightarrow{\varphi-\lambda_1 \boldsymbol{I}_V} \boldsymbol{o}$$

   则 $(\varphi - \lambda_1 \boldsymbol{I}_V)^{r_i}(\boldsymbol{e}_{ij}) = 0, (\forall j) \Longrightarrow (\varphi - \lambda_1 \boldsymbol{I}_V)^{r_i}(\boldsymbol{v}_i) = 0$

   $\Longrightarrow (\varphi - \lambda_1 \boldsymbol{I}_V)^n(\boldsymbol{v}) = (\varphi - \lambda_1 \boldsymbol{I}_V)^n(\boldsymbol{v}_1) + \ldots + (\varphi - \lambda_1 \boldsymbol{I}_V)^n(\boldsymbol{v}_s) = \boldsymbol{0}$

2. 再证明:$U \subset R(\lambda_1)$

   任取 $\boldsymbol{v} \in U$, 设 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, 其中 $\boldsymbol{v}_1 \in R(\lambda_1)$, $\boldsymbol{v}_2 \in V_{s+1} \oplus \cdots \oplus V_k$.

   因为 $(\lambda - \lambda_1)^n$ 与 $(\lambda - \lambda_{s+1})^n \cdots (\lambda - \lambda_k)^n$ 互素，故存在多项式 $p(\lambda), q(\lambda)$, 使

$$(\lambda - \lambda_1)^n p(\lambda) + (\lambda - \lambda_{s+1})^n \cdots (\lambda - \lambda_k)^n q(\lambda) = 1$$

   将 $\lambda = \varphi$ 代入上式并作用在 $\boldsymbol{v}$ 上可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= p(\varphi) (\varphi - \lambda_1 \boldsymbol{I})^n (\boldsymbol{v}) + q(\varphi) (\varphi - \lambda_{s+1} \boldsymbol{I})^n \cdots (\varphi - \lambda_k \boldsymbol{I})^n (\boldsymbol{v}) \\ &= q(\varphi) (\varphi - \lambda_{s+1} \boldsymbol{I})^n \cdots (\varphi - \lambda_k \boldsymbol{I})^n (\boldsymbol{v}_1) + q(\varphi) (\varphi - \lambda_{s+1} \boldsymbol{I})^n \cdots (\varphi - \lambda_k \boldsymbol{I})^n (\boldsymbol{v}_2) \\ &= q(\varphi) (\varphi - \lambda_{s+1} \boldsymbol{I})^n \cdots (\varphi - \lambda_k \boldsymbol{I})^n (\boldsymbol{v}_1) \in R(\lambda_1) \end{aligned}$$

□

定义 3.15 (根子空间)

设 λ_0 是 n 维复线性空间 V 上线性变换 φ 的特征值, 则

$$\begin{aligned} R(\lambda_0) &= \{\boldsymbol{v} \in V \mid (\varphi - \lambda_0 \boldsymbol{I})^n (\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\} \\ &= \operatorname{Ker} (\varphi - \lambda_0 \boldsymbol{I})^n \\ &= V_1 \oplus \cdots \oplus V_s \end{aligned}$$

构成了 V 的一个子空间, 称为属于特征值 λ_0 的根子空间.

♣

注

1. 特征值 λ_0 的根子空间可表示为若干个循环子空间的直和, 每个循环子空间对应于一个 Jordan 块.

推论 3.8

$\varphi \in \mathcal{L}(V_{\mathbb{C}})$ 可对角化 $\Longleftrightarrow$ 对任意特征值 λ_0, 都有 $R(\lambda_0) = V_{\lambda_0}$.

♡

证明

$$R(\lambda_0) = V_{\lambda_0} \Longleftrightarrow \dim(R(\lambda_0)) = \dim(V_{\lambda_0}) \Longleftrightarrow \lambda_0\text{的代数重数} = \text{几何重数}$$

□

定理 3.13

设 φ 是 n 维复线性空间 V 上的线性变换.

1. 若 φ 的初等因子组为
$$(\lambda-\lambda_1)^{r_1},(\lambda-\lambda_2)^{r_2},\cdots,(\lambda-\lambda_k)^{r_k}$$
则 V 可分解为 k 个不变子空间的直和:
$$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_k \tag{3.7}$$
其中 V_i 是维数等于 r_i 的关于 $\varphi-\lambda_i\boldsymbol{I}$ 的循环子空间.
2. 若 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 是 φ 的全体不同特征值，则 V 可分解为 s 个不变子空间的直和:
$$V=R(\lambda_1)\oplus R(\lambda_2)\oplus\cdots\oplus R(\lambda_s)$$
其中 $R(\lambda_i)$ 是 λ_i 的根子空间，$R(\lambda_i)$ 的维数等于 λ_i 的重数，且每个 $R(\lambda_i)$ 又可分解为式3.7中若干个 V_j 的直和.

♡

重要原理:

矩阵问题条件和结论在相似关系下不变，则可将此问题化约到 Jordan 标准型，进一步化到 Jordan 块进行证明.

$$\text{Jordan 块成立} \Longrightarrow \text{Jordan 标准型成立} \Longrightarrow \text{一般阵成立}$$

例题 3.11 复数域上的方阵 $\boldsymbol{A}$ 必可分解为两个对称阵的乘积.

证明 设 $\boldsymbol{P}$ 是非异阵且使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型，于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}^{-1}$.

设 $\boldsymbol{J}_i$ 是 $\boldsymbol{J}$ 的第 i 个 Jordan 块, 则即 $\boldsymbol{J}_i$ 可分解为两个对称阵之积.

$$\boldsymbol{J}_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & & & 1 & \lambda_i \\ & & 1 & \lambda_i & \\ & & \ddots & & \\ 1 & \lambda_i & & & \\ \lambda_i & & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \vdots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}$$

因此 $\boldsymbol{J}$ 也可以分解为两个对称阵之积, 记为 $\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_2$, 于是

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{P}^{-1}=\left(\boldsymbol{P}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{P}^{\top}\right)\left(\boldsymbol{P}^{-1}\right)^{\top}\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{P}^{-1}$$

例题 3.12 $\boldsymbol{A}$ 是复数域上的方阵, 求 $\boldsymbol{A}^k(k\geqslant 1)$.

解 存在非异阵 $\boldsymbol{P}$，s.t. $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}=\operatorname{diag}\{\boldsymbol{J}_{r_1}(\lambda_1),\boldsymbol{J}_{r_2}(\lambda_2),\ldots,\boldsymbol{J}_{r_k}(\lambda_k)\}$

$$\boldsymbol{A}^m=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}^{-1})^m=\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}^m\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\operatorname{diag}\{\boldsymbol{J}_{r_1}(\lambda_1)^m,\boldsymbol{J}_{r_2}(\lambda_2)^m,\ldots,\boldsymbol{J}_{r_k}(\lambda_k)^m\}\boldsymbol{P}^{-1}$$

记

$$\boldsymbol{J}_n(\lambda_0)=\begin{pmatrix}\lambda_0 & 1 & & & \\ & \lambda_0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_0\end{pmatrix}=\lambda_0\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{N}$$

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{J}_n(0)=\begin{pmatrix}0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0\end{pmatrix}$$

易证 $\boldsymbol{N}^n=\mathbf{0}$.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}_n(\lambda_0)^k &= (\lambda_0\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{N})^k=\lambda_0^k\boldsymbol{I}_n+C_k^1\lambda_0^{k-1}\boldsymbol{N}+C_k^2\lambda_0^{k-2}\boldsymbol{N}^2+\ldots+C_k^{n-1}\lambda_0^{k-n+1}\boldsymbol{N}^{n-1}\\ &=\begin{pmatrix}\lambda_0^k & C_k^1\lambda_0^{k-1} & \ddots & \ddots & C_k^{n-1}\lambda_0^{k-n+1}\\ & \lambda_0^k & C_k^1\lambda_0^{k-1} & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & C_k^1\lambda_0^{k-1}\\ & & & & \lambda_0^k\end{pmatrix}\end{aligned}$$

引理 3.12

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶可对角化复矩阵且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 则它们可同时对角化, 即存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 和 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}$ 都是对角阵.

