分析

作者：王子毅
组织：扬州大学数学科学学院
时间：August 15, 2024
版本：0.0
Bio:Information

ElegantLaTeX Program

求知若饥，虚心若愚

目录

前言

这份笔记是笔者在 2024 年 8 月复习《数学分析》时阅读中科大史济怀教授编写的《数学分析教程》第 3 版时所整理的，主要整理了所有书中的定义、定理、命题、推论，a.e. 没有证明。

这份笔记的主要目的是帮助已经学过一遍数学分析的同学在复习的时候快速回忆一些结果。

第 1 章 级数

内容提要

- ❏ 无穷级数基本性质
- ❏ 正项级数比较判别法

1.1 无穷级数基本性质

定义 1.1

无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1.1}$$

的前 n 项和

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

称为这个级数的第 n 个部分和。如果这些部分和构成的数列 $\{S_n\}$ 有有限的极限 S, 就说级数1.1是收敛的，其和为 S ，记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

如果数列 $\{S_n\}$ 没有有限的极限, 就说级数1.1是发散的.

♣

例题 1.1 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

当 $\alpha > 1$ 时收敛, 当 $\alpha \leqslant 1$ 时发散. 这一事实在下面的讨论中经常要用到.

命题 1.1 (级数收敛必要条件)

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

♠

例题 1.2 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \sin\dfrac{1}{n}$ 发散. 这是因为

$$a_n = n\sin\frac{1}{n} \to 1 \neq 0 \quad (n \to \infty).$$

命题 1.2

如果级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 和 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ 都收敛, 那么级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$$

也收敛，且

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k+\beta b_k)=\alpha\sum_{k=1}^{\infty}a_k+\beta\sum_{k=1}^{\infty}b_k,$$

这里 α,β 是任意两个实数.

命题 1.3

设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 是一收敛级数. 如果把级数的项任意结合而不改变其先后的次序, 得新级数

$$(a_1+\cdots+a_{k_1})+(a_{k_1+1}+\cdots+a_{k_2})+\cdots+(a_{k_{n-1}+1}+\cdots+a_{k_n})+\cdots, \tag{1.2}$$

这里正整数 $k_j(j=1,2,\cdots)$ 满足 $k_1<k_2<\cdots$, 那么新级数也收敛, 且与原级数有相同的和.

注 如果级数 1.2 在同一括号中的项都有相同的符号, 那么从级数 1.2收敛, 便能推出原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 而且两者有相同的和.

命题 1.4

在级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 前面去掉有限项或加上有限项, 不影响级数的敛散性.

1.2 正项级数判别法

定义 1.2 (正项级数)

如果对 $n=1,2,\cdots$, 都有 $a_n\geqslant 0$, 就称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数.

注 只有有限个负项的级数也可以当成正项级数看待.

定理 1.1

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充分必要条件是其部分和数列 $\{S_n\}$ 有界.

定理 1.2 (正项级数比较判别法)

设有两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$. 如果从第 N 项开始有不等式

$$a_n\leqslant b_n,$$

那么:

1. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛;

2. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

♡

例题 1.3 级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(\ln n)^{-\ln n}$ 收敛. 因为当 n 充分大时，有不等式

$$(\ln n)^{\ln n} = \mathrm{e}^{\ln n \ln\ln n} = n^{\ln\ln n} > n^2,$$

即当 $n > \mathrm{e}^9$ 时，有

$$(\ln n)^{-\ln n} < \frac{1}{n^2},$$

故原级数收敛.

定理 1.3 (比较判别法的极限形式)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 是两个正项级数. 如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = l,$$

那么:

1. 若 $0 < l < +\infty$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散.
2. 若 $l = 0$, 则当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.
3. 若 $l = +\infty$, 则当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散.

♡

例题 1.4 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{x}{n}\right)$ 的敛散性.

解

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{x}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{x^2}{2},$$

所以不论 x 取什么值, 级数都收敛.

