分析

数学分析

作者：王子毅

组织：扬州大学数学科学学院

时间：August 28, 2024

版本：0.0

Bio:Information

ElegantLaTeX Program

求知若饥，虚心若愚

目录

前言

这份笔记是笔者在 2024 年 8 月复习《数学分析》时阅读中科大史济怀教授编写的《数学分析教程》第 3 版时所整理的，主要整理了所有书中的定义、定理、命题、推论，a.e. 没有证明。

这份笔记的主要目的是帮助已经学过一遍数学分析的同学在复习的时候快速回忆一些结果。

第 1 章 实数和数列极限

1.1 数列和收敛数列

定义 1.1 (收敛数列)

设 $\{a_n\}$ 是一个数列, a 是一个实数. 如果对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在一个 $N \in \mathbf{N}^*$ ，使得当 $n > N$ 时，有

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

就说数列 $\{a_n\}$ 当 n 趋向无穷大时以 a 为极限, 记成

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

也可以简记为 $a_n \to a(n \to \infty)$. 我们也说数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a. 存在极限的数列称为收敛数列; 不收敛的数列称为发散数列.

♣

例题 1.1 证明: 对任意的正数 $\alpha > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$$

证明 先设 $\alpha \geqslant 1$. 这时

$$\left|\frac{1}{n^a} - 0\right| = \frac{1}{n^a} \leqslant \frac{1}{n}.$$

对任意的 $\varepsilon > 0$, 取 $N = [1/\varepsilon]$, 当正整数 $n > N$ 时, 便有

$$\left|\frac{1}{n^\alpha} - 0\right| \leqslant \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

这就对 $\alpha \geqslant 1$ 的情形证明了结论.

现设 $0 < \alpha < 1$, 总可以找到 $m \in \mathbf{N}^*$, 使得 $m\alpha > 1$. 由于 $\{1/n^{m\alpha}\}$ 收敛于 0 , 故对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使得当 $n > N$ 时, 有 $1/n^{m\alpha} < \varepsilon^m$, 这等价于 $1/n^\alpha < \varepsilon$. 所以, 可以断言: 对一切 $\alpha > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} = 0.$$

□

例题 1.2 当 $|q| < 1$ 时, 求证:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

解 要使

$$|q|^n < \varepsilon$$

即 $n \ln|q| < \ln\varepsilon$ ，只需

$$n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|},$$

因此取 $N = [\ln\varepsilon/\ln|q|]$.

1.2 收敛数列的性质

定义 1.2

数列 $\{a_n\}$ 当 $n \to \infty$ 时收敛于实数 a 是指：对任意的 $\varepsilon > 0$，总存在 $N \in \mathbf{N}^*$，使得此数列中除有限多项 $a_1, a_2, \cdots, a_N$，其他的项均落在 a 的 ε 邻域内. ♣

定理 1.1 (极限唯一)

如果数列 $\{a_n\}$ 收敛，则它只有一个极限. 也就是说，收敛数列的极限是唯一的. ♡

定义 1.3 (有界定义)

设 $\{a_n\}$ 是一个数列. 如果存在一个实数 A，使得 $a_n \leqslant A$ 对一切 $n \in \mathbf{N}^*$ 成立，则称 $\{a_n\}$ 是有上界的，A 是此数列的一个上界.

类似地，可以定义有下界的数列.

如果数列 $\{a_n\}$ 既有下界又有上界，则称它是一个有界数列. ♣

定理 1.2

收敛数列是有界的. ♡

证明 设收敛数列 $\{a_n\}$ 的极限是 a，那么，对 a 的 1 邻域，必存在 $N \in \mathbf{N}^*$，使得凡是 $n > N$ 的项 a_n 都在这个邻域内，不在这个开区间内的至多是 $a_1, a_2, \cdots, a_N$ 这些项。我们完全可以找到一个大一些的区间，它既包含 a 的 1 邻域，又包含着 $a_1, a_2, \cdots, a_N$，这就证明了数列 $\{a_n\}$ 是有界的. 如果有人还希望有更形式化一些的证明，这就是：当 $n > N$ 时，有 $|a_n - a| < 1$，于是

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leqslant |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

若令 $M = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_N| + |a| + 1$，则对一切 $n \in \mathbf{N}^*$，有 $|a_n| < M$。请注意，这个命题的逆命题是不正确的. 我们马上将看到发散的有界数列.

□

定义 1.4 (子列)

设 $\{a_n\}$ 是一个数列，$k_i \in \mathbf{N}^*(i = 1, 2, 3, \cdots)$，且满足 $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$，那么数列 $\{a_{k_n}\}$ 叫作 $\{a_n\}$ 的一个子列. ♣

注 由这个定义，$\{a_n\}$ 自身也可以看作是 $\{a_n\}$ 的子列.

定理 1.3

设收敛数列 $\{a_n\}$ 的极限是 a，那么 $\{a_n\}$ 的任何一个子列都收敛于 a. ♡

证明 由条件，对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbf{N}^*$，当 $n > N$ 时，有 $|a_n - a| < \varepsilon$. 任取 $\{a_n\}$ 的一个子列 $\{a_{k_n}\}$ 令

$$b_n = a_{k_n} \quad (n \in \mathbf{N}^*)$$

由于 $k_n \geqslant n$ 对 $n \in \mathbf{N}^*$ 成立，故当 $n > N$ 时，有 $k_n \geqslant n > N$，因此

$$|b_n - a| = |a_{k_n} - a| < \varepsilon$$

这正表明 $\{b_n\}$ 收敛于 a.

□

注 考察数列 $\{(-1)^{n-1}\}$, 显然它是一个有界的数列, 但它不是一个收敛数列.

命题 1.1

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是它的偶数项子列 $\{a_{2n}\}$ 和奇数项子列 $\{a_{2n-1}\}$ 都收敛, 而且有相同的极限.

证明 只要证充分性. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = a$. 由于 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = a$, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $K_1 \in \mathbf{N}^*$, 当 $k > K_1$ 时, 有

$$|a_{2k} - a| < \varepsilon. \tag{1.1}$$

由于 $\lim\limits_{h\to\infty} a_{2k-1} = a$, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $K_2 \in \mathbf{N}^*$, 当 $k > K_2$ 时, 有

$$|a_{2k-1} - a| < \varepsilon \tag{1.2}$$

现取 $N = \max(2K_1, 2K_2 - 1)$, 那么当 $n > N$ 时, 如果 $n = 2k$, 由于 $2k > 2K_1, k > K_1$, 所以由式1.1, 知 $|a_{2k} - a| < \varepsilon$, 即

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

如果 $n = 2k - 1$, 由于 $2k - 1 > 2K_2 - 1, k > K_2$, 由式1.2, 知 $|a_{2k-1} - a| < \varepsilon$, 即

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

综上，可知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

□

命题 1.2 (极限的四则运算)

设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都是收敛数列, 则 $\{a_n + b_n\}, \{a_n b_n\}$ 也是收敛数列. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, 则 $\{a_n / b_n\}$ 也收敛, 并且有:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, 特别地, 如果 c 是常数, 便有 $\lim\limits_{n\to\infty} c a_n = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, 其中 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

证明

1. Trivial.
2. 由于 $\{b_n\}$ 是收敛的, 它必有界. 这就是说, 存在正数 M, 使得 $|b_n| < M$ 对一切 $n \in \mathbf{N}^*$ 成立. 从而有

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a b_n + a b_n - ab| \\ &\leqslant |b_n| \, |a_n - a| + |a| \, |b_n - b| \\ &\leqslant M \, |a_n - a| + |a| \, |b_n - b| \end{aligned}$$

因为 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 分别收敛于 a, b, 故对任意的 $\varepsilon > 0$, 可以找到一个 $N \in \mathbf{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时,

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(|a| + 1)}$$

同时成立. 因此，当 $n>N$ 时，

$$|a_nb_n-ab|<M\frac{\varepsilon}{2M}+\frac{|a|\varepsilon}{2(|a|+1)}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

这就表明

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=ab$$

3. 先来证明：当 $b\neq 0$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{b}$$

对 $|b|/2>0$ ，存在 N_1 ，当 $n>N_1$ 时，有

$$|b_n-b|<\frac{|b|}{2}$$

此时，有 $|b_n|\geqslant|b|-|b_n-b|>|b|-|b|/2=|b|/2>0$ ，这表明：在 $b\neq 0$ 的条件下，$\{b_n\}$ 中至多只有有限多项等于 0 . 在 $n>N_1$ 的条件下，

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right|=\frac{|b_n-b|}{|b_nb|}\leqslant\frac{2}{b^2}|b_n-b|$$

由于 $b_n\to b$ ，对任给的 $\varepsilon>0$ ，存在 $N_2\in\mathbf{N}^*$ ，使得当 $n>N_2$ 时，有 $|b_n-b|<\frac{b^2}{2}\varepsilon$ 。因此，当 $n>\max(N_1,N_2)$ 时，便有

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right|\leqslant\frac{2}{b^2}|b_n-b|<\frac{2}{b^2}\frac{b^2}{2}\varepsilon=\varepsilon$$

这正说明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{b}$$

再由已证的 (2)，便得出

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}a_n\left(\frac{1}{b_n}\right)=\frac{a}{b}$$

□

例题 1.3 证明: $\{\sin n\}$ 是一个发散的数列.

证明 用反证法. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=a$, 那么在等式

$$\sin(n+1)-\sin(n-1)=2\sin 1\cos n$$

的两边取极限 $(n\to\infty)$, 可得 $0=2\sin 1\lim\limits_{n\to\infty}\cos n$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n=0$. 再在等式 $\sin 2n=2\sin n\cos n$ 的两边取极限, 即得 $a=0$. 于是在等式

$$\sin^2 n+\cos^2 n=1$$

的两边取极限立, 就得到" $0=1$ " 的矛盾.

□

定义 1.5 (无穷小)

如果收敛数列 $\{a_n\}$ 的极限等于 0 , 那么这个数列称为无穷小数列, 简称无穷小.

♣

命题 1.3

1. $\{a_n\}$ 为无穷小的充分必要条件是 $\{|a_n|\}$ 为无穷小;
2. 两个无穷小之和（或差）仍为无穷小;

3. 设 $\{a_n\}$ 为无穷小, $\{c_n\}$ 为有界数列, 那么 $\{c_n a_n\}$ 也为无穷小;
4. 设 $0 \leqslant a_n \leqslant b_n\,(n \in \mathbf{N}^*)$, 如果 $\{b_n\}$ 为无穷小, 那么 $\{a_n\}$ 也为无穷小;
5. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 的充分必要条件是 $\{a_n - a\}$ 为无穷小.

注 由于无穷小一定是有界的, 故由 (3) 知道, 两个无穷小之积必为无穷小.

但是必须注意, 两个无穷小的商未必是无穷小, 例如, $\{1/n\}$ 与 $\{1/n^2\}$ 的商 $\{n\}$ 便不是无穷小.

例题 1.4 已知 $a_n \to a(n\to\infty)$. 求证:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \to a \quad (n\to\infty).$$

例题 1.5 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = ab$$

定理 1.4 (夹逼原理)

设

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n \quad (n \in \mathbf{N}^*)$$

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, 那么

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a$$

例题 1.6 设 $a>0$. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$.

解

1. 先设 $a \geqslant 1$. 当 $n > a$ 时, 有

$$1 \leqslant a^{1/n} \leqslant n^{1/n}$$

已经证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$. 由夹逼原理, 知 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$ 对 $a \geqslant 1$ 成立.

2. 再设 $a \in (0,1)$, 这时, $a^{-1} > 1$. 于是

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a}\right)^{1/n}} = \frac{1}{1} = 1$$

命题 1.4

在结束本节的时候, 我们来叙述并证明一些通过不等式来表达的收敛数列的性质。

1. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \alpha, \beta$ 满足 $\alpha < a < \beta$, 那么当 n 充分大时, 有 $a_n > \alpha$;
   同样, 当 n 充分大时, 有 $a_n < \beta$.
2. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 且 $a<b$, 那么当 n 充分大时, 一定有 $a_n < b_n$.
3. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 并且当 n 充分大时 $a_n \leqslant b_n$, 那么有 $a \leqslant b$.

1.3 数列极限概念的推广

定义 1.6

如果数列 $\{a_n\}$ 满足条件: 对任何正数 A, 都存在 $N \in \mathbf{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $a_n > A$, 则称数列 $\{a_n\}$ 趋向于 $+\infty$ (正无穷大), 记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

如果对任何正数 A, 都存在 $N \in \mathbf{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $a_n < -A$, 则称数列 $\{a_n\}$ 趋向于 $-\infty$ (负无穷大), 记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

♣

定义 1.7

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$, 则称 $\{a_n\}$ 趋向于 ∞, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. 无论三种情形

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

中的哪一种, 数列 $\{a_n\}$ 都称为无穷大.

♣

命题 1.5

1. 如果 $\{a_n\}$ 是无穷大, 那么 $\{a_n\}$ 必然无界. 注意, 上述命题的逆命题不成立, 例如
$$1, 0, 2, 0, 3, 0, \cdots, n, 0, \cdots$$
是无界的, 但这个数列不是无穷大. 但有:
2. 从无界数列中一定能选出一个子列是无穷大.
3. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (或 $-\infty, \infty$), 那么对 $\{a_n\}$ 的任意子列 $\{a_{k_n}\}$, 也有
$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = +\infty \quad (\text{或} -\infty, \infty).$$
4. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, 那么
$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$$
上述性质对 $a_n - b_n$ 和 a_n/b_n 不成立. 例如, $a_n = n, b_n = n$ 都是无穷大, 而 $a_n - b_n = 0, a_n/b_n = 1$ 都不是无穷大.
5. $\{a_n\}$ 是无穷大的充分必要条件是 $\{1/a_n\}$ 为无穷小.

♠

1.4 单调数列

定理 1.5

单调且有界的数列一定有极限.

♡

证明 将数列每一个项写成十进制小数，然后根据有界性对极限的数位上的数字作逼近.

□

例题 1.7 对 $n \in \mathbf{N}^*$, 设

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

求证: $\{a_n\}$ 发散.

证明

$$\begin{aligned}
a_{2^k} =& 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) \\
& + \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) \\
\geqslant & 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right) \\
& + \cdots + \left(\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) \\
=& 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{k\text{个}} = 1 + \frac{k}{2} \quad (k = 0, 1, \cdots).
\end{aligned}$$

□

例题 1.8 对 $n \in \mathbf{N}^*$, 设

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^a} + \cdots + \frac{1}{n^a},$$

这里 $\alpha > 1$. 求证: a_n 收敛.

证明 很明显, $\{a_n\}$ 是严格递增数列. 易知

$$\begin{aligned}
a_{2^k-1} =& 1 + \left(\frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a}\right) + \left(\frac{1}{4^a} + \cdots + \frac{1}{7^a}\right) + \left(\frac{1}{8^a} + \cdots + \frac{1}{15^a}\right) \\
& + \cdots + \left(\frac{1}{(2^{k-1})^a} + \cdots + \frac{1}{(2^k-1)^a}\right) \\
\leqslant & 1 + \frac{2}{2^a} + \frac{4}{4^a} + \frac{8}{8^a} + \cdots + \frac{2^{k-1}}{(2^{k-1})^a} \\
=& 1 + \frac{1}{2^{a-1}} + \frac{1}{4^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{1}{(2^{k-1})^{a-1}} \\
=& 1 + \frac{1}{2^{a-1}} + \left(\frac{1}{2^{a-1}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2^{a-1}}\right)^{k-1} \\
=& \frac{1 - \left(\frac{1}{2^{a-1}}\right)^k}{1 - \frac{1}{2^{a-1}}} < \frac{2^{a-1}}{2^{a-1} - 1}
\end{aligned}$$

至此, 已证明 $\{a_n\}$ 有一子列 $\{a_{2^n-1}\}$ 是有上界的. 因为 $\{a_n\}$ 是递增数列, 由此得知 $\{a_n\}$ 也有上界, 从而 $\{a_n\}$ 是收敛数列.

□

定理 1.6 (闭区间套定理)

设 $I_n = [a_n, b_n]\,(n \in \mathbf{N}^*)$, 并且 $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots$. 如果这一列区间的长度 $|I_n| = b_n - a_n \to 0 (n \to \infty)$, 那么交集 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ 含有唯一的一点.

♡

证明 记左端点组成递增数列 $\{a_n\}$, 而右端点组成递减数列 $\{b_n\}$. 显然, $\{a_n\}$ 有上界 b_1, 而 $\{b_n\}$ 有下界

a_1. 因此以下两个极限存在:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n, \quad b = \lim_{n\to\infty} b_n$$

由于 $a_n \leqslant b_n\ (n \in \mathbf{N}^*)$, 可见 $a \leqslant b$. 因此, 不等式

$$a_n \leqslant a \leqslant b \leqslant b_n$$

对一切 $n \in \mathbf{N}^*$ 成立. 由此式可得

$$0 \leqslant b - a \leqslant b_n - a_n = |I_n|$$

由 $|I_n| \to 0(n \to \infty)$, 可知必有 $a = b$. 这时, $a_n \leqslant a \leqslant b_n$ 对 $n \in \mathbf{N}^*$ 成立, 即 $a \in I_n\ (n = 1, 2, \cdots)$. 由此得到 $a \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$. 显然, 点 a 是唯一的.

□

注 应当特别指出: 定理中的" 闭区间" 的" 闭" 字是不可以去掉的. 请看下面的例子: 设开区间 $I_n = (0, 1/n)(n = 1, 2, \cdots)$. 显然

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots$$

而且 $|I_n| = 1/n \to 0(n \to \infty)$, 但是 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n = \varnothing$, 是空集.

1.5 自然对数的底

命题 1.6

记

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad (n \in \mathbf{N}^*)$$

则

$$0 < \mathrm{e} - s_n \leqslant \frac{1}{n!n} \quad (n \in \mathbf{N}^*)$$

证明

$$\begin{aligned}
0 &< s_{n+m} - s_n \\
&= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+m)!} \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)\cdots(n+m)}\right] \\
&< \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{n+1}\right)^{m-1}\right] \\
&< \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!n}
\end{aligned}$$

令 $m \to \infty$, 得到

$$0 < \mathrm{e} - s_n \leqslant \frac{1}{n!n} \quad (n \in \mathbf{N}^*)$$

□

定理 1.7

自然对数的底 e 是无理数.

证明 用反证法. 假设 $\mathrm{e}=p/q$, 其中 $p,q\in\mathbf{N}^*$. 由于 $2<\mathrm{e}<3$, 可见 e 不是正整数, 因此 $q\geqslant 2$. 可得

$$0<q!\left(\mathrm{e}-s_q\right)\leqslant\frac{1}{q}\leqslant\frac{1}{2}$$

但是

$$q!\left(\mathrm{e}-s_q\right)=(q-1)!p-q!\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{q!}\right)$$

是整数, 矛盾!

□

例题 1.9 从 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^n=\mathrm{e}$, 很容易得到

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}=\frac{1}{\mathrm{e}}\\
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^n\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\
&= \mathrm{e}^2
\end{aligned}$$

1.6 基本列和 Cauchy 收敛原理

定义 1.8 (Cauchy 列)

设 $\{a_n\}$ 是一实数列. 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 若存在 $N\in\mathbf{N}^*$, 使得当 $m,n\in\mathbf{N}^*$ 且 $m,n>N$ 时, 有

$$|a_m-a_n|<\varepsilon,$$

则称数列 $\{a_n\}$ 是一个基本列或 Cauchy 列.

例题 1.10 当 $\alpha\leqslant 1$ 时, 设 $a_n=1+\dfrac{1}{2^\alpha}+\cdots+\dfrac{1}{n^\alpha}$. 求证: $\{a_n\}$ 不是基本列.

证明 我们总有

$$\begin{aligned}
a_{n+p}-a_n &= \frac{1}{(n+1)^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^\alpha}\\
&\geqslant \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}\geqslant\frac{p}{n+p}
\end{aligned}$$

由此可见, 对 $n\in\mathbf{N}^*$, 有

$$a_{2n}-a_n\geqslant\frac{n}{n+n}=\frac{1}{2}$$

因而 $\{a_n\}$ 不是基本列.

□

引理 1.1

从任一数列中必可取出一个单调子列.

证明 先引入一个定义: 如果数列中的一项大于这个项之后的所有各项, 则称这一项是一个" 龙头". 分两种情况来讨论.

1. 如果在数列中存在着无穷多个" 龙头", 那么把这些可作" 龙头" 的项依次取下来, 显然将得到一个严格递减的数列.
2. 设在此数列中只有有限多个项可作" 龙头". 这时取出最后一个" 龙头" 的下一项, 记作 a_{i_1} 。由于 a_{i_1} 不是" 龙头", 在它的后边必有一项 $a_{i_2}\,(i_2>i_1)$ 满足 $a_{i_1}\leqslant a_{i_2}$; 因 a_{i_2} 也不是" 龙头", 在它的后边也必可找到一项 $a_{i_3}\,(i_3>i_2)$, 使得 $a_{i_3}\geqslant a_{i_2}$. 如此进行下去, 就得到子列 $\{a_{i_n}\}$, 它显然是一个递增的子列.

□

定理 1.8 (列紧性定理)

从任何有界的数列中必可选出一个收敛的子列.

注 此定理也称作 Bolzano-Weierstrass 定理.

定理 1.9 (Cauchy 收敛原理)

一个数列收敛的充分必要条件是, 它是基本列.

证明

1. 必要性.

   设 $\{a_n\}$ 是一个收敛数列, 其极限记作 a. 因此, 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 当 $n>N$ 时, 有
   $$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$$
   当 $m,n\in \mathrm{N}^*$, 且 $m,n>N$ 时, 可得
   $$\begin{aligned}|a_n-a_m|&=|a_n-a+a-a_m|\\&\leqslant|a_n-a|+|a-a_m|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$
   这表明 $\{a_n\}$ 是一个基本列.
2. 充分性.

   设 $\{a_n\}$ 是一个基本列. 首先证明基本列必是有界的. 对 $\varepsilon_0=1$ 而言, 可以取出一个 $N\in\mathbf{N}^*$, 且当 $n>N$ 时, 有
   $$|a_n-a_{N+1}|<\varepsilon_0=1$$
   由此知
   $$|a_n|\leqslant|a_n-a_{N+1}|+|a_{N+1}|<1+|a_{N+1}|$$
   再令
   $$M=\max\left(|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_N|,|a_{N+1}|+1\right),$$
   可见 $|a_n|\leqslant M$ 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立. 因此, $\{a_n\}$ 是有界数列.

   从有界数列 $\{a_n\}$ 中可选出一个收敛的子列 $\{a_{i_n}\}$, 设 $a_{i_n}\to a\ (n\to\infty)$. 我们来证明这个 a 也是

数列 $\{a_n\}$ 的极限。由于 $\{a_n\}$ 是基本列, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在一个 $N_1 \in \mathbf{N}^*$, 使得当 $m, n > N_1$ 时, 都有 $|a_m - a_n| < \varepsilon/2$. 又因 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{i_n} = a$, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_2 \in \mathbf{N}^*$, 当 $k > N_2$ 时, $|a_{i_k} - a| < \varepsilon/2$. 现取 $N = \max(N_1, N_2)$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n - a| \leqslant |a_n - a_{i_k}| + |a_{i_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

这正说明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

1.7 上确界和下确界

定义 1.9 (上确界)

设 E 为一非空的有上界的集合, 实数 β 满足以下两个条件:

1. 对任何 $x \in E$, 有 $x \leqslant \beta$.
2. 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 必可找到一个 $x_\varepsilon \in E$, 使得 $x_\varepsilon > \beta - \varepsilon$ 。

这时, 称 β 为集合 E 的上确界, 记为 $\beta = \sup E$.

♣

注 E 的上确界 β 是 E 的最小上界

定义 1.10 (下确界)

设 E 为一非空的有下界的集合, 实数 α 满足以下两个条件:

1. 对任何 $x \in E$, 有 $x \geqslant \alpha$.
2. 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 必可找到一个 $y_\varepsilon \in E$, 使得 $y_\varepsilon < \alpha + \varepsilon$.

这时, 称 α 为集合 E 的下确界, 记为 $\alpha = \inf E$.

♣

注 E 的下确界是 E 的最大下界.

注 显然, 若集合 E 中有最大 (最小) 数 a, 那么 $\sup E(\inf E) = a$.

定理 1.10 (确界原理)

1. 非空的有上界的集合必有上确界.
2. 非空的有下界的集合必有下确界.

♡

证明

1. 设非空集合 E 有一个上界 γ. 任取一点 $x \in E$, 显然, $\sup E \in [x, \gamma]$ 中. 记 $a_1 = x, b_1 = \gamma$.
   (a). 用 $[a_1, b_1]$ 的中点 $(a_1 + b_1)/2$ 把这个区间一分为二, 先看右边那个闭区间中有没有 E 中的点, 若有 E 中的点, 将这个区间记为 $[a_2, b_2]$, 否则将左边那个区间记为 $[a_2, b_2]$.
   (b). 接着再把 $[a_2, b_2]$ 用其中点一分为二, 先看右边那个小区间, 若其中有 E 中的点, 把它记为 $[a_3, b_3]$, 否则把左边那个小区间记作 $[a_3, b_3]$.
   (c). 如此这般继续下去, 我们得出了一列闭区间套 $I_n = [a_n, b_n]\,(n \in \mathbf{N}^*), I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$, 并且 $|I_n| = (\gamma - x)/2^{n-1}\,(n \in \mathbf{N}^*)$

   这个区间套的其他两个重要的特征是:
   (a). 在 I_n 右端点的右边再也没有 E 中的点.
   (b). I_n 总包含着 E 中的点, 这里 $n = 1, 2, \cdots$.

   根据闭区间套定理, 存在唯一的实数 β , 使得 $\beta \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$.

下证 $\beta=\sup E$. 注意, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\beta$. 任取 $c\in E$.

由性质 (1) 可知: 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$, 有 $c\leqslant b_n$, 令 $n\to\infty$, 便得到 $c\leqslant\beta$. 这表明 β 是 E 的一个上界. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\beta$, 故对任给的 $\varepsilon>0$, 存在一个 $N\in\mathbf{N}^*$, 使得 $\beta-\varepsilon<a_N$.

在区间 I_N 中, 由性质 (2), 一定有 E 中的一点, 记为 d. 因此 $d\geqslant a_N>\beta-\varepsilon$, 这表明 β 是 E 的最小上界.

2. 第二个论断可以通过第一个论断来证明.

   设 E 有下界 m, 即对每一个 $x\in E$, 有 $x\geqslant m$. 现定义 $F=\{-x:x\in E\}$, 则因 $x\geqslant m$, 所以 $-x\leqslant -m$, 即 $-m$ 是集合 F 的一个上界, 根据第一个论断, F 有上确界, 记 $\beta=\sup F$.

   下证 $-\beta=\inf E$. 为此, 取 $x\in E$, 则 $-x\in F, -x\leqslant\beta$, 故 $x\geqslant-\beta$, 即 $-\beta$ 是 E 的一个下界.

   为证明 $-\beta$ 是 E 的最大下界, 任取 $\varepsilon>0$, 要证明存在 $y_\varepsilon\in E$, 使得 $y_s<-\beta+\varepsilon$. 由于 $\beta=\sup F$, 所以存在 $x_\varepsilon\in F$, 使得 $x_\varepsilon>\beta-\varepsilon, -x_\varepsilon<-\beta+\varepsilon$. 记 $y_\varepsilon=-x_\varepsilon\in E$, 则有 $y_\varepsilon<-\beta+\varepsilon$, 故 $-\beta=\inf E$.

□

注 若记 $F=-E$, 则上面证明了

$$-\sup(-E)=\inf E \text{ 或 } \sup(-E)=-\inf E.$$

这一性质在下面的讨论中要多次用到.

1.8 有限覆盖定理

定义 1.11 (开覆盖)

如果 A 是实数集, $\mathscr{F}=\{I_\lambda\}$ 是一个开区间族, 其中 $\lambda\in\Lambda$, 这里的 Λ 称为指标集. 如果

$$A\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}I_\lambda$$

称开区间族 $\{I_\lambda\}$ 是 A 的一个开覆盖, 或者说 $\{I_\lambda\}$ 盖住了 A.

$\mathscr{F}=\{I_\lambda\}$ 是 A 的开覆盖也可以等价地叙述为: 任取 $a\in A$, 总有 $\mathscr{F}$ 中的一个成员, 记为 $I_{\lambda(a)}$, 使得 $a\in I_{\lambda(a)}$.

♣

定理 1.11 (有限覆盖定理)

设 $[a,b]$ 是一个有限闭区间, 并且它有一个开覆盖 $\{I_\lambda\}$, 那么从这个开区间族中必可选出有限开区间, 这有限个开区间所成的族仍是 $[a,b]$ 的开覆盖.

♡

注 这个定理常称为紧致性定理, 也叫作 Heine-Borel 定理.

证明 用反证法. 假如定理的结论不成立, 也就是说, $\{I_\lambda\}$ 中任意有限个区间都不能覆盖 $[a,b]$.

考虑用" 二分法" 来导出矛盾. 记 $a=a_1, b=b_1$.

1. 用 $[a_1,b_1]$ 的中点 $\frac{(a_1+b_1)}{2}$ 把这个区间一分为二:

$$\left[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}\right],\quad\left[\frac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$$

   显然, 这两个区间中至少有一个不能被 $\{I_\lambda\}$ 中的有限个区间所覆盖, 否则, $[a_1,b_1]$ 就能被 $\{I_\lambda\}$ 中的有限个区间所覆盖. 把那个不能被 $\{I_\lambda\}$ 中有限个区间所覆盖的区间记为 $[a_2,b_2]$, 再把 $[a_2,b_2]$

一分为二：

$$\left[a_2, \frac{a_2+b_2}{2}\right], \quad \left[\frac{a_2+b_2}{2}, b_2\right]$$

2. 同理，其中必有一个不能被 $\{I_\lambda\}$ 中的有限个区间所覆盖，把它记为 $[a_3, b_3]$.
3. 如此可以无限继续下去，得到一列区间 $\{[a_n, b_n]\}\,(n=1,2,\cdots)$. 它们具有下列性质：
   (a). $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]\,(n=1,2,\cdots)$;
   (b). $b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b_1 - a_1) \to 0(n\to\infty)$;
   (c). 每个 $[a_n, b_n]$ 都不能被 $\{I_\lambda\}$ 中的有限个区间所覆盖.

从 (1),(2) 两条性质知道，$\{[a_n, b_n]\}$ 满足闭区间套定理的条件，因而存在唯一的 $\eta \in [a_n, b_n]\,(n=1,2,\cdots)$, 且

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \eta \tag{1.3}$$

因为 $\eta \in [a_1, b_1] = [a, b]$，而 $\{I_\lambda\}$ 是 $[a, b]$ 的开覆盖，故 $\{I_\lambda\}$ 中必有区间 (α, β)，使得 $\eta \in (\alpha, \beta)$. 记

$$\varepsilon = \min(\eta - \alpha, \beta - \eta)$$

从式1.3可知，必有正整数 N_1, N_2，使得当 $n > N_1$ 时，$|a_n - \eta| < \varepsilon$; 当 $n > N_2$ 时，$|b_n - \eta| < \varepsilon$. 因此当 $n > N = \max(N_1, N_2)$ 时，有

$$\alpha \leqslant \eta - \varepsilon < a_n < b_n < \eta + \varepsilon \leqslant \beta$$

这就是说 $[a_n, b_n] \subset (\alpha, \beta)$, 即 $\{I_\lambda\}$ 中一个区间就覆盖了 $[a_n, b_n]$, 这与性质 (3) 矛盾.