证明 转化为几何的语言：设 φ,ψ 是 n 维复线性空间 V 上两个可对角化线性变换且 $\varphi\psi=\psi\varphi$，则它们可同时对角化，即存在 V 的一组基，使 φ,ψ 在这组基下的表示矩阵都是对角阵.

设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是 φ 的全体不同特征值，$V_i(i=1,2,\cdots,\dot{s})$ 是属于特征值 λ_i 的特征子空间.

若 $s=1$, 则由 φ 可对角化不难推出 $\varphi=\lambda_1\boldsymbol{I}_V$ 是数量变换. 此时可取 V 的一组基, 使 ψ 的表示矩阵是对角阵, 则 φ 的表示矩阵是 $\boldsymbol{I}_n$，结论显然成立.

以下不妨设 $s>1$，由 φ 可对角化知

$$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$$

由于 $\varphi\psi=\psi\varphi$, 故对任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in V_i$,

$$\varphi\psi(\boldsymbol{\alpha})=\psi\varphi(\boldsymbol{\alpha})=\lambda_i\psi(\boldsymbol{\alpha})$$

这表明 $\psi(\boldsymbol{\alpha})\in V_i$，即 V_i 是 ψ 的不变子空间. 将 φ 和 ψ 限制在 V_i 上，此时 $\varphi|_{V_i}=\lambda_i\boldsymbol{I}_{V_i}$ 是数量变换，易知 $\psi|_{V_i}$ 仍是可对角化线性变换. 由 $s=1$ 的情形，存在 V_i 的一组基，使 $\varphi|_{V_i},\psi|_{V_i}$ 在这组基下的表示矩阵都是对角阵.

将各个 V_i 的基合并成 V 的一组基, 则 φ,ψ 在这组基下的表示矩阵都是对角阵.

□

定理 3.14 (Jordan-Chevalley 分解)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶复矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 可分解为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$，其中 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 适合下面条件:

1. $\boldsymbol{B}$ 是一个可对角化矩阵;
2. $\boldsymbol{C}$ 是一个幂零阵;
3. $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{CB}$;
4. $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均可表示为 $\boldsymbol{A}$ 的多项式.

不仅如此, 上述满足条件 (1) $\sim$ (3) 的分解是唯一的. ♡

证明

□

3.8 矩阵函数 *

第 4 章 二次型

内容提要

- ❏ 二次型化简和矩阵合同
- ❏ 二次型的化简
- ❏ 惯性定理
- ❏ 正定型和正定矩阵
- ❏ Hermite 型 *

4.1 二次型化简和矩阵合同

一般的二次曲线方程:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0. \tag{4.1}$$

要区分是哪一种曲线（椭圆、双曲线、抛物线或其退化形式），我们通常分两步来做:

1. 首先将坐标轴旋转一个角度以消去 xy 项,
2. 再作坐标轴的平移以消去一次项.

这里的关键是消去 xy 项，通常的坐标变换公式为

$$\begin{cases} x = x' \cos\theta - y' \sin\theta, \\ y = x' \sin\theta + y' \cos\theta. \end{cases}$$

二次曲线分类的关键是给出一个线性变换，使4.1 式中的二次项只含平方项. 这种情形也在空间二次曲面的分类时出现.

定义 4.1

设 f 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 元二次齐次多项式:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j \tag{4.2}$$

称 f 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 元二次型, 简称二次型.

♣

注 这里非平方项的系数采用 $2a_{ij}$ 主要是为了以后矩阵表示的方便.

用矩阵的乘法我们可以把 4.2式写成矩阵相乘的形式:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

注 在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中, $a_{ij} = a_{ji}$ 对一切 i, j 成立, 也就是说矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个对称阵.

命题 4.1

若二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 所对应的对称阵为 $\boldsymbol{A}$, 则经过非异线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 之后得到的二次型 $g(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 所对应的对称阵为 $\boldsymbol{C}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$.

证明 将 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 代入 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, 得

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{C}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$$

显然, $\boldsymbol{C}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 仍是一个对称阵，故 $\boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{C}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 是以 $y_1,y_2\cdots,y_n$ 为变元的二次型，记为 $g(y_1,y_2,\cdots,y_n)$.

□

定义 4.2 (合同关系)

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵, 若存在 n 阶非异阵 $\boldsymbol{C}$, 使

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{C},$$

则称 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 是合同的, 或称 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 具有合同关系.

注 合同关系是一个等价关系.

引理 4.1

对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的下列变换都是合同变换, 称为对称初等变换:

1. 对换 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第 j 行，再对换第 i 列与第 j 列.
2. 将非零常数 k 乘以 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行，再将 k 乘以第 i 列.
3. 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行乘以 k 加到第 j 行上，再将第 i 列乘以 k 加到第 j 列上.

引理 4.2

设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的非零对称阵, 则必存在非异阵 $\boldsymbol{C}$, 使 $C^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 的第 $(1,1)$ 元素不等于零.

定理 4.1

设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶对称阵, 则必存在 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶非异阵 C, 使 $C'AC$ 为对角阵.

推论 4.1

合同变换是若干次对称初等变换的复合.

定义 4.3

下列变换为合同变换称为分块对称初等变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}$$

1. 对换 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 分块行与第 j 分块行，再对换第 i 分块列与第 j 分块列.
2. 第 i 分块行左乘非异阵 $\boldsymbol{M}$, 第 i 分块列右乘 $\boldsymbol{M}^\top$.
3. 第 i 分块行左乘非异阵 $\boldsymbol{M}$ 加到第 j 分块行, 第 i 分块列右乘 $\boldsymbol{M}^\top$ 加到第 j 分块列.

4.2 二次型的化简

4.2.1 配方法

基本公式

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j$$

步骤

1. 将含有 x_1 的所有项凑成完全平方.
2. 剩余项中将含有 x_2 的所有项凑成完全平方.
3. …
4. 剩余项中将含有 x_{n-1} 的所有项凑成完全平方.

