实变函数习题

王子毅

210803133@stu.yzu.edu.cn

2024 年 6 月 20 日

目录

1 Homework 1

Exercise 1. 证明下面的等式

1. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i - \bigcup_{j=1}^{m} B_j = \bigcup_{i=1}^{n}\bigcap_{j=1}^{m}(A_i - B_j)$;
2. $A \cap \left(\bigcup_{a\in I} B_a\right) = \bigcup_{a\in I}(A \cap B_\alpha)$;
3. $E - \bigcup_{a\in I} A_a = \bigcap_{a\in I}(E - A_a)$;

Proof.

1.
$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{n} A_i - \bigcup_{j=1}^{m} B_j &= \bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} B_j\right)^c \\ &= \bigcup_{i=1}^{n}\left(A_i \cap \bigcap_{j=1}^{m} B_j^c\right) \\ &= \bigcup_{i=1}^{n}\left(\bigcap_{j=1}^{m} A_i \cap B_j^c\right) \\ &= \bigcup_{i=1}^{n}\left(\bigcap_{j=1}^{m} A_i - B_j\right) \\ &= \bigcup_{i=1}^{n}\bigcap_{j=1}^{m}(A_i - B_j)\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}\forall x \in A \cap \left(\bigcup_{a\in I} B_a\right) &\Longleftrightarrow x \in A\text{，且}x \in B_1\text{或}x \in B_2 \ldots \\ &\Longleftrightarrow x \in A\text{且}x \in B_1\text{，或}x \in A\text{且}x \in B_2\text{，}\ \ldots \\ &\Longleftrightarrow x \in \bigcup_{a\in I}(A \cap B_\alpha)\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}\forall x \in E - \bigcup_{a\in I} A_a &\Longleftrightarrow x \in E\text{且}x \notin A_1\text{且}x \notin A_2 \ldots\text{且}x \notin A_\alpha(\alpha \in I) \\ &\Longleftrightarrow x \in E\text{且}x \notin A_1\text{，且}x \in E\text{且}x \notin A_2, \ldots\text{，且}x \in E\text{且}x \notin A_\alpha(\alpha \in I) \\ &\Longleftrightarrow x \in \bigcap_{a\in I}(E - A_a)\end{aligned}$$

$\square$

Exercise 2. 设 $\{A_n\}$ 是一列集. 令 $B_1 = A_1, B_n = A_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i (n \geqslant 2)$. 证明 $\{B_n\}$ 中的集互不相交, 并且

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Proof.

1. 对 $i \neq j$, 不妨设 $i < j$, 则 $B_i = A_i - \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k \subset A_i, B_j = A_j - \bigcup_{k=1}^{j-1} A_k \subset A_j - A_i$, 故 $B_i \cap B_j = \left(A_i - \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k\right) \cap \left(A_j - \bigcup_{k=1}^{j-1} A_k\right) \subset A_i \cap (A_j - A_i) = \varnothing$,

2. (a) $B_i \subset A_i$，则 $\bigcup_{i=1}^{n} B_i \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

   (b) 任取 $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$，则 $\exists i \in \{1, 2, \dots n\}$，使得 $x \in A_i$，取 $1, 2, \dots n$ 中 k 使得 $x \in A_k$ 且 $x \notin A_j (j = 1, 2, \dots, k-1)$, 则 $x \in A_k - \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i = B_k \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, 即 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$

   综上，$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$

3. 令 $n \to \infty$，同理可证 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$

$\square$

Exercise 3. 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一列实值函数. 试用形如 $\{x : f_n(x) > k\}$ 的集表示集

$$\left\{x : \lim_{n \to \infty} f_n(x) = +\infty\right\}.$$

Solution.

$$\begin{aligned}\forall x \in \left\{x : \lim_{n \to \infty} f_n(x) = +\infty\right\} &\iff \forall k > 0, \exists m > 0, \forall n \geqslant m, x \in \{x : f_n(x) > k\} \\ &\iff \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \{x \in \mathbf{R}^n : f_n(x) > k\}\end{aligned}$$

$\square$

Exercise 4. 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一列实值函数, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\,(x\in\mathbf{R}^n)$. 证明对任意实数 a, 有

$$\{x : f(x) \leqslant a\} = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\left\{x : f_n(x) < a + \frac{1}{k}\right\}.$$

Proof. 记 $E_{n,k} = \left\{x : f_n(x) < a + \dfrac{1}{k}\right\}$

1. $\forall x_0 \in \{x : f(x) \leqslant a\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0) \leqslant a$,

   则对 $\forall k\in\mathbb{N}, \exists m\in\mathbb{N}$, 当 $n \geqslant m$ 时, 有 $f_n(x_0) < a + \dfrac{1}{k}$, 即 $x_0 \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=m}^{\infty} E_{n,k}$

2. $\forall x_0 \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=m}^{\infty} E_{n,k}$, 对于任意给定的 $k\in\mathbb{N}$, $x_0 \in \bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=m}^{\infty} E_{n,k}$, 则 $x_0 \in \underline{\lim}\, E_{n,k}$

   故 $\exists m \in\mathbb{N}, \forall x_0 \in E_{n,k}$, 一切 $n > m$ 时, 有 $f_n(x_0) < a + \dfrac{1}{k}$, 令 $n\to\infty, k\to\infty$, 可得 $f(x_0) \leqslant a$, 故 $x_0 \in \{x : f(x) \leqslant a\}$

□

Exercise 5. 设 $A_{2n-1} = \left(0, \dfrac{1}{n}\right), A_{2n} = (0,n)(n \geqslant 1)$. 求 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, A_n$ 和 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, A_n$.