□

注 在定理条件中若把有限闭区间换成开区间或无穷区间，结论就不再成立.

例如，

1. $\{(\frac{1}{n}, 1)\}(n=2,3,\cdots)$ 是开区间 $(0,1)$ 的一个开覆盖，但不可能从中选出有限个来覆盖 $(0,1)$.
2. $\{(0, n)\}(n=1,2,\cdots)$ 是无穷区间 $(1,+\infty)$ 的一个开覆盖，从中也选不出有限个来覆盖 $(1,+\infty)$.

1.9 上下极限

定义 1.12 (上下极限的定义)

设 $\{a_n\}$ 是一个数列，E 是由 $\{a_n\}$ 的全部极限点构成的集合. 记

$$a^* = \sup E, \quad a_* = \inf E,$$

则 a^* 和 $a*$ 分别称为数列 $\{a_n\}$ 的上极限和下极限，记为

$$a^* = \limsup_{n\to\infty} a_n, \quad a_* = \liminf_{n\to\infty} a_n$$

♣

例题 1.11 考察数列

$$a_n = \frac{(-1)^n}{1+1/n} \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

由于

$$a_{2n} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{-1} \to 1 \quad (n \to \infty),$$

$$a_{2n-1} = -\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)^{-1} \to -1 \quad (n \to \infty),$$

所以 $E = \{-1, 1\}$, 从而

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -1, \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = 1$$

当 E 是一个无穷集合时, 就产生一个问题: $a^* = \sup E$ 或 $a* = \inf E$ 是不是 E 中的元素, 即 a^* 或 a_* 是不是 $\{a_n\}$ 中某个子列的极限? 下面的定理给出了肯定的回答.

定理 1.12

设 $\{a_n\}$ 为一数列, E 与 a^* 的意义同上. 那么:

1. $a^* \in E$.
2. 若 $x > a^*$, 则存在 $N \in \mathbf{N}^*$, 使得当 $n \geqslant N$ 时, 有 $a_n < x$.
3. a^* 是满足前两条性质的唯一的数.

♡

证明

□

1.10 Stolz 定理

命题 1.7 (Stolz, $\frac{\infty}{\infty}$ 型)

设 b_n 是严格递增且趋于 $+\infty$ 的数列. 如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = A \tag{1.4}$$

那么

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$$

其中 A 可以是 $+\infty$ 或 $-\infty$.

♠

证明

1. 先设 A 为有限数.

   由 Cauchy 收敛原理知, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 n_0, 当 $n \geqslant n_0$ 时, 有

   $$A - \varepsilon < \frac{a_n - a_{n_0-1}}{b_n - b_{n_0-1}} < A + \varepsilon$$

   即

   $$A - \varepsilon < \frac{\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n_0-1}}{b_n}}{1 - \frac{b_{n_0-1}}{b_n}} < A + \varepsilon$$

   于是得

   $$(A - \varepsilon)\left(1 - \frac{b_{b_0-1}}{b_n}\right) + \frac{a_{n_0-1}}{b_n} < \frac{a_n}{b_n} < (A + \varepsilon)\left(1 - \frac{b_{n_0-1}}{b_n}\right) + \frac{a_{n_0-1}}{b_n}$$

从而得

$$A-\varepsilon \leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \leqslant A+\varepsilon$$

再令 $\varepsilon \to 0$，即得

$$A \leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \leqslant A$$

2. 设 $A=+\infty$, 当 n 充分大时, 有 $a_n-a_{n-1}>b_n-b_{n-1}>0$, 因而 $\{a_n\}$ 也是严格递增且趋于 $+\infty$ 的数列. 现在把式1.4 写成

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n-b_{n-1}}{a_n-a_{n-1}}=0$$

由 (1)，知 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n}=0$，因而 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}=+\infty$.

3. 设 $A=-\infty$, 记 $c_n=-a_n$, 那么

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n-c_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=-\lim_{n\to\infty} \frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=+\infty$$

由 (2), 知 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c_n}{b_n}=+\infty$, 因而 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}=-\infty$.

□

例题 1.12 设 k 为正整数, 计算极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$$

解 令 $a_n=1^k+2^k+\cdots+n^k, b_n=n^{k+1}$, 那么

$$b_n-b_{n-1}=n^{k+1}-(n-1)^{k+1}=(k+1)n^k+\cdots+(-1)^{k+1}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{(k+1)n^k+\cdots+(-1)^{k+1}}=\frac{1}{k+1}$$

由 Stolz 定理, 知所求的极限为 $\dfrac{1}{k+1}$.

第 2 章 函数连续性

2.1 函数的极限

定义 2.1 (函数极限的定义)

设函数 f 在点 x_0 的近旁有定义, 但 x_0 这一点自身可以是例外. 设 l 是一个实数. 如果对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在一个 $\delta>0$, 使得对一切满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的 x, 均有

$$|f(x)-l|<\varepsilon,$$

则称当 x 趋于点 x_0 时函数 f 有极限 l, 记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=l;$$

或者更简单一些, 记作

$$f(x)\to l \quad (x\to x_0)$$

这时, 也可以说函数 f 在点 x_0 有极限 l.

♣

注

1. 在讨论 f 在点 x_0 的极限时, f 在 x_0 是否有定义并不重要, 因为不等式 $0<|x-x_0|$ 已经把 $x=x_0$ 的可能性排除在外;
2. 在一般情形之下, δ 与 ε 有关系, 为了强调这种依赖关系, 有时把 δ 写为 $\delta(\varepsilon)$, 但这不意味着 δ 是 ε 的函数;
3. f 在 x_0 是否有极限、有极限时极限值等于多少, 只取决于 f 在点 x_0 的充分小的近旁的状态, 而与 f 在远处的值无关.

例题 2.1 求极限 $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2-4x+4\right)$.

解

$$x^2-4x+4=(x-3)^2+2(x-3)+1$$

对任给的 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min(1,\varepsilon/3)$, 当 $0<|x-3|<\delta$ 时, 有

$$\begin{aligned}\left|\left(x^2-4x+4\right)-1\right| &\leqslant |x-3|(|x-3|+2)<|x-3|(1+2)\\ &=3|x-3|<3\delta\leqslant\varepsilon\end{aligned}$$

这就证明了所求的极限是 1.

例题 2.2 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-x}$.

解 这时所讨论的函数在 $x=1$ 处没有定义. 由于 $x\neq 1$, 所以可以同时消去分子与分母中的公因式 $x-1$, 从而得出

$$\frac{x^2-1}{x^2-x}=\frac{x+1}{x}$$

由此我们察觉到当 $x\to 1$ 时, 函数的极限为 2 . 为了证明这一观察, 对任意给定的小于 1 的正数 ε, 取 $\delta=\varepsilon/2$, 当 $0<|x-1|<\delta$ 时, 有

$$|x|=|x-1+1|\geqslant 1-|x-1|\geqslant 1-\delta=1-\frac{\varepsilon}{2}>\frac{1}{2}$$

由此得出

$$\left|\frac{x^2-1}{x^2-x}-2\right|=\frac{|x-1|}{|x|}<2|x-1|<2\delta=\varepsilon$$

所以

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-x}=2$$

定理 2.1

函数 f 在 x_0 处有极限 l 的充分必要条件是, 任何一个收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\neq x_0: n=1,2,3,\cdots\}$, 数列 $\{f(x_n)\}$ 有极限 l.

证明

1. 必要性

   设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$, 对任给的 $\varepsilon>0$, 存在一个 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-l|<\varepsilon$. 对已取定的 $\delta>0$, 只要 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$, 便存在一个 $N\in\mathbf{N}^*$, 使得当 $n>N$ 时, 有 $0<|x_n-x_0|<\delta$. 这样, 当 $n>N$ 时, 有

   $$|f(x_n)-l|<\varepsilon$$

   这正是 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=l$.
2. 充分性

   假设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ 不成立, 那么, 必有一个正数 ε_0, 对每一个正整数 n ，一定有一点 x_n ，满足 $0<|x_n-x_0|<1/n$ ，且使得 $|f(x_n)-l|\geqslant\varepsilon_0>0$. 这就是说，我们已经找到了一个数列 $\{x_n\neq x_0: n=1,2,3,\cdots\}$ ，虽然它收敛于 x_0 ，但是 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\neq l$.

□

注 该定理来判断函数极限不存在比较方便.

例题 2.3 求证: $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

证明 令

$$x_n=\frac{1}{(2n+1/2)\pi}\to 0,\quad x_n'=\frac{1}{2n\pi}\to 0\quad (n\to\infty),$$

以及 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$. 我们有 $f(x_n)=1\to 1, f(x_n')=0\to 0(n\to\infty)$. 由归结原则知该极限不存在.

□

例题 2.4 定义函数 $D:\mathbb{R}\to\{0,1\}$ 如下:

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当} x \text{ 为有理数时},\\ 0, & \text{当} x \text{ 为无理数时}.\end{cases}$$

证明：对任意的 $x_0\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} D(x)$ 不存在.

证明 证明对任意的 $x_0\in\mathbb{R}$, 一定存在全由有理数组成的数列 $\{s_n\}$ 和全由无理数组成的数列 $\{t_n\}$, 使它们都趋向于 x_0, 这样就有

$$\lim_{n\to\infty} D(s_n)=1,\quad \lim_{n\to\infty} D(t_n)=0$$

由归结原则, 即知 $\lim\limits_{x\to x_0} D(x)$ 不存在.

□

注 上例中定义的函数 D 叫作 Dirichlet 函数, 看上去这个函数有太多的人工雕琢的成分, 不太自然，但

是用它来澄清一些似是而非的误解时,是十分方便的. 例如,由上例可知,处处不存在极限的函数是存在的. 以后还将多次遇到这个函数.

命题 2.1 (函数极限的唯一性)

若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在, 则它是唯一的.

证明 任取一收敛于 x_0 的数列 $\{x_n \neq x_0 : n \in \mathbb{N}^*\}$.

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

由数列的极限的唯一性, 从而知函数极限也是唯一的.

□

命题 2.2

若 f 在 x_0 处有极限, 那么 f 在 x_0 的一个近旁是有界的. 也就是说, 存在整数 M 及 δ, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x)| < M$ 。

证明 设 f 在 x_0 处的极限等于 l. 依定义, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - l| < 1$. 因此

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - l| + |l| < 1 + |l|$$

对 $0 < |x - x_0| < \delta$ 成立. 由此可见, $M = 1 + |l|$ 满足要求.

□

命题 2.3

设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ 存在, 那么有:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} (f \pm g)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;
2. $\lim\limits_{x \to x_0} fg(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;
3. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$, 其中 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$.

证明

1. Trivial.
2. Trivial.
3. 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = m \neq 0$, 那么对任意收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$, 有 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = l$, $\lim\limits_{n \to \infty} g(x_n) = m \neq 0$. 于是由数列中已知的结果, 有 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = \dfrac{l}{m}$. 由于 $\{x_n\}$ 是任意趋于 x_0 的数列, 由归结原则即知
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$$

□

命题 2.4 (夹逼原理)

设函数 f, g 与 h 在点 x_0 的近旁 (点 x_0 自身可能是例外) 满足不等式

$$f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$$

如果 f 与 g 在点 x_0 有相同的极限 l, 那么函数 h 在点 x_0 也有极限 l.

证明 由于 $f(x) \to l\,(x \to x_0)$, 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_1>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时, 有

$$l-\varepsilon<f(x)<l+\varepsilon$$

类似地, 存在 δ_2, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时, 有

$$l-\varepsilon<g(x)<l+\varepsilon$$

取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$ ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，我们可得

$$l-\varepsilon<f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)<l+\varepsilon$$

由此推出，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|h(x)-l|<\varepsilon$ 成立. 这便证明了 $h(x)\to l\,(x\to x_0)$.

□

命题 2.5

设存在 $r>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<r$ 时, 不等式 $f(x)\leqslant g(x)$ 成立. 又设在 x_0 处这两个函数都有极限, 那么

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\leqslant \lim_{x\to x_0} g(x)$$

证明 取收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$, 并让它满足

$$0<|x_n-x_0|<r \quad (n\in\mathbf{N}^*)$$

从而有

$$f(x_n)\leqslant g(x_n) \quad (n=1,2,\cdots)$$

令 $n\to\infty$, 得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\leqslant \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)$. 再由归结原则, 可知这正是

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\leqslant \lim_{x\to x_0} g(x)$$

定义 2.2

约定如下记号

$$B_\delta(x_0)=\{x:|x-x_0|<\delta\},\quad B_\delta(\check{x}_0)=\{x:0<|x-x_0|<\delta\}.$$

称 $B_\delta(x_0)$ 为 x_0 的以 x_0 为中心、δ 为半径的邻域 (简称 x_0 的邻域), $B_\delta(\check{x}_0)$ 为 x_0 的以 x_0 为中心、δ 为半径的空心邻域 (简称 x_0 的空心邻域). 利用这两个记号, 函数极限的定义可以叙述为:
如果对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在一个 $\delta>0$, 使得对一切 $x\in B_\delta(\check{x})$, 均有

$$|f(x)-l|<\varepsilon,$$

就称 l 为 f 当 x 趋于 x_0 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=l$$

定理 2.2 (Cauchy 收敛原理)

函数 f 在 x_0 处有极限, 必须且只需对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对任意的 $x_1,x_2\in B_\delta(\check{x}_0)$, 都有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

证明 必要性比较显然，下证充分性.

设对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $x_1, x_2 \in B_\delta(\dot{x}_0)$ 时, 有

$$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|<\varepsilon$$

现设 $\{x_n \neq x_0 : n \in \mathbf{N}^*\}$ 是任一个收敛于 x_0 的数列。对刚才已经确定的 $\delta>0$，可以找到正整数 N, 当 $m, n>N$ 时, 有 $0<|x_m-x_0|<\delta$, 且 $0<|x_n-x_0|<\delta$, 即 $x_m, x_n \in B_\delta(\dot{x}_0)$. 由此得到

$$\left|f\left(x_m\right)-f\left(x_n\right)\right|<\varepsilon$$

这表明数列 $\{f(x_n)\}$ 是一个基本列，因此是收敛数列，设其极限是 l_x .

设 $\{\boldsymbol{y}_n \neq \boldsymbol{x}_0 : n \in \mathbf{N}^*\}$ 是另一个收敛于 x_0 的数列，数列 $\{f(y_n)\}$ 也应有极限，记为 l_y.

下证 $l_x=l_y$. 事实上，把 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 交错地排列，作为一个新的数列 $\{z_n\}$:

$$x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots, x_n, y_n, \cdots$$

显然 $z_n \neq x_0\,(n \in \mathbf{N}^*)$, 可是 $z_n \rightarrow x_0(n \rightarrow \infty)$. 因此数列 $\{f(z_n)\}$ 有极限，记为 l .

注意到 $\{f(x_n)\}$ 和 $\{f(y_n)\}$ 都是 $\{f(z_n)\}$ 的子列，所以必须

$$l_x=l_y=l$$

再根据归结原则, 知 $\lim\limits_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在.

定理 2.3

设 $\lim\limits_{x \rightarrow x_0} f(x)=l, \lim\limits_{t \rightarrow t_0} g(t)=x_0$. 如果在 t_0 的某个邻域 $B_\eta(t_0)$ 内 $g(t) \neq x_0$, 那么

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(g(t))=l.$$

♡

注 条件 $g(t) \neq x_0$ 至为重要, 没有这个条件定理可能就不成立. 例如, 令

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=0, \\ 0, & x \neq 0,\end{cases} \quad g(t) \equiv 0$$

那么 $\lim\limits_{t \rightarrow 0} g(t)=0, \lim\limits_{x \rightarrow 0} f(x)=0$. 按照上述定理, 应有

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(g(t))=0$$

但事实上, $f(g(t)) \equiv 1$, 即上式不成立. 不成立的原因就在于条件 $g(t) \neq 0$ 被破坏了.

定义 2.3 (单边极限)

设函数 f 在 (x_0, x_0+r) (r 是一个确定的正数) 上有定义. 设 l 是一个给定的实数. 若对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在一个 $\delta \in(0, r)$, 使得当 $0<x-x_0<\delta$ 时, 有

$$|f(x)-l|<\varepsilon,$$

则称 l 为 f 在 x_0 处的右极限, 表示成

$$l=\lim_{x \rightarrow x_0^{+}} f(x)$$

在右极限存在的情形下, 这个右极限常记为 $f(x_0+)$ 或 $f(x_0+0)$. 也就是说,

$$f\left(x_0+\right)=\lim_{x \rightarrow x_0^{+}} f(x)$$

类似地，可以定义 f 在 x_0 处的左极限 $f(x_0-)$. 右极限和左极限统称为单边极限.

♣

命题 2.6

设函数 f 在 x_0 的某个邻域内 (x_0 可能是例外) 有定义, 那么 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充分必要条件是

$$f\left(x_0+\right)=f\left(x_0-\right),$$

这个共同的值也就是函数 f 在 x_0 处的极限值.

例题 2.5 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\left(\sin\frac{x}{2}\right)/\frac{x}{2}\right)^2.$$

若令 $t=x/2$, 那么 $x\to 0$ 等价于 $t\to 0$. 根据例 6 , 有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}&=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\right)^2\\&=\frac{1}{2}\times 1^2=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

注 例题中所用的技巧 $t=x/2$, 称为变量代换, 又称换元, 在数学分析的各个部分中都是非常有用的.

例题 2.6 下面的函数称为 Riemann 函数:

$$R(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ \frac{1}{q}, & x=\frac{p}{q}(q>0,p,q\text{ 互素}),\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

对任意的实数 x_0, 证明: $\lim\limits_{x\to x_0} R(x)=0$.

证明 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 取充分大的正整数 q_0, 使得 $1/q_0<\varepsilon$.

容易知道, 在区间 (x_0-1,x_0+1) 中, 满足 $0<q\leqslant q_0$ 的分数 p/q 只有有限多个.

因此总能取到充分小的 $\delta>0$, 使得 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 中的有理数的分母 $q>q_0$.

故当无理数 x 满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, $R(x)=0$.

当有理数 $x=p/q$ 满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 必有 $q>q_0$. 因而

$$0\leqslant R(x)=\frac{1}{q}<\frac{1}{q_0}<\varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to x_0} R(x)=0$.

□

2.2 极限过程的其他形式

定义 2.4

设 l 是一确定的实数, 表达式

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=l$$

的意思是, 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在一个正数 A, 当 x 满足 $|x|>A$ 时, 有 $|f(x)-l|<\varepsilon$. 这时, 我们说" 当 x 趋向于无穷时, 函数 f 有极限 l ". 上式也可以简记为

$$f(x)\to l=f(\infty)\quad(x\to\infty).$$

命题 2.7

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=l$ 当且仅当

$$f(-\infty)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=l,\quad f(+\infty)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$$

同时成立.

例题 2.7 设

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}\quad(x\geqslant 1)$$

这里 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数. 试求 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

解 已经证明数列 $\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$ 递增地趋向于自然对数的底 e . 因此, 对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbf{N}^*$, 使得

$$0<\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{N}\right)^N<\varepsilon$$

由于 f 是递增函数, 当 $x\geqslant N$ 时, 有 $[x]\geqslant N$, 从而有

$$0<\mathrm{e}-f(x)\leqslant \mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{N}\right)^N<\varepsilon$$

这就证明了

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}=\mathrm{e}$$

例题 2.8 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

解 先设 $x\geqslant 1$. 由不等式 $[x]\leqslant x<[x]+1$, 得

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

我们已经知道, 当 $x\to+\infty$ 时, 上式左、右两边的函数趋向于极限 e . 由夹逼原理, 便知

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

现在再来讨论 $x\to-\infty$ 的情形. 令 $y=-(x+1)$. 易知, 当 $x\to-\infty$ 时, $y\to+\infty$, 而

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x&=\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y+1}\\&=\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\left(1+\frac{1}{y}\right)\to\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e}\quad(y\to+\infty)\end{aligned}$$

综上, 可得

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

2.3 无穷小和无穷大

定义 2.5

设 x_0 是一个实数, 函数 $f(x)$ 在 x_0 的一个近旁（可能除 x_0 之外）有定义. 如果对任意给定的正数 A, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| > A$, 则称" 当 x 趋向于 x_0 时, 函数 f 趋向于无穷大", 记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty,$$

或者

$$f(x) \to \infty \quad (x \to x_0).$$

♣

注

1. 这些情形，我们说" 在所标明的极限过程中, f 是一个无穷大 (量)".
2. 与上述情形相对照, 如果在某一极限过程中, $\lim f(x) = 0$, 则称" 在该过程中, f 是一个无穷小 (量)".
3. 显然. 无穷大的倒数是无穷小; 不取零值的无穷小的倒数是无穷大.

定义 2.6

设当 $x \to x_0$ 时, f 与 g 都是无穷小, 并且 g 在 x_0 的一个充分小的近旁（除 x_0 之外）不取零值.

1. 如果 $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, 那么称 f 是比 g 更高阶的无穷小;
2. 如果 $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$, 则称 f 与 g 是同阶的无穷小;
3. 如果 (2) 中的极限值 $l = 1$, 那么称 f 与 g 是等价的无穷小, 记为

$$f \sim g \quad (x \to x_0).$$

♣

注 可以把无穷小的" 阶" 进行" 量化". 为此, 要取一个无穷小作为标准. 当 $x \to x_0$ 时, 很自然地取 $x - x_0$ 当作" 1 阶无穷小". 设当 $x \to x_0$ 时, f 是一个无穷小, 那么当 f 与 $(x - x_0)^\alpha$ $(\alpha > 0)$ 为同阶的无穷小时, 称 f 为 α 阶的无穷小.

例题 2.9 例如, 由于

$$\sin x \sim x \quad (x \to 0)$$
$$\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x \quad (x \to 0)$$
$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \quad (x \to 0)$$

可见当 $x \to 0$ 时, $\sin x$ 和 $\sqrt{1+x} - 1$ 都是 1 阶无穷小, $1 - \cos x$ 是 2 阶无穷小.

定义 2.7

在同一极限过程中的两个无穷大, 也可以按此进行比较. 具体地说, 设在某一极限过程中, f 与 g 都是无穷大, 那么:

1. 当 $\displaystyle\lim \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ 时, 称 g 是比 f 更高阶的无穷大, 也可以说 f 是比 g 更低阶的无穷大.
2. 当 $\displaystyle\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在且不等于 0 时, 称它们是同阶的无穷大; 当这极限值等于 1 时. 称 f 与 g 是等价的无穷大.

♣

例题 2.10 例如, 当 $x \to 1$ 时, 最好取 $1/(x-1)$ 作为标准的无穷大. 由于

$$\frac{x^2+x-2}{(x^2-1)^3} = \frac{x+2}{(x-1)^2(x+1)^3} = \left(\frac{1}{x-1}\right)^2 \frac{x+2}{(x+1)^3}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+2}{(x+1)^3} = \frac{3}{8} \neq 0$$

因此 $\dfrac{x^2+x-2}{(x^2-1)^3}$ 是一个 2 阶的无穷大.

例题 2.11 当 $x \to \infty$ 时, 取 $|x|$ 为标准的无穷大是十分合理的. 因此, 由

$$\sqrt{2x^2+1} = |x|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}$$

$$\sqrt{2} < \sqrt{2+\frac{1}{x^2}} < \sqrt{2} + \frac{1}{|x|}$$

可知

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{|x|} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{2+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{2} \neq 0,$$

从而得出当 $x \to \infty$ 时, $\sqrt{2x^2+1}$ 是 1 阶的无穷大.

注 值得注意的是, 不是对每一个无穷小或无穷大都能定出" 阶" 来. 大家知道, 当 $x \to 0$ 时, $x \sin \dfrac{1}{x}$ 是一个无穷小. 可是, 把 x 取为标准的无穷小时, 不可能为无穷小 $x \sin \dfrac{1}{x}$ " 定阶".

命题 2.8

如果当 $x \to x_0$ (x_0 可以是 $\pm\infty$) 时, f, g 是等价的无穷小或无穷大, 那么:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)h(x)$;
2. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{h(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(x)}{h(x)}$.

例题 2.12 例如, 我们已知

$$\sin x \sim x \quad (x \to 0)$$

当 a, b 为常数且 $a, b \neq 0$ 时, 有

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x\to 0} \frac{ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

例题 2.13 计算

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+\sqrt{x}}-1)\tan\frac{x}{2}}{1-\cos x^{3/4}}$$

因为当 $x \to 0$ 时, 有

$$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1 \sim \frac{1}{2}\sqrt{x}, \quad \tan\frac{x}{2} \sim \frac{x}{2}, \quad 1-\cos x^{3/4} \sim \frac{1}{2}x^{3/2}$$

得

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+\sqrt{x}}-1)\tan\frac{x}{2}}{1-\cos x^{3/4}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\sqrt{x}\cdot\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x^{3/2}} = \frac{1}{2}$$

注 特别应注意的是: 这种代替只能发生在以因式形式出现的无穷小 (或无穷大) 上, 而不能发生在以加项或减项出现的无穷小（或无穷大）上。不牢记这一点, 将会产生错误。例如, 计算

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$$

这时如果错误地将 $\sin x$ 和 $\tan x$ 都用 x 来代替, 得到的结果将是 0 . 但事实上,

$$\sin x-\tan x=\sin x\left(1-\frac{1}{\cos x}\right)=\frac{\sin x(\cos x-1)}{\cos x}$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{1}{\cos x}=-\frac{1}{2}$$

定义 2.8

设函数 f 与 g 在 x_0 的近旁 (x_0 除外) 有定义, 并且 $g(x)\neq 0$.

1. 当 $x\to x_0$ 时, 若比值 $f(x)/g(x)$ 保持有界, 即存在正常数 M, 使得 $|f(x)|\leqslant M|g(x)|$ 成立, 就用 $f(x)=O(g(x))\,(x\to x_0)$ 来表示;
2. 当 $x\to x_0$ 时, 若 $f(x)/g(x)$ 是一个无穷小, 即
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$
就用 $f(x)=o(g(x))\,(x\to x_0)$ 来表示.

♣

注 特别地, 记号 $f(x)=O(1)\,(x\to x_0)$ 与 $f(x)=o(1)\,(x\to x_0)$ 分别表示在 $x\to x_0$ 的过程中函数 f 有界与 f 是一个无穷小.

例题 2.14 例如

$$3x^2-2x+10=O\left(x^2\right)\quad(x\to\infty)$$
$$x=O(\sin x)\quad(x\to 0)$$
$$x^{3/2}\sin\frac{1}{x}=o(x)\quad(x\to 0)$$

对符号 O,o 的用法作一点说明. 记号 $O(g(x))$ 与 $o(g(x))$ 并不具体地代表一个量, 而只是表示量的一种状态、一种类型. 式子 $f(x)=O(g(x))$ 或 $f(x)=o(g(x))$ 中的符号" $=$ " 应当理解为属于 $(\in)$ 的意思, 表示函数 f 属于等式右边所代表的类型，而式子 $O(g(x))=f(x)$ 或 $o(f(x))=f(x)$ 都没有明确的意义，所以这里的" 等式" 两边的项不能像通常的等式那样进行交换. 又如, 式子

$$O(1)+o(1)=O(1)\quad(x\to x_0)$$

是有意义的, 它表示当 $x\to x_0$ 时, 一个有界量与无穷小量的和仍是一个有界量; 但是我们不能去掉等式左边与右边的 $O(1)$ 而得出 $o(1)=0$ 这种结论. 又如 $O(1)+O(1)=O(1)$ 有着明确的意义, 即在 $x\to x_0$ 的过程中, 两个有界量之和仍是一个有界量, 这时我们既不能从等式的两边同时取走一个 $O(1)$, 也无须把上式写为 $O(1)+O(1)=2O(1)$.

2.4 连续函数

定义 2.9 (连续)

设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. 我们称函数 f 在点 $x_0\in(a,b)$ 连续, 如果

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f\left(x_0\right)$$

也就是说, 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在一个适当的 $\delta>0$, 使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$\left|f(x)-f\left(x_0\right)\right|<\varepsilon$$

♣

注 由这一定义可以看出，若函数 f 在 x_0 处连续，f 在 x_0 这一点必有极限，并且极限值正是 $f(x_0)$. 由此可见，f 必须在点 x_0 处有定义.

例题 2.15 正弦函数与余弦函数在每一个实数值上是连续的.

证明 任取 $x_0 \in \mathbb{R}$，作和差化积：

$$\sin x - \sin x_0 = 2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}$$

由此可见，对任给的 $\varepsilon > 0$，取 $\delta = \varepsilon$，当 $|x-x_0| < \delta$ 时，有

$$\begin{aligned}|\sin x - \sin x_0| &\leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| \\ &= |x-x_0| < \varepsilon\end{aligned}$$

可见正弦函数在 x_0 处连续. 又因为

$$\begin{aligned}|\cos x - \cos x_0| &= \left|\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}-x_0\right)\right| \\ &\leqslant \left|\frac{\pi}{2}-x-\left(\frac{\pi}{2}-x_0\right)\right| = |x-x_0|\end{aligned}$$

再根据同样的方法，也就证明了余弦函数在 x_0 处是连续的.

□

例题 2.16 设 D 是 2.4 节中的例 5 定义的 Dirichlet 函数. 证明：

1. D 在每一点都不连续;
2. 令 $f(x) = xD(x)$，则 f 除在 $x=0$ 处连续之外，其他各点处都不连续.

证明

1. 之前例题已经证明，对任意的 $x_0 \in \mathbb{R}$，$\lim_{x\to x_0} D(x)$ 都不存在，D 当然在 x_0 处不连续.
2. 先证 f 在 $x_0 = 0$ 处连续. 此时，$f(0) = 0$. 对任意给定的 $\varepsilon > 0$，取 $\delta = \varepsilon$，当 $|x-0| = |x| < \delta$ 时，有

$$|f(x) - f(0)| = |xD(x)| \leqslant |x| < \delta = \varepsilon,$$

因此 f 在 $x=0$ 处是连续的. 现在设 $x \neq 0$. 这时，$f(x)/x = D(x)$. 如果 f 在 $x_0 \neq 0$ 处连续，那么

$$\lim_{x\to x_0} D(x) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0} = D(x_0).$$

这表明 D 在 x_0 处连续，此为矛盾. 这说明 f 只在 $x=0$ 处连续.

□

注 这个例子说明，存在处处不连续的函数，也存在只有一个连续点的函数，而这些都是通过 Dirichlet 函数来表达的.

定义 2.10

1. 如果 $f(x_0+) = f(x_0)$，则称函数 f 在 x_0 处右连续;
2. 如果 $f(x_0-) = f(x_0)$，则称函数 f 在 x_0 处左连续.

非常明显，函数 f 在 x_0 处连续必须且只需 $f(x_0-) = f(x_0+) = f(x_0)$.

♣

命题 2.9

如果函数 f 与 g 在 x_0 处连续，那么 $f \pm g$ 与 fg 都在 x_0 处连续. 进一步，若 $g(x_0) \neq 0$，则 f/g 也在 x_0 处连续。

这样一来，多项式函数、三角函数在它们各自的定义域上的每一点处连续. 有理函数是指两个多

项式之商,它在除去分母的零点之外的其他点处都是连续的.

命题 2.10

设函数 g 在 t_0 处连续,记 $g(t_0)$ 为 x_0. 如果函数 f 在 x_0 处连续,那么复合函数 $f\circ g$ 在 t_0 处连续.