例题 4.1 将下列二次型化成对角型:

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 + x_3^2.$$

解

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= \left(x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_2x_3\right) - 4x_2^2 - 2x_2x_3 - 3x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - 4\left(x_2^2 + \frac{1}{2}x_2x_3 + \frac{1}{16}x_3^2\right) - \frac{11}{4}x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - 4(x_2 + \frac{1}{4}x_3)^2 - \frac{11}{4}x_3^2 \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3, \\ y_2 = x_2 + \frac{1}{4}x_3, \\ y_3 = x_3, \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + \frac{9}{4}, \\ x_2 = y_2 - \frac{1}{4}y_3, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$$

则

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{9}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注

1. 配方法得到的过渡矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是一个主对角元全不为零的上三角阵, 因此是一个非异阵.
2. 有的时候一眼看出来的配方不一定保证过渡阵非异，但是按照步骤一步一步做下去一定会对.
3. 若二次型只有交错项，没有平方项，可用如下方法.

例题 4.2 将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 2x_1x_2 - x_1x_3 + x_1x_4 - x_2x_3 + x_2x_4 - 2x_3x_4$$

化成对角型.

解 作如下变换:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3, \\ x_4 = y_4. \end{cases}$$

代人原二次型得

$$\begin{aligned} f &= 2y_1^2 - 2y_2^2 - 2y_1y_3 + 2y_1y_4 - 2y_3y_4 \\ &= \left(2y_1^2 - 2y_1y_3 + 2y_1y_4\right) - 2y_2^2 - 2y_3y_4 \\ &= 2\left(\left(y_1 - \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4\right)^2 - \frac{1}{4}y_3^2 - \frac{1}{4}y_4^2 + \frac{1}{2}y_3y_4\right) - 2y_2^2 - 2y_3y_4 \\ &= 2\left(y_1 - \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4\right)^2 - 2y_2^2 - \frac{1}{2}y_3^2 - y_3y_4 - \frac{1}{2}y_4^2 \\ &= 2\left(y_1 - \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4\right)^2 - 2y_2^2 - \frac{1}{2}\left(y_3 + y_4\right)^2. \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 - \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4, \\ z_2 = y_2, \\ z_3 = y_3 + y_4, \\ z_4 = y_4, \end{cases}$$

于是

$$f = 2z_1^2 - 2z_2^2 - \frac{1}{2}z_3^2$$

…

4.2.2 初等变换法

命题 4.2

构造 $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}_n)_{n\times 2n}$ 进行行变换，再对左边分块做对称列变换，直到左边变成对角阵 Λ，右边矩阵恰为过渡矩阵转置.

注 如碰到第 $(1,1)$ 元素是零的矩阵, 可先设法将第 $(1,1)$ 元素化成非零, 再进行上述过程.

例题 4.3 将下列二次型化为对角型:

$$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3.$$

解 记与 f 相伴的对称阵为 $\boldsymbol{A}$ ，写出 $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}_3)$ 并作初等变换:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}_3) = &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \longrightarrow &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \end{aligned}$$

于是 f 可化简为 $y_1^2-4y_2^2$

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\-\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}^{\top}=\begin{pmatrix}1&1&-\frac{3}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

4.3 惯性定理

4.3.1 实二次型

定义 4.4 (规范二次型)

任意一个实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 必合同于一个对角阵:

$$\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\operatorname{diag}\{d_1,d_2,\cdots,d_r,0,\cdots,0\}$$

任意调换 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线上的元素得到的矩阵仍与 $\boldsymbol{A}$ 合同. 因此我们可把零放在一起，把正项与负项放在一起，即可设 $d_1>0,\cdots,d_p>0;d_{p+1}<0,\cdots,d_r<0.\boldsymbol{A}$ 所代表的二次型为

$$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_rx_r^2. \tag{4.3}$$

令

$$\begin{cases}y_1=\sqrt{d_1}x_1,\cdots,y_p=\sqrt{d_p}x_p,\\ y_{p+1}=\sqrt{-d_{p+1}}x_{p+1},\cdots,y_r=\sqrt{-d_r}x_r;\\ y_j=x_j(j=r+1,\cdots,n),\end{cases}$$

则4.3式变为

$$f=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2. \tag{4.4}$$

这一事实等价于说 $\boldsymbol{A}$ 合同于下列对角阵:

$$\operatorname{diag}\{\underbrace{1,\cdots,1}_{p};\underbrace{-1,\cdots,-1}_{q=r-p};\underbrace{0,\cdots,0}_{n-r}\},$$

4.4称为**规范标准型**.

♣

定理 4.2 (惯性定理)

设 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$ 是一个 n 元实二次型, 且 f 可化为两个标准型:

$$\begin{gathered}c_1y_1^2+\cdots+c_py_p^2-c_{p+1}y_{p+1}^2-\cdots-c_ry_r^2,\\ d_1z_1^2+\cdots+d_kz_k^2-d_{k+1}z_{k+1}^2-\cdots-d_rz_r^2\end{gathered}$$

其中 $c_i>0,d_i>0$, 则必有 $p=k$.

♡

定义 4.5

设 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$ 是一个实二次型, 若它能化为形如4.4式的形状, 则称 r 是该二次型的秩, p 是它的正惯性指数, $q=r-p$ 是它的负惯性指数, $s=p-q$ 称为 f 的符号差.

♣

定理 4.3

秩与符号差（或正负惯性指数）是实对称阵在合同关系下的全系不变量.

♡

4.3.2 复二次型

定理 4.4

复对称阵在合同关系下只有一个全系不变量, 即秩 r.

证明 复二次型要比实二次型简单得多. 因为复二次型

$$f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)=d_1 x_1^2+d_2 x_2^2+\cdots+d_r x_r^2$$

必可化为

$$z_1^2+z_2^2+\cdots+z_r^2$$

其中 $z_i=\sqrt{d_i} x_i(i=1,2, \cdots, r), z_j=x_j(j=r+1, \cdots, n)$.

□

4.4 正定型和正定矩阵

定义 4.6

设 $f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)=\boldsymbol{x}^{\top} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$ 是 n 元实二次型, $\boldsymbol{A}$ 是相伴矩阵.

1. 若对任意 n 维非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均有 $\boldsymbol{\alpha}^{\top} \boldsymbol{A} \boldsymbol{\alpha}>0$, 则称 f 是正定二次型（简称正定型), 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为正定矩阵 (简称正定阵);
2. 若对任意 n 维非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均有 $\boldsymbol{\alpha}^{\top} \boldsymbol{A} \boldsymbol{\alpha}<0$, 则称 f 是负定二次型（简称负定型), 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为负定矩阵 (简称负定阵);
3. 若对任意 n 维非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均有 $\boldsymbol{\alpha}^{\top} \boldsymbol{A} \boldsymbol{\alpha} \geqslant 0$, 则称 f 是半正定二次型 (简称半正定型), 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为半正定矩阵 (简称半正定阵);
4. 若对任意 n 维非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均有 $\boldsymbol{\alpha}^{\top} \boldsymbol{A} \boldsymbol{\alpha} \leqslant 0$, 则称 f 是半负定二次型（简称半负定型), 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为半负定矩阵 (简称半负定阵);
5. 若存在 $\boldsymbol{\alpha}$, 使 $\boldsymbol{\alpha}^{\top} \boldsymbol{A} \boldsymbol{\alpha}>0$; 又存在 $\boldsymbol{\beta}$, 使 $\boldsymbol{\beta}^{\top} \boldsymbol{A} \boldsymbol{\beta}<0$, 则称 f 是不定型.