Solution.

1. $\forall x \leqslant 0, x \notin A_n$, 故$x \notin \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, A_n, x \notin \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, A_n$

   $\forall x > 0, \exists N$, s.t. $x < N$, 故 $\forall n > N, x \in (0,n) = A_{2n}$, 故 $x \in \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, A_n$

   $$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n = (0, +\infty)$$

2. $\forall x > 0, \exists n_0$, s.t. $x > \dfrac{1}{n_0}$, 故 $\forall n > n_0, x \notin (0, \dfrac{1}{n}) = A_{2n-1}$, 故 $x \notin \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, A_n$

   $$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n = \varnothing$$

□

2 Homework 2

Exercise 1. 证明可列集的有限子集的全体是可列集.

Exercise 2. 设 A 是无限集, B 是可列集. 证明若存在一个 A 到 B 的单射, 则 A 是可列集.

Exercise 3. 设 A 是直线上以有理数为端点的开区间的全体. 证明 A 是可列集.

Exercise 4. 作出下面的集与集之间的一个双射:

1. 实数集到无理数集;
2. 平面上的闭单位圆盘 $\overline{U(0,1)}$ 到开单位圆盘 $U(0,1)$.

Exercise 5. 设 A 是平面上圆的全体所成之集. 求证 $\overline{\overline{A}} = c$.

3 Homework 3

Exercise 1. 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的实值函数. 证明若对任意常数 $a, \{x : f(x) < a\}$ 和 $\{x : f(x) > a\}$ 都是开集, 则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上连续.

Exercise 2. 设 $A, B \subset \mathbf{R}^n$. 证明:

1. $(A^c)^\circ = (\overline{A})^c, \quad \overline{A^c} = (A^\circ)^c$;
2. $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$;
3. $(A \cup B)' = A' \cup B', \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Exercise 3. 设 $A, B \subset \mathbf{R}^n, A \cap B = \varnothing$. 证明 $\overline{A} \cap B^\circ = \varnothing$.

Exercise 4. 设 $A \subset \mathbf{R}^n$. 证明: A° 是包含在 A 中的最大开集, $\overline{A}$ 是包含 A 的最小闭集.

Exercise 5. 设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 的非空子集. 证明:

1. $d(x, A) = 0$ 当且仅当 $x \in \overline{A}$. (特别地, 若 A 是闭集, $x \notin A$, 则 $d(x, A) > 0$.)
2. $f(x) = d(x, A)\,(x \in \mathbf{R}^n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数.

Exercise 6. 设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的非空闭集. 证明对任意 $x \in \mathbf{R}^n$, 存在 $y_0 \in A$ 使得

$$d(x, A) = d\left(x, y_0\right).$$

Exercise 7. 设 A 和 B 分别是 $\mathbf{R}^p$ 和 $\mathbf{R}^q$ 中的闭集, 证明 $A \times B$ 是 $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$ 中的闭集.

Exercise 8. 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的非负连续函数. 证明 $f(x)$ 的下方图形

$$E = \{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

是 $\mathbf{R}^2$ 中的闭集.

Exercise 9. 求证 $\mathbf{R}^n$ 中的每个闭集是 G_δ 型集, 每个开集是 F_σ 型集.

4 Homework 4

Exercise 1. 设 $A \subset \mathbf{R}^n$. 求证若 A 有界, 则 $m^*(A) < \infty$.

Exercise 2. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数. 求证曲线 $y = f(x)$ 的作为 $\mathbf{R}^2$ 的子集, 其外测度为零

Exercise 3. 设 $A \subset \mathbf{R}^n$. 若对任意 $x \in A$, 存在 x 的邻域 $U(x,\varepsilon)$, 使得 $m^*(A \cap U(x,\varepsilon)) = 0$, 求证 $m^*(A) = 0$.

5 Homework 5

Exercise 1. 设 $A, B \subset \mathbf{R}^n$. 若 A 是可测集, $m^*(A \triangle B) = 0$, 求证 B 是可测集, 并且

$$m(B) = m(A).$$

Exercise 2. 设 $A \subset \mathbf{R}^n$. 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在可测集 $E \subset A$ 使得 $m^*(A - E) < \varepsilon$. 求证 A 是可测集

Exercise 3. 设 A, B, C 是 $\mathbf{R}^n$ 中的可测集. 若 A, B, C 的测度都是有限的, 求证:

$$\begin{aligned} m(A \cup B \cup C) =& m(A) + m(B) + m(C) - m(A \cap B) - \\ & m(A \cap C) - m(B \cap C) + m(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Exercise 4. 设 $\{A_n\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一列可测集. 求证:

1. 若 $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$, 则 $m\left(\varlimsup_{n\to\infty} A_n\right) \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} m\left(A_n\right)$;

2. 若 $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$, 并且极限 $\lim_{n\to\infty} A_n$ 存在, 则 $\lim_{n\to\infty} m\left(A_n\right)$ 存在, 并且

$$m\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} m\left(A_n\right).$$

6 Homework 6

Exercise 1. 设 $\{A_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的一列可测集, 并且 $m(A_n)=1(n\geqslant 1)$. 求证

$$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)=1.$$

Exercise 2. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 $[0,1]$ 中的可测集, $\sum\limits_{i=1}^{n} m(A_i)>n-1$. 求证 $m\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right)>0$.

Exercise 3. 计算 E 的测度, 这里

$$E=\{x\in(0,1]:x\text{的十进制无限小数表示中不出现 }7\}.$$

Exercise 4. 求证: 非空开集的测度大于零.