注 可以从已知的连续函数出发,使用函数复合的技巧,得出不可胜数的其他连续函数,例如 $\sin a^x$, $\cos\sin x$ 等等.

定义 2.11

设 I 是一个开区间, 例如 $(a,b),(a,+\infty),(-\infty,b)$ 或 $(-\infty.+\infty)$. 如果函数 f 在 I 上的每一点处都连续,则称 f 在 I 上连续. 设 $I=[a,b]$, 称 f 在 I 上连续,是指 f 在 (a,b) 上连续,并且在 a 点处右连续,同时在 b 点处左连续. 人们也称 f 是 I 上的连续函数. 不论区间 I 是开的或闭的,是有限的或无穷的,我们用 $C(I)$ 记 I 上连续函数的全体。

定理 2.4

设 f 是在区间 I 上严格递增(减)的连续函数,那么 f^{-1} 是 $f(I)$ 上的严格递增(减)的连续函数.

定义 2.12 (初等函数)

多项式函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数,以及由它们经过有限次的四则运算、有限次复合所形成的函数,统称为初等函数.

定理 2.5

初等函数在它们各自的定义域上都是连续的.

定义 2.13 (间断点)

设 x_0 是函数 f 的定义域中的一点.

1. 如果 f 在 x_0 连续,则称 x_0 为 f 的连续点;
2. 如果 f 在 x_0 不连续,则称 x_0 为 f 的间断点.
   (a). 如果 $f(x_0+)$ 与 $f(x_0-)$ 存在,且是有限的数,但 $f(x_0+)\neq f(x_0-)$,则称 x_0 为 f 的一个跳跃点,差 $|f(x_0+)-f(x_0-)|>0$ 称为 f 在这一点的跳跃;
   (b). 如果 $f(x_0+)$ 与 $f(x_0-)$ 存在且有限, 并且 $f(x_0+)=f(x_0-)$, 但不等于 $f(x_0)$,则称 x_0 为 f 的可去间断点(意思是说,如果修改函数 f 在 x_0 处的值,可使 x_0 成为新的函数的连续点);
   (c). 如果 $f(x_0+)$ 与 $f(x_0-)$ 二者中至少有一个不存在或者不是有限的数,那么 x_0 叫作 f 的第二类间断点.

   跳跃点和可去间断点统称为 f 的第一类间断点.

例题 2.17 在下面三个函数:

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\geqslant 0\\ x, & x<0\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

f 以 $x=0$ 为跳跃点, g 以 $x=0$ 为可去间断点, 而 h 则以 $x=0$ 为第二类间断点.

定理 2.6

设 f 是区间 (a,b) 上的递增 (减) 函数, 则 f 的间断点一定是跳跃点, 而且跳跃点集是至多可数的.

注 是不是存在间断点不可数的函数呢? 前面的 Dirichlet 函数是一个处处不连续的函数的例子, 它的间断点的集合为 $\mathbb{R}$, 是不可数集.

2.5 连续函数与极限计算

命题 2.11

如果函数 f 在 x_0 处连续, 那么

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f\left(x_0\right)$$

此式表明: 计算函数 f 在其连续点的极限, 就相当于计算在那一点的函数值. 这就大大地简化了初等函数在其定义域上每一点的极限的计算. 函数 f 在 x_0 处连续这一事实也可以表示为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f\left(\lim_{x\to x_0} x\right)$$

注 对连续函数而言, 极限符号与函数符号可交换.

例题 2.18 计算下列极限:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}(a>0)$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}(\alpha\in\mathbb{R})$.

解

1. 因为

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln(1+x)^{1/x}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y=\mathrm{e},$$

故所求的极限是

$$\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}=\ln\mathrm{e}=1$$

2. 作变换 $t=a^x-1$. 当 $x\to 0$ 时, $t\to 0$, 反之亦然. 解出

$$x=\frac{\ln(1+t)}{\ln a}$$

之后，可见

$$\frac{a^x-1}{x}=\frac{t}{\ln(1+t)}\ln a$$

由 (1), 即得

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=\ln a$$

3. 当 $\alpha=0$ 时, 极限值显然为 0 . 当 $\alpha\neq 0$ 时, 有

$$\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\frac{\mathrm{e}^{\alpha\ln(1+x)}-1}{x}=\frac{\mathrm{e}^{a\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\cdot\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}.$$

由 (1) 和 (2)，立刻可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$$

定义 2.14

函数 $u(x)^{v(x)}(u(x)>0)$ 称为幂指函数. 例如, 我们已经研究过的函数 $(1+1/x)^x$ 就是幂指函数. 在其定义域之内, 有等式

$$u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}.$$

可见当 u,v 为连续函数时, 幂指函数 $u(x)^{v(x)}$ 也是连续函数. ♣

如果在某一极限过程中 (我们不明确标出这一过程, 以使它有更大的选择性), 有

$$\lim u(x)=1,\quad \lim v(x)=\infty,$$

那么称极限 $\lim u(x)^{u(x)}$ 是” 1^∞ 型” 的.

这里 1^∞ 仅仅是一个符号, 不能误认它为” 1 的无穷次幂”——这种说法本身就毫无意义.

利用连续函数计算 1^∞ 型的极限时，有一套固定的步骤可以将它确定出来. 把幂指函数 u^v 改写为

$$u^v=\left((1+(u-1))^{1/(u-1)}\right)^{(u-1)v}.$$

记 $A=u-1$. 当 $u\to 1$ 时, A 为无穷小量. 因为

$$\lim_{A\to 0}(1+A)^{1/A}=\mathrm{e},$$

故只要极限

$$\lambda=\lim(u-1)v$$

存在且有限. 那么立即得出

$$\lim u^r=\mathrm{e}^\lambda$$

例题 2.19 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是任意给定的正数. 计算极限

$$l=\lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{1/x}$$

解 当 $x\to 0$ 时，$a_i^x\to 1(i=1,2,\cdots,n)$. 可见这个极限是 1^∞ 型的. 令

$$A=\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{n}.$$

因为 $v=1/x$, 所以

$$Av=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{a_i^x-1}{x}$$

于是

$$\lambda = \lim_{x\to 0} Av = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln a_i = \ln (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}$$

最后得到

$$l = \mathrm{e}^{\lambda} = (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}$$

即极限 l 等于 n 个正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的几何平均数.

例题 2.20 计算极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}$.

解 显然, 这个极限是 1^∞ 型的. 令

$$A = \cos\frac{1}{x} - 1$$

此时, $v = x^2$, 因此

$$\lim_{x\to\infty} Av = \lim_{x\to\infty} x^2\left(\cos\frac{1}{x} - 1\right) = \lim_{t\to 0}\frac{\cos t - 1}{t^2} = -\frac{1}{2}$$

这里, 我们用了代换 $t = 1/x$. 最后得出

$$\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$$

2.6 函数的一致连续性

定义 2.15 (一致连续)

如果对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 总存在一个 $\delta > 0$, 使得当 $x_1, x_2 \in I$ 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, 则称函数 f 在区间 I 上是一致连续的. ♣

例题 2.21 试证: 函数 $\sqrt{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上是一致连续的.

证明 首先, 对任何 $x_1, x_2 \geqslant 0$, 有不等式 $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \geqslant \sqrt{|x_2 - x_1|}$. 事实上, 设 $x_2 \geqslant x_1 \geqslant 0$, 这时可得 $x_2 \geqslant |x_2 - x_1|$, 从而有

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \geqslant \sqrt{x_2} \geqslant \sqrt{|x_2 - x_1|}$$

于是, 当 $x_1 \neq x_2$ 时,

$$|\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}| = \frac{|x_2 - x_1|}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} \leqslant \frac{|x_2 - x_1|}{|x_2 - x_1|^{1/2}} = |x_2 - x_1|^{1/2}$$

可见对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon^2$, 当 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有

$$|\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}| \leqslant |x_2 - x_1|^{1/2} < \delta^{1/2} = \varepsilon$$

这表明函数 $\sqrt{x}$ 在其定义域上是一致连续的.

□

例题 2.22 由于对任何实数 x_1, x_2, 有

$$|\sin x_1 - \sin x_2| \leqslant |x_1 - x_2|, \quad |\cos x_1 - \cos x_2| \leqslant |x_1 - x_2|$$

可见函数 $\sin x$ 与 $\cos x$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

命题 2.12 (不一致连续)

函数 f 在区间 I 上不是一致连续的, 当且仅当存在一个 $\varepsilon_0 > 0$, 对每一个 $n \in \mathrm{N}^*$, 都可以在 I 中找到两个点, 记为 s_n 与 t_n, 使得虽然有 $|s_n - t_n| < 1/n$, 但是

$$|f(s_n) - f(t_n)| \geqslant \varepsilon_0.$$

例题 2.23 在区间 $I = [0, +\infty)$ 上, 求证:

1. 函数 x 一致连续;
2. 当 $n = 2, 3, 4, \cdots$ 时, x^n 不一致连续.

证明

1. 证明是十分明显的, 只要取 $\delta = \varepsilon$ 就可以完成.
2. 先证 x^2 在 I 上不一致连续. 对任何 $n \in \mathbf{N}^*$, 在 I 中取两个点:

$$s_n = n, \quad t_n = n + \frac{1}{2n}.$$

这时, $0 < t_n - s_n = 1/(2n) < 1/n$, 但是

$$t_n^2 - s_n^2 = (t_n - s_n)(t_n + s_n) = \frac{1}{2n}\left(2n + \frac{1}{2n}\right) > 1$$

所以 x^2 在 $[0, +\infty)$ 上不一致连续. 当 $n \geqslant 3$ 时, 对 x_1, x_2, 在满足 $x_2 > x_1 \geqslant 1$ 的条件下, 易证

$$x_2^n - x_1^n > x_2^2 - x_1^2$$

由 x^2 在 $[0, +\infty)$ 上不一致连续, 立刻可知 $x^n (n \geqslant 3)$ 在 $[0, +\infty)$ 上也是不一致连续的.

□

例题 2.24 求证: 函数 $\sin \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上是不一致连续的.

证明 对任何 $n \in \mathrm{N}^*$, 取

$$s_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2} \in (0, 1), \quad t_n = \frac{1}{2n\pi} \in (0, 1).$$

我们有

$$0 < t_n - s_n = \frac{\pi/2}{2n\pi(2n\pi + \pi/2)} < \frac{1}{2n\pi} < \frac{1}{n}$$

但是

$$\left|\sin \frac{1}{t_n} - \sin \frac{1}{s_n}\right| = \left|\sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right| = 1$$

这就证明了函数 $\sin \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上不是一致连续的.

□

注 函数 f 在区间 I 上的一致连续性蕴涵 f 在 I 上的连续性.

例题 2.25 例 5 对任意固定的 $\sigma > 0$, 函数 $f(x) = 1/x$ 在 $[\sigma, +\infty)$ 上是一致连续的.

证明 任取 $s, t \in [\sigma, +\infty)$, 我们有

$$\left|\frac{1}{s} - \frac{1}{t}\right| = \frac{|s - t|}{st} \leqslant \frac{1}{\sigma^2}|s - t|.$$

由此可见, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \sigma^2 \varepsilon$, 只要 $s, t \in [\sigma, +\infty)$ 且 $|s - t| < \delta$, 便有

$$\left|\frac{1}{s} - \frac{1}{t}\right| \leqslant \frac{1}{\sigma^2}\delta = \varepsilon$$

这就证明了所需的结论.

2.7 有限闭区间上连续函数的性质

定理 2.7

设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，那么 f 在 $[a,b]$ 上必定一致连续.

证明 用反证法. 假设 f 在 $[a,b]$ 上不一致连续, 即存在 $\varepsilon_0>0$, 对任意的 $n\in\mathbb{N}^*$, 总能找到 $s_n,t_n\in[a,b]$, 使得虽然 $|s_n-t_n|<1/n$, 但是

$$|f(s_n)-f(t_n)|\geqslant\varepsilon_0.$$

由于 $\{s_n\}$ 是完全包含在 $[a,b]$ 中的数列，由列紧性定理可知，存在一个子列 $\{s_{k_n}\}$，使得

$$s_{k_n}\to s^*\in[a,b]\quad(n\to\infty)$$

这时，我们有

$$\begin{aligned}|t_{k_n}-s^*|&\leqslant|t_{k_n}-s_{k_n}|+|s_{k_n}-s^*|\\&<\frac{1}{k_n}+|s_{k_n}-s^*|\leqslant\frac{1}{n}+|s_{k_n}-s^*|\end{aligned}$$

上式对一切 $n\in\mathbb{N}^*$ 成立. 由上式，可知 $t_{k_n}\to s^*(n\to\infty)$.
对一切 $n\in\mathbb{N}^*$, 有

$$|f(s_{k_n})-f(t_{k_n})|\geqslant\varepsilon_0$$

令 $n\to\infty$ ，再由 f 的连续性，得到

$$\begin{aligned}0=|f(s^*)-f(s^*)|&=\left|\lim_{n\to\infty}f(s_{k_n})-\lim_{n\to\infty}f(t_{k_n})\right|\\&=\lim_{n\to\infty}|f(s_{k_n})-f(t_{k_n})|\geqslant\varepsilon_0>0\end{aligned}$$

此为矛盾. 这就证明了 f 必在 $[a,b]$ 上一致连续.

□

定理 2.8

有界闭区间上的连续函数必在该区间上有界.

证明 用反证法. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 如果它在 $[a,b]$ 上没有上界, 那么任意自然数 n 都不能作为它的上界, 因而必有 $x_n\in[a,b]$, 使得 $f(x_n)>n(n=1,2,\cdots)$. 由于 $[a,b]$ 是有限的闭区间, 故从数列 $\{x_n\}$ 中可以选出一个子数列 $\{x_{k_n}\}$, 使得

$$x_{k_n}\to\xi\in[a,b]\quad(n\to\infty).$$

一方面, 由函数 f 连续, 必要求

$$\lim_{n\to\infty}f(x_{k_n})=f(\xi);$$

但另一方面，由

$$f(x_{k_n})>k_n\geqslant n\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

得出极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_{k_n})=+\infty$, 矛盾! 因此, f 在 $[a,b]$ 上必有上界. 同理, 可证 f 在 $[a,b]$ 上有下界.

□

定理 2.9

设 f 在 $[a,b]$ 上连续. 记

$$M=\sup_{x\in[a,b]} f(x), \quad m=\inf_{x\in[a,b]} f(x),$$

则必存在 $x^*, x_* \in [a,b]$, 使得

$$f\left(x^*\right)=M, \quad f(x_*)=m$$

也就是说, 有界闭区间上的连续函数必能取到它在此区间上的最大值和最小值.

证明 m 和 M 都是有限数, 根据上确界的定义, 对任意的 $n\in\mathbb{N}^*$ ，必定存在 $x_n\in[a,b]$ ，使得

$$M-\frac{1}{n}<f\left(x_n\right)\leqslant M$$

从数列 $\{x_n\}$ 中可以选出子列 $\{x_{k_n}\}$, 使得 $x_{k_n}\to x^*\in[a,b]$. 在不等式

$$M-\frac{1}{k_n}<f\left(x_{k_n}\right)\leqslant M$$

的两边令 $n\to\infty$, 再根据 f 的连续性, 即得

$$f\left(x^*\right)=M.$$

同理，可证存在 $x*\in[a,b]$ ，使得 $f\left(x_*\right)=m$.

□

定理 2.10 (零点定理)

设 f 在 $[a,b]$ 上连续. 如果 $f(a)f(b)<0$, 则必存在一点 $c\in(a,b)$, 使得 $f(c)=0$.

证明 不妨设 $f(a)<0<f(b)$. 把区间 $[a,b]$ 二等分, 分点是 $\frac{a+b}{2}$. 如果 $f(\frac{a+b}{2})=0$, 就取 $c=\frac{a+b}{2}$. 如果 $f(\frac{a+b}{2})\neq 0$, 则 $f(\frac{a+b}{2})$ 必与 $f(a), f(b)$ 中的某一个异号, 也就是说，在两个闭子区间

$$\left[a,\frac{a+b}{2}\right], \quad \left[\frac{a+b}{2},b\right]$$

中, 必有一个使 f 在其端点取值异号, 记这个闭子区间为 $[a_1,b_1]$, 即 $[a_1,b_1]$ 满足下面三个条件:

$$[a,b]\supset[a_1,b_1], \quad 0<b_1-a_1=\frac{b-a}{2}, \quad f\left(a_1\right)<0<f\left(b_1\right)$$

对 $[a_1,b_1]$ 重复上面的讨论, 就能得到一列闭区间 $[a_k,b_k]$, 满足:

1. $[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset\cdots\supset[a_k,b_k]\supset\cdots$;
2. $0<b_k-a_k=\frac{1}{2^k}(b-a)$;
3. $f\left(a_k\right)<0<f\left(b_k\right)$.

如果对某个 k, 有 $f\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right)=0$, 则取 $c=\frac{a_k+b_k}{2}$, 定理就得到证明. 否则, 就把此过程无限进行下去.

于是由闭区间套定理知, 存在 $c\in[a_k,b_k]\,(k=1,2,\cdots)$, 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}a_k=\lim\limits_{k\to\infty}b_k=c$.

由 f 的连续性, 在 (3) 两边取 $k\to\infty$ 的极限，得 $f(c)\leqslant 0\leqslant f(c)$ ，即 $f(c)=0$.

□

例题 2.26 证明：任何实系数奇次代数方程必有实根。

证明 设方程为

$$x^{2n+1}+a_0x^{2n}+a_1x^{2n-1}+\cdots+a_{2n-1}x+a_{2n}=0$$

将方程左边的多项式记为 $p(x)$。将 $p(x)$ 写成

$$p(x)=x^{2n+1}\left(1+\frac{a_0}{x}+\frac{a_1}{x^2}+\cdots+\frac{a_{2n}}{x^{2n+1}}\right)$$

由此得知

$$\lim_{x\to+\infty}p(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}p(x)=-\infty$$

因此，存在实数 a,b，使得 $a<b$，且 $p(a)<0,p(b)>0$.

由零值定理可知，存在 $c\in(a,b)$, 使得 $p(c)=0$. 这里的 c 就是原方程的一个实根.

□

定理 2.11 (介值定理)

设 f 是区间 $[a,b]$ 上非常值的连续函数, γ 是介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何实数, 则必存在 $c\in(a,b)$, 使得 $f(c)=\gamma$.

♡

证明 不妨设 $f(a)<\gamma<f(b)$. 令

$$g(x)=f(x)-\gamma,$$

则 g 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $g(a)=f(a)-\gamma<0<f(b)-\gamma=g(b)$. 于是由零点定理, 存在 $c\in(a,b)$, 使得 $g(c)=0$, 即 $f(c)=\gamma$.

□

推论 2.1

设非常值函数 f 在 $I=[a,b]$ 上连续, 那么 f 的值域 $f(I)$ 是一个闭区间.

♡

证明 事实上, 设 M 与 m 分别为 f 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值. 由介值定理, 可知 $f(I)=[m,M]$.

□

2.8 函数的上极限和下极限 *

第 3 章 函数的导数

3.1 导数的定义

定义 3.1 (导数的定义)

设函数 f 在点 x_0 的近旁有定义, 如果极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

存在且有限, 则称这个极限值为 f 在点 x_0 的导数, 记作 $f'(x_0)$, 并称函数 f 在点 x_0 可导.

♣

定义 3.2 (单边导数)

设函数 f 在点 x_0 的右边 $[x_0, x_0+r)$ 上有定义. 若极限

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

存在且有限, 则称此极限为 f 在点 x_0 的右导数, 记作 $f'_+(x_0)$.

类似地, 可定义 f 在点 x_0 的左导数 $f'_-(x_0)$.

显然, 函数 f 在点 x_0 可导的一个充分必要条件是, 在点 x_0 的左、右导数存在且相等, 这里 $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

♣

定理 3.1

若函数 f 在点 x_0 可导, 则 f 必在 x_0 连续.

♡

证明 记 f 在 x_0 的导数为 $f'(x_0)$. 于是由

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\\ &= f'(x_0)\cdot 0 = 0,\end{aligned}$$

可知

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

这说明 f 在点 x_0 连续.

□

注 函数在一点的连续性却无法保证该函数在这一点可导.

例题 3.1 设 $f(x) = |x|$. 证明: 函数 f 在 $x=0$ 处不可导.

证明 因为

$$\begin{aligned}f'_+(0) &= \lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h} = 1,\\ f'_-(0) &= \lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h} = -1\end{aligned}$$

□

定义 3.3 (区间可导)

如果函数 f 在开区间 (a,b) 中的每一点可导, 则称 f 在 (a,b) 上可导.

如果 f 在 (a,b) 上可导, 并且在点 a 处有右导数, 在点 b 处有左导数, 则称 f 在闭区间 $[a,b]$ 上可导.

类似地，可以定义 f 在 $[a,b)$ 与 $(a,b]$ 上可导.

3.2 导数计算

命题 3.1 (求导的四则运算)

设函数 f 和 g 在点 x 处可导, 则 $f\pm g, fg$ 也在点 x 处可导; 如果 $g(x)\neq 0$, 那么函数 $\frac{f}{g}$ 也在点 x 处可导. 精确地说, 我们有以下公式:

1. $(f\pm g)'(x)=f'(x)\pm g'(x)$;
2. $(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$;
3. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

命题 3.2 (链式法则)

设函数 φ 在点 t_0 处可导, 函数 f 在点 $x_0=\varphi(t_0)$ 处可导, 那么复合函数 $f\circ\varphi$ 在点 t_0 处可导, 并且

$$(f\circ\varphi)'(t_0)=f'\circ\varphi(t_0)\,\varphi'(t_0)$$

证明 定义

$$g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & x\neq x_0\\ f'(x_0), & x=x_0\end{cases}$$

那么

$$\lim_{x\to x_0}g(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)=g(x_0)$$

这说明 g 在 x_0 处连续. 于是有

$$\frac{f(\varphi(t))-f(\varphi(t_0))}{t-t_0}=g(\varphi(t))\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0} \tag{3.1}$$

这是因为当 $\varphi(t)=\varphi(t_0)$ 时, 上式两边都是 0; 当 $\varphi(t)\neq\varphi(t_0)$ 时, 上式为

$$\frac{f(\varphi(t))-f(\varphi(t_0))}{t-t_0}=\frac{f(\varphi(t))-f(\varphi(t_0))}{\varphi(t)-\varphi(t_0)}\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}$$

当然也成立. 现在式 3.1 的两边令 $t\to t_0$, 由于

$$\lim_{t\to t_0}g(\varphi(t))=g(\varphi(t_0))=g(x_0)=f'(x_0)$$

所以

$$(f\circ\varphi)'(t_0)=f'(x_0)\varphi'(t_0)=f'(\varphi(t_0))\varphi'(t_0)$$

例题 3.2 设 $y=\sin\ln\dfrac{x}{1+x^2}(x>0)$. 求 y'.

解

$$
\begin{aligned}
y' &= \cos\ln\frac{x}{1+x^2}\left(\ln\frac{x}{1+x^2}\right)' \\
&= \cos\ln\frac{x}{1+x^2}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^{-1}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)' \\
&= \left(\frac{1+x^2}{x}\right)\cdot\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\cdot\cos\ln\frac{x}{1+x^2} \\
&= \frac{1-x^2}{x\left(1+x^2\right)}\cos\ln\frac{x}{1+x^2}
\end{aligned}
$$

例题 3.3 求 $y=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$ 的导数.

解

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\left(1+\frac{1}{2}\left(x^2+a^2\right)^{-1/2}2x\right) \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}
\end{aligned}
$$

定理 3.2 (反函数的求导)

设 $y=f(x)$ 在包含 x_0 的区间 I 上连续且严格单调. 如果它在 x_0 处可导, 且 $f'\left(x_0\right)\neq 0$, 那么它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y_0=f\left(x_0\right)$ 处可导, 并且

$$
\left(f^{-1}\right)'\left(y_0\right)=\frac{1}{f'\left(x_0\right)}
$$

证明

$$
\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}\left(y_0\right)}{y-y_0}=\frac{x-x_0}{f(x)-f\left(x_0\right)}=\left(\frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}\right)^{-1},
$$

f^{-1} 在 y_0 处也连续, 从而 $y\to y_0$ 蕴涵 $x\to x_0$, 在上式的两边令 $y\to y_0$ ，立即得出

$$
\left(f^{-1}\right)'\left(y_0\right)=\left(f'\left(x_0\right)\right)^{-1}.
$$

□

命题 3.3

幂指函数是指形如 $f(x)=u(x)^{v(x)}$ 的函数, 在它的定义域上 $u(x)>0$. 将 f 改写为

$$
f(x)=\mathrm{e}^{\ln f(x)}=\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)},
$$

然后将上式的两边对 x 求导, 有

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \mathrm{e}^{v\ln u}(v\ln u)'=\mathrm{e}^{v\ln u}\left(v'\ln u+\frac{v}{u}u'\right) \\
f'(x) &= f(x)\left(v'(x)\ln u(x)+\frac{v(x)}{u(x)}u'(x)\right)
\end{aligned}
$$

例题 3.4 设 f 是一个恒取正值的可导函数, 那么由公式

$$
(\ln f(x))'=\frac{f'(x)}{f(x)}
$$

可以推出

$$
f'(x)=f(x)(\ln f(x))'
$$

例题 3.5

$$f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$$

这时得出

$$(u_1u_2\cdots u_n)'=u_1u_2\cdots u_n\left(\sum_{i=1}^{n}\ln u_i\right)'=u_1u_2\cdots u_n\sum_{i=1}^{n}\frac{u_i'}{u_i},$$

即

$$(u_1u_2\cdots u_n)'=u_1'u_2\cdots u_n+u_1u_2'\cdots u_n+\cdots+u_1u_2\cdots u_{n-1}u_n'$$

3.3 高阶导数

定义 3.4

设函数 f 在区间 I 上可导, 那么 $f'(x)(x\in I)$ 在 I 上定义了一个函数 f', 称之为 f 的导函数.
如果 f' 在 I 上可导, 那么 f' 的导函数 $(f')'$ ——记为 f'' ——称为 f 的二阶导函数.
二阶导函数 f'' 的导函数 (如果存在的话) 记为 f''', 称为 f 的三阶导函数.
由归纳可知, 对任何正整数 $n\in\mathbb{N}^*$, 可以定义 f 的 n 阶导函数 $f^{(n)}$.

♣

例题 3.6 对 $n\in\mathbb{N}^*$, 证明:

$$\sin^{(n)}x=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

证明 因为

$$(\sin x)'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

所以

$$\begin{aligned}(\sin x)''&=\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)'\\&=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\left(x+\frac{\pi}{2}\right)'\\&=\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

由归纳可知

$$\sin^{(n)}x=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

同理可证，对一切 $n\in\mathbb{N}^*$ ，有

$$\cos^{(n)}x=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

□

例题 3.7 定义函数

$$f(x)=\begin{cases}x^4\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

求 f''.

解

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}h^3\sin\frac{1}{h}=0.$$

因此

$$f'(x)=\begin{cases}4x^3\sin\frac{1}{x}-x^2\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

按照导数的定义，有

$$f''(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(h)-f'(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(4h^2\sin\frac{1}{h}-h\cos\frac{1}{h}\right)=0,$$

从而

$$f''(x)=\begin{cases}12x^2\sin\frac{1}{x}-6x\cos\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

请注意，对任何 $n\in\mathbf{N}^*$，$f^{(n)}(x)$ 对 $x\neq 0$ 都是存在的，但是 $f'''(0)$ 已不存在.

定理 3.3 (Leibniz 公式)

设函数 f 与 g 在区间 I 上都有 n 阶导数，那么乘积 fg 在区间 I 上也有 n 阶导数，并且

$$(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k)}$$

这里 $f^{(0)}=f, g^{(0)}=g$，其中组合系数

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\quad(k=0,1,2,\cdots,n)$$

♡

证明 将欲证的等式的右边改写为下面代数上对称的形式：

$$\sum_{i+j=n}\frac{n!}{i!j!}f^{(i)}g^{(j)}$$

这里的和式是对所有满足 $i+j=n$ 的有序非负整数对 (i,j) 来求，所以共有 $n+1$ 个加项.

对 n 来进行归纳. 当 $n=1$ 时，命题显然成立. 现在假设 $m\geqslant 1$，有

$$(fg)^{(m)}=\sum_{i+j=m}\frac{m!}{i!j!}f^{(i)}g^{(j)}$$

在上式的两边再求一次导数，得到

$$\begin{aligned}(fg)^{(m+1)}&=\sum_{i+j=m}\frac{m!}{i!j!}\left(f^{(i)}g^{(j)}\right)'\\&=\sum_{i+j=m}\frac{m!}{i!j!}\left(f^{(i+1)}g^{(j)}+f^{(i)}g^{(j+1)}\right)\\&=\sum_{i+j=m}\frac{m!}{i!j!}f^{(i+1)}g^{(j)}+\sum_{i+j=m}\frac{m!}{i!j!}f^{(i)}g^{(j+1)}\end{aligned}$$

在最后的那个和式中，令 $k=j+1$，于是 $j=k-1$，且 $i+k=i+j+1=m+1$. 因此，这个和式变为

$$\sum_{i+k=m+1}\frac{m!}{i!(k-1)!}f^{(i)}g^{(k)}$$

再把"哑指标"k 换为 j, 得到

$$\sum_{i+j=m+1} \frac{m!}{i!(j-1)!} f^{(i)} g^{(j)}$$

对称地, 有

$$\sum_{i+j=m} \frac{m!}{i!j!} f^{(i+1)} g^{(j)} = \sum_{i+j=m+1} \frac{m!}{(i-1)!j!} f^{(i)} g^{(j)}$$

从而有

$$\begin{aligned}(fg)^{(m+1)} &= \sum_{i+j=m+1} m!\left(\frac{1}{(i-1)!j!} + \frac{1}{i!(j-1)!}\right) f^{(i)} g^{(j)} \\ &= \sum_{i+j=m+1} m!\frac{(i+j)}{i!j!} f^{(i)} g^{(j)} \\ &= \sum_{i+j=m+1} \frac{(m+1)!}{i!j!} f^{(i)} g^{(j)}\end{aligned}$$

这就完成了归纳证明.

□

例题 3.8 设 $y = x^2 \cos x$. 求 $y^{(50)}$.

解 利用 Leibniz 定理, 有

$$\begin{aligned}y^{(50)} &= \left(x^2 \cos x\right)^{(50)} \\ &= (\cos x)^{(50)} x^2 + \binom{50}{1} (\cos x)^{(49)} \left(x^2\right)' + \binom{50}{2} (\cos x)^{(48)} \left(x^2\right)''\end{aligned}$$

等式只需写到这些项, 因为 x^2 的三阶及三阶以上的导数恒等于零. 由于

$$\begin{aligned}(\cos x)^{(48)} &= \cos(x + 24\pi) = \cos x, \\ (\cos x)^{(49)} &= -\sin x, \\ (\cos x)^{(50)} &= -\cos x,\end{aligned}$$

所以

$$y^{(50)} = \left(2450 - x^2\right) \cos x - 100x \sin x.$$

3.4 微分学中值定理

在这一节中, 我们研究定义在有限闭区间 $[a,b]$ 上的函数 f, 并且设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 上可导. 以下所有的讨论都是在这些条件之下进行的.