定理 4.5

设 $f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$ 是 n 元实二次型，则

1. f 是正定型的充分必要条件是 f 的正惯性指数等于 n;
2. f 是负定型的充分必要条件是 f 的负惯性指数等于 n;
3. f 是半正定型的充分必要条件是 f 的正惯性指数等于 f 的秩 r ;
4. f 是半负定型的充分必要条件是 f 的负惯性指数等于 f 的秩 r ;
5. f 是不定型的充分必要条件是 f 的正负惯性指数均大于 0.

定理 4.6

1. n 阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵当且仅当它合同于单位阵 $\boldsymbol{I}_n$;
2. $\boldsymbol{A}$ 是负定阵当且仅当它合同于 $-\boldsymbol{I}_n$;

3. $\boldsymbol{A}$ 是半正定阵当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 合同于下列对角阵:
$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix};$$
4. $\boldsymbol{A}$ 是半负定阵当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 合同于下列对角阵:
$$\begin{pmatrix} -\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

定义 4.7 (顺序主子式)

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 n 阶矩阵, $\boldsymbol{A}$ 的 n 个子式:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \quad (k=1,2,\cdots,n)$$
称为 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式.

定理 4.7

n 阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵的充分必要条件是它的 n 个顺序主子式全大于零.

推论 4.2

若 A 是正定阵, 证明:

1. $\boldsymbol{A}$ 的任一 k 阶主子阵，即由 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行及 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 列交点上元素组成的矩阵，必是正定阵;
2. $\boldsymbol{A}$ 的所有主子式全大于零，特别，$\boldsymbol{A}$ 的主对角元素全大于零;
3. $\boldsymbol{A}$ 中绝对值最大的元素仅在主对角线上.

推论 4.3

设 n 阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值均大于 0.

命题 4.3

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称阵，则以下条件等价:

1. $\boldsymbol{A}$ 正定.
2. $\boldsymbol{A}$ 合同于 $\boldsymbol{I}_n$.
3. $\exists$ 非异阵 $\boldsymbol{C}$, s.t. $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^\top\boldsymbol{C}$.
4. $\boldsymbol{A}$ 的所有主子式大于零.
5. $\boldsymbol{A}$ 的所有顺序主子式大于零.
6. $\boldsymbol{A}$ 的特征值均大于 0.

引理 4.3

n 阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 是半正定阵的充分必要条件是 $\exists \boldsymbol{C}\in \mathrm{M_n}(\mathbb{R})$, s.t. $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^\top\boldsymbol{C}$.

引理 4.4

n 阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 是半正定阵的充分必要条件是 $\forall t \in \mathbb{R}^{+}, \boldsymbol{A}+t\boldsymbol{I}_n$ 正定.

引理 4.5

n 阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 是半正定阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的所有主子式大于等于 0.

引理 4.6

n 阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 是半正定阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值均大于等于 0.

命题 4.4

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称阵，则以下条件等价:

1. $\boldsymbol{A}$ 半正定.
2. $\boldsymbol{A}$ 合同于

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$$

3. $\exists$ 非异阵 $\boldsymbol{C}$, s.t. $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^{\top}\boldsymbol{C}$.
4. $\boldsymbol{A}$ 的所有主子式大于等于零.
5. $\boldsymbol{A}$ 的特征值均大于等于 0.

命题 4.5

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是半正定矩阵, 若 $a_{ii}=0$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行, 第 i 列均为 0.

命题 4.6

设 $\boldsymbol{A}$ 是半正定矩阵，$\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$, s.t. $\boldsymbol{\alpha}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=0$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=0$.

4.5 Hermite 型 *

第 5 章 内积空间

内容提要

- 内积空间概念
- 内积的表示与正交基
- 伴随
- 内积空间同构，正交变换和酉变换

5.1 内积空间概念

命题 5.1 ($\mathbb{R}^3$ 中向量内积的性质)

1. $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}$
2. $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}$;
3. $(c\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v}=c(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})$;
4. $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\geqslant 0$, 且 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$, 其中 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的任意向量, c 是任一实数.

定义 5.1 (Euclid 空间)

设 V 为实线性空间, 若存在二元运算 $(-,-):V\times V\to\mathbb{R}(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}\mapsto(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}))$,
使对 V 中任意一组有序向量 $\{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\}$, 都唯一地对应一个实数, 记为 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$, 且适合如下规则:

1. 对称性:$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$
2. 第一变元线性:$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$
3. 第一变元线性: $(c\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=c(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),c$ 为任一实数;
4. 正定性:$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geqslant 0$ 且等号成立当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

则称在 $(-,-)$ 在 V 上定义了一个内积. 实数 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积.
线性空间 V 称为实内积空间, 有限维实内积空间称为 Euclid 空间, 简称为**欧氏空间**.

定义 5.2 (酉空间)

设 V 为复线性空间, 若存在二元运算 $(-,-):V\times V\to\mathbb{C}(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}\mapsto(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}))$,
使对 V 中任意一组有序向量 $\{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\}$, 都唯一地对应一个实数, 记为 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$, 且适合如下规则:

1. 共轭对称性:$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})=\overline{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}$
2. 第一变元线性:$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$
3. 第一变元线性: $(c\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=c(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),c$ 为任一复数;
4. 正定性:$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geqslant 0$ 且等号成立当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

则称在 $(-,-)$ 在 V 上定义了一个内积. 复数 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积.
线性空间 V 称为复内积空间, 有限维复内积空间称为**酉空间** (Unitary).

注 第二变元也共轭线性

$$(\boldsymbol{\gamma},c\boldsymbol{\alpha}+d\boldsymbol{\beta})=\bar{c}(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha})+\bar{d}(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta})$$

定义 5.3 (范数)

设 V 是内积空间, $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 定义 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度 (或范数) 为

$$\|\boldsymbol{\alpha}\| = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})^{\frac{1}{2}},$$

利用范数可定义内积空间中两个向量的距离. 设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$, 定义 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的距离为

$$d(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}\|.$$

显然 $d(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = d(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$.

命题 5.2 (内积空间诱导范数的性质)

设 V 是内积空间, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V, c$ 是任一常数, 则

1. 齐次性:
$$\|c\boldsymbol{\alpha}\| = |c|\|\boldsymbol{\alpha}\|$$
2. Cauchy-Schwarz 不等式:
$$|(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})| \leqslant \|\boldsymbol{\alpha}\| \cdot \|\boldsymbol{\beta}\|$$
3. 三角不等式:
$$\|\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}\| \leqslant \|\boldsymbol{\alpha}\| + \|\boldsymbol{\beta}\|$$

定义 5.4 (向量夹角)

当 V 是实内积空间时, 定义非零向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 的夹角 θ 之余弦为

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|}.$$

当 V 是复内积空间时, 定义非零向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 的夹角 θ 之余弦为

$$\cos\theta = \frac{|(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})|}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|}.$$

定义 5.5 (正交)

内积空间中两个向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 若适合 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0$, 则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 垂直或正交, 用记号 $\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta}$ 来表示. 显然, 零向量和任何向量都正交.

定理 5.1 (勾股定理)

若 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交, 则

$$\|\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}\|^2 = \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 + \|\boldsymbol{\beta}\|^2.$$

5.2 内积的表示与正交基

定义 5.6 (Euclid 空间度量矩阵)

若 V 是欧氏空间, 设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 分别是向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 在给定基下的坐标向量.