Exercise 5. 设 $0<\varepsilon<1$. 在区间 $[0,1]$ 中作出一个开集 G, 使得 $m(G)\leqslant\varepsilon$, 并且 $\overline{G}=[0,1]$.

Exercise 6. 设 $0<c<1$. 在 $[0,1]$ 中作出一个无内点的闭集 F, 使得 $m(F)=c$.

Exercise 7. 设 $A\subset\mathbf{R}^n$. 求证 A 是可测集当且仅当对任意 $\varepsilon>0$, 存在开集 G 和闭集 F, 使得 $F\subset A\subset G$, 并且 $m(G-F)<\varepsilon$.

Exercise 8. 设 E 为 $\mathbf{R}^n$ 中的可测集, $m(E)<\infty$. 求证对任意 $\varepsilon>0$, 存在有界闭集 $F\subset E$, 使得 $m(E-F)<\varepsilon$.

Exercise 9. 设 f 是定义在 (a,b) 上的函数. 求证若 f 在每个 $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$ 上可测, 则 f 在 (a,b) 上可测.

Proof. 取 $N=\left[\dfrac{2}{b-a}\right]+1$, 对任意的正整数 $n>N$, f 在每个 $\left[a+\dfrac{1}{n},b-\dfrac{1}{n}\right]$ 上可测,

从而对 $\forall c\in$ R, 集 $\left\{x\in\left[a+\dfrac{1}{n},b-\dfrac{1}{n}\right]:f(x)>c\right\}$ 可测,

$$\{x\in(a,b):f(x)>c\}=\bigcup_{n=N}^{\infty}\left\{x\in\left[a+\frac{1}{n},b-\frac{1}{n}\right]:f(x)>c\right\}\text{可测}$$

即 f 在 (a,b) 可测 □

Exercise 10. 设 $\{f_n\}$ 是 E 上的实值可测函数列. 求证 A 是可测集, 这里

$$A=\left\{x\in E:\lim_{n\to\infty} f_n(x)\text{ 存在并且有限}\right\}.$$

Proof. 由 Cauchy 收敛准则, $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ 存在当且仅当对 $\forall k \geqslant 1, \exists N \geqslant 1$, 对 $\forall m, n \geqslant N$, 都有 $|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{1}{k}$.

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{m=N}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \left\{x \in E : |f_m(x) - f_n(x)| < \frac{1}{k}\right\}$$

由于每个 f_n 可测, 故 $\left\{x \in E : |f_m(x) - f_n(x)| < \frac{1}{k}\right\}$ 是可测集, 因此 A 是可测集. □

Exercise 11. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可导函数. 求证 $f'(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数.

Proof. 证明. 补充定义当 $x > b$ 时 $f(x) = f(b)$. 对每个 $n \geq 1$, 令

$$f_n(x) = n\left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right], \quad x \in [a,b],$$

则由 $f(x)$ 在 $[a, b+1]$ 上连续可得每个 $f_n(x)$ 在 $[a, b+1]$ 上可测.

注意到 $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), x \in [a,b)$, 因此 $f'(x)$ 在 $[a,b)$ 上是可测的. 由于对任何 $c \in R$,

$$\{x \in [a,b] : f'(x) > c\} = \begin{cases} \{x \in [a,b) : f'(x) > c\}, & f'(b) \leq c, \\ \{x \in [a,b) : f'(x) > c\} \cup \{b\}, & f'(b) > c, \end{cases}$$

故 $\{x \in [a,b] : f'(x) > c\}$ 是可测集, 因此 $f'(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数. □

Exercise 12. 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上可测, $a \in \mathbf{R}^1$. 求证 $f(ax)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上可测.

Proof. 若 $a = 0$, 显然.

若 $a \neq 0$

$$\{x \in \mathbf{R}^n : f(ax) > c\} = \frac{1}{a}\{x \in \mathbf{R}^n : f(x) > c\}$$

□

7 Homework 7

Exercise 1. 设 f 和 g 是 $\mathbf{R}^1$ 上的两个连续函数. 求证若在 $\mathbf{R}^1$ 上 $f=g$ a.e., 则 f 和 g 在 $\mathbf{R}^1$ 上处处相等.

Proof. **方法 1**

反证: 设存在 $x_0 \in \mathrm{R}^1$ 使 $f\left(x_0\right) \neq g\left(x_0\right)$, 则 $f\left(x_0\right)-g\left(x_0\right) \neq 0$, 不妨设 $f\left(x_0\right)-g\left(x_0\right)>0$ f, g 为连续函数, 故 $f-g$ 在 R^1 上连续, 则由连续函数的局部保号性，存在 $\delta>0$ ，

$$f(x)-g(x)>0 \quad\left(x \in U\left(x_0, \delta\right)\right),$$

即当 $x \in U\left(x_0, \delta\right)$ 时 $f(x) \neq g(x)$. 而 $m\left(U\left(x_0, \delta\right)\right)=2 \delta>0$ ， 与 $f=g$ a.e. 矛盾.

因此 f 和 g 在 R^1 上处处相等.

方法 2

设 $A=\{x: f(x) \neq g(x)\}=\{x: f(x)-g(x)>0\} \cup\{x: f(x)-g(x)<0\}$,

则由 $f-g$ 连续可得 A 是开集. 下证 $A=\varnothing$.

若存在 $x_0 \in A$ ，则存在 $\delta>0$ ，使得 $U\left(x_0, \delta\right) \subset A$, 从而

$$m(A) \geqslant m\left(U\left(x_0, \delta\right)\right)=2 \delta>0,$$

这与 $f=g$ a.e. 矛盾! □

Exercise 2. 用定义直接证明 $f_n(x)=\ln \left(1+x^n\right)$ 在 $[0,1]$ 上依测度收敛于 0 .