定理 1.4 (Cauchy 积分判别法)

设当 $x \geqslant 1$ 时, $f(x) \geqslant 0$ 且递减, 那么无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同敛散.

♡

例题 1.5 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}$ 当 $\alpha > 1$ 时收敛, 当 $\alpha \leqslant 1$ 时发散.

证明 函数 $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ 满足 Cauchy 积分判别法的条件, 因而原级数与无穷积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ 同敛散. 而后者当 $\alpha > 1$ 时收敛, 当 $\alpha \leqslant 1$ 时发散.

□

例题 1.6 讨论级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ 的敛散性.

解 根据积分判别法, 原级数与积分

$$\int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^{\alpha}}$$

同敛散. 容易看出, 这个反常积分当 $\alpha > 1$ 时收敛, 当 $\alpha \leqslant 1$ 时发散.

1.3 正项级数其他判别法

定理 1.5 (Cauchy 判别法)

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个正项级数.

1. 如果存在正数 $q < 1$, 使得对充分大的 n, 有

$$\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1,$$

   那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

2. 如果对无穷多个 n, 有

$$\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1,$$

   那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

定理 1.6 (Cauchy 判别法的极限形式)

设对所有的 $n = 1, 2, \cdots$, 有 $a_n \geqslant 0$, 且

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

那么:

1. 当 $q < 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 当 $q > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;
3. 当 $q = 1$ 时, 无法判断.

例题 1.7 对级数

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots$$

而言, $a_{2n-1} = \dfrac{1}{2^n}$, $a_{2n} = \dfrac{1}{3^n}$, 所以

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n-1]{a_{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n/(2n-1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{a_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

因而 $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1/\sqrt{2} < 1$. 从而由 Cauchy 判别法知原级数收敛.

引理 1.1

设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 是两个正数列. 如果当 $n \geqslant n_0$ 时, 有不等式

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

那么:

1. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛;
2. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

♡

定理 1.7 (D'Alembert 判别法)

设 $a_n > 0(n = 1, 2, \cdots)$.

1. 如果存在正数 $q < 1$, 使得当 $n \geqslant n_0$ 时, 有
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q,$$
那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 如果当 $n \geqslant n_0$ 时, 有
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1,$$
那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

♡

注 在引理1.1中取 $b_n = q^n(0 < q < 1)$, 就得到 D' Alembert (达朗贝尔, 1717 $\sim$ 1783) 判别法.

定理 1.8 (D'Alembert 判别法的极限形式)

设 $a_n > 0(n = 1, 2, \cdots)$.

1. 如果 $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$;
2. 如果 $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q' > 1$, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$;
3. 如果 $q = 1$ 或 $q' = 1$, 那么无法判断.

♡

注 若 $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$ 不能断言 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

命题 1.5

设 $\{a_n\}$ 是任意的正数列, 那么

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

♠

注

1. 从这个定理可以看出, 凡是用 D'Alembert 判别法能判别的, 用 Cauchy 判别法也一定能判别; 但反之不然.
2. 由此可见, Cauchy 判别法比 D'Alembert 判别法适用的面要宽些, 但在有些场合中, 使用 D'Alembert

判别法要方便些.

3. 这两个判别法的适用面都不算宽, 原因是它们只能判别一些比几何级数收敛得还快的级数.

定理 1.9 (Raabe 判别法)

设 $a_n > 0(n = 1, 2, \cdots)$

1. 如果存在 $r > 1$, 使得当 $n > n_0$ 时, 有
$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geqslant r,$$
那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.
2. 如果对充分大的 n, 有
$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leqslant 1,$$
那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

命题 1.6

设正数列 $\{a_n\}$ 满足
$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = l,$$
或
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{l}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \to \infty).$$

1. 当 $l > 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 当 $l < 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;
3. 当 $l = 1$ 时, 无法判断.