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) &= \left(\sum_{i=1}^n a_i\boldsymbol{v}_i, \sum_{j=1}^n b_j\boldsymbol{v}_j\right) = \sum_{i,j=1}^n a_ib_j(\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i,j=1}^n a_ig_{ij}b_j \\
&= \sum_{j=1}^n\left(\sum_{i=1}^n a_ig_{ij}\right)b_j = (a_1,a_2,\dots,a_n)\boldsymbol{G}\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix} = \boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{G}\boldsymbol{y}
\end{aligned}
$$

其中矩阵

$$
\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n}\\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_1) & (\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2) & \cdots & (\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_n)\\ (\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_1) & (\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_2) & \cdots & (\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (\boldsymbol{v}_n,\boldsymbol{v}_1) & (\boldsymbol{v}_n,\boldsymbol{v}_2) & \cdots & (\boldsymbol{v}_n,\boldsymbol{v}_n)\end{pmatrix}
$$

称为基向量 $\{\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\cdots,\boldsymbol{v_n}\}$ 的 Gram (格列姆) 矩阵或内积空间 V 在给定基下的度量矩阵. ♣

注 $\boldsymbol{G}$ 是正定实对称阵

反之, 若给定 n 阶正定实对称阵 $\boldsymbol{G}$, 利用 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{G}\boldsymbol{y}$ 也可以定义 V 上的内积.

由此我们可以看出, 若给定了 n 维实线性空间 V 的一组基, 则 V 上的内积结构和 n 阶正定实对称阵之间存在着一个一对应.

定义 5.7 (酉空间度量矩阵)

若 V 是酉空间, 设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 分别是向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 在给定基下的坐标向量.

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) &= \left(\sum_{i=1}^n a_i\boldsymbol{v}_i, \sum_{j=1}^n b_j\boldsymbol{v}_j\right) = \sum_{i,j=1}^n a_i\overline{b_j}(\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i,j=1}^n a_ig_{ij}\overline{b_j} \\
&= \sum_{j=1}^n\left(\sum_{i=1}^n a_ig_{ij}\right)\overline{b_j} = (a_1,a_2,\dots,a_n)\boldsymbol{G}\begin{pmatrix} \overline{b_1}\\ \overline{b_2}\\ \vdots\\ \overline{b_n}\end{pmatrix} = \boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{G}\overline{\boldsymbol{y}}
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{G}$ 的定义同 Euclid 空间, 称之为基向量 $\{\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\cdots,\boldsymbol{v_n}\}$ 的 Gram (格列姆) 矩阵或内积空间 V 在给定基下的度量矩阵. ♣

注

1. 酉空间的度量矩阵常记为 $\boldsymbol{H}$,$\boldsymbol{H}$ 是正定 Hermite 阵.
2. 若给定了 n 维复线性空间 V 的一组基, 则 V 上的内积结构和 n 阶正定 Hermite 阵之间存在双射.

定义 5.8 (正交基)

设 $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \cdots, \boldsymbol{e_n}\}$ 是 n 维内积空间 V 的一组基. 若 $\boldsymbol{e_i} \perp \boldsymbol{e_j}$ 对 $\forall i \neq j$ 成立, 则称这组基是 V 的一组正交基.

又若 V 的一组正交基中每个基向量的长度都等于 1 , 则称这组正交基为标准正交基.

引理 5.1

内积空间 V 中的任意一组两两正交的非零向量必线性无关.

推论 5.1

n 维内积空间中任意一个正交非零向量组的向量个数不超过 n.

引理 5.2

设向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_k$ 都正交, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $L(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_k)$ 中的每个向量都正交.

定理 5.2 (Gram-Schmidt 正交化)

设 V 是内积空间, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ 是 V 中 m 个线性无关的向量, 则在 V 中存在 m 个两两正交的非零向量 $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_m}$, 使由 $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_m}$ 张成的子空间恰好为由 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ 张成的子空间, 即 $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_m}$ 是该子空间的一组正交基.

证明

$$\boldsymbol{v}_{k+1} = \boldsymbol{u}_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{(\boldsymbol{u}_{k+1}, \boldsymbol{v}_j)}{\|\boldsymbol{v}_j\|^2} \boldsymbol{v}_j.$$

注 设过渡阵为 B , 即 $(\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_m}) = (\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_m})\, B$, 由 $\boldsymbol{v}_{k+1} = \boldsymbol{u}_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{(\boldsymbol{u}_{k+1}, \boldsymbol{v}_j)}{\|\boldsymbol{v}_j\|^2} \boldsymbol{v}_j$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

令 $\boldsymbol{w_i} = \dfrac{\boldsymbol{v_i}}{\|\boldsymbol{v_i}\|} (1 \leqslant i \leqslant m) \Longrightarrow \{\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \ldots, \boldsymbol{w_m}\}$ 是一组标准正交基.

令 $\Lambda = diag\{\|\boldsymbol{v_1}\|, \|\boldsymbol{v_2}\| \ldots, \|\boldsymbol{v_m}\|\}$

$$(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_m}) = (\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \ldots, \boldsymbol{w_m})\, \Lambda$$

于是

$$(\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_m}) = (\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \ldots, \boldsymbol{w_m})\, C$$

其中

$$C = \Lambda \cdot B = \begin{pmatrix} \|\boldsymbol{v_1}\| & * & \cdots & * \\ 0 & \|\boldsymbol{v_2}\| & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \|\boldsymbol{v_m}\| \end{pmatrix}$$

推论 5.2

任一有限维内积空间均存在标准正交基.

命题 5.3

设 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\},\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$ 是 n 维内积空间 V 的两组基, 过渡阵 $\boldsymbol{C}$ 满足

$$(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{C}$$

1. 若 V 为实内积空间,

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n)=\boldsymbol{C}^\top\boldsymbol{G}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{C}$$

2. 若 V 为复内积空间,

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n)=\boldsymbol{C}^\top\boldsymbol{G}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\overline{\boldsymbol{C}}$$

定义 5.9 (正交补空间)

设 U 是内积空间 V 的子空间, 令

$$U^\perp=\{\boldsymbol{v}\in V\mid(\boldsymbol{v},U)=0\},$$

容易验证 $U^\perp$ 是 V 的子空间, 称为 U 的正交补空间.

注 这里 $(\boldsymbol{v},U)=0$ 表示对一切 $\boldsymbol{u}\in U$, 均有 $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})=0$.

定理 5.3

设 V 是 n 维内积空间, U 是 V 的子空间, 则

1. $V=U\oplus U^\perp$;
2. U 的任一组标准正交基均可扩张为 V 的一组标准正交基.

定义 5.10 (正交和)

设 V 是 n 维内积空间, $V_1,V_2,\cdots,V_k$ 是 V 的子空间. 如果对 $\forall\boldsymbol{\alpha}\in V_i$ 和 $\forall\boldsymbol{\beta}\in V_j$ 均有 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$, 则称子空间 V_i 和 V_j 正交. 若 $V=V_1+V_2+\cdots+V_k$ 且 V_i 两两正交, 则称 V 是 $V_1,V_2,\cdots,V_k$ 的正交和, 记为

$$V=V_1\perp V_2\perp\cdots\perp V_k.$$

命题 5.4

正交和必为直和且任一 V_i 和其余子空间的和正交.