Proof. 当 $x \geqslant 0$ 时, $\ln \left(1+x^n\right) \leqslant x^n$ ，所以对任何 $\varepsilon>0$,

$$\left\{x \in[0,1]:\left|\ln \left(1+x^n\right)\right| \geqslant \varepsilon\right\} \subset\left\{x \in[0,1]:\left|x^n\right| \geqslant \varepsilon\right\}$$

从而

$$\begin{aligned}
m\left(\left\{x \in[0,1]:\left|\ln \left(1+x^n\right)\right| \geqslant \varepsilon\right\}\right) & \leq m\left(\left\{x \in[0,1]:\left|x^n\right| \geqslant \varepsilon\right\}\right) \\
& =m\left(\left\{x \in[0,1]:|x| \geqslant \varepsilon^{\frac{1}{n}}\right\}\right) \\
& =m\left(\left[\varepsilon^{\frac{1}{n}}, 1\right]\right)=1-\varepsilon^{\frac{1}{n}} \rightarrow 0
\end{aligned}$$

因此在 $[0,1]$ 上 $\ln \left(1+x^n\right) \xrightarrow{m} 0$. □

Exercise 3. 求证:

1. 若 $f_n \longrightarrow f$ a.e., $f_n \longrightarrow g$ a.e., 则 $f=g$ a.e.;
2. 若 $f_n \xrightarrow{m} f, f_n \xrightarrow{m} g$, 则 $f=g$ a.e.

Proof.

1. 由于 $f_n \to f$ a.e., $f_n \to g$ a.e., 存在 $E_1 \subset E, E_2 \subset E$，$m(E_1) = m(E_2) = 0$,
   使得当 $x \in E - E_1$ 时 $f_n(x) \to f(x)$, 当 $x \in E - E_2$ 时 $f_n(x) \to g(x)$.
   令 $E_0 = E_1 \cup E_2$, 则 $m(E_0) = 0$,
   $E - E_0 \subset (E - E_1) \cap (E - E_2)$
   $$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x) \quad (x \in E - E_0)$$
   因此 $f = g$ a.e..

2. **方法 1**
   设 $f_n \xrightarrow{m} f$, 由 Riesz 定理, 存在 $\{f_n\}$ 的子列 $\{f_{n_k}\}$, 使得 $f_{n_k} \to f$ a.e.
   由 $f_n \xrightarrow{m} g$ 可得 $f_{n_k} \xrightarrow{m} g$, 从而由 Riesz 定理, 存在 $\{f_{n_k}\}$ 的子列 $\left\{f_{n_{k_j}}\right\}$,
   使得 $f_{n_{k_j}} \to g$ a.e., 显然也有 $f_{n_{k_j}} \to f$ a.e., 因此由 (1) 得 $f = g$ a.e..
   方法 2
   $$|f-g| \leqslant |f-f_k| + |f_k - g|$$
   $$m\left(E\left(|f-g| \geqslant \frac{1}{n}\right)\right) \leqslant m\left(E\left(|f-f_k| \geqslant \frac{1}{2n}\right)\right) + m\left(E\left(|f_k-g| \geqslant \frac{1}{2n}\right)\right)$$
   令 $n \to \infty$
   $$m\left(E\left(|f-g| \geqslant \frac{1}{n}\right)\right) = 0$$
   $$E(f \neq g) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left(|f-g| \geqslant \frac{1}{n}\right)$$
   故 $m(E(f \neq g\ |) = 0$，即 $f = g$ a.e.

$\square$

Exercise 4. 求证:

1. 若 $f_n \longrightarrow f$ a.un., 则 $f_n \longrightarrow f$ a.e.;

2. 若 $f_n \longrightarrow f$ a.un., 则 $f_n \xrightarrow{m} f$.

Proof.

1. 设在 E 上 $f_n \to f$ a.un., 则对 $\forall k \geqslant 1$, 存在可测集 $E_k \subset E$ 使得 $m(E-E_k) < \dfrac{1}{k}$, 并且在 E_k 上 f_n 一致收敛 (逐点收敛) 于 f.

   令 $E_0 = E - \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} (E-E_k)$, 则

$$m(E_0) \leqslant m(E-E_k) < \frac{1}{k} \quad (k \geqslant 1)$$

   令 $k \to \infty$，故 $m(E_0) = 0$, 且当 $x \in E - E_0$ 时 $f_n(x) \to f(x)$, 即 $f_n \to f$ a.e..

2. 设在 E 上 $f_n \to f$ a.un., 则对 $\forall \delta \geqslant 0$, 存在可测集 $E_\delta \subset E$ 使得 $m(E-E_\delta) < \delta$,

   并且在 E_δ 上 f_n 一致收敛于 f.

   于是对 $\forall \varepsilon \geqslant 0, \exists N \geqslant 1$, 使得当 $n \geqslant N$ 时，对任意的 $x \in E_\delta, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

   即 $E(|f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon) \subset E - E_\delta$. 于是,

$$m(E(|f_n(x)-f(x)| \geqslant \varepsilon)) \leqslant m(E-E_\delta) < \delta, \quad \forall n \geqslant N.$$

   这表明 $\lim\limits_{n\to\infty} m(E(|f_n(x)-f(x)| \geqslant \varepsilon)) = 0$, 即 $f_n \xrightarrow{m} f$.

□

Exercise 5. 求证: 若在 E 上 $f_n \xrightarrow{m} f$, 则 $\varliminf\limits_{n\to\infty} f_n \leqslant f \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n$ a.e.