定义 3.5

设函数 $f:(a,b) \to \mathbb{R}$. 如果对点 $x_0 \in (a,b)$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $\Delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a,b)$, 并且当 $x \in \Delta$ 时, $f(x_0) \geqslant f(x)$, 即 $f(x_0)$ 是 f 在 Δ 上的最大值, 那么称 $f(x_0)$ 是 f 在 (a,b) 上的一个极大值, x_0 称为 f 的一个极大值点.

类似地, 可以定义 f 在 (a,b) 上的极小值和极小值点. 极小值和极大值统称为极值, 而极小值点和极大值点统称为极值点.

♣

注

1. 应当特别强调的是，极值点只能在区间 $[a,b]$ 的内点上才可定义.

2. 极值是一个局部的概念, 它只在极值点的一个充分小的近旁才有最大值或最小值的特征.

定义 3.6 (驻点)

满足 $x_0 \in (a,b)$ 且 $f'(x_0)=0$ 的点 x_0, 称为函数 f 的一个驻点.

定理 3.4 (Fermat 引理)

若函数 f 在其极值点 $x_0 \in (a,b)$ 处可导, 则必有 $f'(x_0)=0$.

证明 设 $f(x_0)$ 是极大值. 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ 时, 有 $f(x_0) \geqslant f(x)$. 因此, 当 $x_0-\delta < x < x_0$ 时, 有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$$

而当 $x_0 < x < x_0+\delta$ 时, 又有不等式

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0$$

定理的条件是 $f'(x_0)$ 存在, 因此 $f'_-(x_0)$ 与 $f'_+(x_0)$ 存在且相等. 在以上两个不等式中分别令 $x \to x_0^-, x \to x_0^+$, 得到

$$f'_-(x_0) \geqslant 0, \quad f'_+(x_0) \leqslant 0$$

因此必有 $f'(x_0)=0$.

□

注

1. 函数在其上可导的极值点必为驻点.
2. 但是这个命题的逆命题是不正确的. 例如函数 $f(x)=x^3, x=0$ 是它的一个驻点, 但是它不是一个极值点.
3. Fermat 定理的几何意义是: 如果 x_0 是函数 f 的极值点且在 $(x_0, f(x_0))$ 处曲线 $y=f(x)$ 的切线存在, 那么这条切线必与横轴平行.

定理 3.5 (Rolle 中值定理)

设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 且 $f(a)=f(b)$, 那么存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

证明 闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 f 一定取到它的最小值, 记为 m; 也一定取得它的最大值, 记为 M.

如果 $M=m$, 那么 f 是 $[a,b]$ 上的常值函数, 这时 $f'=0$, 因此 (a,b) 中的任何一点 ξ 都可充当所求的点.

设 $M>m$. 由于 $f(a)=f(b)$, 可见 m 与 M 中至少有一个是 f 在内点 $\xi \in (a,b)$ 上所取得的. 这时 ξ 必为一极值点, 依 Fermat 定理, 知 $f'(\xi)=0$.

□

例题 3.9 考察 $2n$ 次多项式

$$Q(x)=x^n(1-x)^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

求证: n 次多项式 $Q^{(n)}$ 在 $(0,1)$ 中有 n 个互不相同的实零点.

证明 利用 Leibniz 定理, 计算 Q 的 m 阶导数:

$$\begin{aligned} Q^{(m)}(x) &= (x^n(1-x)^n)^{(m)} \\ &= \sum_{i+j=m} \frac{m!}{i!j!} \frac{n!}{(n-i)!} \frac{n!}{(n-j)!} (-1)^i x^{n-i} (1-x)^{n-j} \end{aligned}$$

由此看出, 当 $m=0,1,2,\cdots,n-1$ 时, 上式右边的各项中均含有因式 $x(1-x)$, 因此

$$Q^{(m)}(0) = Q^{(m)}(1) = 0 \quad (m=0,1,2,\cdots,n-1)$$

首先, 由 $Q(0)=Q(1)=0$, 根据 Rolle 定理知, 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $Q'(\xi)=0$. 注意到 Q' 在区间 $[0,\xi]$ 与 $[\xi,1]$ 上满足 Rolle 定理的条件, 因此存在 $\eta_1 \in (0,\xi)$ 及 $\eta_2 \in (\xi,1)$, 使得 $Q''(\eta_i)=0(i=1,2)$, 这里 $0<\eta_1<\eta_2<1$. 因为 Q'' 在三个区间 $[0,\eta_1], [\eta_1,\eta_2], [\eta_2,1]$ 上都满足 Rolle 定理的条件, 由此存在 $0<\xi_1<\xi_2<\xi_3<1$, 使得

$$Q'''(\xi_i) = 0 \quad (i=1,2,3)$$

如此继续下去, 得知存在 $0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_{n-1}<1$, 使得 $Q^{n-1}(\lambda_i)=0(i=1,2,\cdots,n-1)$。注意到

$$Q^{(n-1)}(0) = Q^{(n-1)}(1) = 0$$

可知 $Q^{(n-1)}$ 在 $[0,\lambda_1], [\lambda_1,\lambda_2], \cdots, [\lambda_{n-1},1]$ 这 n 个区间上都满足 Rolle 定理的条件, 从而得知存在 $0<\mu_1<\mu_2<\cdots<\mu_n<1$, 使得

$$Q^{(n)}(\mu_i) = 0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

□

引理 3.1

设函数 f 与 λ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 并且 $\lambda(a)=1, \lambda(b)=0$, 则必存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$f'(\xi) = \lambda'(\xi)(f(a)-f(b))$$

♡

证明 引入函数

$$\varphi(x) = f(x) - (\lambda(x)f(a) + (1-\lambda(x))f(b))$$

由直接的计算, 可知 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$. 因此函数 φ 满足 Rolle 定理的条件, 从而存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得 $\varphi'(\xi)=0$. 由

$$\varphi'(x) = f'(x) - \lambda'(x)(f(a)-f(b)),$$

将 ξ 代人上式, 得到

$$f'(\xi) = \lambda'(\xi)(f(a)-f(b))$$

□

定理 3.6 (Lagrange 中值定理)

设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 则存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi).$$

♡

证明 取

$$\lambda(x)=\frac{b-x}{b-a}\quad(a\leqslant x\leqslant b),$$

由引理3.1, 即可.

□

例题 3.10 证明: $\arctan x$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上一致连续.

证明 任取 $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, 且 $x_1<x_2$. 在区间 $[x_1,x_2]$ 上, 函数 $\arctan x$ 满足中值定理的条件, 因此存在 $\xi\in(x_1,x_2)$, 使得

$$\arctan x_2-\arctan x_1=\frac{1}{1+\xi^2}\left(x_2-x_1\right).$$

由于

$$0<\frac{1}{1+\xi^2}\leqslant 1$$

所以

$$|\arctan x_2-\arctan x_1|\leqslant|x_2-x_1|$$

对一切 x_1,x_2 成立. 因此, 对任意给定的 ε, 可取 $\delta=\varepsilon$, 只要 $|x_1-x_2|<\delta$, 而不管 x_1,x_2 这两点位于何处, 总有

$$|\arctan x_2-\arctan x_1|<\varepsilon$$

这说明 $\arctan x$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上是一致连续的.

□

命题 3.4

如果函数 f 在开区间 (a,b) 上有有界的导函数, 那么 f 在 $[a,b]$ 上一定是一致连续的.

例题 3.11 设 f 在区间 $(a,+\infty)$ 上可导, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$. 证明:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$$

证明 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$, 所以对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $A>0$, 当 $x>A$ 时, $|f'(x)|<\varepsilon/2$. 在区间 $[A,x]$ 上用 Lagrange 中值定理, 得

$$f(x)-f(A)=f'(\xi)(x-A)\quad(A<\xi<x)$$

因而有

$$|f(x)-f(A)|=\left|f'(\xi)\right|(x-A)<\frac{\varepsilon}{2}(x-A)$$

于是

$$|f(x)|\leqslant|f(A)|+|f(x)-f(A)|\leqslant|f(A)|+\frac{\varepsilon}{2}(x-A)$$

由此得

$$\frac{|f(x)|}{x}\leqslant\frac{|f(A)|}{x}+\frac{\varepsilon}{2}\left(1-\frac{A}{x}\right)\leqslant\frac{|f(A)|}{x}+\frac{\varepsilon}{2}$$

取 $A'=\max(A,2|f(A)|/\varepsilon)$, 当 $x>A'$ 时, 有 $0<|f(x)|/x<\varepsilon$. 这就证明了

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$$

□

推论 3.1

设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 则函数 f 在 $[a,b]$ 上为常数的充分必要条件是 $f'=0$ 在 (a,b) 上成立.

♡

证明 必要性十分明显, 只需证明充分性.

设 $f'=0$ 在 (a,b) 上成立. 任取两点 $x_1,x_2\in[a,b]$, 且 $x_1<x_2$, 那么存在 $\xi\in(x_1,x_2)$, 使得 $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$. 由于 $f'(\xi)=0$, 故 $f(x_1)=f(x_2)$, 即函数 f 在 $[a,b]$ 上的任何两点取相等的值, 所以它是常数.

□

定理 3.7 (Cauchy 中值定理)

设函数 f 和 g 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在区间 (a,b) 上可导, 且当 $x\in(a,b)$ 时, $g'(x)\neq 0$, 这时必存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

♡

证明 令

$$\lambda(x)=\frac{g(b)-g(x)}{g(b)-g(a)}\quad(a\leqslant x\leqslant b)$$

代人引理 3.1 , 即可.

□

定理 3.8 (Darboux 定理)

如果 f 在 $[a,b]$ 上可导, 那么:

1. 导函数 f' 可以取到 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 之间的一切值;
2. f' 无第一类间断点.

♡

证明

1. 先证明: 如果 $f'(a)f'(b)<0$, 那么必有 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

   不妨设 $f'(a)>0, f'(b)<0$. 由于

   $$f'(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$$

   所以存在 $\delta_1>0$, 当 $x\in(a,a+\delta_1)$ 时, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$. 由于 $x>a$, 故有 $f(x)>f(a)$. 又因为

   $$f'(b)=\lim_{x\to b^-}-\frac{f(x)-f(b)}{x-b}<0$$

   所以存在 $\delta_2>0$, 当 $x\in(b-\delta_2,b)$ 时, $\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}<0$. 由于 $x<b$, 故有 $f(x)>f(b)$.

   这说明 $f(a),f(b)$ 都不是 f 在 $[a,b]$ 上的最大值, 故必有 $\xi\in(a,b)$, 使得 f 在 ξ 点取得最大值. 由 Fermat 定理, 得 $f'(\xi)=0$.

   现在设 $f'(a)<f'(b)$. 任取介于 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 之间的 γ , 即

   $$f'(a)<\gamma<f'(b)$$

记 $F(x)=f(x)-\gamma x$, 那么 $F'(x)=f'(x)-\gamma$, 于是

$$F'(a)=f'(a)-\gamma<0,\quad F'(b)=f'(b)-\gamma>0$$

从而由上面所证的结论, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $F'(\xi)=0$, 即

$$f'(\xi)=\gamma$$

2. 用反证法. 如果 x_0 是 f' 的一个第一类间断点, 那么 $f'(x_0+)$ 和 $f'(x_0-)$ 都存在.
于是由 Lagrange 中值定理, 可得

$$\begin{aligned} f'(x_0)=f'_+(x_0)&=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\ &=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f'(\xi_x)(x-x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}f'(\xi_x)\end{aligned}$$

这里 $x_0<\xi_x<x$. 由于当 $x\to x_0^+$ 时, $\xi_x\to x_0^+$, 且已知 $f'(x_0+)$ 存在, 所以得

$$f'(x_0)=f'(x_0+)$$

同理, 可证 $f'(x_0)=f'(x_0-)$.
由此知 f' 在 x_0 处连续. 这与 x_0 是 f' 的间断点矛盾.

□

注 如果 f' 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 它当然有介值性, Darboux 定理的意义在于, 即使 f' 在 $[a,b]$ 上不连续, 它仍然具有介值性, 这一点是导函数所特有的性质. 从这一性质马上可以断言, 不存在可导函数 f, 使得

$$f'(x)=D(x) \text{ 或} f'(x)=R(x)\ ,$$

其中 $D(x)$ 和 $R(x)$ 分别为 Dirichlet 函数和 Riemann 函数.

3.5 利用导数研究函数

3.5.1 单调性

命题 3.5

设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 那么 f 在 $[a,b]$ 上递增 (减) 的充分必要条件是, $f'\geqslant 0(\leqslant 0)$ 在区间 (a,b) 上成立.

♠

证明

1. 必要性.
设 f 在 $[a,b]$ 上递增, 任取一点 $x\in(a,b)$, 对能使 $x+h\in(a,b)$ 的一切 h, 不论 h 取正值还是取负值, 总有

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geqslant 0.$$

令 $h\to 0$. 由于 f 在 x 可导, 所以

$$f'(x)\geqslant 0\quad (a<x<b)$$

类似地, 当 f 在 $[a,b]$ 上递减时, 可以推出 $f'(x)\leqslant 0$ 对 $x\in(a,b)$ 成立.

2. 充分性.

设在 (a,b) 上 $f' \geqslant 0$. 对任何 $x_1, x_2 \in [a,b]$ 且 $x_1 < x_2$, 依 Lagrange 中值定理, 可得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

其中 $\xi \in (x_1, x_2) \subset (a,b)$. 因此 $f'(\xi) \geqslant 0$, 由此得 $f(x_2) \geqslant f(x_1)$.

类似地, 当在 (a,b) 上 $f' \leqslant 0$ 时, 对任何 $x_1, x_2 \in [a,b]$ 且 $x_1 < x_2$, 可以推出 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

□

命题 3.6

设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导. 如果 $f' > 0\,(f' < 0)$ 在 (a,b) 上成立, 那么 f 在 $[a,b]$ 上是严格递增 (严格递减) 的.

♠

注 逆定理不能成立, 即严格递增 (严格递减) 的函数并不必须有严格正的 (严格负的) 导函数.

例如, 函数 $f(x) = x^3$ 虽然在 $(-\infty, +\infty)$ 上是严格递增的, 但是 $f'(0) = 0$.

命题 3.7

设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 内除了有限个点之外, 有正 (负) 的导数, 那么 f 在 $[a,b]$ 上严格递增 (严格递减).

♠

定理 3.9

设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 上可导, 那么 f 在 $[a,b]$ 上严格递增 (严格递减) 的充分必要条件是:

1. 当 $x \in (a,b)$ 时, $f' \geqslant 0\,(f' \leqslant 0)$;
2. 在 (a,b) 的任何开子区间上, $f' \neq 0$.

♡

证明

1. 必要性.

   条件 (1) 是必要的. 如果 (2) 不能被满足, 即存在一个被 (a,b) 包含的开区间, 在其上 $f' = 0$, 那么在这个开区间上 f 是一常数, 因此 f 在 $[a,b]$ 上不是严格单调的. 这样就证明了条件 (2) 也是必要的.

2. 充分性.

   设条件 (1) 与 (2) 同时成立. 由 $f' \geqslant 0$ 可知, f 在 $[a,b]$ 上是递增的.

   若有 $x_1, x_2 \in [a,b]$, 其中 $x_1 < x_2$, 使得 $f(x_1) = f(x_2)$, 那么对 $x \in [x_1, x_2]$, 有 $f(x_1) = f(x) = f(x_2)$. 这表明在 (x_1, x_2) 上 f 为常数, 从而在 (x_1, x_2) 上 $f' = 0$, 这与条件 (2) 相违. 所以只能是当 $x_1, x_2 \in [a,b]$, 且 $x_1 < x_2$ 时, $f(x_1) < f(x_2)$, 即 f 在 $[a,b]$ 上是严格递增的.

   类似地, 当 $x \in (a,b)$ 时, 由 $f'(x) \leqslant 0$ 且在 (a,b) 的任何开子区间上 $f' \neq 0$, 可以推出 f 在 $[a,b]$ 上是严格递减的.

□

3.5.2 极值

命题 3.8

设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续, $x_0 \in (a,b)$.

1. 如果存在正数 $\delta>0$, 使得在 $(x_0-\delta,x_0)$ 上 $f'>0$, 而在 $(x_0,x_0+\delta)$ 上 $f'<0$, 那么 $f(x_0)$ 是 f 的一个严格极大值, 所谓" 严格极大值" 是指, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, $f(x)<f(x_0)$;
2. 如果存在正数 $\delta>0$, 使得在 $(x_0-\delta,x_0)$ 上 $f'<0$, 而在 $(x_0,x_0+\delta)$ 上 $f'>0$, 那么 $f(x_0)$ 是 f 的一个严格极小值, 所谓" 严格极小值" 是指, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, $f(x)>f(x_0)$.

注 命题完全没有要求 f 在 x_0 处可导, 因此适合函数 $|x|$ 在 $x=0$ 的情况.

例题 3.12 但是有这样的情形, 存在着这样的函数 f, 在它的某个极值点的任何一侧, f 都不具有单调的性质. 考察函数

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}+|x|, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

它是一个处处连续的偶函数, $f(0)$ 是它的一个极小值. 但是当 $x>0$ 时,

$$f'(x)=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}+1$$

所以对一切 $n\in\mathbb{N}^*$, 有

$$f'\left(\frac{1}{n\pi}\right)=1-n\pi(-1)^n=1+(-1)^{n+1}n\pi$$

当 n 依次地取 $1,2,\cdots$ 时, $f'\left(\frac{1}{n\pi}\right)$ 交替地改变符号, 因此对任意的 $\delta>0$, 函数 f 在区间 $(0,\delta)$ 上都不是单调的, 在 $(-\delta,0)$ 上也是如此.

命题 3.9

设 f 在 $[a,b]$ 上连续, x_0 是 f 的一个驻点. 进一步, 设 $f''(x_0)$ 存在, 那么:

1. 当 $f''(x_0)<0$ 时, $f(x_0)$ 是 f 的一个严格极大值;
2. 当 $f''(x_0)>0$ 时, $f(x_0)$ 是 f 的一个严格极小值.

证明 由于 x_0 是 f 的一个驻点, $f'(x_0)=0$, 于是

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=f''(x_0)<0$$

因此存在一个 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,

$$\frac{f'(x)}{x-x_0}<0$$

由此可知, 当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时, $f'(x)<0$; 而当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时, $f'(x)>0$. 便知 $f(x_0)$ 是 f 的一个严格极大值.

可用类似的方法来证明 (2).

□

注 如果 $f''(x_0)=0$, 这时各种情形都可能发生.

例如 $f(x)=x^3$, $f''(0)=0$, 这时 $x=0$ 不是 f 的极值点.

又如 $f(x)=x^4$, $f''(0)=0$, 这时 f 在 $x=0$ 处取严格的极小值;

而当 $f(x)=-x^4$ 时, $f''(0)=0$, 这时 f 在 $x=0$ 处取严格的极大值.

因此, 当 $f''(x_0)=0$ 时, 还需有其他条件才能断言 f 在 x_0 处是否取极值.

注 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续. 如果 f 的最值点在开区间 (a,b) 的内部, 那么最值点就必然是极值点. 因此, 要选出 f 的最值点, 只需在 f 的全体极值点与区间的两个端点 a 与 b 所组成的点集中去挑选. 如果这个点集只含有限多个点, 那么只需计算 f 在这些点上的值, 其中最小的数与最大的数就分别是 f 在 $[a,b]$ 上的最小值与最大值. 设 f 在 (a,b) 上可导, 而 f 的驻点的数目有限, 记为 $t_1,t_2,\cdots,t_n$, 如果我们不愿意一一甄别其中哪一些是极值点, 那么用

$$\min\left(f(a),f\left(t_1\right),f\left(t_2\right),\cdots,f\left(t_n\right),f(b)\right),$$

$$\max\left(f(a),f\left(t_1\right),f\left(t_2\right),\cdots,f\left(t_n\right),f(b)\right)$$

来算出 f 的最小值与最大值也不失是一种可行的方法. 麻烦的是, 当 f 在 (a,b) 内还有若干个不可导的点时, 这些点自然不被算在驻点之列, 因此函数 f 在这些点上所取的值必然要添加进来, 再一并比较.

3.5.3 凸性

定义 3.7 (凸函数的定义)

设函数 f 在区间 I 上有定义. 如果对任何 $x_1,x_2\in I, x_1\neq x_2$, 以及任意的 $\lambda_1,\lambda_2>0$, 且 $\lambda_1+\lambda_2=1$, 都有

$$f\left(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2\right)\leqslant\lambda_1f\left(x_1\right)+\lambda_2f\left(x_2\right)$$

则称 f 为 I 上的凸函数.

如果上述不等式对任何 $x_1\neq x_2$ 及 $\lambda_1,\lambda_2>0\left(\lambda_1+\lambda_2=1\right)$ 不等号总成立, 我们就说 f 在 I 上是严格凸函数.

♣

定理 3.10 (Jensen 不等式)

设 f 在区间 I 上是凸函数, 则对任何 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in I$, 以及 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n>0$, 且 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$, 都有

$$f\left(\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^n\lambda_if\left(x_i\right).$$

如果 f 是 I 上的严格凸函数, 则当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全相等时, 有

$$f\left(\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i\right)<\sum_{i=1}^n\lambda_if\left(x_i\right).$$

♡

证明 用数学归纳法. 当 $n=2$ 时, 这正是凸函数和严格凸函数的定义.

设 $n=k\geqslant2$ 时命题成立, 我们来证 $n=k+1$ 时命题也成立.

设 $x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}\in I,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{k+1}>0$, 并且

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{k+1}=1$$

令

$$\mu_i=\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}}\quad(i=1,2,\cdots,k)$$

易见 $\mu_i > 0(i=1,2,\cdots,k)$ 且 $\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_k=1$. 这时还有

$$\mu_1 x_1+\mu_2 x_2+\cdots+\mu_k x_k \in I.$$

于是

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i\right) &= f\left(\left(1-\lambda_{k+1}\right) \sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i+\lambda_{k+1} x_{k+1}\right) \\
&\leqslant \left(1-\lambda_{k+1}\right) f\left(\sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i\right)+\lambda_{k+1} f\left(x_{k+1}\right) \\
&\leqslant \left(1-\lambda_{k+1}\right) \sum_{i=1}^{k} \mu_i f\left(x_i\right)+\lambda_{k+1} f\left(x_{k+1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i f\left(x_i\right)
\end{aligned}$$

因此，我们已经证明：当 f 为 I 上的凸函数时，对任何 $n \in \mathbb{N}^*$, 不等式成立.

再设 f 是 I 上的严格凸函数, 并且 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全相等. 重新审查归纳证明. 当 $n=2$ 时, x_1,x_2 不全相等就是 $x_1 \neq x_2$. 按定义, 严格的不等号成立. 假设 $n=k$ 时, 严格的不等号成立. 再设 $x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}$ 不全相等. 如果其中的 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 不全相等, 那么上述归纳法中最后的那个不等号应当是严格的; 如果 $x_1=\cdots=x_k \neq x_{k+1}$, 则

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i=x_1 \sum_{i=1}^{k} \mu_i=x_1 \neq x_{k+1}$$

这时归纳过程的第一个不等号就应当是严格的. 总之, 不等式对一切 $n \in \mathbb{N}^*$ 成立.

□

命题 3.10

设 f 在区间 I 上是凸函数, 则对任何 $x_1,x_2,\cdots,x_n \in I$, 以及对任意的正数 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$, 有不等式

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i / \sum_{i=1}^{n} \beta_i\right) \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} \beta_i f\left(x_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} \beta_i}.$$

如果 f 是严格凸的, 那么当 $x_1,x_2,\cdots,x_n \in I$ 不全相等时, 式中成立着严格的不等号.

♠

证明 只需令

$$\lambda_i=\beta_i / \sum_{j=1}^{n} \beta_j \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

便推出本定理.

□

命题 3.11

函数 f 在区间 I 上是凸函数, 当且仅当对任何 $(x_1,x_2) \subset I$ 及任何 $x \in (x_1,x_2)$, 有

$$\frac{f(x)-f\left(x_1\right)}{x-x_1} \leqslant \frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f\left(x_2\right)-f(x)}{x_2-x}.$$

f 是 I 上的严格凸函数, 当且仅当式中出现的都是严格的不等号.

定理 3.11

设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 则 f 在 $[a,b]$ 上为凸函数 (严格凸函数) 的一个充分必要条件是, f' 在 (a,b) 上递增 (严格递增).

定理 3.12

设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上有二阶导数, 则 f 在 $[a,b]$ 上为凸函数的充分必要条件是, $f'' \geqslant 0$ 在 (a,b) 上成立.

而 f 在 $[a,b]$ 上为严格的凸函数的充分必要条件是, $f'' \geqslant 0$ 在 (a,b) 上成立, 并且在 (a,b) 的任何开的子区间内 f'' 不恒等于 0.

3.6 L'Hospital 法则

定理 3.13 (L'Hospital)

设 f,g 在 (a,b) 上可导, 并且 $g(x)\neq 0$ 对 $x\in(a,b)$ 成立。又设

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$$

在这些条件下, 如果极限

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

存在（或为 ∞），那么便有

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

证明 补充定义

$$f(a)=g(a)=0,$$

以保持 f,g 在 $[a,b)$ 上的连续性. 利用 Cauchy 中值定理, 对 $x\in(a,b)$, 有

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

这里 $a<\xi<x$. 由此可见, 当 $x\to a^+$ 时, 有 $\xi\to a^+$. 因此

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi\to a^+}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

注 在使用 L'Hospital 法则计算极限的时候, 要检查定理的条件是否被满足，想到使用等价无穷小替换，并且把那些有确定的、非零的极限的因式及早地分离出来. 这样做能够减少麻烦, 提高效率.

例题 3.13 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x(x+2)}$.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x(x+2)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x} = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0.$$

例题 3.14 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{\sin^3 x}$.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{6}$$

定理 3.14

设函数 f,g 在区间 $(a,+\infty)$ 上可导, 且 $g(x)\neq 0$ 对 $x\in(a,+\infty)$ 成立，并且

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$$

那么当 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或为 ∞ ）时，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

♡

证明 作变换 $x=1/t$，则 $x\to+\infty$ 相当于 $t\to 0^+$。这时，我们有

$$\lim_{t\to 0^+}f\left(\frac{1}{t}\right)=\lim_{t\to 0^+}g\left(\frac{1}{t}\right)=0$$

可知

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}&=\lim_{t\to 0^+}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}\\&=\lim_{t\to 0^+}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}\end{aligned}$$

□

定理 3.15

设函数 f 与 g 在 (a,b) 上可导, $g(x)\neq 0$, 且

$$\lim_{x\to a^+}g(x)=\infty$$

如果极限 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为 ∞), 那么

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

♡

证明 令

$$l=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

我们只对 l 为有限数的情形来证明本定理, 而 $l=-\infty$ 或 $l=+\infty$ 时, 证明是类似的. 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在一个 $\delta>0$, 当 $x\in(a,a+\delta)$ 时,

$$l-\varepsilon<\frac{f'(x)}{g'(x)}<l+\varepsilon$$

因此, 对 $(x,c)\subset(a,a+\delta)$, 依 Cauchy 中值定理, 必存在 $\xi\in(x,c)$, 使得

$$l-\varepsilon<\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}<l+\xi.$$

但因

$$\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}=\left(\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(c)}{g(x)}\right)\left(1-\frac{g(c)}{g(x)}\right)^{-1}$$

固定 c, 对 $x \to a^+$ 取上极限, 得

$$\limsup_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant l + \varepsilon$$

令 $\varepsilon \to 0$, 得

$$\limsup_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant l$$

利用同样的技巧, 还可以得出

$$\liminf_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \geqslant l$$

这也就是

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

$\square$

注 由 $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在, 不能断言 $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不存在.

例题 3.15 设 f 在 $(a, +\infty)$ 上可导. 如果对 $\alpha > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\alpha f(x) + x f'(x)\right) = \beta,$$

求证:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \beta/\alpha.$$

证明 因为 $\alpha > 0$, 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha f(x)}{x^\alpha} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1} f(x) + x^\alpha f'(x)}{\alpha x^{\alpha-1}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) + \frac{x}{\alpha} f'(x)\right) = \frac{\beta}{\alpha}\end{aligned}$$

例题 3.16 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+} x^\mu \ln x (\mu > 0)$.

解 这是" $0 \cdot \infty$ 型", 但可以化为" $\frac{\infty}{\infty}$ 型".

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{x^{-\mu}} = -\frac{1}{\mu} \lim_{x\to0^+} \frac{x^{-1}}{x^{-\mu-1}} = -\frac{1}{\mu} \lim_{x\to0^+} x^\mu = 0$$

例题 3.17 求极限 $\lim\limits_{x\to\pi/2} (\sec x - \tan x)$.

解 这是" $\infty - \infty$ 型", 但可以变化为" $\frac{0}{0}$ 型".

$$\lim_{x\to\pi/2} (\sec x - \tan x) = \lim_{x\to\pi/2} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x} = 0$$

例题 3.18 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+} (\sin x)^x$.

解 这是" 0^0 型". 由于

$$(\sin x)^x = \mathrm{e}^{x \ln \sin x},$$

我们只需求出 $\lim\limits_{x\to0^+} x \ln \sin x$, 而这已是" $0 \cdot \infty$ 型". 由于

$$x \ln \sin x = x \ln x + x \ln \frac{\sin x}{x}$$

利用上述结果, 可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+} x \ln \sin x &= \lim_{x\to0^+} x \ln x + \lim_{x\to0} \ln \frac{\sin x}{x} \\ &= 0 + 0 \cdot \ln 1 = 0\end{aligned}$$

可见

$$\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^x = \mathrm{e}^0 = 1$$

例题 3.19 求极限 $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-}(\tan x)^{\pi/2-x}$.

解 这是" ∞^0 型". 作变换 $t=\pi/2-x$, 则当 $x\to(\pi/2)^-$ 时, $t\to 0^+$, 从而原极限变成

$$\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{\cos t}{\sin t}\right)^t = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{(\sin t)^t} = 1$$

3.7 函数作图

定义 3.8 (拐点)

设函数 f 在 x_0 的两旁（包括 x_0 在内）有定义. 在 x_0 的一侧图像 $y=f(x)$ 是严格凸的, 另一侧是严格凹的, 那么称 x_0 是 f 的一个拐点.

♣

定义 3.9 (渐近线)

1. 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$, 则称 $y=a$ 或 $y=b$ 为 $y=f(x)$ 的一条水平渐近线;
2. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\pm\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\pm\infty$, 则称 $x=x_0$ 为 $y=f(x)$ 的一条竖直渐近线;
3. 如果 $a\neq 0$, 使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(ax+b))=0$, 则称 $y=ax+b$ 为 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线.

♣

例题 3.20 求函数 $y=\dfrac{(1+x)^2}{4(1-x)}$ 的渐近线.

解 记 $f(x)=\dfrac{(1+x)^2}{4(1-x)}$, 则显然有

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to 1^-}f(x)=+\infty$$

因此, $x=1$ 是 $y=f(x)$ 的一条竖直渐近线. 由于

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}=\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(1+x)^2}{4x(1-x)}=-\frac{1}{4}$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(1+x)^2}{4(1-x)}+\frac{x}{4}\right)=-\frac{3}{4}$$

所以 $y=-\dfrac{1}{4}x-\dfrac{3}{4}$ 是 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线.

第 4 章 一元微分学的顶峰——Taylor 定理

4.1 函数的微分

定义 4.1 (微分)

设函数 f 在 (a,b) 上有定义, 且 $x_0 \in (a,b)$. 如果存在一个常数 λ, 使得

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\lambda\Delta x+o(\Delta x)\quad(\Delta x\to 0) \tag{4.1}$$

则称函数 f 在点 x_0 处可微. 函数的改变量的线性主要部分 $\lambda\Delta x$ 称为 f 在 x_0 处的微分, 记为 $\mathrm{d}f(x_0)$.