定义 5.11 (正交投影)

设 $V=V_1\perp V_2\perp\cdots\perp V_k$, 定义 V 上的线性变换 $\boldsymbol{E}_i(i=1,2,\cdots,k)$ 如下:
若 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\cdots+\boldsymbol{v}_i+\cdots+\boldsymbol{v}_k\ (\boldsymbol{v}_i\in V_i)$, 令 $\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}_i$. 该变换满足

$$\boldsymbol{E}_i^2=\boldsymbol{E}_i,\quad \boldsymbol{E}_i\boldsymbol{E}_j=\boldsymbol{0}(i\neq j),\quad \boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2+\cdots+\boldsymbol{E}_k=\boldsymbol{I}_V.$$

线性变换 $\boldsymbol{E}_i$ 称为 V 到 V_i 上的正交投影变换.

命题 5.5

设 U 是内积空间 V 的子空间, $V = U \perp U^{\perp}$. 设 $\boldsymbol{E}$ 是 V 到 U 上的正交投影, 则对任意的 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$, 有

$$(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\beta}))$$

命题 5.6 (Bessel 不等式)

设 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m$ 是内积空间 V 中的正交非零向量组, $\boldsymbol{y}$ 是 V 中任一向量, 则

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{|(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}_k)|^2}{\|\boldsymbol{v}_k\|^2} \leqslant \|\boldsymbol{y}\|^2,$$

且等号成立的充分必要条件是 $\boldsymbol{y} \in \operatorname{span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m)$.

注 Bessel 不等式是" 斜边大于直角边" 在内积空间的推广.

5.3 伴随

定义 5.12 (伴随算子的定义)

设 φ 是内积空间 V 上的线性算子, 若存在 V 上的线性算子 φ^*, 使等式

$$(\varphi(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \varphi^*(\boldsymbol{\beta}))$$

对一切 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$ 成立, 则称 φ^* 是 φ 的伴随算子, 简称为 φ 的伴随.

定理 5.4

1. 伴随算子若存在必唯一.
2. 有限维内积空间上任一线性算子必存在伴随算子.

定理 5.5

设 V 是 n 维内积空间, $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \cdots, \boldsymbol{e_n}\}$ 是 V 的一组标准正交基. 若 $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ 在这组基下的表示矩阵为 A,

1. 当 V 是酉空间时, φ^* 在同一组基下的表示矩阵为 $\overline{\boldsymbol{A}}^{\top}$.
2. 当 V 是欧氏空间时, φ^* 的表示矩阵为 $\boldsymbol{A}^{\top}$.

证明 现设 V 是 n 维内积空间 (不妨设之为酉空间), 取 V 的一组标准正交基 $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \cdots, \boldsymbol{e_n}\}$. 假设 $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, 且它在这组基下的表示矩阵是 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{M_n}(\mathbb{R})$

又设 $\boldsymbol{\alpha} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{\beta} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + b_n\boldsymbol{e}_n$.

记 $\boldsymbol{x} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\top}, \boldsymbol{y} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\top}$ 分别是 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 的坐标向量, 则

$$(\varphi(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\top}\overline{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{x}^{\top}\boldsymbol{A}^{\top}\overline{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{x}^{\top}\overline{\left(\overline{\boldsymbol{A}}^{\top}\boldsymbol{y}\right)}.$$

设 $\psi \in \mathcal{L}(V)$, 且在上述基下表示阵为 $\overline{\boldsymbol{A}}^{\top}$,

$$(\boldsymbol{\alpha}, \psi(\boldsymbol{\beta})) = \boldsymbol{x}^{\top}\overline{(\overline{\boldsymbol{A}}^{\top}\boldsymbol{y})}$$

则

$$(\varphi(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \psi(\boldsymbol{\beta}))$$

对一切 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$ 成立. 由伴随算子的唯一性可知 $\varphi^* = \psi$, 故伴随算子表示阵为 $\overline{\boldsymbol{A}}^\top$.

□

定理 5.6

设 V 是内积空间, 若 $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(V)$ 且 φ^*, ψ^* 均存在, c 为常数, 则

1. $(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$;
2. $(c\varphi)^* = \bar{c}\varphi^*$;
3. $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$;
4. $(\varphi^*)^* = \varphi$.
5. 若 φ 可逆, 则 φ 可逆且 $(\varphi^{-1})^* = (\varphi^*)^{-1}$

♡

命题 5.7

设 V 是 n 维内积空间, $\varphi \in \mathcal{L}(V)$,

1. 若 U 是 φ 的不变子空间, 则 $U^\perp$ 是 φ^* 的不变子空间;
2. 若 φ 的全体特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则 φ^* 的全体特征值为 $\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \cdots, \overline{\lambda}_n$.

♠

5.4 内积空间同构，正交变换和酉变换

定义 5.13 (保积同构)

设 V 与 U 是域 $\mathbb{K}$ 上的内积空间, $\mathbb{K}$ 是实数域或复数域, φ 是 $V \to U$ 的线性映射. 若对任意的 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$, 有

$$(\varphi(\boldsymbol{\alpha}), \varphi(\boldsymbol{\beta}))_U = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})_V,$$

则称 φ 是 $V \to U$ 的保持内积的线性映射.

又若 φ 为线性同构, 则称 φ 是内积空间 V 到 U 上的**保积同构**.

♣

注

1. 保持内积的同构关系是一个等价关系.
2. 保持内积的线性映射一定是单映射.
   这是因为 $\|\varphi(\boldsymbol{x})\| = \|\boldsymbol{x}\|$, 从 $\|\varphi(\boldsymbol{x})\| = 0$ 得到 $\|\boldsymbol{x}\| = 0$, 故 $\boldsymbol{x} = 0$.
3. 在不引起误解的情况下, 我们常把内积空间的保积同构就称为同构.

命题 5.8

若 φ 是内积空间 V 到内积空间 U 的保持范数的线性映射, 则 φ 保持内积

♠

定理 5.7

设 V 与 U 都是 n 维内积空间 (同为实空间或同为复空间), 若 φ 是 $V \to U$ 的线性映射, 则下列命题等价:

1. φ 保持内积;
2. φ 是保积同构;
3. φ 将 V 的任一组标准正交基变成 U 的一组标准正交基;

4. φ 将 V 的某一组标准正交基变成 U 的一组标准正交基.

推论 5.3

两个有限维内积空间 V 与 U (同为实空间或同为复空间) 存在**保积同构**的充分必要条件是它们有相同的维数.

定义 5.14 (正交变换/酉变换)

设 φ 是内积空间 V 上保持内积的线性变换，

1. 若 V 是欧氏空间，则称 φ 为**正交算子**;
2. 若 V 是酉空间, 则称 φ **酉算子**.

定理 5.8

设 φ 是欧氏空间或酉空间上的线性变换, 则 φ 是正交变换或酉变换的充分必要条件是 φ 非异, 且

$$\varphi^* = \varphi^{-1}$$

定义 5.15 (正交矩阵/酉矩阵)

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实方阵, 若 $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}^{-1}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵.
2. 设 $\boldsymbol{C}$ 是 n 阶复方阵, 若 $\overline{\boldsymbol{C}}^{\top} = \boldsymbol{C}^{-1}$, 则称 $\boldsymbol{C}$ 是酉矩阵.