Proof. 设 $f_n \xrightarrow{m} f$, 由 Riesz 定理, 存在 $\{f_n\}$ 的子列 $\{f_{n_k}\}$, 使得 $f_{n_k} \to f$ a.e.,
即存在 E 的子集 E_0, 使得 $m(E_0) = 0$, 当 $x \in E - E_0$ 时 $f_{n_k}(x) \to f(x)$.
于是, 当 $x \in E - E_0$ 时,

$$\varliminf_{n\to\infty} f(x) \leqslant \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} f(x),$$

即 $\varliminf\limits_{n\to\infty} f_n \leqslant f \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n$ a.e. □

Exercise 6. 设在 E 上 $f_n \xrightarrow{m} f, f_n \leqslant f_{n+1}$ a.e. $(n \geqslant 1)$. 求证 $f_n \to f$ a.e.

Proof. 由 $f_n \xrightarrow{m} f$ 以及 Riesz 定理, 存在 $\{f_n\}$ 的子列 $\{f_{n_k}\}$, 使得 $f_{n_k} \to f$ a.e.,
即存在 E 的零测度子集 E_1, 使得当 $x \in E - E_1$ 时 $f_{n_k}(x) \to f(x)$;
又由 $f_n \leqslant f_{n+1}$ a.e., 存在 E 的零测度子集 E_2,
使得当 $x \in E - E_2$ 时 $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \quad (n \geqslant 1)$.
取 $E_0 = E_1 \cup E_2$, 则 $m(E_0) = 0$, 当 $x \in E - E_0$ 时 $\{f_n(x)\}$ 单调增,
且存在子列 $\{f_{n_k}(x)\}$ 使得 $f_{n_k}(x) \to f(x)$,
从而有当 $x \in E - E_0$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$, 即 $f_n \to f$ a.e. □

Exercise 7. 设 $m(E)<\infty, f$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数. 求证对任意 $\delta>0$, 存在 E 的可测子集 A, 使得 $m(E-A)<\delta$, 并且 f 在 A 上有界.

Proof. 令 $E_0=E(|f|=\infty), \quad E_n=E(|f|>n), \quad n\geqslant 1$,

$$\lim_{n\to\infty} E_n=\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n=E(|f|=\infty)=E_0$$

由 f 在 E 上 a.e. 有限可得 $m\left(E_0\right)=0$, 再由 $m(E)<\infty$ 及测度的上连续性可得

$$\lim_{n\to\infty} m\left(E_n\right)=m\left(E_0\right)=0$$

从而 $\forall\delta>0, \exists n_0$, 使得 $m\left(E_{n_0}\right)<\delta$. 令 $A=E-E_{n_0}$, 则 $m(E-A)=m\left(E_{n_0}\right)<\delta$, 并且在 A 上 $|f|\leqslant n_0$. $\square$

Exercise 8. 设 f 是 E 上的 a.e. 有限的可测函数. 求证存在 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数列 $\{g_n\}$, 使得在 E 上 $g_n\to f$ a.e., 并且

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|g_n(x)|\leqslant\sup_{x\in\mathbb{E}}|f(x)| \quad (n\geqslant 1).$$

Proof. 由于 f 是 E 上 a.e. 有限的可测函数, 由 Lusin 定理, 对任意的 $k\geqslant 1$, 存在 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数 h_k, 使得 $m\left(E\left(f\neq h_k\right)\right)<\dfrac{1}{k}$, 并且 $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}^n}|h_k(x)|\leqslant\sup\limits_{x\in E}|f(x)|$.

又对 $\forall\varepsilon>0$,

$$E\left(\left|f-h_k\right|\geqslant\varepsilon\right)\subset E\left(f\neq h_k\right)$$

因而

$$m\left(E\left(\left|f-h_k\right|\geqslant\varepsilon\right)\right)\leqslant m\left(E\left(f\neq h_k\right)\right)<\frac{1}{k}\to 0(k\to\infty)$$

这表明在 E 上 $h_k\xrightarrow{m} f$, 故由 Riesz 定理可得存在 $\{h_k\}$ 的子列 $\{h_{k_n}\}$, 使得在 E 上 $h_{k_n}\to f$ a.e.. 令 $g_n=h_{k_n}$, 则 $\{g_n\}$ 满足要求. $\square$

Exercise 9. (Lusin 定理的逆) 设 f 是定义在 E 上的函数. 若对任给的 $\delta>0$, 存在闭集 $F_\delta\subset E$, 使得 $m\left(E-F_\delta\right)<\delta$, 并且 f 在 F_δ 上连续. 则 f 在 E 上可测.

Proof. $\forall k\geqslant 1, \exists F_k\subset E$, 使得 $m\left(E-F_k\right)<\dfrac{1}{k}$, 并且 f 在 F_k 上连续.

令 $F=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$, 则 f 在 F 上连续, 而 F 为 F_σ 型集, 故可测, 因此 f 在 F 上可测.

又 $E-F=E-\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\left(E-F_k\right), \quad m(E-F)\leqslant m\left(E-F_k\right)<\dfrac{1}{k}(k\geqslant 1)$,

故 $m(E-F)=0$. 即 f 在 $E-F$ 可测, 综上 f 在 $(E-F)\cup F=E$ 上可测. $\square$

8 Homework 8

Exercise 1. 设 f 是 $[a,b]$ 上的实值可测函数, 并且

$$\int_a^b |f(x)|\ln(1+|f(x)|)\mathrm{d}x<\infty.$$

求证 $f\in L[a,b]$.