注 用 Δx 同除式子的两边, 得到

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lambda+o(1).$$

令 $\Delta x\to 0$, 可得

$$\lambda=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0).$$

这表明 f 在点 x_0 处可导, 而且 Δx 的系数只能是 f 在点 x_0 处的导数. 我们证明了：对单变量函数来说，可导和可微是同一件事. 在大多数场合，当我们说 f 在点 x_0 处" 可微" 时, 往往是为了突出函数 f 具有4.1所表达的性质. 我们还证明了

$$\mathrm{d}f(x_0)=f'(x_0)\Delta x \tag{4.2}$$

命题 4.1

1. 微分是 Δx 的一个齐次线性函数, 它的系数是 $f'(x_0)$, 这个线性函数的定义域是整个实数, 即 $\Delta x\in(-\infty,+\infty)$.
2. 当 $\Delta x\to 0$ 时, 微分与函数改变量的差别仅仅是比 Δx 高阶的无穷小.
3. 微分的几何意义是该点的切线函数的改变量.

注 如果把自变量的改变量直接写成 $x-x_0$, 那么式 4.1成为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)\quad(x\to x_0).$$

这个式子也可以作为 f 在 x_0 处可微的定义. 性质 (2) 为我们提供了这样的数值应用: 当 $|x-x_0|$ 相当小时,

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0), \tag{4.3}$$

即函数值 $f(x)$ 可以近似地由式4.3右边的 x 的线性函数来代替. 由于 $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 是在点 $(x_0,f(x_0))$ 处曲线的切线方程, 这表明在这一点的近旁, 曲线 $y=f(x)$ 可以用直线 (即该点的切线) 来代替.

例题 4.1 求 $\mathrm{d}x^5$.

解

$$\mathrm{d}x^5=\left(x^5\right)'\mathrm{d}x=5x^4\,\mathrm{d}x$$

例题 4.2 求 $\mathrm{d}e^{(x^2-1/x)}$.

解 易知

$$\mathrm{d}\mathrm{e}^{\left(x^2-1/x\right)}=\left(\mathrm{e}^{\left(x^2-1/x\right)}\right)'\mathrm{d}x=\left(x^2-\frac{1}{x}\right)'\mathrm{e}^{\left(x^2-1/x\right)}\mathrm{d}x$$
$$=\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{\left(x^2-1/x\right)}\mathrm{d}x$$

命题 4.2

一般地，关于函数四则运算的微分，有下列法则：

1. $\mathrm{d}(f\pm g)=\mathrm{d}f\pm\mathrm{d}g$;
2. $\mathrm{d}(fg)=g\,\mathrm{d}f+f\,\mathrm{d}g$;
3. $\mathrm{d}\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{g\,\mathrm{d}f-f\,\mathrm{d}g}{g^2}$, 其中 $g\neq 0$.

证明

$$\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right)=\left(\frac{f}{g}\right)'\mathrm{d}x=\frac{gf'-fg'}{g^2}\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{gf'\mathrm{d}x-fg'\mathrm{d}x}{g^2}=\frac{g\,\mathrm{d}f-f\,\mathrm{d}g}{g^2}$$

□

定义 4.2

f 的导函数被记作 f'. 在公式4.2 的两边除以 $\mathrm{d}x$, 得到

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=f'(x)$$

这就是说，导函数 f' 可以用 $\mathrm{d}f$ 来表示，这是导数的 Leibniz 记号.

注 由于 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ 是函数的微分与自变量的微分的商，因此导数也称为微商.

设 $y=f(x)$ 可微, 则 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$ 仍是 x 的函数. 如果 $f'(x)$ 仍可微, 则可计算 $\mathrm{d}y$ 的微分, 记为 $\mathrm{d}^2y=\mathrm{d}(\mathrm{d}y)$, 那么

$$\mathrm{d}^2y=\mathrm{d}(\mathrm{d}y)=\mathrm{d}\left(f'(x)\mathrm{d}x\right)=\left(f''(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x=f''(x)\mathrm{d}x^2,$$

这里 $\mathrm{d}x^2=(\mathrm{d}x)^2$, 而不是 $\mathrm{d}x^2=\mathrm{d}\left(x^2\right)=2x\,\mathrm{d}x$. 称 d^2y 为 $y=f(x)$ 的二阶微分. 如果 $f''(x)$ 仍可微, 那么还可计算 $y=f(x)$ 的三阶微分:

$$\mathrm{d}^3y=\mathrm{d}\left(\mathrm{d}^2y\right)=\mathrm{d}\left(f''(x)\mathrm{d}x^2\right)=\left(f'''(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x^2=f'''(x)\mathrm{d}x^3.$$

如果 f 在 x 处有 n 阶导数, 那么有

$$\mathrm{d}^ny=f^{(n)}(x)\mathrm{d}x^n$$

因而有记号

$$\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}=f^{(n)}(x)\quad(n=1,2,\cdots)$$

定义 4.3

设 $y=f(x)$ 且 $x=\varphi(t)$. 当 t 在 φ 的定义域中变化时, $\varphi(t)$ 的值不超过 f 的定义域。我们可以定义复合函数 $y=f\circ\varphi(t)$, 这时 t 已是自变量. 从而有微分公式

$$\mathrm{d}y=(f\circ\varphi)'(t)\mathrm{d}t=f'(x)\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

又知 $\mathrm{d}x=\varphi'(t)\mathrm{d}t$，代入上式，便得出

$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x \tag{4.4}$$

注 如果 x 是自变量, 上式自然成立. 这就是说, 公式 4.4 无论是对独立的自变量还是对中间变量都是正确的, 这称为一阶微分形式的不变性.

注 高阶微分不具有形式不变性.

4.2 带 Peano 余项的 Taylor 定理

定义 4.4

设函数 f 在点 x_0 处有直到 n 阶的导数, 这里 n 是任意给定的正整数. 令

$$\begin{aligned}T_n\left(f,x_0;x\right)=&f\left(x_0\right)+\frac{1}{1!}f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+\frac{1}{2!}f''\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)^2\\&+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)^n\end{aligned}$$

称它为 f 在 x_0 处的 n 次 Taylor 多项式.

定理 4.1

设函数 f 在点 x_0 处有直到 n 阶的导数, 则有

$$f(x)=T_n\left(f,x_0;x\right)+o\left(\left(x-x_0\right)^n\right)\quad\left(x\to x_0\right). \tag{4.5}$$

证明 用数学归纳法. $n=1$ 时, 已知式子成立. 现设 $n=k$ 时, 式子成立. 由

$$T_{k+1}'\left(f,x_0;x\right)=T_k\left(f',x_0;x\right)$$

再利用 L'Hospital 法则和归纳假定，即得

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_{k+1}\left(f,x_0;x\right)}{\left(x-x_0\right)^{k+1}}=\frac{1}{k+1}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-T_k\left(f',x_0;x\right)}{\left(x-x_0\right)^k}=0.$$

这说明当 $n=k+1$ 时, 式子也成立.

□

定义 4.5 (Peano 余项)

令

$$R_n(x)=f(x)-T_n\left(f,x_0;x\right)\quad(n=1,2,\cdots),$$

称它为余项. 当前, 对余项 R_n 只有定性的刻画:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{\left(x-x_0\right)^n}=0.$$

这种余项我们称为 Peano 余项.

定义 4.6

称多项式

$$T_n(f,0;x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

为 f 的 n 次 Maclaurin 多项式.
相应地,

$$f(x)=T_n(f,0;x)+o\left(x^n\right) \tag{4.6}$$

就称为带有 Peano 余项的 Maclaurin 定理.
公式 4.5 或 4.6 通常也叫作函数 f 的 Taylor 展开式或 Maclaurin 展开式.

例题 4.3 求函数 $f(x)=\sin x$ 的 Maclaurin 展开式.

解 由于

$$f^{(k)}(x)=\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)\quad(k=0,1,2,\cdots)$$

所以，当 k 为偶数时，$f^{(k)}(0)=0$. 此外，还有

$$f^{(2k+1)}(0)=\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^k$$

由此得出，当 $x\to 0$ 时，有

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o\left(x^{2n}\right)$$

例题 4.4

可以证明：当 $x\to 0$ 时，有

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$$

例题 4.5 求函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 的 Maclaurin 展开式.

解

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},\quad f'(0)=1$$
$$f''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2},\quad f''(0)=-1$$
$$f'''(x)=\frac{1\cdot 2}{(1+x)^3},\quad f'''(0)=2!$$

一般地,

$$f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k},\quad f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!\quad\left(k\in\mathbf{N}^*\right)$$

于是当 $x\to 0$ 时, 有

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right).$$

例题 4.6 求函数 $f(x)=(1+x)^\lambda(x>-1)$ 的 Maclaurin 展开式.

解 计算 f 的导数, 得

$$f^{(k)}(x)=\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1)(1+x)^{\lambda-k}\quad(k=1,2,\cdots).$$

将 $x=0$ 代人上式, 得

$$f^{(k)}(0)=\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1)\quad(k=1,2,\cdots).$$

由此便知, 当 $x\to 0$ 时, 有

$$(1+x)^\lambda=1+\lambda x+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)}{n!}x^n+o\left(x^n\right).$$

虽然这里的 λ 不必是正整数，但我们还是使用符号

$$\binom{\lambda}{k}=\frac{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1)}{k!}\quad(k=1,2,\cdots)$$

还规定 $\binom{\lambda}{0}=1$. 于是有公式

$$(1+x)^{\lambda}=\sum_{k=0}^{n}\binom{\lambda}{k}x^{k}+o\left(x^{n}\right)\quad(x\to 0)$$

例题 4.7 求函数 $f(x)=\arctan x$ 的 Maclaurin 展开式.

解 由于 f 在 $x=0$ 处有任意阶的导数, 则

$$\arctan x=\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^{k}+o\left(x^{2n+1}\right)\quad(x\to 0)$$

其中 $n\in\mathbb{N}^{*}$. 由 $f(x)=\arctan x$, 得 $f(0)=0$; 由 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^{2}}$, 得 $f'(0)=1$.
在恒等式 $\left(1+x^{2}\right)f'(x)=1$ 的两边, 对 x 求 n 阶导数, 利用 Leibniz 公式, 得

$$\left(1+x^{2}\right)f^{(n+1)}(x)+2nxf^{(n)}(x)+n(n-1)f^{(n-1)}(x)=0$$

将 $x=0$ 代人, 得到

$$f^{(n+1)}(0)=-(n-1)nf^{(n-1)}(0),$$

这里 $n\in\mathbb{N}^{*}$. 可得

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & \text{当}n\text{为偶数时},\\(-1)^{k}(2k)!, & \text{当}n=2k+1\text{ 时},\end{cases}$$

这里 $k=0,1,2,\cdots$, 代人

$$\arctan x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}}{2k+1}x^{2k+1}+o\left(x^{2n+2}\right)\quad(x\to 0)$$

写得再清楚一些，就是

$$\arctan x=x-\frac{x^{3}}{3}+\frac{x^{5}}{5}-\cdots+(-1)^{n}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}+o\left(x^{2n+2}\right)$$

例题 4.8 计算极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}\sin x-x(1+x)}{\sin^{3}x}$$

解 用等价无穷小代替, 得知上述极限与

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}\sin x-x(1+x)}{x^{3}}$$

有相等的值. 由此可见, 只需将上式中的分子展开到 x 的三次方, 而高于三阶的无穷小无须具体计算. 由于

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{x}\sin x&=\left(1+x+\frac{x^{2}}{2}+o\left(x^{2}\right)\right)\left(x-\frac{x^{3}}{3!}+o\left(x^{3}\right)\right)\\&=x+x^{2}+\frac{x^{3}}{3}+o\left(x^{3}\right)\end{aligned}$$

所以

$$\mathrm{e}^{x}\sin x-x(1+x)=\frac{x^{3}}{3}+o\left(x^{3}\right)$$

可知原极限等于 $1/3$.

例题 4.9 计算极限

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

解 当 $x\to\infty$ 时, $1/x\to 0$, 于是

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

因此

$$x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}+o(1)\quad(x\to\infty),$$

从而所求的极限为 $1/2$.

例题 4.10 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\arctan x}{\tan x-\sin x}$$

解 先分解分母:

$$\tan x-\sin x=\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)=\sin x(1-\cos x)\frac{1}{\cos x}$$

当 $x\to 0$ 时, $\sin x$ 与 x 为等价无穷小, $1-\cos x$ 与 $\frac{x^2}{2}$ 为等价无穷小, 而 $\cos x\to 1$, 因此原极限等于

$$2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\arctan x}{x^3}$$

又因为

$$\begin{aligned}\sin x-\arctan x&=x-\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)-\left(x-\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)\\&=\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)\end{aligned}$$

所以原极限等于 $2/6=1/3$.

例题 4.11 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{a}{n\sqrt{n}}\cos\frac{2a}{n\sqrt{n}}\cdots\cos\frac{na}{n\sqrt{n}}.$$

解 记

$$P_n=\cos\frac{a}{n^{3/2}}\cos\frac{2a}{n^{3/2}}\cdots\cos\frac{na}{n^{3/2}}$$

对上式取对数，得

$$\ln P_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\cos\frac{ka}{n^{3/2}}$$

利用等式 $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)$, 得

$$\begin{aligned}\cos\frac{ka}{n^{3/2}}&=1-\frac{1}{2}\frac{k^2a^2}{n^3}+o\left(\frac{k^3}{n^{9/2}}\right)\\&=1-\frac{1}{2}\frac{k^2a^2}{n^3}+o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

根据 $\ln(1+x)=x+o(x)$, 可得

$$\begin{aligned}\ln\cos\frac{ka}{n^{3/2}}&=\ln\left(1-\frac{1}{2}\frac{k^2a^2}{n^3}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\&=-\frac{1}{2}\frac{k^2a^2}{n^3}+o\left(\frac{1}{n}\right)+o\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\&=-\frac{1}{2}\frac{k^2a^2}{n^3}+o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\ln\cos\frac{ka}{n^{3/2}}&=-\frac{a^2}{2n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2+o(1)\\&=-\frac{a^2}{2n^3}\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+o(1)\end{aligned}$$

由此即得

$$\lim_{n\to\infty}\ln P_n=-\frac{a^2}{6}$$

因而

$$\lim_{n\to\infty}P_n=\mathrm{e}^{-a^2/6}$$

带 Peano 余项的 Taylor 定理还是解决极值问题的有力工具.

定理 4.2

设函数 f 在 x_0 处有直到 k 阶的导数, 并且

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(k-1)}(x_0)=0,\quad f^{(k)}(x_0)\neq 0,$$

那么:

1. 当 k 为奇数时, x_0 不是 f 的极值点.
2. 当 k 为偶数时, 若 $f^{(k)}(x_0)>0$, 则 x_0 是 f 的严格极小值点; 若 $f^{(k)}(x_0)<0$, 则 x_0 是 f 的严格极大值点.

证明 由于 $f'(x_0)=\cdots=f^{(k-1)}(x_0)=0$, 由带 Peano 余项的 Taylor 定理, 得

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o\left((x-x_0)^k\right)\quad(x\to x_0).$$

将上式变形为

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^k}=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}+o(1)\tag{4.7}$$

式4.7右边的第一项是一个非零的实数, 第二项是一个无穷小量, 因此当 $x\to x_0$ 时, 式 4.7 的右边保持着确定的符号.

1. 当 k 是奇数时, 如果 $f^{(k)}(x_0)>0$, 那么式 4.7 的右边取正值.
   (a). 当 $x<x_0$ 时, 式4.7左边的分母 $(x-x_0)^k<0$, 因而 $f(x)-f(x_0)<0$, 即 $f(x)<f(x_0)$.
   (b). 当 $x>x_0$ 时, $(x-x_0)^k>0$, 因而 $f(x)-f(x_0)>0$, 即 $f(x)>f(x_0)$. 这说明 x_0 不是 f 的极值点. 当 $f^{(k)}(x_0)<0$ 时, 讨论是一样的.
2. 当 k 是偶数时, 式 4.7 左边的分母当 $x\neq x_0$ 时恒取正值. 如果 $f^{(k)}(x_0)>0$, 那么当 x 充分靠近 x_0 且不等于 x_0 时, 必有 $f(x)>f(x_0)$, 因此 x_0 是 f 的严格极小值点. 如果 $f^{(k)}(x_0)<0$, 同理, 可知 x_0 是 f 的严格极大值点.

□

4.3 带 Lagrange 余项和 Cauchy 余项的 Taylor 定理

定理 4.3 (Taylor 定理)

设 f 在开区间 (a,b) 上有 $n+1$ 阶导数, x_0, x 是 (a,b) 中的任意两点, 那么

$$f(x) = T_n(f, x_0; x) + R_n(x),$$

其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{4.8}$$

或者

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0) \tag{4.9}$$

这里 ξ 是位于 x_0 与 x 之间的一个数. 一般来说，式4.8和4.9中的 ξ 是不相等的. 式4.8和4.9分别称为 Lagrange 余项和 Cauchy 余项.

♡

证明 记

$$F(t) = T_n(f,t;x) = f(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

那么

$$\begin{aligned}
F'(t) &= f'(t) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}\right) \\
&= f'(t) + \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k \\
&= f'(t) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^n - f'(t) \\
&= \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^n.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

对函数 $g(t) = F(t), \lambda(t) = \left(\frac{x-t}{x-x_0}\right)^{n+1}$ 在区间 $[x_0, x]$ （先设 $x_0 < x$) 上用引理3.1, 则必存在 $\xi \in (x_0, x)$, 使得

$$F'(\xi) = \lambda'(\xi)\left(F(x_0) - F(x)\right). \tag{4.11}$$

容易算出

$$\lambda'(t) = -(n+1)\frac{(x-t)^n}{(x-x_0)^{n+1}} \tag{4.12}$$

把式4.10和4.12代入式4.11，得

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n = -(n+1)\frac{(x-\xi)^n}{(x-x_0)^{n^{n+1}}}\left(T_n(f,x_0;x) - f(x)\right).$$

由此即得

$$f(x) = T_n(f,x_0;x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

这就是要证的式4.8.

为了得到式4.9, 在引理3.1 中取 $\lambda(t)=\dfrac{x-t}{x-x_0}$, 则 $\lambda'(t)=-\dfrac{1}{x-x_0}$, 代人式4.11, 得

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n=-\frac{1}{x-x_0}\left(T_n\left(f,x_0;x\right)-f(x)\right)$$

所以

$$f(x)=T_n\left(f,x_0;x\right)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n\left(x-x_0\right)$$

这就是要证的式4.9. 如果 $x<x_0$ ，分别取

$$\lambda(t)=1-\left(\frac{x-t}{x-x_0}\right)^{n+1},\quad \lambda(t)=1-\frac{x-t}{x-x_0}$$

即能得到式 4.8 和 4.9..

□

注 在式4.8中, 若取 $n=0$, 便得出

$$f(x)=f\left(x_0\right)+f'(\xi)\left(x-x_0\right).$$

这正是 Lagrange 中值定理. 因此, Taylor 定理是 Lagrange 中值定理的推广.

注 作为 Taylor 公式的一个应用, 可以导出线性插值的误差公式.

定理 4.4

设 f 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 在 (a,b) 上有二阶导数, l 是由 $(a,f(a))$ 和 $(b,f(b))$ 确定的线性函数. 如果 $|f''|$ 在 (a,b) 上的上界为 M, 那么对任意的 $x\in[a,b]$, 有

$$|f(x)-l(x)|\leqslant\frac{M}{8}(b-a)^2.$$

♡

例题 4.12 对 e^x, 其 Lagrange 余项为

$$R_n(x)=\frac{\mathrm{e}^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

由于 ξ 在 0 与 x 之间, 令 $\theta=\xi/x$, 于是

$$\mathrm{e}^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1).$$

例题 4.13 对

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+R_{2n}(x)$$

其 Lagrange 余项是

$$\begin{aligned}R_{2n}(x)&=\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin\left(\xi+\frac{2n+1}{2}\pi\right)\\&=(-1)^n\frac{\cos\xi}{(2n+1)!}x^{2n+1}\end{aligned}$$

其中 ξ 仍在 0 与 x 之间, 因此可以写作 $\xi=\theta x$. 这样一来, 有

$$R_{2n}(x)=(-1)^n\frac{\cos\theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1}\quad(0<\theta<1)$$

在这个问题中, 我们认为正弦已经展开到了 x^{2n} 这一项, 不过系数是 0 而已, 所以余项写作 R_{2n} 而不是 R_{2n-1}.

例题 4.14 对

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x)$$

类似，可得

$$R_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} \frac{\cos \theta x}{(2n+2)!} x^{2n+2} \quad (0 < \theta < 1)$$

例题 4.15 考虑函数 $\ln(1+x)$. 我们有

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x)$$

其 Lagrange 余项为

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} \quad (0 < \theta < 1)$$

例题 4.16 在 $[0, \pi]$ 上, 用九次多项式

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$$

来逼近函数 $\sin x$, 试求出一个误差界.

解 由于 $x \in [0, \pi]$, 故有

$$|R_{10}(x)| \leqslant \frac{x^{11}}{11!} \leqslant \frac{\pi^{11}}{11!} = 0.0073704 \cdots$$

注 必须指出: 切勿以为只要提高 Taylor 多项式的次数, 就能不断地改进对函数的逼近程度. 一个著名的例子是函数

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

例题 4.17 设 f 在 $[0,1]$ 上有二阶导数. 如果

$$|f(0)| \leqslant 1, \quad |f(1)| \leqslant 1, \quad |f''(x)| \leqslant 2 (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

证明: 对每个 $x \in [0,1]$, 有 $|f'(x)| \leqslant 3$.

证明 由 Taylor 定理, 得

$$f(1) = f(x) + f'(x)(1-x) + \frac{1}{2} f''(\xi)(1-x)^2 (x < \xi < 1)$$

$$f(0) = f(x) + f'(x)(0-x) + \frac{1}{2} f''(\eta)(0-x)^2 (0 < \eta < x)$$

把以上两式相减, 得

$$f(1) - f(0) = f'(x) + \frac{1}{2} f''(\xi)(1-x)^2 - \frac{1}{2} f''(\eta) x^2$$

于是, 对任意的 $x \in [0,1]$, 有

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= \left| f(1) - f(0) - \frac{1}{2} f''(\xi)(1-x)^2 + \frac{1}{2} f''(\eta) x^2 \right| \\ &\leqslant |f(1)| + |f(0)| + \frac{1}{2} |f''(\xi)| (1-x)^2 + \frac{1}{2} |f''(\eta)| x^2 \\ &\leqslant 2 + (1-x)^2 + x^2 \leqslant 3 \end{aligned}$$

□

例题 4.18 设 f 在 $[a, +\infty)$ 上有三阶导数. 如果

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \text{ 和 } \lim_{x \to +\infty} f'''(x)$$

都存在且有限, 证明:

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} f''(x) = \lim_{x\to+\infty} f'''(x) = 0$$

证明 设 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha$, $\lim_{x\to+\infty} f'''(x) = \beta$. 由 Taylor 定理, 得

$$\begin{aligned} f(x+1) &= f(x) + f'(x) + \frac{f''(x)}{2} + \frac{f'''(\xi)}{6} \quad (x < \xi < x+1) \\ f(x-1) &= f(x) - f'(x) + \frac{f''(x)}{2} - \frac{f'''(\eta)}{6} \quad (x-1 < \eta < x). \end{aligned} \tag{4.13}$$

把以上两式相加, 得

$$f(x+1) + f(x-1) = 2f(x) + f''(x) + \frac{1}{6}\left(f'''(\xi) - f'''(\eta)\right).$$

在上式中令 $x \to +\infty$, 即得

$$2\alpha = 2\alpha + \lim_{x\to\infty} f''(x)$$

从而得 $\lim_{x\to+\infty} f''(x) = 0$. 再由 Taylor 定理, 得

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{f''(\xi)}{2} \quad (x < \xi < x+1).$$

在上式中令 $x \to +\infty$, 即得 $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$; 再在式4.13中令 $x \to +\infty$, 即得

$$\alpha = \alpha + \frac{\beta}{6}$$

由此解得 $\beta = 0$, 即 $\lim_{x\to+\infty} f'''(x) = 0$.

□

第 5 章 级数

内容提要

- 无穷级数基本性质
- 正项级数比较判别法

5.1 无穷级数基本性质

定义 5.1

无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{5.1}$$

的前 n 项和

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

称为这个级数的第 n 个部分和。如果这些部分和构成的数列 $\{S_n\}$ 有有限的极限 S, 就说级数5.1是收敛的，其和为 S ，记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

如果数列 $\{S_n\}$ 没有有限的极限, 就说级数5.1是发散的.

例题 5.1 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

当 $\alpha > 1$ 时收敛, 当 $\alpha \leqslant 1$ 时发散. 这一事实在下面的讨论中经常要用到.

命题 5.1 (级数收敛必要条件)

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

例题 5.2 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \sin \dfrac{1}{n}$ 发散. 这是因为

$$a_n = n \sin \frac{1}{n} \to 1 \neq 0 \quad (n \to \infty).$$

命题 5.2

如果级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 和 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ 都收敛, 那么级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$$

也收敛，且

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k+\beta b_k)=\alpha\sum_{k=1}^{\infty}a_k+\beta\sum_{k=1}^{\infty}b_k,$$

这里 α,β 是任意两个实数.

命题 5.3

设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 是一收敛级数. 如果把级数的项任意结合而不改变其先后的次序, 得新级数

$$(a_1+\cdots+a_{k_1})+(a_{k_1+1}+\cdots+a_{k_2})+\cdots+(a_{k_{n-1}+1}+\cdots+a_{k_n})+\cdots, \tag{5.2}$$

这里正整数 $k_j(j=1,2,\cdots)$ 满足 $k_1<k_2<\cdots$, 那么新级数也收敛, 且与原级数有相同的和.

注 如果级数 5.2 在同一括号中的项都有相同的符号, 那么从级数 5.2收敛, 便能推出原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 而且两者有相同的和.

命题 5.4

在级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 前面去掉有限项或加上有限项, 不影响级数的敛散性.

5.2 正项级数判别法

定义 5.2 (正项级数)

如果对 $n=1,2,\cdots$, 都有 $a_n\geqslant 0$, 就称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数.

注 只有有限个负项的级数也可以当成正项级数看待.

定理 5.1

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充分必要条件是其部分和数列 $\{S_n\}$ 有界.

定理 5.2 (正项级数比较判别法)

设有两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$. 如果从第 N 项开始有不等式

$$a_n\leqslant b_n,$$

那么:

1. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛;

2. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

例题 5.3 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (\ln n)^{-\ln n}$ 收敛. 因为当 n 充分大时，有不等式

$$(\ln n)^{\ln n} = \mathrm{e}^{\ln n \ln \ln n} = n^{\ln \ln n} > n^2,$$

即当 $n > \mathrm{e}^9$ 时，有

$$(\ln n)^{-\ln n} < \frac{1}{n^2},$$

故原级数收敛.

定理 5.3 (比较判别法的极限形式)

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是两个正项级数. 如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l,$$

那么:

1. 若 $0 < l < +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散.
2. 若 $l = 0$, 则当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.
3. 若 $l = +\infty$, 则当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散.

例题 5.4 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{x}{n}\right)$ 的敛散性.

解

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \cos \frac{x}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{x^2}{2},$$

所以不论 x 取什么值, 级数都收敛.

定理 5.4 (Cauchy 积分判别法)

设当 $x \geqslant 1$ 时, $f(x) \geqslant 0$ 且递减, 那么无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同敛散.

例题 5.5 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ 当 $\alpha > 1$ 时收敛, 当 $\alpha \leqslant 1$ 时发散.

证明 函数 $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ 满足 Cauchy 积分判别法的条件, 因而原级数与无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ 同敛散. 而后者当 $\alpha > 1$ 时收敛, 当 $\alpha \leqslant 1$ 时发散.

□

例题 5.6 讨论级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ 的敛散性.

解 根据积分判别法, 原级数与积分

$$\int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^{\alpha}}$$

同敛散. 容易看出, 这个反常积分当 $\alpha > 1$ 时收敛, 当 $\alpha \leqslant 1$ 时发散.

5.3 正项级数其他判别法

定理 5.5 (Cauchy 判别法)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个正项级数.

1. 如果存在正数 $q < 1$, 使得对充分大的 n, 有
$$\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1,$$
那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 如果对无穷多个 n, 有
$$\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1,$$
那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

定理 5.6 (Cauchy 判别法的极限形式)

设对所有的 $n = 1, 2, \cdots$, 有 $a_n \geqslant 0$, 且

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

那么:

1. 当 $q < 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 当 $q > 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;
3. 当 $q = 1$ 时, 无法判断.

例题 5.7 对级数

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots$$

而言, $a_{2n-1} = \dfrac{1}{2^n}$, $a_{2n} = \dfrac{1}{3^n}$, 所以

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n-1]{a_{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n/(2n-1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{a_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

因而 $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1/\sqrt{2} < 1$. 从而由 Cauchy 判别法知原级数收敛.

引理 5.1

设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 是两个正数列. 如果当 $n \geqslant n_0$ 时, 有不等式

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

那么:

1. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛;
2. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

♡

定理 5.7 (D'Alembert 判别法)

设 $a_n > 0(n=1,2,\cdots)$.

1. 如果存在正数 $q<1$, 使得当 $n \geqslant n_0$ 时, 有
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q,$$
那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 如果当 $n \geqslant n_0$ 时, 有
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1,$$
那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

♡

注 在引理5.1中取 $b_n=q^n(0<q<1)$, 就得到 D' Alembert (达朗贝尔, 1717 ∼ 1783) 判别法.

定理 5.8 (D'Alembert 判别法的极限形式)

设 $a_n > 0(n=1,2,\cdots)$.

1. 如果 $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}=q<1$, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n<+\infty$;
2. 如果 $\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}=q'>1$, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=+\infty$;
3. 如果 $q=1$ 或 $q'=1$, 那么无法判断.

♡

注 若 $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}=q>1$ 不能断言 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

命题 5.5

设 $\{a_n\}$ 是任意的正数列, 那么

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

♠

注

1. 从这个定理可以看出, 凡是用 D'Alembert 判别法能判别的, 用 Cauchy 判别法也一定能判别; 但反之不然.
2. 由此可见, Cauchy 判别法比 D'Alembert 判别法适用的面要宽些, 但在有些场合中, 使用 D'Alembert

判别法要方便些.

3. 这两个判别法的适用面都不算宽, 原因是它们只能判别一些比几何级数收敛得还快的级数.

定理 5.9 (Raabe 判别法)

设 $a_n > 0(n = 1, 2, \cdots)$

1. 如果存在 $r > 1$, 使得当 $n > n_0$ 时, 有
$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geqslant r,$$
那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.
2. 如果对充分大的 n, 有
$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leqslant 1,$$
那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

命题 5.6

设正数列 $\{a_n\}$ 满足
$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = l,$$
或
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{l}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \to \infty).$$

1. 当 $l > 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 当 $l < 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;
3. 当 $l = 1$ 时, 无法判断.