定理 5.9

设 φ 是欧氏空间 (酉空间) V 上的线性算子，则 φ 是正交变换 (酉变换)$\Longleftrightarrow$ φ 在 V 的任一组 (某一组) 标准正交基下的表示矩阵是正交矩阵 (酉矩阵).

定理 5.10

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实矩阵, 则下列结论等价

1. $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵.
2. $\boldsymbol{A}$ 的 n 个行向量是 $\mathbb{R}_n$ 的一组标准正交基.
3. $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量是 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基.

定理 5.11

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶复矩阵, 则下列结论等价

1. $\boldsymbol{A}$ 是酉矩阵.
2. $\boldsymbol{A}$ 的 n 个行向量是 $\mathbb{C}_n$ 的一组标准正交基.
3. $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量是 $\mathbb{C}^n$ 的一组标准正交基.

命题 5.9

若 n 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，则

1. $\boldsymbol{A}$ 的行列式值等于 1 或 -1 .
2. $\boldsymbol{A}$ 的特征值的模长等于 1 .

命题 5.10

若 n 阶复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是酉矩阵, 则

1. $\boldsymbol{A}$ 的行列式值的模长等于 1.
2. $\boldsymbol{A}$ 的特征值的模长等于 1.

例题 5.1

1. 正交阵是特殊的酉阵.
2. $\boldsymbol{I}_n$ 既是正交阵也是酉阵.
3. 对角阵是正交矩阵的充分必要条件是主对角线上的元素为 1 或 -1 .
4. 二阶正交矩阵分类
   (a). 旋转

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

   (b). 反射

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

定理 5.12 (QR 分解)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实 (复) 矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 可分解为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R},$$

其中 $\boldsymbol{Q}$ 是正交 (酉) 矩阵, $\boldsymbol{R}$ 是一个主对角线上的元素均大于等于零的上三角阵, 并且若 $\boldsymbol{A}$ 是非异阵, 则这样的分解必唯一.

5.5 自伴随算子

引理 5.3

1. 欧氏空间中两组标准正交基之间的过渡矩阵是正交矩阵.
2. 酉空间中两组标准正交基之间的过渡矩阵是酉矩阵.

注

1. 当 V 是欧氏空间时, 有
$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P};$$
2. 当 V 是酉空间时, 有
$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \overline{\boldsymbol{P}}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}.$$

定义 5.16

1. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶实矩阵, 若存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 则称 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 正交相似.
2. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶复矩阵, 若存在酉矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{B}=\overline{\boldsymbol{P}}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 则称 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 酉相似.

♣

注 正交 (酉) 相似是等叫关系.

定义 5.17

设 φ 是内积空间 V 上的线性变换, φ^* 是 φ 的伴随, 若 $\varphi^*=\varphi$, 则称 φ 是自伴随算子.

1. 当 V 是欧氏空间时, φ 也称为**对称算子**或**对称变换**.
2. 当 V 是酉空间时, φ 也称为 **Hermite 算子**或 **Hermite 变换**.

♣

例题 5.2 设 V 是 n 维内积空间, V_0 是 V 的子空间, $V=V_0\oplus V_0^{\perp}$ 。令 $\boldsymbol{E}$ 是 V 到 V_0 上的正交投影, 则 $\boldsymbol{E}$ 是自伴随算子.

引理 5.4

φ 是 n 维内积空间 V 上的线性算子,

1. 若 V 是欧氏空间, 则 φ 是自伴随算子 $\Longleftrightarrow$ φ 在任一 (某一) 组标准正交基下的表示矩阵都是实对称阵.
2. 若 V 是酉空间, 则 φ 是自伴随算子 $\Longleftrightarrow$ φ 在任一 (某一) 组标准正交基下的表示矩阵都是 Hermite 阵.

♡

定理 5.13

设 V 是 n 维酉空间, φ 是 V 上的自伴随算子, 则 φ 的特征值全是实数且属于不同特征值的特征向量互相正交.

♡

推论 5.4

Hermite 矩阵的特征值全是实数, 实对称阵的特征值也全是实数. 这两种矩阵属于不同特征值的特征向量互相正交.

♡

定理 5.14

设 V 是 n 维内积空间, φ 是 V 上的自伴随算子, 则存在 V 的一组标准正交基, 使 φ 在这组基下的表示矩阵为实对角阵, 且这组基恰为 φ 的 n 个线性无关的特征向量.

♡

定理 5.15

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称阵, 则存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵, 且 $\boldsymbol{P}$ 的 n 个列向量恰为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个两两正交的单位特征向量。
2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶 Hermite 矩阵, 则存在酉矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\overline{\boldsymbol{P}}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为实对角阵, 且 $\boldsymbol{P}$ 的 n 个列向量恰为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个两两正交的单位特征向量.

♡

推论 5.5 (正交相似/酉相似的全系不变量)

正交相似/酉相似的标准型是特征值构成的实对角阵.

1. 实对称阵的全体特征值是实对称阵在正交相似关系下的全系不变量.
2. Hermite 矩阵的全体特征值是 Hermite 矩阵在酉相似关系下的全系不变量.

命题 5.11

设 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是 n 元实二次型, 系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 则 f 经过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 可以化为下列标准型:

$$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$$

因此, f 的正惯性指数等于 $\boldsymbol{A}$ 的正特征值的个数, 负惯性指数等于 $\boldsymbol{A}$ 的负特征值的个数, f 的秩等于 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值的个数.

命题 5.12

设 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是 n 元实二次型, 则

1. f 是正定型当且仅当系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全是正数,
2. f 是负定型当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全是负数,
3. f 是半正定型当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全非负,
4. f 是半负定型当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全非正.

5.6 复正规算子

定义 5.18

设 φ 是内积空间 V 上的线性变换, φ^* 是其伴随, 若 $\varphi\varphi^*=\varphi^*\varphi$, 则称 φ 是 V 上的正规算子.

为了不引起混淆, 我们也称酉空间 (欧氏空间) V 上的正规算子 φ 为复正规算子 (实正规算子)。

1. 复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 若适合 $\overline{\boldsymbol{A}}'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{A}}'$, 则称其为**复正规矩阵**.
2. 实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 若适合 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}'$, 则称其为**实正规矩阵**.

注

1. 容易验证酉算子 (酉矩阵) 和 Hermite 算子 (Hermite 矩阵) 都是复正规算子 (矩阵).
   正交变换（正交矩阵）和对称变换（实对称矩阵）都是实正规算子 (矩阵).
2. 容易证明酉空间（欧氏空间）V 上的线性变换 φ 是复（实）正规算子的充分必要条件是 φ 在 V 的某一组或任一组标准正交基下的表示矩阵都是复（实）正规矩阵. 因此, 复 (实) 矩阵的正规性在酉 (正交) 相似下是不变的.

命题 5.13

设 φ 是酉空间 V 上的正规算子, 则对任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in V$, 成立

1.

$$\|\varphi(\boldsymbol{\alpha})\|=\|\varphi^*(\boldsymbol{\alpha})\|.$$

2. 向量 $\boldsymbol{u}$ 是 φ 属于特征值 λ 的特征向量 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{u}$ 是 φ^* 属于特征值 $\bar{\lambda}$ 的特征向量.
3. 属于 φ 不同特征值的特征向量必正交.