例题 1.8 下面给出 Raabe 判别法中 $l = 1$ 时的例子

事实上, 有
$$\begin{aligned}
\frac{\ln(n+1)}{\ln n} &= \frac{\ln n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} \\
&= 1 + \frac{1}{\ln n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{\ln n}\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= 1 + \frac{1}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right) \quad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

因此
$$\begin{aligned}
\frac{n+1}{n}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{\alpha} &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\alpha}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right) \\
&= 1 + \frac{1}{n} + \frac{\alpha}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)
\end{aligned} \tag{1.3}$$

现取 $a_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$. 已知当 $\alpha > 1$ 时, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n < +\infty$; 当 $\alpha \leqslant 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.
但由式1.3，即得

$$
\begin{aligned}
n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) &= n\left(\frac{n+1}{n}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^\alpha - 1\right) \\
&= n\left(\frac{1}{n} + \frac{\alpha}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right). \\
&= 1 + \frac{\alpha}{\ln n} + o\left(\frac{1}{\ln n}\right) \to 1 \quad (n \to \infty).
\end{aligned}
$$

这就说明当 $l = 1$ 时, Raabe 判别法无效.

练习 1.1 设 $\alpha > 0$. 证明：级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\dbinom{\alpha}{n}\right|$ 收敛，这里

$$
\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.
$$

证明

$$
\begin{aligned}
n\left(\left|\binom{\alpha}{n}\right| / \left|\binom{\alpha}{n+1}\right| - 1\right) &= n\left(\frac{n+1}{n-\alpha} - 1\right) \\
&= \frac{n(1+\alpha)}{n-\alpha} \to 1 + \alpha > 1,
\end{aligned}
$$

所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\dbinom{\alpha}{n}\right| < +\infty$.

□

定理 1.10 (Gauss 判别法)
设正数列 $\{a_n\}$ 满足条件

$$
\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\beta}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right) \quad (n \to \infty).
$$

1. 当 $\beta > 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 当 $\beta < 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

1.4 任意项级数判别法

命题 1.7 (Cauchy 收敛原理)
级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 当 $n > N$ 时,

$$
|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon
$$

对一切正整数 p 成立.

注 这个定理告诉我们，就收敛级数而言，对事先给定的任意正数 ε ，在充分多项之后任意截取一段 (不论这一段有多少项), 它的绝对值可以小于 ε.

推论 1.1

设 $\{a_n\}$ 是递减的正数列. 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么必有 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

注 逆命题并不成立. 即若 $\{a_n\}$ 是递减的正数列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$, 则未必有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$.

最简单的例子是 $a_n = \dfrac{1}{n\ln n}$, 它满足递减且 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$ 的条件, 但 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln n}$ 是发散的.

定理 1.11 (Leibniz 判别法)

如果 $\{a_n\}$ 递减趋于 0, 那么交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛.

注

1. 满足上述条件的交错级数称为 Leibniz 级数.
2. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 是一个 Leibniz 级数, 其和为 S. 若用 S_n 代替 S, 其误差不超过第 $n+1$ 项的绝对值, 即 $|S_n - S| \leqslant a_{n+1}$.
3. Leibniz 级数的和是一个不超过它首项之值的非负数.

引理 1.2 (Abel 分部求和公式)

设 $\{a_k\}, \{b_k\}$ 是两列实数, 则对任意的正整数 n, 有

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k \left(b_k - b_{k+1}\right) + S_n b_n,$$

这里 $S_k = \sum\limits_{l=1}^{k} a_l$.

引理 1.3 (Abel 引理)

设 $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n$ 或 $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$, 记 $S_k = \sum\limits_{l=1}^{k} a_l$. 如果 $|S_k| \leqslant M (k = 1, 2, \cdots, n)$, 那么

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant M \left(|b_1| + 2\,|b_n|\right).$$

定理 1.12 (Dirichlet 判别法)

设 $\{a_k\}, \{b_k\}$ 是两个数列, $S_k = \sum\limits_{l=1}^{k} a_l$, 它们满足以下两个条件:

1. $\{b_k\}$ 单调趋于 0;
2. $\{S_k\}$ 有界.

那么级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 收敛.