例题 5.8 下面给出 Raabe 判别法中 $l = 1$ 时的例子

事实上, 有
$$\begin{aligned}
\frac{\ln(n+1)}{\ln n} &= \frac{\ln n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} \\
&= 1 + \frac{1}{\ln n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{\ln n}\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= 1 + \frac{1}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right) \quad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

因此
$$\begin{aligned}
\frac{n+1}{n}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{\alpha} &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right) \\
&= 1 + \frac{1}{n} + \frac{\alpha}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)
\end{aligned} \tag{5.3}$$

现取 $a_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$. 已知当 $\alpha > 1$ 时, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n < +\infty$；当 $\alpha \leqslant 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

但由式5.3，即得

$$\begin{aligned} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) &= n\left(\frac{n+1}{n}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^\alpha - 1\right) \\ &= n\left(\frac{1}{n}+\frac{\alpha}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right). \\ &= 1+\frac{\alpha}{\ln n}+o\left(\frac{1}{\ln n}\right) \to 1 \quad (n\to\infty). \end{aligned}$$

这就说明当 $l=1$ 时, Raabe 判别法无效.

✍ **练习 5.1** 设 $\alpha > 0$. 证明：级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|\dbinom{\alpha}{n}\right|$ 收敛，这里

$$\binom{\alpha}{0}=1, \quad \binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

证明

$$\begin{aligned} n\left(\left|\binom{\alpha}{n}\right| \Big/ \left|\binom{\alpha}{n+1}\right| - 1\right) &= n\left(\frac{n+1}{n-\alpha}-1\right) \\ &= \frac{n(1+\alpha)}{n-\alpha} \to 1+\alpha > 1, \end{aligned}$$

所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|\dbinom{\alpha}{n}\right| < +\infty$.

□

定理 5.10 (Gauss 判别法)

设正数列 $\{a_n\}$ 满足条件

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1+\frac{1}{n}+\frac{\beta}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right) \quad (n\to\infty).$$

1. 当 $\beta > 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 当 $\beta < 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

♡

5.4 任意项级数判别法

命题 5.7 (Cauchy 收敛原理)

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 当 $n > N$ 时,

$$|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}| < \varepsilon$$

对一切正整数 p 成立.

♠

注 这个定理告诉我们，就收敛级数而言，对事先给定的任意正数 ε，在充分多项之后任意截取一段 (不论这一段有多少项), 它的绝对值可以小于 ε.

推论 5.1

设 $\{a_n\}$ 是递减的正数列. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么必有 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

注 逆命题并不成立. 即若 $\{a_n\}$ 是递减的正数列, 且 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$, 则未必有 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$.

最简单的例子是 $a_n = \dfrac{1}{n\ln n}$, 它满足递减且 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ 的条件, 但 $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln n}$ 是发散的.

定理 5.11 (Leibniz 判别法)

如果 $\{a_n\}$ 递减趋于 0, 那么交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛.

注

1. 满足上述条件的交错级数称为 Leibniz 级数.
2. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 是一个 Leibniz 级数, 其和为 S. 若用 S_n 代替 S, 其误差不超过第 $n+1$ 项的绝对值, 即 $|S_n - S| \leqslant a_{n+1}$.
3. Leibniz 级数的和是一个不超过它首项之值的非负数.

引理 5.2 (Abel 分部求和公式)

设 $\{a_k\}, \{b_k\}$ 是两列实数, 则对任意的正整数 n, 有

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k\left(b_k - b_{k+1}\right) + S_n b_n,$$

这里 $S_k = \sum_{l=1}^{k} a_l$.

引理 5.3 (Abel 引理)

设 $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n$ 或 $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$, 记 $S_k = \sum_{l=1}^{k} a_l$. 如果 $|S_k| \leqslant M (k=1,2,\cdots,n)$, 那么

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant M\left(|b_1| + 2|b_n|\right).$$

定理 5.12 (Dirichlet 判别法)

设 $\{a_k\}, \{b_k\}$ 是两个数列, $S_k = \sum_{l=1}^{k} a_l$, 它们满足以下两个条件:

1. $\{b_k\}$ 单调趋于 0;
2. $\{S_k\}$ 有界.

那么级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 收敛.

注 Leibniz 判别法只是 Dirichlet 判别法在 $a_k=(-1)^{k-1}$ 时的特殊情形.

定理 5.13 (Abel 判别法)

设 $\{a_k\},\{b_k\}$ 满足以下两个条件:

1. $\{b_k\}$ 单调有界;
2. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛.

那么级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 收敛.

注 以上两个判别法的条件互有强弱:

1. Dirichlet 判别法中 $\{b_k\}$ 单调趋于 0 的条件比 Abel 判别法中 $\{b_k\}$ 单调有界强;
2. 而 $\{S_k\}$ 有界的条件则比 Abel 判别法中 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛的条件弱.

因此, 在使用时究竟哪个判别法较好, 要针对具体问题作具体分析.

例题 5.9 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ 的敛散性.

解 令 $b_n=1/n$, 则 b_n 递减趋于 0 . 因此若能证明

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \cos nx\right| \leqslant M \quad (N=1,2,\cdots),$$

那么由 Dirichlet 判别法即知该级数收敛. 事实上, 当 $x \neq 2k\pi$ 时, 有

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \cos nx\right|=\left|\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right) x-\sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}.$$

因此, 只要 x 不是 2π 的整数倍, 上面的和式便有界.

所以, 原级数当 $x \neq 2k\pi$ $(k=0,\pm 1,\cdots)$ 时收敛; 当 $x=2k\pi$ 时, 原级数就变成调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, 所以是发散的.

注

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \sin nx\right|=\left|\frac{\cos \frac{x}{2}-\cos\left(N+\frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{x}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|} \quad (x \neq 2k\pi)$$

例题 5.10 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3n}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的敛散性.

解 由例 5.9 知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3n}{n}$ 收敛, 而数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 递增趋于 e, 因而有界. 根据 Abel 判别法, 原级数收敛.

例题 5.11 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{\sin^2 n}{n}$ 的敛散性.

解 因为 $\sin^2 n=\frac{1}{2}(1-\cos 2n)$, 故若能证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{\cos 2n}{n}$$

都收敛, 那么原级数收敛. 由 Leibniz 判别法知第一个级数收敛. 由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos 2n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n+n\pi)}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(2+\pi)}{n},$$

故由例5.9 知它也是收敛级数. 因而原级数收敛.

注 例 5.11中的级数是一个交错级数, 这时 $a_n=\dfrac{\sin^2 n}{n}$ 非单调地趋于 0 , 这说明在 Leibniz 判别法中, $\{a_n\}$ 单调地趋于 0 的" 单调" 并不是必要的.

5.5 绝对收敛和条件收敛

命题 5.8

如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛, 那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

注 逆命题是不成立的, 即从 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛不能断定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 便是这样的例子.

定义 5.3

1. 绝对收敛级数: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 也收敛.
2. 条件收敛级数: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散.

例题 5.12 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin^2 n}{n}$ 条件收敛.

证明 这个级数的收敛性已在例 5.11 中证明过. 现在证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n} \tag{5.4}$$

发散. 如果式5.4收敛, 则因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2n}{n}$ 收敛, 故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

也收敛, 这显然不成立. 因而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 n}{n}$ 发散.

□

注 绝对收敛级数和条件收敛级数有十分显著的差别.

1. 有限个数相加时，被加项可以任意交换次序而不影响其和.
2. 无限多个数相加时, 情况就不同了. 当然, 如果只交换级数中有限多项的次序, 那么既不会改变级数的收敛性，也不会改变它的和. 但若交换级数中无穷多项的次序，在级数是条件收敛的情况下，就有可能改变级数的和，甚至使其发散. 而绝对收敛级数则可以任意改变其项的次序而不影响级数的绝对收敛性, 也不改变其和.

定理 5.14

交换绝对收敛级数中无穷多项的次序, 所得的新级数仍然绝对收敛, 其和也不变. ♡

缺少!

5.6 级数的乘法 *

5.7 无穷乘积 *

第 6 章 函数列与函数项级数

6.1 一致收敛

定义 6.1 (逐点收敛)

设 $\{f_n\}$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的一个函数列.

1. 对 $\forall x_0 \in [a,b]$, 如果数列 $\{f_n(x_0)\}$ 收敛, 则称函数列 $\{f_n\}$ 在点 x_0 收敛.
2. 如果 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 内的每一点都收敛, 则称 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛或在 $[a,b]$ 上逐点收敛.

♣

注 现设 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛于 f，$[a,b]$ 内有无穷多个点, 这就意味着无穷多个数列收敛.

一般来说, 这些数列收敛的速度是不一致的, 有的收敛得快些, 有的慢些. 用 $\varepsilon - N$ 的语言来说，对任给的 $x_0 \in [a,b]$ 和任给的 $\varepsilon > 0$，存在 $N = N(x_0, \varepsilon)$，当 $n > N$ 时, 有

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

这里的 $N = N(x_0, \varepsilon)$ 不仅与 ε 有关, 也与 x_0 有关. 对同一个 $\varepsilon > 0$, 不同的 x_0 所要求的 $N(\varepsilon, x_0)$ 值可以相差很大.

定义 6.2 (一致收敛)

设函数列 $\{f_n\}$ 在点集 I (可以是区间, 也可以不是区间) 上收敛于 f. 如果对任意给定的正数 ε, 都存在与 x 无关的正整数 $N(\varepsilon)$, 使得当 $n > N(\varepsilon)$ 时, 不等式

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

对 I 中一切的 x 都成立, 则称函数列 $\{f_n\}$ 在 I 上一致收敛于函数 f.

♣

定理 6.1

函数列 $\{f_n\}$ 在 I 上一致收敛于 f 的一个充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

♡

例题 6.1 讨论函数列 $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 和 $[\delta,+\infty)$ 上的一致收敛性, 其中 $\delta > 0$.

解 对任意给定的 $x > 0$, $f_n(x) \to 0 (n \to \infty)$.

1. 当 $\delta \leqslant x < +\infty$ 时, 由于

   $$|f_n(x) - f(x)| = \frac{nx}{1+n^2x^2} \leqslant \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{nx} < \frac{1}{n\delta}$$

   故

   $$\beta_n = \sup_{\delta \leqslant x < +\infty} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{n\delta} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

   由定理7.1知 $\{f_n\}$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛于 0 .
2. 当 $0 < x < +\infty$ 时, 由于

   $$\beta_n \geqslant \left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \frac{1}{2}$$

   所以 $\beta_n \nrightarrow 0$. 由定理 7.1知 $\{f_n\}$ 在 $(0,1)$ 上不一致收敛于 0 .

注 从这个例子看出,用定理 7.1来证明函数列不一致收敛比较方便.

例题 6.2 讨论函数列

$$f_n(x) = 2n^2 x \mathrm{e}^{-n^2x^2} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

在 $[0,1]$ 上的一致收敛性.

解 已知它在 $[0,1]$ 上收敛于 $f(x)=0$. 由于

$$\beta_n \geqslant \left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = 2n\mathrm{e}^{-1} \nrightarrow 0$$

所以这个函数列在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

定理 6.2 (Cauchy 收敛原理)

设 $\{f_n\}$ 是定义在区间 I 上的一个函数列, 那么 $\{f_n\}$ 在 I 上一致收敛的充分必要条件是, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N(\varepsilon)$, 当 $n > N(\varepsilon)$ 时,

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

对任意的 $x \in I$ 及任意的正整数 p 成立. ♡

定义 6.3

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 是定义在区间 I 上的一个函数项级数, 令 $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ 为它的部分和. 如果函数列 $\{S_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛于 $S(x)$, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 $S(x)$. ♣

命题 6.1 (函数项级数 Cauchy 收敛原理)

定义在区间 I 上的函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛的一个充分必要的条件是, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N(\varepsilon)$, 当 $n > N(\varepsilon)$ 时, 不等式

$$|u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

对任意的 $x \in I$ 及任意的正整数 p 成立。♠

注 利用函数列的 Cauchy 收敛原理, 即可得到函数项级数的 Cauchy 收敛原理.

推论 6.1

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛的一个必要条件是, 它的通项 $u_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 0 . ♡

例题 6.3 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的一致收敛性.

解 容易知道该级数在 $(0,+\infty)$ 上收玫, 其通项 $u_n(x) = n\mathrm{e}^{-nx}$ 。由于

$$\beta_n = \sup_{0<x<+\infty} u_n(x) \geqslant u_n\left(\frac{1}{n}\right) = n\mathrm{e}^{-1} \nrightarrow 0$$

故 $\{u_n(x)\}$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛于 0 . 从而该级数在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

定理 6.3 (Weierstrass 判别法)

如果存在收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 使得在区间 I 上有不等式

$$|u_n(x)| \leqslant a_n \quad (n=1,2,\cdots), \tag{6.1}$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛.

注 满足条件式 7.1 的数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上的一个优级数. Weierstrass 判别法是说，在区间 I 上有收敛的优级数的函数项级数必在 I 上一致收敛.

例题 6.4 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛. 这是因为当 $x \in (-\infty,+\infty)$ 时, 有不等式

$$\left|\frac{x}{1+n^4x^2}\right| \leqslant \frac{1}{2n^2} \quad (n=1,2,\cdots).$$

定义 6.4

设 $\{f_n\}$ 是定义在区间 I 上的函数列.

1. 如果对每一个 $x \in I$, 都有正数 $M(x)$, 使得 $|f_n(x)| \leqslant M(x)$ 对 $n=1,2,\cdots$ 成立, 则称函数 $\{f_n\}$ 在 I 上逐点有界. 应当注意, 这里的 $M(x)$ 是随 x 的变化而变化的.
2. 如果能找到一个常数 M, 使得
$$|f_n(x)| \leqslant M \quad (n=1,2,\cdots)$$
对一切 $x \in I$ 成立, 则称函数列 $\{f_n\}$ 在 I 上一致有界.

定理 6.4 (Dirichlet 判别法)

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在区间 I 上满足下面两个条件:

1. $\{b_n(x)\}$ 对每个固定的 $x \in I$ 都是单调的, 且在区间 I 上一致收敛于 0 ;
2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的部分和在 I 上一致有界, 即
$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\right| \leqslant M \quad (x \in I, n=1,2,\cdots)$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

定理 6.5 (Abel 判别法)

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在区间 I 上满足下面两个条件:

1. $\{b_n(x)\}$ 对每个固定的 $x \in I$ 都是单调的, 且在 I 上一致有界, 即
$$|b_n(x)| \leqslant M \quad (x \in I, n=1,2,\cdots)$$

2. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

例题 6.5 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$ 在 $[\delta,2\pi-\delta](0<\delta<\pi)$ 上一致收敛.

证明 令 $a_n(x)=\cos nx, b_n(x)=1/n$, 则 $b_n(x)$ 递减趋于 0 , 并且

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}$$

由于 $x\in[\delta,2\pi-\delta]$, 所以 $\sin\dfrac{x}{2}\geqslant\sin\dfrac{\delta}{2}$, 从而有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

即 $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kx$ 在 $[\delta,2\pi-\delta]$ 上一致有界.

故由 Dirichlet 判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n}$ 在 $[\delta,2\pi-\delta]$ 上一致收敛.

同理, 可证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$ 的一致收敛性.

□

注 例 7.5中的两个级数在 $(0,\pi)$ 上不是绝对收敛的. 这说明一致收敛的级数未必绝对收敛.

而级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ 在 $[0,1)$ 上绝对收玫，但并不一致收敛. 由此可见，绝对收敛和一致收敛是两个毫不相关的概念.

6.2 极限函数与和函数的性质

定理 6.6

如果函数列 $\{f_n\}$ 的每一项都在区间 I 上连续, 且 $\{f_n\}$ 在 I 上一致收敛于函数 f, 那么 f 也在 I 上连续.

定理 6.7

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛于 $S(x)$, 且每一项 $u_n(x)$ 都在 I 上连续, 那么和函数 $S(x)$ 也在 I 上连续.

例题 6.6 设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2$. 计算 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$.

解 在区间 $[-2,2]$ 上考察这个函数. 由于

$$\left|\frac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

故由 Weierstrass 判别法知原级数在 $[-2,2]$ 上一致收敛, 从而 f 是 $[-2,2]$ 上的连续函数. 于是

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}\cos n\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{3}{4}.$$

例题 6.7 证明: $f(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{x}{\ln n}\right)^n$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数.

证明 容易证明原级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是一致收敛的, 但对任意的正数 M, 当 $|x|\leqslant M$ 时, 有

$$\left(\frac{|x|}{\ln n}\right)^n \leqslant \left(\frac{M}{\ln n}\right)^n$$

由 Cauchy 判别法知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{M}{\ln n}\right)^n < +\infty$. 从而由 Weierstrass 判别法知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{x}{\ln n}\right)^n$ 在 $[-M,M]$ 上一致收敛, 因而 f 是 $[-M,M]$ 上的连续函数. 由于 M 是任意的正数, 所以 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

□

定理 6.8 (Dini 定理)

设函数列 $\{f_n\}$ 在有限闭区间 $[a,b]$ 上连续. 如果对每一个 $x\in[a,b]$, 数列 $\{f_n(x)\}$ 递减地趋于 0, 那么 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 0.

♡

证明 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 $N_x=N(\varepsilon,x)$, 使得

$$0\leqslant f_{N_x}(x)<\varepsilon$$

由于 f_{N_x} 在点 x 处连续, 故必存在 $\delta_x>0$, 使得当 $t\in[a,b]$ 且 $t\in(x-\delta_x,x+\delta_x)$ 时, 仍有

$$0\leqslant f_{N_x}(x)<\varepsilon \tag{6.2}$$

于是这些区间的并

$$\bigcup_{x\in[a,b]}(x-\delta_x,x+\delta_x)$$

构成 $[a,b]$ 的一个开覆盖. 由有限覆盖定理知, 从中可以选出有限个开区间

$$(x_i-\delta_{x_i},x_i+\delta_{x_i})\quad (i=1,\cdots,m)$$

它们仍构成 $[a,b]$ 的一个开覆盖. 令

$$N=\max\left(N_{x_1},\cdots,N_{x_m}\right)$$

由式7.2和 $\{f_n\}$ 的递减性知, 当 $n\geqslant N$ 时, 不等式

$$0\leqslant f_n(x)<\varepsilon$$

对一切 $x\in[a,b]$ 成立. 这正说明 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$ 在 $[a,b]$ 上一致地成立.

□

注 如果把定理中的有限闭区间 $[a,b]$ 改成开区间或无穷区间, 结论则不再成立. 例如,

1. $f_n(x)=x^n$ 在 $(0,1)$ 上单调递减地趋于 0, 但它不一致收敛于 0.
2. 如 $f_n(x)=x/n$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减地趋于 0, 但不一致地趋于 0.

定理 6.9 (级数 Dini 定理)

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的每一项在有限闭区间 $[a,b]$ 上连续且非负. 如果它的和函数 $S(x)$ 也在 $[a,b]$ 上

连续, 那么该级数在 $[a,b]$ 上一致收敛.

定理 6.10

如果 $[a,b]$ 上的可积函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f, 那么 f 也在 $[a,b]$ 上可积, 并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

注 如果 $\{f_n\}$ 不一致收敛于 f, 那么 f 可能在 $[a,b]$ 上不可积.

推论 6.2

如果 $[a,b]$ 上的连续函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f, 那么

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

定理 6.11

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$, 且每一项 $u_n(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积, 那么 $S(x)$ 也在 $[a,b]$ 上可积, 并且

$$\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x.$$

推论 6.3

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 且每一项 $u_n(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续, 那么

$$\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x.$$

定理 6.12

设函数列 $\{f_n\}$ 满足条件:

1. 每一个 f_n 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数;
2. 由导函数构成的函数列 $\{f_n'\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 g;
3. 至少在某一点 $x_0\in[a,b]$ 上收敛.

那么函数列 $\{f_n\}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛于某个连续可微函数 f, 并且对每一个 $x\in[a,b]$, 有

$$f'(x)=g(x),\ \text{即}\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)'=\lim_{n\to\infty}f_n'(x).$$

定理 6.13

设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 满足条件:

1. 每一项 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数;

2. 由各项的导函数组成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $g(x)$;
3. 至少在某一点 $x_0 \in [a,b]$ 处收敛.

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 其和函数 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导, 并且 $S'(x) = g(x)$, 即

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

例题 6.8 证明: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^4}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有二阶连续导函数, 并计算 $f''(x)$.

证明 容易看出, 原级数以及每一项求导后所得的级数都在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛，因而有

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$$

对这个级数再逐项求导, 所得的级数仍在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛, 因而有

$$f''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

□

6.3 由幂级数确定的函数

定理 6.14 (Abel 定理)

1. 如果幂级数 7.3在点 $x = x_0$ $(x_0 \neq 0)$ 处收敛, 那么它必在区间 $|x| < |x_0|$ 上绝对收敛.
2. 如果幂级数 7.3在点 $x = x_1$ 处发散，那么它必在 $|x| > |x_1|$ 上发散.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{6.3}$$

定理 6.15 (Cauchy-Hadamard)

对给定的幂级数 7.3 , 记

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

那么

1. 当 $R = 0$ 时, 级数 7.3 只在 $x = 0$ 这一点处收敛;
2. 当 $R = +\infty$ 时, 级数 7.3 在整个数轴上都绝对收敛;
3. 当 $0 < R < +\infty$ 时, 级数 7.3 在区间 $(-R, R)$ 内绝对收敛, 在 $[-R, R]$ 之外发散。

注 由此可见, 幂级数7.3 的收敛点集是区间 $(-R, R)$, R 称为级数 7.3的收敛半径, $(-R, R)$ 称为级数7.3 的收敛区间.

这时幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + \cdots + a_n (x - x_0)^n + \cdots$$

的收敛区间是 $(x_0-R,\ x_0+R)$. 定理7.15实际上给出了计算 R 的公式.

注 必须指出, 在幂级数的收敛区间 $(-R,R)$ 的两个端点 $x=\pm R$ 处, 级数的收敛性没有肯定的结论. 下面三个级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}nx^n$$

的收敛半径都是 1, 收敛区间是 $(-1,1)$.

1. 第一个级数在左端点 $x=-1$ 处条件收敛, 在右端点 $x=1$ 处发散;
2. 第二个级数在两个端点处都绝对收敛;
3. 第三个级数在两个端点处都发散.

例题 6.9 计算幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}2^k x^{2k}$ 的收敛半径.

解

1. 当 $n=2k$ 时, $a_n=2^k$;
2. 当 $n=2k+1$ 时, $a_n=0$. 于是

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[2k]{2^k}=\sqrt{2}$$

因此 $R=1/\sqrt{2}$.

定理 6.16

设级数 7.3的收敛半径为 R, 则对任意的 $r\in(0,R)$, 级数 7.3 在 $[-r,r]$ 上一致收敛.

这时称级数 7.3在 $(-R,R)$ 上**内闭一致收敛**.

证明 因为当 $x\in[-r,r]$ 时, 有

$$|a_nx^n|\leqslant|a_n|\,r^n,$$

而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|\,r^n$ 收敛, 故由 Weierstrass 判别法, 知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $[-r,r]$ 上一致收敛.

□

定理 6.17

设级数7.3 的收敛半径为 R, 则其和函数 $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 内连续, 而且在 $(-R,R)$ 内有任意阶导数:

$$S^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)a_nx^{n-k}\quad(k=1,2,\cdots).$$

注 这条定理所揭示的正是幂级数和多项式的相似之处.

推论 6.4

设级数 7.3的收敛半径为 R, $S(x)$ 是它的和函数, 那么对任意的 $x\in(-R,R)$, 有

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},\tag{6.4}$$

而且式 7.4右边幂级数的收敛半径仍为 R.

例题 6.10 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$ 的和.

解 易知这个幂级数的收玫半径 $R=1$. 为了求出它的和, 对幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (|x|<1)$$

逐项求导, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

因而

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (|x|<1).$$

注 在上式中取 x 的一些特殊值, 即可求得一些数项级数的和. 例如, 分别取 $x=\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}.$$

例题 6.11 把 $\ln(1+x)$ 和 $\arctan x$ 展开成幂级数。

解

1. 当 $x \in (-1,1)$ 时, 有
$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$
从 0 到 x 对上式逐项积分, 得
$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (-1<x<1) \end{aligned}$$
2. 再对等式
$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$
逐项积分, 即得 $\arctan x$ 的展开式:
$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (-1<x<1)$$
在收敛区间的两端点处, 和函数有如下性质.

定理 6.18 (Abel 第二定理)

设级数7.3的收敛半径为 R.

1. 如果在 $x=R$ 处级数 7.3 收敛, 则其和函数 $S(x)$ 在 $x=R$ 处左连续;
2. 如果在 $x=-R$ 处级数 7.3 收敛, 则 $S(x)$ 在 $x=-R$ 处右连续.

证明 设级数 7.3 在 $x=R$ 处收敛, 我们证明级数7.3 必在 $[0,R]$ 上一致收敛. 事实上，把级数7.3写成

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$$

由于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 收敛, 数列 $\left\{\left(\frac{x}{R}\right)^n\right\}$ 对 $[0,R]$ 中的每一个 x 而言是递减的, 且一致有界.

根据级数一致收敛的 Abel 判别法, 级数 7.3 在 $[0,R]$ 上一致收敛. 所以 $S(x)$ 在 $x=R$ 处左连续. 同理可证定理的另一半.

注 Abel 第二定理的逆定理是否成立?

即若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1 (设 $R=1$), 且 $\lim_{x\to1^-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$ 存在, 能否断言 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$?

很容易举出使上述结论不成立的例子. 例如, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ 的收敛半径为 1 , 它在 $(-1,1)$ 内等于 $1/(1+x)$, 因而

$$\lim_{x\to1^-}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{2}$$

存在, 但级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ 显然是发散的.

例题 6.12 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

解 已知当 $x\in(-1,1)$ 时, 有等式

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

因为上式右边的级数在 $x=1$ 处收敛, 故由 Abel 第二定理, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\lim_{x\to1^-}\ln(1+x)=\ln 2$$

用另一个展开式

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\quad(-1<x<1)$$

可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$$

例题 6.13 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n+1}$ 的和.

解 考虑幂级数

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n+1}x^{3n+1}$$

易知, 它的收敛半径是 1 . 由于它在 $x=1$ 处收敛, 故由 Abel 第二定理知, 它的和函数 $S(x)$ 在 $x=1$ 处左连续, 因而有

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n+1}=\lim_{x\to1^-}S(x)$$

由于 $S(0)=0, S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}=\frac{1}{1+x^3}$, 所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n+1}=\lim_{x\to 1^-}S(x)=\lim_{x\to 1}\int_0^x S'(t)\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^1\frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\left(\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$$

定理 6.19 (Tauber 定理))

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为 1，且

$$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=A$$

存在. 如果

$$a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$$

那么 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=A$.

定理 6.20

设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ 的收敛半径均为 R, 那么当 $x\in(-R,R)$ 时, 有

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$$

其中 $c_n=\sum_{l=0}^{n}a_l b_{n-1}(n=0,1,2,\cdots)$.

例题 6.14 由于当 $|x|<1$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$, 故若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径是 1，那么当 $|x|<1$ 时, 有

$$\frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}S_n x^n$$

这里 $S_n=\sum_{l=0}^{n}a_l$.

类推下去, 便有

$$\frac{1}{(1-x)^2}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(S_0+S_1+\cdots+S_n)\,x^n,$$

等等.

例题 6.15 证明: 当 $x\in(-1,1)$ 时, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n=\frac{2}{(1-x)^3}$$

证明 由例 7.15，知

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

再用一次例 7.15 的结果，即得

$$\frac{1}{(1-x)^3}=\frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n.$$

这就是要证的等式.

□

6.4 函数的幂级数展开式

定义 6.5

设 f 在 $x=x_0$ 处有任意阶导数，那么由 f 就能作出幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

称这个幂级数为 f 在 $x=x_0$ 处的 **Taylor 级数**，记为

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

特别地，当 $x_0=0$ 时，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

也称为 f 的 **Maclaurin 级数**.

♣

注 只要 f 在 $x=x_0$ 处有任意阶导数，就能作出它的 Taylor 级数. 但这个级数不一定是收敛的，即使收敛，也未必收敛到 f 自己. 例如函数

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-1/x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

容易计算

$$f^{(n)}(0)=0\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

因而它的 Taylor 级数收敛于 0，而不收敛于 f 自己.

定义 6.6

设 f 在 (x_0-R,x_0+R) 上有任意阶导数. 根据 Taylor 公式，对 (x_0-R,x_0+R) 内的任一点 x，有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)$ 是余项. 它有两种表示:

1. Lagrange 余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

2. Cauchy 余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{n!}(x-\eta)^n(x-x_0),$$

其中 ξ 和 η 是介于 x_0 和 x 之间的数.

命题 6.2

f 能在 (x_0-R,x_0+R) 上展开为 Taylor 级数的充分必要条件是, 对任意的 $x\in(x_0-R,x_0+R)$, 有

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

定理 6.21

如果存在常数 M, 使得对 (x_0-R,x_0+R) 内的所有 x 及一切充分大的正整数 n, 均有

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\leqslant M,$$

那么 f 能在 (x_0-R,x_0+R) 上展开为 Taylor 级数.

证明

$$\begin{aligned}|R_n(x)|&=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\\&\leqslant M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\leqslant M\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

由于级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R^n}{n!}$ 收敛, 所以 $\lim_{n\to\infty}\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}=0$, 从而得 ·

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0\quad(x_0-R<x<x_0+R)$$

□

例题 6.16 求函数 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的 Maclaurin 展开式.

解 因为

$$\begin{aligned}\left.(\sin x)^{(n)}\right|_{x=0}&=\left.\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\right|_{x=0}=\sin\frac{n\pi}{2}\\&=\begin{cases}0, & n=2k\\(-1)^k, & n=2k+1\end{cases}\end{aligned}$$

且

$$\left|(\sin x)^{(n)}\right|=\left|\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\right|\leqslant 1\quad(-\infty<x<+\infty)$$

所以根据定理 7.21 , 有

$$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

用同样的方法，可得

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

例题 6.17 求函数 $\dfrac{1}{(1-x)(2-x)}$ 的 Maclaurin 展开式.

解 易知

$$\frac{1}{(1-x)(2-x)}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2-x},$$

而

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\quad(-1<x<1)$$

$$\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\quad(-2<x<2)$$

因此当 $-1<x<1$ 时, 有

$$\frac{1}{(1-x)(2-x)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n$$

例题 6.18 把函数 $\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$ 展开为 Maclaurin 级数.

解 易知

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\quad(-1\leqslant x<1)$$

$$\frac{\ln(1-x)}{1-x}=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n\quad(-1<x<1).$$

例题 6.19 把函数 $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 展开为幂级数.

解 已知

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\quad(-1<x\leqslant 1)$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\quad(-1\leqslant x<1)$$

两式相减即得

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\quad(-1<x<1)$$

命题 6.3 (常见的 Taylor 展开)

1.

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

2.

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

3.
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

4.
$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (-1 < x \leqslant 1)$$

5.
$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1),$$

6.
$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

注 最后一个展开式的成立范围视 α 的数值而定.

6.5 多项式一致逼近连续函数

定义 6.7

设 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. 称
$$B_n(f;x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) B_i^n(x)$$
为 f 的 n 次 Bernstein 多项式.

定理 6.22 (Weierstrass 逼近定理)

闭区间 $[a,b]$ 上的任何连续函数 f 都能在这个区间上用多项式一致逼近.

6.6 幂级数在组合数学中的应用 *

6.7 两个著名的例子 *

第 7 章 函数列与函数项级数

7.1 一致收敛

定义 7.1 (逐点收敛)

设 $\{f_n\}$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的一个函数列.