引理 5.5

设 V 是 n 维酉空间, φ 是 V 上的线性变换, 又 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 是 V 的一组标准正交基. 设 φ 在这组基下的表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个上三角阵, 则 φ 是正规算子的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 为对角阵.

定理 5.16 (Schur 定理)

设 V 是 n 维酉空间, φ 是 V 上的线性算子, 则存在 V 的一组标准正交基, 使 φ 在这组基下的表示矩阵为上三角阵.

推论 5.6 (Schur 定理)

任一 n 阶复矩阵均酉相似于一个上三角阵, 即存在酉阵 $\boldsymbol{P}$, s.t. $\overline{\boldsymbol{P}}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为上三角阵.

定理 5.17

设 V 是 n 维酉空间, φ 是 V 上的线性算子, 则 φ 为正规算子的充分必要条件是存在 V 的一组标准正交基, 使 φ 在这组基下的表示矩阵是复对角阵.

注 特别, 这组基恰为 φ 的 n 个线性无关的特征向量.

定理 5.18

复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为复正规矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 酉相似于对角阵.

注

1. 复正规矩阵的特征值就是复正规矩阵在酉相似关系下的全系不变量.
2. 两个复正规矩阵酉相似的充分必要条件是它们具有相同的特征值.
3. 酉相似标准型为特征值构成的对角阵.

命题 5.14

设 φ 是 n 维酉空间 V 上的线性算子, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 是 φ 的全体不同特征值, $V_1, V_2, \cdots, V_k$ 是对应的特征子空间, 则 φ 是正规算子的充分必要条件是

$$V = V_1 \perp V_2 \perp \cdots \perp V_k.$$

命题 5.15

任一 n 阶酉矩阵必酉相似于下列对角阵:

$$\operatorname{diag}\{c_1, c_2, \cdots, c_n\},$$

其中 c_i 为模长等于 1 的复数.

定理 5.19

设 φ 是欧式空间的自伴随算子，$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ 是全体不同特征值，$V_1, V_2, \ldots, V_k$ 为对应的特征子空间，则

$$V = V_1 \perp V_2 \perp \cdots \perp V_k.$$

5.7 实对称矩阵特征值的估计 *

5.8 实正规算子

引理 5.6

设 V 是 n 维欧氏空间, $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, 若 φ 是 V 上的正规算子, 则 $f(\varphi)$ 也是 V 上的正规算子.

引理 5.7

设 φ 是欧氏空间 V 上的正规算子, $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ 且互素. 假设 $\boldsymbol{\alpha} \in \operatorname{Ker} f(\varphi), \boldsymbol{\beta} \in \operatorname{Ker} g(\varphi)$, 则

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0$$

定理 5.20

设 V 是 n 维欧氏空间，φ 是 V 上的正规算子. 令 $g(x)$ 是 φ 的极小多项式，$g_1(x), \cdots, g_k(x)$ 为 $g(x)$ 的所有互异的首一不可约因式，且 $W_i = \operatorname{Ker} g_i(\varphi)(i = 1, \cdots, k)$ ，则

1. $g(x) = g_1(x) \cdots g_k(x)$ ，其中 $\deg g_i(x) \leqslant 2$.
2. $V = W_1 \perp \cdots \perp W_k$.
3. W_i 是 φ 的不变子空间, 用 φ_i 表示 φ 在 W_i 上的限制, 则 φ_i 是 W_i 上的正规算子且 $g_i(x)$ 是 φ_i 的极小多项式.

引理 5.8

设 V 是 n 维欧氏空间, φ 是 V 上的正规算子且 φ 适合多项式 $g(x) = x^2 + 1$. 设 $\boldsymbol{v} \in V, \boldsymbol{u} = \varphi(\boldsymbol{v})$, 则

$$\varphi^*(\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{u}, \varphi^*(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$$

且 $\|\boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{v}\|, \boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$.

引理 5.9

设 V 是 n 维欧氏空间, φ 是 V 上的正规算子且 φ 适合多项式 $g(x) = (x-a)^2 + b^2$, 其中 a, b 都是实数且 $b \neq 0$. 设 $\boldsymbol{v} \in V, \boldsymbol{u} = b^{-1}(\varphi - a\boldsymbol{I}_V)(\boldsymbol{v})$, 则 $\|\boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{v}\|, \boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$, 且

$$(\varphi(\boldsymbol{u}), \varphi(\boldsymbol{v})) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$(\varphi^*(\boldsymbol{u}), \varphi^*(\boldsymbol{v})) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

定理 5.21

设 φ 是 n 维欧氏空间 V 上的正规算子, φ 的极小多项式为 $g(x)=(x-a)^2+b^2$，其中 a,b 是实数且 $b\neq 0$，则存在 V 的 s 个二维子空间 $V_1,\cdots,V_s$, 使

$$V=V_1\perp\cdots\perp V_s,$$

且每个 V_i 都有标准正交基 $\{\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{v}_i\}$，满足

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u}_i)=a\boldsymbol{u}_i-b\boldsymbol{v}_i,\quad \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v}_i)=b\boldsymbol{u}_i+a\boldsymbol{v}_i$$

即 $\varphi|_{V_i}$ 在这组基的表示矩阵为

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

定理 5.22

设 V 是 n 维欧氏空间, φ 是 V 上的正规算子, 则存在一组标准正交基, 使 φ 在这组基下的表示矩阵为下列分块对角阵:

$$\operatorname{diag}\{\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_r,c_{2r+1},\cdots,c_n\}, \tag{5.1}$$

其中 $c_j(j=2r+1,\cdots,n)$ 是实数, $\boldsymbol{A}_i$ 为形如

$$\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix}$$

的二阶实矩阵.

注

1. 5.1 式就是实正规矩阵的正交相似标准型.
2. 在不计主对角线上分块的次序的意义下，实正规矩阵的正交相似标准型是唯一确定的.
3. 实正规矩阵的全体特征值是正交相似关系的全系不变量.

命题 5.16

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正交矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 正交相似于下列分块对角阵:

$$\operatorname{diag}\{\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_r;1,\cdots,1;-1,\cdots,-1\},$$

其中

$$\boldsymbol{A}_i=\begin{pmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}, i=1,\cdots,r.$$

命题 5.17

设 $\boldsymbol{A}$ 是实反对称阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 正交相似于下列分块对角阵:

$$\operatorname{diag}\{\boldsymbol{B}_1,\cdots,\boldsymbol{B}_r;0,\cdots,0\},$$

其中

$$\boldsymbol{B}_i=\begin{pmatrix} 0 & b_i \\ -b_i & 0 \end{pmatrix}, i=1,\cdots,r.$$

注 若 $\boldsymbol{A}$ 是实反对称阵, 由于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\top = -\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}$, 故实反对称阵是正规矩阵. 若 $\boldsymbol{P}$ 是正交矩阵, 则

$$\left(\boldsymbol{P}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\right)^\top = \boldsymbol{P}^\top\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{P} = -\boldsymbol{P}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}.$$

因此, 反对称性在正交相似下保持不变.

推论 5.7

实反对称阵的秩必是偶数, 且其实特征值必为 0, 虚特征值为纯虚数. ♡

5.9 谱分解与极分解

5.10 奇异值分解

第 6 章 群论

内容提要

- 恰当方程

6.1