注 Leibniz 判别法只是 Dirichlet 判别法在 $a_k=(-1)^{k-1}$ 时的特殊情形.

定理 1.13 (Abel 判别法)

设 $\{a_k\},\{b_k\}$ 满足以下两个条件:

1. $\{b_k\}$ 单调有界;
2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛.

那么级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 收敛.

注 以上两个判别法的条件互有强弱:

1. Dirichlet 判别法中 $\{b_k\}$ 单调趋于 0 的条件比 Abel 判别法中 $\{b_k\}$ 单调有界强;
2. 而 $\{S_k\}$ 有界的条件则比 Abel 判别法中 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛的条件弱.

因此, 在使用时究竟哪个判别法较好, 要针对具体问题作具体分析.

例题 1.9 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n}$ 的敛散性.

解 令 $b_n=1/n$, 则 b_n 递减趋于 0 . 因此若能证明

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \cos nx\right| \leqslant M \quad (N=1,2,\cdots),$$

那么由 Dirichlet 判别法即知该级数收敛. 事实上, 当 $x \neq 2k\pi$ 时, 有

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \cos nx\right|=\left|\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right) x-\sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}.$$

因此, 只要 x 不是 2π 的整数倍, 上面的和式便有界.

所以, 原级数当 $x \neq 2k\pi$ $(k=0,\pm 1,\cdots)$ 时收敛; 当 $x=2k\pi$ 时, 原级数就变成调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, 所以是发散的.

注

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \sin nx\right|=\left|\frac{\cos \frac{x}{2}-\cos\left(N+\frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{x}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|} \quad (x \neq 2k\pi)$$

例题 1.10 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 3n}{n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$ 的敛散性.

解 由例 1.9 知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 3n}{n}$ 收敛, 而数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right\}$ 递增趋于 e , 因而有界. 根据 Abel 判别法, 原级数收敛.

例题 1.11 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \dfrac{\sin^{2} n}{n}$ 的敛散性.

解 因为 $\sin^{2} n=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2n)$, 故若能证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{\cos 2n}{n}$$

都收敛, 那么原级数收敛. 由 Leibniz 判别法知第一个级数收敛. 由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos 2n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n+n\pi)}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(2+\pi)}{n},$$

故由例1.9 知它也是收敛级数. 因而原级数收敛.

注 例 1.11中的级数是一个交错级数, 这时 $a_n=\dfrac{\sin^2 n}{n}$ 非单调地趋于 0 , 这说明在 Leibniz 判别法中, $\{a_n\}$ 单调地趋于 0 的" 单调" 并不是必要的.

1.5 绝对收敛和条件收敛

命题 1.8

如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛, 那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

注 逆命题是不成立的, 即从 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛不能断定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 便是这样的例子.

定义 1.3

1. 绝对收敛级数: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 也收敛.
2. 条件收敛级数: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散.

例题 1.12 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin^2 n}{n}$ 条件收敛.

证明 这个级数的收敛性已在例 1.11 中证明过. 现在证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n} \tag{1.4}$$

发散. 如果式1.4收敛, 则因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2n}{n}$ 收敛, 故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

也收敛, 这显然不成立. 因而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 n}{n}$ 发散.

□

注 绝对收敛级数和条件收敛级数有十分显著的差别.

1. 有限个数相加时，被加项可以任意交换次序而不影响其和.
2. 无限多个数相加时, 情况就不同了. 当然, 如果只交换级数中有限多项的次序, 那么既不会改变级数的收敛性，也不会改变它的和. 但若交换级数中无穷多项的次序，在级数是条件收敛的情况下，就有可能改变级数的和，甚至使其发散. 而绝对收敛级数则可以任意改变其项的次序而不影响级数的绝对收敛性, 也不改变其和.

定理 1.14

交换绝对收敛级数中无穷多项的次序, 所得的新级数仍然绝对收敛, 其和也不变. ♡

缺少!

1.6 级数的乘法 *

1.7 无穷乘积 *