Proof. 取 $E_1=E(|f|\leqslant e-1)\cap[a,b]$，$E_2=[a,b]-E_1$

$$\int_{E_1}|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_{E_1}(e-1)\mathrm{d}x\leqslant\int_{[a,b]}(e-1)\mathrm{d}x=(e-1)(b-a)<+\infty$$

$$\int_{E_2}|f(x)|\mathrm{d}x<\int_{E_2}|f(x)|\ln(1+|f(x)|)<+\infty$$

$$\int_{[a,b]}|f(x)|\mathrm{d}x=\int_{E_1}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{E_2}|f(x)|\mathrm{d}x<+\infty$$

即 $|f|\in L[a,b]$，故 $f\in L[a,b]$ □

Exercise 2. 设 $f\in L(\mathbf{R}^1)$, 满足 $f(0)=0, f'(0)$ 存在. 求证 $\dfrac{f(x)}{x}\in L(\mathbf{R}')$.

Proof. $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 当$|x|<\delta$ 时. $\left|\dfrac{f(x)}{x}-f'(0)\right|<\varepsilon$

取 $E_1=(-\delta,\delta),E_2=(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)$

$$\int_{E_1}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\mathrm{d}x<2\delta\cdot(|f'(0)|+\varepsilon)<+\infty$$

$$\int_{E_2}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\mathrm{d}x<\int_{E_2}\frac{|f(x)|}{\delta}\mathrm{d}x<+\infty$$

$$\int_{\mathbf{R}^1}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\mathrm{d}x=\int_{E_1}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\mathrm{d}x+\int_{E_2}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\mathrm{d}x<\infty$$

即 $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\in L\left(\mathbf{R}^1\right)$，故$\dfrac{f(x)}{x}\in L\left(\mathbf{R}^1\right)$ □

Exercise 3. 设 $m(E)>0, f$ 是 E 上的可测函数, 并且 $f(x)>0(x\in E)$. 求证 $\displaystyle\int_E f\,\mathrm{d}x>0$.

Proof. $E_k=E\left(f\geqslant\dfrac{1}{k}\right)$, $\quad E=E[f>0]=\displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$

$$m(E)=m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m\left(E_k\right)$$

$m\left(E_k\right) \geqslant 0$，若 $m(E_k)$ 均为 0,

$$0 \leqslant m(E) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m\left(E_k\right)=0$$

与 $m(E)>0$ 矛盾!

故至少存在一个 $m\left(E_k\right)=\mu>0$

$$\int_E f \mathrm{d} x>\int_{E_k} f \mathrm{d} x=\int_{E\left(f \geqslant \frac{1}{k}\right)} f \mathrm{d} x \geqslant \int_{E\left(f \geqslant \frac{1}{k}\right)} \frac{1}{k} \mathrm{d} x=\frac{\mu}{k}>0$$

□

Exercise 4. 设 $f, g \in L(E)$, 并且对 E 的任意可测子集 A, 有 $\int_A f \mathrm{~d} x=\int_A g \mathrm{~d} x$. 求证 $f=g$ a.e.

Proof. 令 $h=f-g$，则

$$\int_A h \mathrm{d} x=\int_A f \mathrm{d} x-\int_A g \mathrm{d} x=0$$

若 $m(E(f \neq g))>0$，不妨设 $m(E(f>g))>0$，则

$$\int_{E(f>g)} h \mathrm{d} x>0$$

矛盾!

故 $m(E(f \neq g))=0$, 即 $f=g$ a.e. 于 E □

9 Homework 9

Exercise 1. 设 $f \in L(E)$. 求证 $\lim\limits_{n \to \infty} n \cdot mE(|f| \geqslant n) = 0$.

Proof. 由于 $f \in L(E)$, 由积分的绝对连续性, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $A \subset E$ 且 $m(A) < \delta$ 时, $\displaystyle\int_A |f| \mathrm{d}x < \varepsilon$.

又由 Chebyshev 不等式, 对每个正整数 $k \geqslant 1$, $mE(|f| \geqslant k) \leqslant \dfrac{1}{k} \displaystyle\int_E |f| \mathrm{d}x$,

即 $\lim\limits_{k \to \infty} mE(|f| \geqslant k) = 0$. 因此对上述 $\delta > 0$, 存在 $K \geqslant 1$, 使得 $mE(|f| \geqslant K) < \delta$,

从而 $\displaystyle\int_{E(|f| \geqslant K)} |f| \mathrm{d}x < \varepsilon$. 于是当 $n \geqslant K$ 时,

$$n \cdot mE(|f| \geqslant n) = \int_{E(|f| \geqslant n)} n \mathrm{d}x \leqslant \int_{E(f| \geqslant n)} |f| \mathrm{d}x \leqslant \int_{E(|f| \geqslant K)} |f| \mathrm{d}x < \varepsilon,$$

即有 $\lim\limits_{n \to \infty} n \cdot mE(|f| \geqslant n) = 0$.

□

Exercise 2. 设 E 是 $[a, b]$ 中的可测集, $f \in L(E)$ 并且 $I = \displaystyle\int_E f \mathrm{~d}x > 0$. 求证对任意 $0 < c < I$, 存在 E 的可测子集 A, 使得 $\displaystyle\int_A f \mathrm{~d}x = c$.

Proof. 令 $\varphi(t) = \displaystyle\int_{[a, t] \cap E} f \mathrm{d}x (a \leqslant t \leqslant b)$.

由积分的绝对连续性, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $A \subset [a, b]$ 且 $m(A) < \delta$ 时, $\displaystyle\int_A |f| \mathrm{d}x < \varepsilon$.

