分析

数学分析

作者：王子毅

组织：扬州大学数学科学学院

时间：August 27, 2024

版本：0.0

Bio:Information

ElegantLATEX Program

求知若饥，虚心若愚

目录

前言

这份笔记是笔者在 2024 年 8 月复习《数学分析》时阅读中科大史济怀教授编写的《数学分析教程》第 3 版时所整理的，主要整理了所有书中的定义、定理、命题、推论，a.e. 没有证明。

这份笔记的主要目的是帮助已经学过一遍数学分析的同学在复习的时候快速回忆一些结果。

第 1 章 实数和数列极限

1.1 数列和收敛数列

定义 1.1 (收敛数列)

设 $\{a_n\}$ 是一个数列, a 是一个实数. 如果对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在一个 $N \in \mathbf{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

就说数列 $\{a_n\}$ 当 n 趋向无穷大时以 a 为极限, 记成

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

也可以简记为 $a_n \to a(n \to \infty)$. 我们也说数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a. 存在极限的数列称为收敛数列; 不收敛的数列称为发散数列.

♣

例题 1.1 证明: 对任意的正数 $\alpha > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$$

证明 先设 $\alpha \geqslant 1$. 这时

$$\left|\frac{1}{n^a} - 0\right| = \frac{1}{n^a} \leqslant \frac{1}{n}.$$

对任意的 $\varepsilon > 0$, 取 $N = [1/\varepsilon]$, 当正整数 $n > N$ 时, 便有

$$\left|\frac{1}{n^\alpha} - 0\right| \leqslant \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

这就对 $\alpha \geqslant 1$ 的情形证明了结论.

现设 $0 < \alpha < 1$, 总可以找到 $m \in \mathbf{N}^*$, 使得 $m_\alpha > 1$. 由于 $\{1/n^{m_a}\}$ 收敛于 0 , 故对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使得当 $n > N$ 时, 有 $1/n^{m_a} < \varepsilon^m$, 这等价于 $1/n^a < \varepsilon$. 所以, 可以断言: 对一切 $\alpha > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} = 0.$$

□

例题 1.2 当 $|q| < 1$ 时, 求证:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

解 要使

$$|q|^n < \varepsilon$$

即 $n \ln|q| < \ln\varepsilon$, 只需

$$n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|},$$

因此取 $N = [\ln\varepsilon / \ln|q|]$.

1.2 收敛数列的性质

定义 1.2

数列 $\{a_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时收敛于实数 a 是指：对任意的 $\varepsilon>0$，总存在 $N\in\mathbf{N}^*$，使得此数列中除有限多项 $a_1,a_2,\cdots,a_N$, 其他的项均落在 a 的 ε 邻域内. ♣

定理 1.1 (极限唯一)

如果数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则它只有一个极限. 也就是说, 收敛数列的极限是唯一的. ♡

定义 1.3 (有界定义)

设 $\{a_n\}$ 是一个数列. 如果存在一个实数 A, 使得 $a_n\leqslant A$ 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立, 则称 $\{a_n\}$ 是有上界的, A 是此数列的一个上界.

类似地, 可以定义有下界的数列.

如果数列 $\{a_n\}$ 既有下界又有上界, 则称它是一个有界数列. ♣

定理 1.2

收敛数列是有界的. ♡

证明 设收敛数列 $\{a_n\}$ 的极限是 a, 那么, 对 a 的 1 邻域，必存在 $N\in\mathbf{N}^*$，使得凡是 $n>N$ 的项 a_n 都在这个邻域内，不在这个开区间内的至多是 $a_1,a_2,\cdots,a_N$ 这些项。我们完全可以找到一个大一些的区间，它既包含 a 的 1 邻域，又包含着 $a_1,a_2,\cdots,a_N$, 这就证明了数列 $\{a_n\}$ 是有界的. 如果有人还希望有更形式化一些的证明, 这就是: 当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-a|<1$, 于是

$$|a_n|=|a_n-a+a|\leqslant|a_n-a|+|a|<1+|a|$$

若令 $M=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_N|+|a|+1$, 则对一切 $n\in\mathbf{N}^*$, 有 $|a_n|<M$。请注意, 这个命题的逆命题是不正确的. 我们马上将看到发散的有界数列. □

定义 1.4 (子列)

设 $\{a_n\}$ 是一个数列, $k_i\in\mathbf{N}^*(i=1,2,3,\cdots)$, 且满足 $k_1<k_2<k_3<\cdots$, 那么数列 $\{a_{k_n}\}$ 叫作 $\{a_n\}$ 的一个子列. ♣

注 由这个定义, $\{a_n\}$ 自身也可以看作是 $\{a_n\}$ 的子列.

定理 1.3

设收敛数列 $\{a_n\}$ 的极限是 a, 那么 $\{a_n\}$ 的任何一个子列都收敛于 a. ♡

证明 由条件, 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbf{N}^*$, 当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-a|<\varepsilon$. 任取 $\{a_n\}$ 的一个子列 $\{a_{k_n}\}$ 令

$$b_n=a_{k_n}\quad(n\in\mathbf{N}^*)$$

由于 $k_n\geqslant n$ 对 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立, 故当 $n>N$ 时, 有 $k_n\geqslant n>N$, 因此

$$|b_n-a|=|a_{k_n}-a|<\varepsilon$$

这正表明 $\{b_n\}$ 收敛于 a.

□

注 考察数列 $\{(-1)^{n-1}\}$, 显然它是一个有界的数列, 但它不是一个收敛数列.