1. 对 $\forall x_0 \in [a,b]$, 如果数列 $\{f_n(x_0)\}$ 收敛, 则称函数列 $\{f_n\}$ 在点 x_0 收敛.
2. 如果 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 内的每一点都收敛, 则称 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛或在 $[a,b]$ 上逐点收敛.

♣

注 现设 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛于 f, $[a,b]$ 内有无穷多个点, 这就意味着无穷多个数列收敛.

一般来说, 这些数列收敛的速度是不一致的, 有的收敛得快些, 有的慢些. 用 $\varepsilon - N$ 的语言来说, 对任给的 $x_0 \in [a,b]$ 和任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(x_0, \varepsilon)$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

这里的 $N = N(x_0, \varepsilon)$ 不仅与 ε 有关, 也与 x_0 有关. 对同一个 $\varepsilon > 0$, 不同的 x_0 所要求的 $N(\varepsilon, x_0)$ 值可以相差很大.

定义 7.2 (一致收敛)

设函数列 $\{f_n\}$ 在点集 I (可以是区间, 也可以不是区间) 上收敛于 f. 如果对任意给定的正数 ε, 都存在与 x 无关的正整数 $N(\varepsilon)$, 使得当 $n > N(\varepsilon)$ 时, 不等式

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

对 I 中一切的 x 都成立, 则称函数列 $\{f_n\}$ 在 I 上一致收敛于函数 f.

♣

定理 7.1

函数列 $\{f_n\}$ 在 I 上一致收敛于 f 的一个充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

♡

例题 7.1 讨论函数列 $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 和 $[\delta,+\infty)$ 上的一致收敛性, 其中 $\delta > 0$.

解 对任意给定的 $x > 0$, $f_n(x) \to 0 (n \to \infty)$.

1. 当 $\delta \leqslant x < +\infty$ 时, 由于

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{nx}{1+n^2x^2} \leqslant \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{nx} < \frac{1}{n\delta}$$

故

$$\beta_n = \sup_{\delta \leqslant x < +\infty} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{n\delta} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

由定理7.1知 $\{f_n\}$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛于 0 .

2. 当 $0 < x < +\infty$ 时, 由于

$$\beta_n \geqslant \left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \frac{1}{2}$$

所以 $\beta_n \nrightarrow 0$. 由定理 7.1知 $\{f_n\}$ 在 $(0,1)$ 上不一致收敛于 0 .

注 从这个例子看出，用定理 7.1来证明函数列不一致收敛比较方便.

例题 7.2 讨论函数列

$$f_n(x) = 2n^2 x\mathrm{e}^{-n^2x^2} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

在 $[0, 1]$ 上的一致收敛性.

解 已知它在 $[0, 1]$ 上收敛于 $f(x) = 0$. 由于

$$\beta_n \geqslant \left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = 2n\mathrm{e}^{-1} \nrightarrow 0$$

所以这个函数列在 $[0, 1]$ 上不一致收敛.

定理 7.2 (Cauchy 收敛原理)

设 $\{f_n\}$ 是定义在区间 I 上的一个函数列，那么 $\{f_n\}$ 在 I 上一致收敛的充分必要条件是，对任意的 $\varepsilon > 0$，存在正整数 $N(\varepsilon)$，当 $n > N(\varepsilon)$ 时，

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

对任意的 $x \in I$ 及任意的正整数 p 成立.

定义 7.3

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 是定义在区间 I 上的一个函数项级数，令 $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ 为它的部分和. 如果函数列 $\{S_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛于 $S(x)$，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 $S(x)$.

命题 7.1 (函数项级数 Cauchy 收敛原理)

定义在区间 I 上的函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛的一个充分必要的条件是，对任意的 $\varepsilon > 0$，存在正整数 $N(\varepsilon)$，当 $n > N(\varepsilon)$ 时，不等式

$$|u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

对任意的 $x \in I$ 及任意的正整数 p 成立。

注 利用函数列的 Cauchy 收敛原理，即可得到函数项级数的 Cauchy 收敛原理.

推论 7.1

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛的一个必要条件是，它的通项 $u_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 0.

例题 7.3 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $(0, +\infty)$ 上的一致收敛性.

解 容易知道该级数在 $(0, +\infty)$ 上收玫，其通项 $u_n(x) = n\mathrm{e}^{-nx}$ 。由于

$$\beta_n = \sup_{0<x<+\infty} u_n(x) \geqslant u_n\left(\frac{1}{n}\right) = n\mathrm{e}^{-1} \nrightarrow 0$$

故 $\{u_n(x)\}$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛于 0. 从而该级数在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛.

定理 7.3 (Weierstrass 判别法)

如果存在收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 使得在区间 I 上有不等式

$$|u_n(x)| \leqslant a_n \quad (n = 1, 2, \cdots), \tag{7.1}$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛.

注 满足条件式 7.1 的数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上的一个优级数. Weierstrass 判别法是说，在区间 I 上有收敛的优级数的函数项级数必在 I 上一致收敛.

例题 7.4 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛. 这是因为当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时, 有不等式

$$\left|\frac{x}{1+n^4x^2}\right| \leqslant \frac{1}{2n^2} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

定义 7.4

设 $\{f_n\}$ 是定义在区间 I 上的函数列.

1. 如果对每一个 $x \in I$, 都有正数 $M(x)$, 使得 $|f_n(x)| \leqslant M(x)$ 对 $n = 1, 2, \cdots$ 成立, 则称函数 $\{f_n\}$ 在 I 上逐点有界. 应当注意, 这里的 $M(x)$ 是随 x 的变化而变化的.
2. 如果能找到一个常数 M, 使得
$$|f_n(x)| \leqslant M \quad (n = 1, 2, \cdots)$$
对一切 $x \in I$ 成立, 则称函数列 $\{f_n\}$ 在 I 上一致有界.

定理 7.4 (Dirichlet 判别法)

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在区间 I 上满足下面两个条件:

1. $\{b_n(x)\}$ 对每个固定的 $x \in I$ 都是单调的, 且在区间 I 上一致收敛于 0 ;
2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的部分和在 I 上一致有界, 即
$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\right| \leqslant M \quad (x \in I, n = 1, 2, \cdots)$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

定理 7.5 (Abel 判别法)

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在区间 I 上满足下面两个条件:

1. $\{b_n(x)\}$ 对每个固定的 $x \in I$ 都是单调的, 且在 I 上一致有界, 即
$$|b_n(x)| \leqslant M \quad (x \in I, n = 1, 2, \cdots)$$

2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

例题 7.5 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $[\delta, 2\pi-\delta](0<\delta<\pi)$ 上一致收敛.

证明 令 $a_n(x)=\cos nx, b_n(x)=1/n$, 则 $b_n(x)$ 递减趋于 0, 并且

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| \leqslant \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}$$

由于 $x \in [\delta, 2\pi-\delta]$, 所以 $\sin \frac{x}{2} \geqslant \sin \frac{\delta}{2}$, 从而有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| \leqslant \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}$$

即 $\sum_{k=1}^{n} \cos kx$ 在 $[\delta, 2\pi-\delta]$ 上一致有界.

故由 Dirichlet 判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ 在 $[\delta, 2\pi-\delta]$ 上一致收敛.

同理, 可证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 的一致收敛性. □

注 例 7.5中的两个级数在 $(0,\pi)$ 上不是绝对收敛的. 这说明一致收敛的级数未必绝对收敛.

而级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ 在 $[0,1)$ 上绝对收玫，但并不一致收敛. 由此可见，绝对收敛和一致收敛是两个毫不相关的概念.

7.2 极限函数与和函数的性质

定理 7.6

如果函数列 $\{f_n\}$ 的每一项都在区间 I 上连续, 且 $\{f_n\}$ 在 I 上一致收敛于函数 f, 那么 f 也在 I 上连续.

定理 7.7

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛于 $S(x)$, 且每一项 $u_n(x)$ 都在 I 上连续, 那么和函数 $S(x)$ 也在 I 上连续.

例题 7.6 设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} \cos n\pi x^2$. 计算 $\lim_{x\to 1} f(x)$.

解 在区间 $[-2,2]$ 上考察这个函数. 由于

$$\left|\frac{x^n}{3^n} \cos n\pi x^2\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

故由 Weierstrass 判别法知原级数在 $[-2,2]$ 上一致收敛, 从而 f 是 $[-2,2]$ 上的连续函数. 于是

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}\cos n\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{3}{4}.$$

例题 7.7 证明: $f(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{x}{\ln n}\right)^n$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数.

证明 容易证明原级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是一致收敛的, 但对任意的正数 M, 当 $|x|\leqslant M$ 时, 有

$$\left(\frac{|x|}{\ln n}\right)^n \leqslant \left(\frac{M}{\ln n}\right)^n$$

由 Cauchy 判别法知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{M}{\ln n}\right)^n < +\infty$. 从而由 Weierstrass 判别法知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{x}{\ln n}\right)^n$ 在 $[-M,M]$ 上一致收敛, 因而 f 是 $[-M,M]$ 上的连续函数. 由于 M 是任意的正数, 所以 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

□

定理 7.8 (Dini 定理)

设函数列 $\{f_n\}$ 在有限闭区间 $[a,b]$ 上连续. 如果对每一个 $x\in[a,b]$, 数列 $\{f_n(x)\}$ 递减地趋于 0, 那么 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 0.

♡

证明 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 $N_x=N(\varepsilon,x)$, 使得

$$0\leqslant f_{N_x}(x)<\varepsilon$$

由于 f_{N_x} 在点 x 处连续, 故必存在 $\delta_x>0$, 使得当 $t\in[a,b]$ 且 $t\in(x-\delta_x,x+\delta_x)$ 时, 仍有

$$0\leqslant f_{N_x}(x)<\varepsilon \tag{7.2}$$

于是这些区间的并

$$\bigcup_{x\in[a,b]}(x-\delta_x,x+\delta_x)$$

构成 $[a,b]$ 的一个开覆盖. 由有限覆盖定理知, 从中可以选出有限个开区间

$$(x_i-\delta_{x_i},x_i+\delta_{x_i})\quad(i=1,\cdots,m)$$

它们仍构成 $[a,b]$ 的一个开覆盖. 令

$$N=\max\left(N_{x_1},\cdots,N_{x_m}\right)$$

由式7.2和 $\{f_n\}$ 的递减性知, 当 $n\geqslant N$ 时, 不等式

$$0\leqslant f_n(x)<\varepsilon$$

对一切 $x\in[a,b]$ 成立. 这正说明 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$ 在 $[a,b]$ 上一致地成立.

□

注 如果把定理中的有限闭区间 $[a,b]$ 改成开区间或无穷区间, 结论则不再成立. 例如,

1. $f_n(x)=x^n$ 在 $(0,1)$ 上单调递减地趋于 0, 但它不一致收敛于 0.
2. 如 $f_n(x)=x/n$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减地趋于 0, 但不一致地趋于 0.

定理 7.9 (级数 Dini 定理)

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的每一项在有限闭区间 $[a,b]$ 上连续且非负. 如果它的和函数 $S(x)$ 也在 $[a,b]$ 上

连续, 那么该级数在 $[a,b]$ 上一致收敛.

定理 7.10

如果 $[a,b]$ 上的可积函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f, 那么 f 也在 $[a,b]$ 上可积, 并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

注 如果 $\{f_n\}$ 不一致收敛于 f, 那么 f 可能在 $[a,b]$ 上不可积.

推论 7.2

如果 $[a,b]$ 上的连续函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f, 那么

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

定理 7.11

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$, 且每一项 $u_n(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积, 那么 $S(x)$ 也在 $[a,b]$ 上可积, 并且

$$\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x.$$

推论 7.3

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 且每一项 $u_n(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续, 那么

$$\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x.$$

定理 7.12

设函数列 $\{f_n\}$ 满足条件:

1. 每一个 f_n 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数;
2. 由导函数构成的函数列 $\{f_n'\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 g;
3. 至少在某一点 $x_0\in[a,b]$ 上收敛.

那么函数列 $\{f_n\}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛于某个连续可微函数 f, 并且对每一个 $x\in[a,b]$, 有

$$f'(x)=g(x),\ \text{即}\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)'=\lim_{n\to\infty}f_n'(x).$$

定理 7.13

设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 满足条件:

1. 每一项 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数;

2. 由各项的导函数组成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $g(x)$;
3. 至少在某一点 $x_0 \in [a,b]$ 处收敛.

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 其和函数 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导, 并且 $S'(x)=g(x)$, 即

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

例题 7.8 证明: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^4}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有二阶连续导函数, 并计算 $f''(x)$.

证明 容易看出, 原级数以及每一项求导后所得的级数都在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛, 因而有

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$$

对这个级数再逐项求导, 所得的级数仍在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛, 因而有

$$f''(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$$

□

7.3 由幂级数确定的函数

定理 7.14 (Abel 定理)

1. 如果幂级数 7.3在点 $x=x_0\ (x_0\neq 0)$ 处收敛, 那么它必在区间 $|x|<|x_0|$ 上绝对收敛.
2. 如果幂级数 7.3在点 $x=x_1$ 处发散, 那么它必在 $|x|>|x_1|$ 上发散.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{7.3}$$

定理 7.15 (Cauchy-Hadamard)

对给定的幂级数 7.3 , 记

$$R=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

那么

1. 当 $R=0$ 时, 级数 7.3 只在 $x=0$ 这一点处收敛;
2. 当 $R=+\infty$ 时, 级数 7.3 在整个数轴上都绝对收敛;
3. 当 $0<R<+\infty$ 时, 级数 7.3 在区间 $(-R,R)$ 内绝对收敛, 在 $[-R,R]$ 之外发散。

注 由此可见, 幂级数7.3 的收敛点集是区间 $(-R,R)$, R 称为级数 7.3的收敛半径, $(-R,R)$ 称为级数7.3 的收敛区间.

这时幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1 (x-x_0) + \cdots + a_n (x-x_0)^n + \cdots$$

的收敛区间是 $(x_0-R,\ x_0+R)$. 定理7.15实际上给出了计算 R 的公式.

注 必须指出, 在幂级数的收敛区间 $(-R,R)$ 的两个端点 $x=\pm R$ 处, 级数的收敛性没有肯定的结论. 下面三个级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}nx^n$$

的收敛半径都是 1, 收敛区间是 $(-1,1)$.

1. 第一个级数在左端点 $x=-1$ 处条件收敛, 在右端点 $x=1$ 处发散;
2. 第二个级数在两个端点处都绝对收敛;
3. 第三个级数在两个端点处都发散.

例题 7.9 计算幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}2^k x^{2k}$ 的收敛半径.

解

1. 当 $n=2k$ 时, $a_n=2^k$;
2. 当 $n=2k+1$ 时, $a_n=0$. 于是

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[2k]{2^k}=\sqrt{2}$$

因此 $R=1/\sqrt{2}$.

定理 7.16

设级数 7.3 的收敛半径为 R, 则对任意的 $r\in(0,R)$, 级数 7.3 在 $[-r,r]$ 上一致收敛.

这时称级数 7.3在 $(-R,R)$ 上**内闭一致收敛**.

证明 因为当 $x\in[-r,r]$ 时, 有

$$|a_nx^n|\leqslant|a_n|\,r^n,$$

而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|\,r^n$ 收敛, 故由 Weierstrass 判别法, 知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $[-r,r]$ 上一致收敛.

□

定理 7.17

设级数7.3 的收敛半径为 R, 则其和函数 $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 内连续, 而且在 $(-R,R)$ 内有任意阶导数:

$$S^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)a_nx^{n-k}\quad(k=1,2,\cdots).$$

注 这条定理所揭示的正是幂级数和多项式的相似之处.

推论 7.4

设级数 7.3的收敛半径为 R, $S(x)$ 是它的和函数, 那么对任意的 $x\in(-R,R)$, 有

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},\tag{7.4}$$

而且式 7.4右边幂级数的收敛半径仍为 R.

例题 7.10 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$ 的和.

解 易知这个幂级数的收玫半径 $R=1$. 为了求出它的和, 对幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (|x|<1)$$

逐项求导, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

因而

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (|x|<1).$$

注 在上式中取 x 的一些特殊值, 即可求得一些数项级数的和. 例如, 分别取 $x=\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}.$$

例题 7.11 把 $\ln(1+x)$ 和 $\arctan x$ 展开成幂级数。

解

1. 当 $x \in (-1,1)$ 时, 有

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

从 0 到 x 对上式逐项积分, 得

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (-1<x<1) \end{aligned}$$

2. 再对等式

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

逐项积分, 即得 $\arctan x$ 的展开式:

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (-1<x<1)$$

在收敛区间的两端点处, 和函数有如下性质.

定理 7.18 (Abel 第二定理)

设级数7.3的收敛半径为 R.

1. 如果在 $x=R$ 处级数 7.3 收敛, 则其和函数 $S(x)$ 在 $x=R$ 处左连续;
2. 如果在 $x=-R$ 处级数 7.3 收敛, 则 $S(x)$ 在 $x=-R$ 处右连续.

证明 设级数 7.3 在 $x=R$ 处收敛, 我们证明级数7.3 必在 $[0,R]$ 上一致收敛. 事实上，把级数7.3写成

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$$

由于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 收敛, 数列 $\left\{\left(\frac{x}{R}\right)^n\right\}$ 对 $[0, R]$ 中的每一个 x 而言是递减的, 且一致有界.

根据级数一致收敛的 Abel 判别法, 级数 7.3 在 $[0, R]$ 上一致收敛. 所以 $S(x)$ 在 $x = R$ 处左连续. 同理可证定理的另一半.

注 Abel 第二定理的逆定理是否成立?

即若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1 (设 $R = 1$), 且 $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$ 存在, 能否断言 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$?

很容易举出使上述结论不成立的例子. 例如, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ 的收敛半径为 1 , 它在 $(-1, 1)$ 内等于 $1/(1+x)$, 因而

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{2}$$

存在, 但级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ 显然是发散的.

例题 7.12 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

解 已知当 $x \in (-1, 1)$ 时, 有等式

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

因为上式右边的级数在 $x = 1$ 处收敛, 故由 Abel 第二定理, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{x\to 1^-} \ln(1+x) = \ln 2$$

用另一个展开式

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (-1 < x < 1)$$

可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

例题 7.13 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{3n+1}$ 的和.

解 考虑幂级数

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{3n+1} x^{3n+1}$$

易知, 它的收敛半径是 1 . 由于它在 $x = 1$ 处收敛, 故由 Abel 第二定理知, 它的和函数 $S(x)$ 在 $x = 1$ 处左连续, 因而有

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{3n+1} = \lim_{x\to 1^-} S(x)$$

由于 $S(0)=0, S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}=\frac{1}{1+x^3}$, 所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n+1}=\lim_{x\to 1^-}S(x)=\lim_{x\to 1}\int_0^x S'(t)\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^1\frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\left(\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$$

定理 7.19 (Tauber 定理))

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 1, 且

$$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=A$$

存在. 如果

$$a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$$

那么 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=A$.

定理 7.20

设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径均为 R, 那么当 $x\in(-R,R)$ 时, 有

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

其中 $c_n=\sum_{l=0}^{n}a_lb_{n-1}(n=0,1,2,\cdots)$.

例题 7.14 由于当 $|x|<1$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$, 故若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径是 1, 那么当 $|x|<1$ 时, 有

$$\frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}S_nx^n$$

这里 $S_n=\sum_{l=0}^{n}a_l$.

类推下去, 便有

$$\frac{1}{(1-x)^2}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(S_0+S_1+\cdots+S_n)\,x^n,$$

等等.

例题 7.15 证明: 当 $x\in(-1,1)$ 时, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n=\frac{2}{(1-x)^3}$$

证明 由例 7.15 , 知

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

再用一次例 7.15 的结果，即得

$$\frac{1}{(1-x)^3}=\frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n.$$

这就是要证的等式.

□

7.4 函数的幂级数展开式

定义 7.5

设 f 在 $x=x_0$ 处有任意阶导数, 那么由 f 就能作出幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

称这个幂级数为 f 在 $x=x_0$ 处的 **Taylor 级数**, 记为

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

特别地, 当 $x_0=0$ 时, 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

也称为 f 的 **Maclaurin 级数**.

♣

注 只要 f 在 $x=x_0$ 处有任意阶导数, 就能作出它的 Taylor 级数. 但这个级数不一定是收敛的, 即使收敛, 也未必收敛到 f 自己. 例如函数

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-1/x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

容易计算

$$f^{(n)}(0)=0\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

因而它的 Taylor 级数收敛于 0 , 而不收敛于 f 自己.

定义 7.6

设 f 在 (x_0-R,x_0+R) 上有任意阶导数. 根据 Taylor 公式, 对 (x_0-R,x_0+R) 内的任一点 x, 有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)$ 是余项. 它有两种表示:

1. Lagrange 余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

2. Cauchy 余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{n!}(x-\eta)^n(x-x_0),$$

其中 ξ 和 η 是介于 x_0 和 x 之间的数.

命题 7.2

f 能在 (x_0-R,x_0+R) 上展开为 Taylor 级数的充分必要条件是, 对任意的 $x\in(x_0-R,x_0+R)$, 有

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

定理 7.21

如果存在常数 M, 使得对 (x_0-R,x_0+R) 内的所有 x 及一切充分大的正整数 n, 均有

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\leqslant M,$$

那么 f 能在 (x_0-R,x_0+R) 上展开为 Taylor 级数.

证明

$$\begin{aligned}|R_n(x)|&=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\\&\leqslant M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\leqslant M\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

由于级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{R^n}{n!}$ 收敛, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}=0$, 从而得 ·

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0\quad(x_0-R<x<x_0+R)$$

□

例题 7.16 求函数 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的 Maclaurin 展开式.

解 因为

$$\begin{aligned}(\sin x)^{(n)}\Big|_{x=0}&=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\Big|_{x=0}=\sin\frac{n\pi}{2}\\&=\begin{cases}0, & n=2k\\(-1)^k, & n=2k+1\end{cases}\end{aligned}$$

且

$$\left|(\sin x)^{(n)}\right|=\left|\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\right|\leqslant 1\quad(-\infty<x<+\infty)$$

所以根据定理 7.21 , 有

$$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

用同样的方法，可得

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

例题 7.17 求函数 $\dfrac{1}{(1-x)(2-x)}$ 的 Maclaurin 展开式.

解 易知

$$\frac{1}{(1-x)(2-x)} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x},$$

而

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1 < x < 1)$$

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \quad (-2 < x < 2)$$

因此当 $-1 < x < 1$ 时, 有

$$\frac{1}{(1-x)(2-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n$$

例题 7.18 把函数 $\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$ 展开为 Maclaurin 级数.

解 易知

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad (-1 \leqslant x < 1)$$

$$\frac{\ln(1-x)}{1-x} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n \quad (-1 < x < 1).$$

例题 7.19 把函数 $\ln \dfrac{1+x}{1-x}$ 展开为幂级数.

解 已知

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (-1 < x \leqslant 1)$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad (-1 \leqslant x < 1)$$

两式相减即得

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad (-1 < x < 1)$$

命题 7.3 (常见的 Taylor 展开)

1.
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

2.
$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

3.
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

4.
$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (-1 < x \leqslant 1)$$

5.
$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1),$$

6.
$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

注 最后一个展开式的成立范围视 α 的数值而定.

7.5 多项式一致逼近连续函数

定义 7.7

设 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. 称
$$B_n(f;x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) B_i^n(x)$$
为 f 的 n 次 Bernstein 多项式.

定理 7.22 (Weierstrass 逼近定理)

闭区间 $[a,b]$ 上的任何连续函数 f 都能在这个区间上用多项式一致逼近.

7.6 幂级数在组合数学中的应用 *

7.7 两个著名的例子 *

第 8 章 含参变量积分

8.1 含参变量的常义积分

命题 8.1

如果函数 f 在闭矩形 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续, 那么

$$\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$$

是区间 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数.

注 注意, φ 在 u_0 处连续意味着

$$\lim_{u\to u_0}\varphi(u)=\varphi(u_0) \tag{8.1}$$

而

$$\varphi(u_0)=\int_a^b f(x,u_0)\,\mathrm{d}x=\int_a^b \lim_{u\to u_0} f(x,u)\mathrm{d}x,$$

这样, 式8.1可写为

$$\lim_{u\to u_0}\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x=\int_a^b \lim_{u\to u_0} f(x,u)\mathrm{d}x.$$

这就是说, f 的连续性保证了积分运算和极限运算可以交换次序.

命题 8.2

如果函数 f 及其偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ 都在闭矩形 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续, 那么函数

$$\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$$

在 $[\alpha,\beta]$ 上可微, 而且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\varphi(u)=\int_a^b\left(\frac{\partial}{\partial u}f(x,u)\right)\mathrm{d}x.$$

定理 8.1

如果函数 f 在闭矩形 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续, 那么

$$\int_a^\beta\left(\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u=\int_a^b\left(\int_a^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x$$

证明 下证, 对任意的 $t\in(\alpha,\beta]$, 有

$$\int_a^t\left(\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u=\int_a^b\left(\int_a^t f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x. \tag{8.2}$$

令 $t=\beta$ 即完成证明.

令

$$g(t)=\int_a^t\left(\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u=\int_a^t\varphi(u)\mathrm{d}u,$$

式中 $\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$;

$$h(t)=\int_a^b\left(\int_a^t f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x=\int_a^b \psi(x,t)\mathrm{d}x,$$

式中 $\psi(x,t)=\int_a^t f(x,u)\mathrm{d}u$.

$\varphi(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续, 所以

$$g'(t)=\varphi(t). \tag{8.3}$$

又因 $\psi(x,t)$ 和 $\dfrac{\partial\psi}{\partial t}=f(x,t)$ 都在 $[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续, 故

$$h'(t)=\int_a^b \frac{\partial\psi}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x=\varphi(t). \tag{8.4}$$

比较式8.3 和式8.4 即知 $g'(t)=h'(t)$, 所以 $g(t)=h(t)+c$. 由于 $g(\alpha)=h(\alpha)=0$, 所以 $c=0$. 因而 $g(t)=h(t)$.

□

例题 8.1 计算积分

$$I=\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x \quad (0<a<b).$$

解

1. 方法 1

$$\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int_a^b x^u\,\mathrm{d}u$$

那么

$$I=\int_0^1\left(\int_a^b x^u\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x$$

交换积分次序，即得

$$I=\int_a^b\left(\int_0^1 x^u\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u=\int_a^b \frac{\mathrm{d}u}{u+1}=\ln\frac{b+1}{a+1}.$$

2. 方法 2

在上述积分中把 a 看做常数，把 b 看做参变量，可得

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}b}=\int_0^1 x^b\,\mathrm{d}x=\frac{1}{b+1}$$

因此

$$I=\ln(b+1)+c$$

显然, 当 $b=a$ 时, $I=0$, 因而 $c=-\ln(a+1)$, 重新得到

$$I=\ln\frac{b+1}{a+1}$$

例题 8.2 计算积分

$$I(r)=\int_0^\pi \ln\left(1-2r\cos x+r^2\right)\mathrm{d}x.$$

解 未完待续

命题 8.3

设函数 f 在闭矩形 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续, 函数 $p(u),q(u)$ 都在 $[\alpha,\beta]$ 上连续, 而且当 $\alpha\leqslant u\leqslant\beta$ 时, $a\leqslant p(u)\leqslant b, a\leqslant q(u)\leqslant b$, 那么由式8.5所确定的函数 ψ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续.

$$\psi(u)=\int_{p(u)}^{q(u)} f(x,u)\mathrm{d}x \tag{8.5}$$

命题 8.4

如果函数 f 和 $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ 都在闭矩形 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续, 函数 $p(u),q(u)$ 都在 $[\alpha,\beta]$ 上可微, 而且当 $\alpha\leqslant u\leqslant\beta$ 时, $a\leqslant p(u)\leqslant b, a\leqslant q(u)\leqslant b$, 那么由式8.5 确定的函数 ψ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微, 并且

$$\psi'(u)=\int_{p(u)}^{q(u)}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\,\mathrm{d}x+f(q(u),u)q'(u)-f(p(u),u)p'(u)$$

例题 8.3 设

$$\psi(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\mathrm{e}^{t^2+xt}\,\mathrm{d}t$$

计算 $\psi'(0)$.

解

$$\psi'(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}t\mathrm{e}^{t^2+xt}\,\mathrm{d}t-\mathrm{e}^{\cos^2x+x\cos x}\sin x-\mathrm{e}^{\sin^2x+x\sin x}\cos x$$

因而

$$\psi'(0)=\int_0^1 t\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t-1=\frac{1}{2}(\mathrm{e}-3)$$

例题 8.4 设 f 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数,

$$\varphi(x)=\int_0^x\left(\int_{t^2}^{x^2}f(t,s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t$$

计算 $\varphi'(x)$.

解 记 $G(t,x)=\displaystyle\int_{t^2}^{x^2}f(t,s)\mathrm{d}s$, 则

$$\varphi(x)=\int_0^x G(t,x)\mathrm{d}t$$

因而

$$\varphi'(x)=\int_0^x\frac{\partial G}{\partial x}(t,x)\mathrm{d}t+G(x,x)=2x\int_0^x f\left(t,x^2\right)\mathrm{d}t$$

8.2 含参变量反常积分的一致收敛性

定义 8.1

设 D 和 E 是 $\mathbb{R}$ 的子集, u_0 (可以是 $+\infty$) 是 E 的极限点, $f(x,u)$ 在 $D\times E$ 上定义, 且对任意的 $x\in D$, 存在有限的极限:

$$\lim_{u\to u_0}f(x,u)=g(x)\ (\text{或者}\lim_{u\to+\infty}f(x,u)=g(x)\Big).$$

如果对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ (或者 $U>0$), 使得当 $u\in E, 0<|u-u_0|<\delta$ (或者 $u\in E, u>$

U) 时,

$$|f(x,u)-g(x)|<\varepsilon$$

对所有的 $x \in D$ 成立, 我们就说当 $u \to u_0$ (或者 $u \to +\infty$) 时, 函数 $f(x,u)$ 对 $x \in D$ 一致收敛于极限函数 $g(x)$. 容易看出, 如果 $D=[a,b], E=\mathbf{N}^*, u_0=+\infty$, 那么 $f(x,u)$ 就可写成 $f_n(x)$, 而

$$\lim_{u \to +\infty} f(x,u)=\lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

定理 8.2

当 $u \to u_0$ 时 (或者 $u \to +\infty$ 时), 函数 $f(x,u)$ 对 $x \in D$ 一致收敛于极限函数 $g(x)$ 的充分必要条件是, 对 $E \backslash \{u_0\}$ 中满足条件 $u_n \to u_0$ 的任意序列 $\{u_n\}$ (或者 E 中满足条件 $u_n \to +\infty$ 的任意序列 $\{u_n\}$), 相应的每一函数序列

$$\psi_n(x)=f\left(x,u_n\right) \quad (n=1,2,\cdots)$$

都在 D 上一致收敛于函数 $g(x)$.

证明 条件的必要性是显然的, 现在来证明条件的充分性. 用反证法. 如果当 $u \to u_0$ 时 (或者 $u \to +\infty$ 时) , 函数 $f(x,u)$ 对 $x \in D$ 不一致收敛于 $g(x)$, 那么对某个 $\varepsilon>0$, 不管 $n \in \mathbf{N}^*$ 怎样大, 总存在 $u_n \in E$, 使得

$$0<|u_n-u_0|<\frac{1}{n}\,(\text{或者} u_n>n\,),$$

有

$$\sup_{x \in D}\left|f\left(x,u_n\right)-g(x)\right| \geqslant \varepsilon_0 .$$

对这样的 $\{u_n\}$, 虽然有

$$u_n \in E \backslash \{u_0\}, u_n \to u_0\,(\text{或者} u_n \in E, u_n \to +\infty\,),$$

但相应的函数列

$$\psi_n(x)=f\left(x,u_n\right) \quad (n=1,2,\cdots)$$

不能在 D 上一致地收敛于 $g(x)$, 与假设矛盾.