于是对 $\forall t_1, t_2 (a \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant b)$ ，且 $|t_2 - t_1| < \delta$ 时,

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| = \left| \int_{[t_1, t_2] \cap E} f \mathrm{d}x \right| \leqslant \int_{[t_1, t_2] \cap E} |f| \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

故 φ 在 $[a, b]$ 上一致连续. 又 $\varphi(a) = 0, \varphi(b) = I$, 对任意 $0 < c < I$, 由连续函数的介值定理, 存在 $t_0 \in [a, b]$, 使得 $\varphi(t_0) = \displaystyle\int_{[a, t_0] \cap E} f \mathrm{d}x = c$. 取 $A = [a, t_0] \cap E$ 即证得原命题. □

Exercise 3. 设 f 是 E 上的非负可测函数, $\{E_n\}$ 是 E 的一列单调递增的可测子集, 并且 $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. 求证 $\displaystyle\int_E f \mathrm{~d}x = \lim_{n \to \infty} \int_{E_n} f \mathrm{~d}x$.

Proof. 令 $f_n = f \cdot \chi_{E_n}$, 则由 f 在 E 上非负及 $\{E_n\}$ 单调递增, 可得 $\{f_n\}$ 是 E 上的非负可测函数列，再由 $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ 可得 $f_n \uparrow f$. 从而由 Levi 单调收敛定理得到

$$\lim_{n \to \infty} \int_{E_n} f \mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \int_E f \chi_{E_n} \mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \int_E f_n \mathrm{d}x = \int_E f \mathrm{d}x.$$

□

Exercise 4. 设 $\{A_n\}$ 是 E 中的一列可测集, 使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m\left(A_n\right)<\infty$. 求证对几乎所有 $x \in E$, x 只属于有限个 A_n.

Proof. 由逐项积分定理可得

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n} \mathrm{d} x=\sum_{n=1}^{\infty} \int_E \chi_{A_n} \mathrm{d} x=\sum_{n=1}^{\infty} m\left(A_n\right)<\infty,$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n} \in L(E)$, 从而 a.e. 有限, 即对 a.e $x \in E, x$ 只属于有限个 A_n. □

Exercise 5. 设 $\{f_n\}$ 是 E 上的可测函数列, 并且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_E\left|f_n\right| \mathrm{d} x<\infty$. 求证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f_n(x)\right|<\infty$ a.e., $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 E 上可积, 并且

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n \mathrm{d} x=\sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n \mathrm{~d} x$$

Proof. 令 $g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f_n(x)\right|$. 由逐项积分定理可得

$$\int_E g \mathrm{d} x=\int_E \sum_{n=1}^{\infty}\left|f_n\right| \mathrm{d} x=\sum_{n=1}^{\infty} \int_E\left|f_n\right| \mathrm{d} x<\infty,$$

故 $g \in L(E)$. 由此可知 g 在 E 上 a.e. 有限, 即在 E 上 a.e. $g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f_n(x)\right|<\infty$,
因此函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 E 上 a.e. 收敛. 令 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$,
则 f 在 E 上 a.e. 有定义. 再令 $g_n(x)=\sum\limits_{i=1}^n f_i(x)$, 则 $g_n \rightarrow f$ a.e. 于 E,
并且 $\left|g_n\right| \leqslant g$ a.e. 于 E. 由 DCT 可得

$$\begin{aligned}
\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n \mathrm{d} x & =\int_E \lim _{n \rightarrow \infty} g_n \mathrm{d} x=\lim _{n \rightarrow \infty} \int_E g_n \mathrm{d} x \\
& =\lim _{n \rightarrow \infty} \int_E \sum_{i=1}^n g_i \mathrm{d} x=\lim _{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int_E f_i \mathrm{d} x \\
& =\sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n \mathrm{d} x
\end{aligned}$$

□

Exercise 6. 设 $f, f_n(n \geqslant 1)$ 为 E 上的非负可测函数, $f_n \xrightarrow{m} f$. 求证

$$\int_E f\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n \mathrm{d}x.$$

Proof. 由下极限的定义, 存在 $\{f_n\}$ 的子列 $\{f_{n_k}\}$, 使得 $\varliminf\limits_{n\to\infty} \int_E f_n \mathrm{d}x = \lim\limits_{k\to\infty} \int_E f_{n_k} \mathrm{d}x$;

由 $f_n \xrightarrow{m} f$ 可得 $f_{n_k} \xrightarrow{m} f$. 于是存在 $\{f_{n_k}\}$ 的子列, 不妨仍记为 $\{f_{n_k}\}$, 使得 $f_{n_k} \to f$ a.e.. 利用 Fatou 引理可得

$$\int_E f\mathrm{d}x = \int_E \lim_{k\to\infty} f_{n_k} \mathrm{d}x \leqslant \lim_{k\to\infty} \int_E f_{n_k} \mathrm{d}x = \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n \mathrm{d}x.$$

□

10 Homework 10

Exercise 1. 设 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, g 是 $\mathbf{R}^1$ 上的连续函数. 证明 $g(f(x))$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

Proof. 由 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积可得 f 在 $[a,b]$ 上有界, 且几乎处处连续,

即存在 $M>0$ ，使得对任何 $x\in[a,b]$ 有 $|f(x)|\leqslant M$.

由 g 在 $\mathbf{R}^1$ 上的连续可知 g 在 $[-M,M]$ 上有界, 从而 $g(f(x))$ 在 $[a,b]$ 上有界.

又显然 $g(f(x))$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处连续, 因此 Riemann 可积. □

Exercise 2. 设 A 是无理数集, 令 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\chi_A(x)$. 证明在 $f\in L[0,\infty)$, 并且求其积分值.

Proof. 由于 $m(Q)=0$ (Q 为有理数集)，故 $f(x)=e^{-x}$ a.e 于 $[0,+\infty)$., 因此

$$(L)\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=(L)\int_0^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x=(R)\int_0^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x=-\left.e^{-x}\right|_0^{+\infty}=1,$$

故 $f\in L[0,+\infty)$ 且 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$. □

Exercise 3. 设 f 和 g 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 并且在 $[a,b]$ 中的有理数集上相等. 证明 f 和 g 在 $[a,b]$ 上积分相等.

Proof. 因为 f 和 g 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 故 $f,g\in C[a,b]$ a.e.

即存在零测度集 $A\subset[a,b]$, 使得 f 和 g 在 $[a,b]-A$ 上连续.

又因 f 和 g 在 $[a,b]$ 中的有理数集上相等, 故对 $\forall x\in[a,b]-A$, 可取有理数序列 $\{r_n\}$, 使 $r_n\to x$, 于是

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f\left(r_n\right)=\lim_{n\to\infty} g\left(r_n\right)=g(x),$$

即 $f=g$ a.e., 因此 $\displaystyle\int_a^b f\mathrm{d}x=\int_a^b g\mathrm{d}x$. □

Exercise 4. 证明 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}\sin^5 x\,\mathrm{d}x=0$.

Proof. 令 $f_n(x)=\dfrac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}\sin^5 x$, 显然 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$.

由于当 $0<x\leqslant 1$ 时，$|f_n(x)|\leqslant\dfrac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}\leqslant\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

当 $x>1$ 时，$|f_n(x)|\leqslant\dfrac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}\leqslant\dfrac{n\sqrt{x}}{nx^2}=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$.

令
$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\chi_{(0,1]}(x)+\frac{1}{x\sqrt{x}}\cdot\chi_{(1,+\infty)}(x),$$
则 $|f_n(x)|\leqslant g(x)(n\geqslant 1)$, 且由 $\displaystyle\int_0^{+\infty} gdx<\infty$ 知 $g\in L(0,+\infty)$.
由 DCT 可得
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}\sin^5 x\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}0\mathrm{d}x=0.$$
□

Exercise 5. 求证当 $p,q>0$ 时, $\displaystyle\int_0^1\frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{p+nq}$.

Proof. 幂级数展开式可得
$$\frac{x^{p-1}}{1+x^q}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{nq+p-1}(0\leqslant x<1).$$
当 $n=2k(k=0,1,2,\cdots)$ 时
$$(-1)^n x^{nq+p-1}=x^{2kq+p-1}$$
当 $n=2k+1(k=0,1,2,\cdots)$ 时
$$(-1)^n x^{nq+p-1}=-x^{(2k+1)q+p-1}$$
故
$$\frac{x^{p-1}}{1+x^q}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{nq+p-1}=\sum_{k=0}^{\infty}x^{2kq+p-1}-\sum_{k=0}^{\infty}x^{(2k+1)q+p-1}$$
由逐项积分定理可得
$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{x^{p-1}}{1+x^q}\mathrm{d}x&=\int_0^1\sum_{k=0}^{\infty}x^{2kq+p-1}\mathrm{d}x-\int_0^1\sum_{k=0}^{\infty}x^{(2k+1)q+p-1}\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1\left(x^{2kq+p-1}-x^{(2k+1)q+p-1}\right)\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{p+2kq}-\frac{1}{p+(2k+1)q}\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{p+nq}.\end{aligned}$$
□

Exercise 6. 计算 $I = \int_0^{\infty} \left(\mathrm{e}^{-ax^2} - \mathrm{e}^{-bx^2}\right) \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x (0 < a < b)$.

Solution.

$$I = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \int_a^b x e^{-yx^2} \mathrm{d}y$$

由 Fubini 定理可得

$$I = \int_a^b \mathrm{d}y \int_0^{+\infty} x e^{-yx^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{1}{y} \mathrm{d}y = \frac{1}{2} \ln \frac{b}{a}.$$

□

Exercise 7. 设 $f(x,y)$ 在 $[0,1] \times [0,1]$ 上可积. 证明

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 f(x,y)\mathrm{d}x.$$

Proof. 记 $A = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x\}$, 则 A 是 $\mathbf{R}^2$ 中的可测集.

于是 $\chi_A(x,y)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的可测函数. 当 $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ 时,

$$\chi_{[0,x]}(y) = \chi_A(x,y) = \chi_{[y,1]}(x).$$

因此 $g(x,y) = \chi_{[0,x]}(y)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的可测函数. 对函数 $f(x,y)\chi_{[0,x]}(y)$ 利用 Fubini 定理. □

11 Homework 11

Exercise 1. 计算函数 $f(x) = \sin x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的全变差, 并计算 $V_0^x(f)$.

Exercise 2. 证明若 $f, g \in \mathrm{BV}[a, b]$, 则 $fg \in \mathrm{BV}[a, b]$.

$V_0^x(f)$

Exercise 3. 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的可微函数, 并且 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 则 $f \in \mathrm{BV}[a, b]$.

Exercise 4. 证明若 $f, g \in \mathrm{AC}[a, b]$, 则 $fg \in \mathrm{AC}[a, b]$.

Exercise 5. 利用定理 5.9 证明, 若 $f \in L[a, b]$, 并且对任意 $a \leqslant c \leqslant b$, 恒有 $\displaystyle\int_a^c f \, \mathrm{d}x = 0$, 则 $f = 0$ a.e. (参见习题 4, B 类第 5 题).

Exercise 6. 设 $f \in \mathrm{AC}[a, b]$, 并且 $f'(x) \geqslant 0$ a.e. 证明 f 是单调递增的.