□

定理 8.3

设 $f(x,u)$ 定义在 $[a,b] \times E$ 上, u_0 (可以是 $+\infty$) 是 E 的一个极限点, 并且对每个给定的 $u \in E$, $f(x,u)$ 是 x 的连续函数. 如果当 $u \to u_0$ 时 (或者当 $u \to +\infty$ 时), $f(x,u)$ 对 $x \in [a,b]$ 一致收敛于 $g(x)$, 那么 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

定理 8.4

设 $f(x,u)$ 定义在 $[a,b] \times E$ 上, u_0 (可以是 $+\infty$) 是 E 的一个极限点, 并且对每个给定的 $u \in E$, $f(x,u)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 如果当 $u \to u_0$ 时 (或者当 $u \to +\infty$ 时), $f(x,u)$ 对 $x \in [a,b]$ 一致收敛

于 $g(x)$, 那么 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 并且

$$\lim_{u\to u_0}\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \quad \left(\text{或者}\lim_{u\to+\infty}\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right).$$

定义 8.2

如果对任意给定的 $\varepsilon>0$, 总能找到只与 ε 有关的 $A_0(>a)$, 当, 不等式

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

对 $[\alpha,\beta]$ 中所有的 u 成立, 则称反常积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 关于 u 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

定义 8.3

设 a 是瑕点. 如果对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在只与 ε 有关的 $\delta_0>0$, 当 $0<\delta<\delta_0$ 时, 不等式

$$\left|\int_a^{a+\delta} f(x,u)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

对 $[\alpha,\beta]$ 中所有的 u 成立, 则称积分 $\displaystyle\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$ 关于 u 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

注 上面两个定义中的 $[\alpha,\beta]$ 可以换成开区间或无穷区间.

定理 8.5

记

$$\eta(A)=\sup_{u\in[\alpha,\beta]}\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right|.$$

积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛的充分必要条件是

$$\lim_{A\to+\infty}\eta(A)=0$$

例题 8.5 讨论积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-xu}\,\mathrm{d}x(u\geqslant 0)$ 的一致收敛性.

解 当 $u>0$ 时, 令 $xu=t$, 那么

$$\int_A^{+\infty} u\mathrm{e}^{-xu}\,\mathrm{d}x=\int_{uA}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-uA}$$

因此

$$\eta(A)=\sup_{u\in(0,+\infty)}\left|\int_A^{+\infty} u\mathrm{e}^{-xu}\,\mathrm{d}x\right|=1\nrightarrow 0$$

从而积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-xu}\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

注 但若任取 $\delta>0$, 考虑它在 $[\delta,+\infty)$ 上的一致收敛性, 那么由于

$$\eta(A)=\sup_{u\in[\delta,+\infty)}\left|\int_A^{+\infty} u\mathrm{e}^{-xu}\,\mathrm{d}x\right|=\mathrm{e}^{-\delta A}\to 0\quad(A\to+\infty),$$

故在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛.

命题 8.5 (Cauchy 收敛原理)

积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛的充分必要条件是, 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在只与 ε 有关的 A_0, 当 $A',A''>A_0$ 时, 不等式

$$\left|\int_{A''}^{A''} f(x,u)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

对 $[\alpha,\beta]$ 中所有的 u 都成立.

命题 8.6 (Weierstrass 判别法)

设 $f(x,u)$ 关于 x 在 $[a,+\infty)$ 上连续. 如果存在 $[\alpha,+\infty)$ 上的连续函数 F, 使得 $\int_a^{+\infty} F(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 而且对一切充分大的 x 及 $[\alpha,\beta]$ 上的一切 u, 都有

$$|f(x,u)|\leqslant F(x)$$

那么积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

例题 8.6 证明: 积分

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\alpha+u^2)t}\sin t\,\mathrm{d}t \quad (\alpha>0)$$

关于 u 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

证明 因为对任意的 $u\in[0,+\infty)$, 有不等式

$$\left|\mathrm{e}^{-(a+u^2)t}\sin t\right|\leqslant \mathrm{e}^{-at} \quad (0\leqslant t<+\infty),$$

而 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ 收敛, 故由 Weierstrass 判别法知, 积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\alpha+u^2)t}\sin t\,\mathrm{d}t$ 关于 u 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

□

例题 8.7 证明: 积分

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\alpha+u^2)t}\sin t\,\mathrm{d}u \quad (\alpha>0)$$

关于 t 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

证明 因为 $u=0$ 不是被积函数的瑕点, 所以只需证明积分

$$\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\alpha+u^2)t}\sin t\,\mathrm{d}u \tag{8.6}$$

关于 t 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛就行了. 由于

$$\left|\mathrm{e}^{-(\alpha+u^2)t}\sin t\right|\leqslant t\mathrm{e}^{-u^2t}\leqslant\frac{t}{1+u^2t}\leqslant\frac{1}{u^2},$$

而 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2}<+\infty$, 所以由 Weierstrass 判别法知式8.6关于 t 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

□

命题 8.7 (Dirichlet 判别法)

设 f,g 满足以下两个条件:

1. 当 $A \to +\infty$ 时, 积分 $\int_a^A f(x,u)\mathrm{d}x$ 对 $u \in [\alpha,\beta]$ 一致有界, 即存在常数 M, 使得当 A 充分大时, 对每个 $u \in [\alpha,\beta]$, 有
$$\left|\int_a^A f(x,u)\mathrm{d}x\right| \leqslant M$$
2. 对每个固定的 $u \in [\alpha,\beta]$, $g(x,u)$ 是 x 的单调函数, 且当 $x \to +\infty$ 时关于 u 一致地趋于 0.

那么积分
$$\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)\mathrm{d}x$$
在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

证明 因为 $g(x,u)$ 关于 x 是单调的, 故可用推广的第二积分平均值定理:
$$\int_{A'}^{A''} f(x,u)g(x,u)\mathrm{d}x = g\left(A',u\right)\int_{A'}^{\xi} f(x,u)\mathrm{d}x + g\left(A'',u\right)\int_{\xi}^{A''} f(x,u)\mathrm{d}x,$$
其中 $\xi \in [A',A'']$.

由条件 (1), 对任意的 $A', A'' > a$ 及一切 $u \in [\alpha,\beta]$, 有
$$\left|\int_{A'}^{\xi} f(x,u)\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_a^{\xi} f(x,u)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^{A'} f(x,u)\mathrm{d}x\right| \leqslant 2M,$$
$$\left|\int_{\xi}^{A''} f(x,u)\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_a^{A''} f(x,u)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^{\xi} f(x,u)\mathrm{d}x\right| \leqslant 2M$$
由条件 (2), 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $A_0 > a$, 只要 $x > A_0$,
$$|g(x,u)| < \frac{\varepsilon}{4M}$$
就对一切 $u \in [\alpha,\beta]$ 成立. 于是取 $A', A'' > A_0$, 即得
$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,u)g(x,u)\mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon \quad (\alpha \leqslant u \leqslant \beta)$$
因此, 由 Cauchy 收敛原理, 知积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

□

命题 8.8 (Abel 判别法)

设 f, g 满足以下两个条件:

1. 积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 关于 $u \in [\alpha,\beta]$ 一致收敛;
2. 对每个固定的 $u \in [\alpha,\beta]$, $g(x,u)$ 关于 x 单调, 且关于 u 一致有界.

那么积分
$$\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)\mathrm{d}x$$
在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

注 在实际情况中, 经常遇到的是 f, g 两个因子中只有一个包含参变量 u. 这时 Dirichlet 判别法和 Able 判别法叙述起来就可简单些. 例如, Abel 判别法可写成:

如果积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 函数 $g(x,u)$ 关于 x 单调, 且关于 $u\in[\alpha,\beta]$ 一致有界, 那么积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x,u)\mathrm{d}x$$

在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

例题 8.8 证明: 积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xu}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

证明 因为 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛，而函数 e^{-xu} 关于 x 递减，且 $\mathrm{e}^{-xu}\leqslant 1$ 对 $x\in[0,+\infty)$ 和 $u\in[0,+\infty)$ 成立, 故由 Abel 判别法知原积分在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

□

例题 8.9 证明: 积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin ux}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛, 这里 a 及 $\delta>0$ 是常数.

证明 一方面, 对任意的 $A>0$, 有

$$\left|\int_0^A \sin ux\,\mathrm{d}x\right| = \frac{1-\cos uA}{u}\leqslant\frac{2}{\delta}.$$

另一方面，当 $x\to+\infty$ 时，函数 $\frac{x}{a^2+x^2}$ 递减趋于 0. 故由 Dirichlet 判别法知该积分在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛.

□

例题 8.10 讨论积分

$$\int_0^1\frac{\sin(1/x)}{x^p}\,\mathrm{d}x$$

关于 p 在 $(0,2)$ 上的一致收敛性.

定理 8.6

设函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,+\infty)$ 上收敛于 g, 满足:

1. 对任意的 $A>a$, $\{f_n\}$ 在 $[a,A]$ 上一致收敛;
2. 积分 $\int_a^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$ 对 n 一致收敛.

那么积分 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 且

$$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

♡

定理 8.7

设 $E\subset\mathbb{R}$, $f(x,u)$ 定义在 $[a,+\infty)\times E$ 上, 又设 u_0 (可以是 $+\infty$) 是 E 的一个极限点, 满足:

1. 对任何 $A>a$，等式

$$\lim_{\substack{u\to u_0\\ u\in E}} f(x,u)=g(x)$$

在 $[a,A]$ 上一致地成立;

2. $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 对 $u\in E$ 一致收敛.

那么积分 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 且

$$\lim_{\substack{u\to u_0\\ u\in E}} \int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x.$$

♡

证明 由条件 (2) 知, 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $A_0>a$, 当 $A',A''>A_0$ 时,

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,u)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon \tag{8.7}$$

对任意的 $u\in E$ 成立.

再由条件 (1), 知

$$\lim_{u\to u_0} f(x,u) = g(x)$$

在 $[A',A'']$ 上一致地成立. 在式8.7中令 $u\to u_0$ ，即得

$$\left|\int_{A'}^{A''} g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon.$$

这就证明了 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收玫. 于是存在 $A_1>a$, 使得

$$\left|\int_{A_1}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{3},\quad \left|\int_{A_1}^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

对 $u\in E$ 成立. 由条件 (1) 知, 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $0<|u-u_0|<\delta$ 时 (若 $u_0=+\infty$, 则存在 U, 使得当 $u>U$ 时),

$$|f(x,u)-g(x)| < \frac{\varepsilon}{3(A_1-a)}$$

对 $[a,A_1]$ 中所有的 x 成立. 因而当 $0<|u-u_0|<\delta$ (或 $u>U$) 时, 有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x - \int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x\right| &\leqslant \int_a^{A_1} |f(x,u)-g(x)|\mathrm{d}x + \left|\int_{A_1}^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{A_1}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

□

例题 8.11 计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x (0<p<1)$.

例题 8.12 计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^\alpha} (\alpha>1)$.

8.3 含参变量反常积分

设含参变量的反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 对 $[\alpha,\beta]$ 中的每个 u 都收敛. 我们要研究由它所确定的函数

$$\varphi(u) = \int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x \tag{8.8}$$

的性质. 与连续函数项级数的一致收敛性保证了级数和函数的连续性一样, 积分 8.8的一致收敛性保证了 φ 的连续性.

定理 8.8

如果函数 $f(x,u)$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续, 而且积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛, 那么由式 8.8 所确定的函数 φ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续.

例题 8.13 讨论

$$\varphi(u)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^u\left(2+x^3\right)}\mathrm{d}x$$

的连续性区间.

解 先看函数 $\varphi(u)$ 的定义域是什么, 即上述积分在什么范围内收敛.

在 $x=0$ 附近,

$$\frac{\arctan x}{x^u\left(2+x^3\right)}\sim\frac{1}{2}\frac{1}{x^{u-1}}$$

因而当 $u<2$ 时, 积分 $\int_0^1\frac{\arctan x}{x^u\left(2+x^3\right)}\mathrm{d}x$ 收敛.

当 $x\to+\infty$ 时,

$$\frac{\arctan x}{x^u\left(2+x^3\right)}\sim\frac{\pi}{2}\frac{1}{x^{u+3}}$$

从而积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^u\left(2+x^3\right)}\mathrm{d}x$ 当 $u>-2$ 时收敛. 由此得知 $\varphi(u)$ 的定义域是 $(-2,2)$. 我们证明 φ 在 $(-2,2)$ 上连续, 为此, 只需证明 φ 在任意的 $[a,b]\subset(-2,2)$ 上连续就行了. 只需证明上面的反常含参积分在 $[a,b]$ 上一致收敛.

当 $x\in(0,1)$ 时, 设 $a\leqslant b<2$, 则存在常数 c, 使得

$$\frac{\arctan x}{x^u\left(2+x^3\right)}\leqslant\frac{c}{x^{a-1}}\leqslant\frac{c}{x^{b-1}}$$

而 $b-1<1$, 故由比较判别法, 知 $\int_{-1}^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^u\left(2+x^3\right)}\mathrm{d}x$ 在 $(-\infty,b]$ 上一致收敛.

当 $x\in[1,+\infty)$ 时, 设 $-2<a\leqslant u$, 则

$$\frac{\arctan x}{x^u\left(2+x^3\right)}\leqslant\frac{\pi}{2}\frac{1}{x^{u+3}}\leqslant\frac{\pi}{2}\frac{1}{x^{a+3}},$$

且 $a+3>1$. 故由比较判别法, 知积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^u\left(2+x^3\right)}\mathrm{d}x$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛. 把两个积分合在一起, 即知 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^u\left(2+x^3\right)}\mathrm{d}x$ 在 $[a,b]\subset(-2,2)$ 上一致收敛, 故 φ 在 $(-2,2)$ 上连续.

注 与级数的情形一样, 积分的一致收敛只是保证 φ 连续的一个充分条件, 但并不是必要的. 但在 f 非负的条件下, 积分的一致收敛便是 φ 连续的必要条件.

定理 8.9 (Dini 定理)

设 $f(x,u)$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续、非负. 如果由式8.8 定义的 φ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续, 那么积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

注 与级数的情形一样, 这里的 $[\alpha,\beta]$ 必须是有界的闭区间, 否则定理将不成立.

定理 8.10

设 $[\alpha,\beta]$ 是一有限区间, 那么在定理8.8的同样条件下, φ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积, 且

$$\int_\alpha^\beta \varphi(u)\mathrm{d}u = \int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x.$$

也就是说, x 与 u 的积分次序可以交换:

$$\int_\alpha^\beta\left(\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u = \int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x.$$

例题 8.14 设 $a>0, b>0, c$ 是任意的实数. 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\cos cx\,\mathrm{d}x$.

解 因为 $\displaystyle\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}=\int_a^b \mathrm{e}^{-ux}\,\mathrm{d}u$, 所以

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\cos cx\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}\int_a^b\left(\mathrm{e}^{-ux}\cos cx\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_a^b\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ux}\cos cx\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u\\ &= \int_a^b\frac{u}{u^2+c^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}\end{aligned}$$

上面两个积分之所以能交换, 是因为积分

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ux}\cos cx\,\mathrm{d}x$$

关于 $u\in[a,b]$ 一致收敛.

定理 8.11

设 f 满足下列条件:

1. f 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,+\infty)$ 上连续;
2. 积分
$$\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x,\quad \int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u$$
分别关于 u 在任何区间 $[\alpha,\beta]$ 上和关于 x 在任何区间 $[a,b]$ 上一致收敛;
3. 积分
$$\int_a^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty}|f(x,u)|\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x,\quad \int_a^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty}|f(x,u)|\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u$$
中至少有一个存在.

那么积分

$$\int_a^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x,\quad \int_a^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u$$

都存在, 且相等, 即

$$\int_a^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u.$$

定理 8.12

设 f 满足下列条件:

1. f 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,+\infty)$ 上连续、非负;
2. 函数
$$\varphi(u)=\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x,\quad \psi(x)=\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u$$
分别在 $[\alpha,+\infty)$ 和 $[a,+\infty)$ 上连续;
3. 积分
$$\int_a^{+\infty}\varphi(u)\mathrm{d}u,\quad \int_a^{+\infty}\psi(x)\mathrm{d}x$$
中至少有一个收敛.

那么 (3) 中另一个积分也收敛, 而且两者相等.

例题 8.15 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解 记 $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x>0$. 作变换 $x=ut(u>0)$, 得
$$I=\int_0^{+\infty}u\mathrm{e}^{-u^2t^2}\,\mathrm{d}t$$
如果记
$$\varphi(u)=\int_0^{+\infty}u\mathrm{e}^{-u^2t^2}\,\mathrm{d}t$$
那么 $\varphi(u)=I$ 是个取常数值的函数. 现在有
$$\begin{aligned}I^2=I\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u&=\int_0^{+\infty}I\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u\\&=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}u\mathrm{e}^{-u^2t^2}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u\\&=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}u\mathrm{e}^{-u^2(1+t^2)}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u\end{aligned}$$
如果这两个无穷积分能交换次序, 那么
$$I^2=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}u\mathrm{e}^{-u^2(1+t^2)}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}$$
综上, 有
$$I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
现在来证明交换次序的合理性. 因为 $f(t,u)=u\mathrm{e}^{-u^2(1+t^2)}$ 在 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上是连续非负,
$$\varphi(u)=\int_0^{+\infty}u\mathrm{e}^{-u^2(1+t^2)}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-u^2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2t^2}\,\mathrm{d}(ut)=I\mathrm{e}^{-u^2}\quad(u>0),$$
$\varphi(0)=0$, 所以 $\varphi(u)$ 在 $[\delta,+\infty)(\delta>0)$ 上是连续函数. 而
$$\psi(t)=\int_0^{+\infty}u\mathrm{e}^{-u^2(1+t^2)}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2}$$

是 $[0,+\infty)$ 上的连续函数. 可得

$$\int_{\delta}^{+\infty}\left(\int_{0}^{+\infty} u\mathrm{e}^{-u^2\left(1+t^2\right)}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u=\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{\delta}^{+\infty} u\mathrm{e}^{-u^2\left(1+t^2\right)}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t$$
$$=\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\delta^2\left(1+t^2\right)}}{2\left(1+t^2\right)}\mathrm{d}t$$

记 $f(\delta,t)=\dfrac{\mathrm{e}^{-\delta^2\left(1+t^2\right)}}{2\left(1+t^2\right)}$, 它在 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上连续. 由于

$$0<\frac{\mathrm{e}^{-\delta^2\left(1+t^2\right)}}{2\left(1+t^2\right)}\leqslant\frac{1}{1+t^2}$$

所以积分

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\delta^2\left(1+t^2\right)}}{2\left(1+t^2\right)}\mathrm{d}t$$

关于 δ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛, 从而 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(\delta,t)\mathrm{d}t$ 在 $\delta=0$ 处连续, 得到

$$\begin{aligned}
I^2&=\lim_{\delta\to0}\int_{\delta}^{+\infty}\left(\int_{0}^{+\infty} u\mathrm{e}^{-u^2\left(1+t^2\right)}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u\\
&=\lim_{\delta\to0}\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\delta^2\left(1+t^2\right)}}{2\left(1+t^2\right)}\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

例题 8.16 计算 Fresnel(菲涅耳, 1788 1827) 积分 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\sin x^2\,\mathrm{d}x$.

定理 8.13

如果函数 f 和 $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ 都在 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续, 且积分 $\displaystyle\int_{a}^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛, 那么 $\varphi(u)=\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微, 且

$$\varphi'(u)=\int_{a}^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\,\mathrm{d}x\quad(\alpha\leqslant u\leqslant\beta).$$

例题 8.17 利用对参数的微分法, 计算积分

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax^2}-\mathrm{e}^{-bx^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x\quad(a>0,b>0)$$

解 把 a 看做参数, 记上面的积分为 $I(a)$, 那么

$$I'(a)=-\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x\tag{8.9}$$

为了说明微分运算和积分运算的交换是允许的，我们把 a 限制在区间 $[\delta,+\infty)$ 中, 这里 δ 是任意的正数. 于是

$$\mathrm{e}^{-ax^2}\leqslant\mathrm{e}^{-\delta x^2}$$

由于 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\delta x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛，故由 Weierstrass 判别法，知积分 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x$ 关于 a 在 $[\delta,+\infty)$ 上一

致收敛, 从而可知上面的运算是允许的. 由于 $\delta > 0$ 是任意的, 故式 8.9在 $(0, +\infty)$ 上成立. 得

$$I'(a) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}$$

因此 $I(a) = -\sqrt{\pi a} + c$. 由于 $I(b) = 0, c = \sqrt{\pi b}$, 故最后得

$$I(a) = \sqrt{\pi}(\sqrt{b} - \sqrt{a}).$$

例题 8.18 计算积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} \cos bx \,\mathrm{d}x (a > 0)$.

解 把 b 看做参数, 记上面的积分为 $I(b)$. 先证明

$$I'(b) = -\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-ax^2} \sin bx \,\mathrm{d}x \tag{8.10}$$

对任意的 $b \in (-\infty, +\infty)$ 成立。事实上，由于

$$\left| x\mathrm{e}^{-ax^2} \sin bx \right| \leqslant x\mathrm{e}^{-ax^2}$$

而 $\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-ax^2} \,\mathrm{d}x$ 收敛，故由 Weierstrass 判别法，知式8.10右边的积分对 $b \in (-\infty, +\infty$ ）一致收敛，因而式8.10成立.

用分部积分法，容易算出

$$I'(b) = -\frac{b}{2a} I(b)$$

由此得

$$\ln I(b) = -\frac{b^2}{4a} + c$$

或者

$$I(b) = c'\mathrm{e}^{-b^2/(4a)}$$

已知 $I(0) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/a}$, 所以

$$I(b) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-b^2/(4a)}$$

8.4 Γ 函数和 B 函数

定义 8.4

含参变量的反常积分

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}\mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{B}(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} \,\mathrm{d}t$$

分别称为 Γ (Gamma) 函数和 B (Beta) 函数, 前者是含一个参变量 s 的函数, 后者是含两个参变量 p, q 的函数, 它们都是由含参变量的反常积分所确定的非初等函数. 这两个积分都是由 Euler 首先提出并研究的. ♣

定理 8.14

$\Gamma(s)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续, 且有各阶连续导数. ♡

命题 8.9

Γ 函数具有以下三条性质:

1. 对任意的 $s>0, \Gamma(s)>0$, 且 $\Gamma(1)=1$;
2. 对任意的 $s>0, \Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$;
3. $\ln\Gamma(s)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数.

证明

1. 由定义，Trivial.
2. 由分部积分法, 得
$$\Gamma(s+1)=\int_0^{+\infty} t^s \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=-\left.t^s \mathrm{e}^{-t}\right|_0^{+\infty}+s\int_0^{+\infty} t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=s\Gamma(s).$$
3. 只要证明对 $p\in(1,+\infty), \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1, s_1, s_2\in(0,+\infty)$, 有不等式
$$\ln\Gamma\left(\frac{s_1}{p}+\frac{s_2}{q}\right)\leqslant\frac{1}{p}\ln\Gamma\left(s_1\right)+\frac{1}{q}\ln\Gamma\left(s_2\right),$$
或者
$$\Gamma\left(\frac{s_1}{p}+\frac{s_2}{q}\right)\leqslant\left(\Gamma\left(s_1\right)\right)^{1/p}\left(\Gamma\left(s_2\right)\right)^{1/q}.$$
事实上, 由 Hölder 不等式, 即得
$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{s_1}{p}+\frac{s_2}{q}\right) &=\int_0^{+\infty} t^{s_1/p+s_2/q-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\\ &=\int_0^{+\infty}\left(t^{(s_1-1)/p}\mathrm{e}^{-t/p}\right)\left(t^{(s_2-1)/q}\mathrm{e}^{-t/q}\right)\mathrm{d}t\\ &\leqslant\left(\int_0^{+\infty} t^{s_1-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}\left(\int_0^{+\infty} t^{s_2-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)^{1/q}\\ &=\left(\Gamma\left(s_1\right)\right)^{1/p}\left(\Gamma\left(s_2\right)\right)^{1/q}\end{aligned}$$
这里我们使用了无穷积分的 Hölder 不等式, 这从通常的 Hölder 不等式取极限就能得到.

□

推论 8.1

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1)&=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=\cdots\\&=n(n-1)\cdots 1\Gamma(1)=n!\end{aligned}$$

定理 8.15

设 $(0,+\infty)$ 上的函数 f 满足以下三个条件:

1. 对任意的 $x>0, f(x)>0$ 且 $f(1)=1$.
2. 对任意的 $x>0, f(x+1)=xf(x)$.
3. $\ln f$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数.

那么 $f(x)=\Gamma(x)$ 对任何 $x>0$ 成立.

注 由 Bohr 和 Mollerup 在 1922 年首先发现的.

命题 8.10

对任意的 $x>0$, 有

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

命题 8.11

对任意的 $p>0, q>0$, 有

$$\mathrm{B}(p+1,q)=\frac{p}{p+q}\,\mathrm{B}(p,q).$$

证明 使用分部积分

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}(p+1,q)&=\int_0^1 t^p(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t\\
&=\int_0^1\left(\frac{t}{1-t}\right)^p(1-t)^{p+q-1}\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{p+q}\int_0^1\left(\frac{t}{1-t}\right)^p\left[-\mathrm{d}((1-t)^{p+q})\right]\\
&=\frac{p}{p+q}\int_0^1\left(\frac{t}{1-t}\right)^{p-1}(1-t)^{p+q}\frac{1}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{p}{p+q}\,\mathrm{B}(p,q).
\end{aligned}$$

□

定理 8.16

对任意的 $p>0, q>0$, 有

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

证明 固定 $q>0$, 令

$$f(p)=\frac{\Gamma(p+q)\mathrm{B}(p,q)}{\Gamma(q)}.$$

下证 f 满足三条性质. 首先

$$\begin{aligned}
f(p+1)&=\frac{1}{\Gamma(q)}\Gamma(p+1+q)\mathrm{B}(p+1,q)\\
&=\frac{1}{\Gamma(q)}(p+q)\Gamma(p+q)\frac{p}{p+q}\,\mathrm{B}(p,q)\\
&=pf(p)
\end{aligned}$$

其次

$$\mathrm{B}(1,q)=\int_0^1(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{q}$$

可得

$$f(1)=\frac{\Gamma(1+q)\mathrm{B}(1,q)}{\Gamma(q)}=\frac{\Gamma(q+1)}{q\Gamma(q)}=1$$

另外，显然有 $f(p)>0$.

最后证明 $\ln f$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数. 由于

$$\ln f(p)=\ln\Gamma(p+q)+\ln\mathrm{B}(p,q)-\ln\Gamma(q),$$

用与证明 $\ln\Gamma$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数完全相同的方法，可以证明 $\ln \mathrm{B}(p,q)$ 是关于变量 p 在 $(0,+\infty)$ 上的凸函数，因而 $\ln f$ 也是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数.

综上，$f(p)=\Gamma(p)$.

□

命题 8.12

$\mathrm{B}(p,q)$ 在 $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ 上连续且有各阶连续偏导数;

1. $\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p)(p>0,q>0)$;
2. $\mathrm{B}(p+1,q+1)=\dfrac{pq}{(p+q+1)(p+q)}\mathrm{B}(p,q)(p>0,q>0)$.

注 证明是显然的.

例题 8.19 计算积分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^\alpha x\sin^\beta x\,\mathrm{d}x(\alpha>-1,\beta>-1)$.

解 令 $t=\sin^2 x$ ，则有

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\cos^\alpha x\sin^\beta x\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{(\beta-1)/2}(1-t)^{(\alpha-1)/2}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{\beta+1}{2},\frac{\alpha+1}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}\end{aligned}$$

注

1. 如果在上式中取 $\alpha=\beta=0$, 则可得到
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$
2. 如果在 $\Gamma(s)=\displaystyle\int_0^{+\infty}t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ 中作变量代换 $t=x^2$, 则有
$$\Gamma(s)=2\int_0^{+\infty}x^{2s-1}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$
令 $s=1/2$, 并利用本题的结果, 我们再一次得到
$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
3. 由于当 $\alpha=m,\beta=n$ 为正整数时, $\Gamma((m+1)/2)$ 和 $\Gamma((n+1)/2)$ 的值容易算出, 这时类似于本题这种积分的值便可直接写出. 例如
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 x\sin^4 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(6)}$$
而
$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)&=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}\\\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)&=\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{15}{8}\sqrt{\pi}\end{aligned}$$
所以
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 x\sin^4 x\,\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{512}.$$

例题 8.20 证明: $\mathrm{B}(p,q)$ 可表示为

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}\,\mathrm{d}x\quad(p>0,q>0)\tag{8.11}$$

利用上面的公式, 计算积分 $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{3/2}}{(1+x^5)^3}\,\mathrm{d}x$.

解 对

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t$$

作变量代换 $t=1/(1+x)$, 即得要证明的式子. 对积分 I 作变量代换 $x^5=t$, 得

$$I=\frac{1}{5}\int_0^{+\infty}\frac{t^{-1/2}}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{5}\int_0^{+\infty}\frac{t^{1/2-1}}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t$$

利用式8.11, 即得

$$I=\mathrm{B}\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{5}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)}=\frac{3}{40}\pi$$

例题 8.21 计算级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\binom{2n}{n}}$ 的和.

解

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\binom{2n}{n}}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{n!n!}{(2n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!n!}{(2n)!}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(n)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{B}(n+1,n)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 t^n(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

由于当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时, $0\leqslant t(1-t)\leqslant 1/4$, 所以

$$0\leqslant t^n(1-t)^{n-1}\leqslant\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

因而级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}t^n(1-t)^{n-1}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛, 于是有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\binom{2n}{n}}&=\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}t^n(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t=\int_0^1 t\sum_{n=1}^{\infty}(t(1-t))^{n-1}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\frac{t}{1-t(1-t)}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{t}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\end{aligned}$$

命题 8.13 (加倍公式)

对任意的 $s>0$, 有

$$\Gamma(2s)=\frac{2^{2s-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right).$$

命题 8.14 (余元公式)

对任意的 $p \in (0,1)$, 有

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

注 根据余元公式, 只要知道 Γ 在 $(0,1/2)$ 上的值, 便能算出 Γ 在 $(0,1)$ 上的值, 从而算出 Γ 在 $(0,+\infty)$ 上的值.

定理 8.17 (Stirling)

对任意的 $x>0$, 存在 $\theta(x) \in (0,1)$, 使得

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^x \mathrm{e}^{\frac{\theta(x)}{12x}}.$$

推论 8.2

对于任意的实数 a, 有

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a\Gamma(x)}{\Gamma(x+a)} = 1$$

例题 8.22 计算极限 $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \sqrt{\alpha}\displaystyle\int_0^1 \left(1-x^2\right)^a \,\mathrm{d}x$.

解 令 $x^2 = t$, 则

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(1-x^2\right)^\alpha \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^a \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\alpha+1\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)}\end{aligned}$$

由推论，可得

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to+\infty}\sqrt{\alpha}\int_0^1 \left(1-x^2\right)^\alpha \mathrm{d}x &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\sqrt{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\end{aligned}$$