命题 1.1

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是它的偶数项子列 $\{a_{2n}\}$ 和奇数项子列 $\{a_{2n-1}\}$ 都收敛, 而且有相同的极限.

证明 只要证充分性. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = a$. 由于 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = a$, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $K_1 \in \mathbf{N}^*$, 当 $k > K_1$ 时, 有

$$|a_{2k} - a| < \varepsilon. \tag{1.1}$$

由于 $\lim\limits_{h\to\infty} a_{2k-1} = a$, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $K_2 \in \mathbf{N}^*$, 当 $k > K_2$ 时, 有

$$|a_{2k-1} - a| < \varepsilon \tag{1.2}$$

现取 $N = \max(2K_1, 2K_2 - 1)$, 那么当 $n > N$ 时, 如果 $n = 2k$, 由于 $2k > 2K_1, k > K_1$, 所以由式1.1, 知 $|a_{2k} - a| < \varepsilon$, 即

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

如果 $n = 2k-1$, 由于 $2k-1 > 2K_2 - 1, k > K_2$, 由式1.2, 知 $|a_{2k-1} - a| < \varepsilon$, 即

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

综上, 可知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

□

命题 1.2 (极限的四则运算)

设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都是收敛数列, 则 $\{a_n + b_n\}, \{a_n b_n\}$ 也是收敛数列. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, 则 $\{a_n/b_n\}$ 也收敛, 并且有:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, 特别地, 如果 c 是常数, 便有 $\lim\limits_{n\to\infty} c a_n = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, 其中 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

证明

1. Trivial.
2. 由于 $\{b_n\}$ 是收敛的, 它必有界. 这就是说, 存在正数 M, 使得 $|b_n| < M$ 对一切 $n \in \mathbf{N}^*$ 成立. 从而有

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a b_n + a b_n - ab| \\ &\leqslant |b_n| \, |a_n - a| + |a| \, |b_n - b| \\ &\leqslant M \, |a_n - a| + |a| \, |b_n - b| \end{aligned}$$

因为 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 分别收敛于 a, b, 故对任意的 $\varepsilon > 0$, 可以找到一个 $N \in \mathbf{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时,

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(|a|+1)}$$

同时成立. 因此，当 $n>N$ 时，

$$|a_nb_n-ab|<M\frac{\varepsilon}{2M}+\frac{|a|\varepsilon}{2(|a|+1)}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

这就表明

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=ab$$

3. 先来证明：当 $b\neq 0$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{b}$$

对 $|b|/2>0$，存在 N_1，当 $n>N_1$ 时，有

$$|b_n-b|<\frac{|b|}{2}$$

此时，有 $|b_n|\geqslant|b|-|b_n-b|>|b|-|b|/2=|b|/2>0$，这表明：在 $b\neq 0$ 的条件下，$\{b_n\}$ 中至多只有有限多项等于 0. 在 $n>N_1$ 的条件下，

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right|=\frac{|b_n-b|}{|b_nb|}\leqslant\frac{2}{b^2}|b_n-b|$$

由于 $b_n\to b$，对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N_2\in\mathbf{N}^*$，使得当 $n>N_2$ 时，有 $|b_n-b|<\frac{b^2}{2}\varepsilon$。因此，当 $n>\max(N_1,N_2)$ 时，便有

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right|\leqslant\frac{2}{b^2}|b_n-b|<\frac{2}{b^2}\frac{b^2}{2}\varepsilon=\varepsilon$$

这正说明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{b}$$

再由已证的 (2)，便得出

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}a_n\left(\frac{1}{b_n}\right)=\frac{a}{b}$$

□

例题 1.3 证明: $\{\sin n\}$ 是一个发散的数列.

证明 用反证法. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=a$, 那么在等式

$$\sin(n+1)-\sin(n-1)=2\sin 1\cos n$$

的两边取极限 $(n\to\infty)$, 可得 $0=2\sin 1\lim\limits_{n\to\infty}\cos n$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n=0$. 再在等式 $\sin 2n=2\sin n\cos n$ 的两边取极限, 即得 $a=0$. 于是在等式

$$\sin^2 n+\cos^2 n=1$$

的两边取极限立, 就得到" $0=1$ " 的矛盾.

□

定义 1.5 (无穷小)

如果收敛数列 $\{a_n\}$ 的极限等于 0, 那么这个数列称为无穷小数列, 简称无穷小. ♣

命题 1.3

1. $\{a_n\}$ 为无穷小的充分必要条件是 $\{|a_n|\}$ 为无穷小;
2. 两个无穷小之和（或差）仍为无穷小;

3. 设 $\{a_n\}$ 为无穷小，$\{c_n\}$ 为有界数列，那么 $\{c_n a_n\}$ 也为无穷小；
4. 设 $0 \leqslant a_n \leqslant b_n \,(n \in \mathbf{N}^*)$，如果 $\{b_n\}$ 为无穷小，那么 $\{a_n\}$ 也为无穷小；
5. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 的充分必要条件是 $\{a_n - a\}$ 为无穷小.

注 由于无穷小一定是有界的, 故由 (3) 知道, 两个无穷小之积必为无穷小.

但是必须注意, 两个无穷小的商未必是无穷小, 例如, $\{1/n\}$ 与 $\{1/n^2\}$ 的商 $\{n\}$ 便不是无穷小.

例题 1.4 已知 $a_n \to a(n\to\infty)$. 求证:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \to a \quad (n\to\infty).$$

例题 1.5 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = ab$$

定理 1.4 (夹逼原理)

设

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n \quad (n \in \mathbf{N}^*)$$

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, 那么

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a$$

例题 1.6 设 $a>0$. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$.

解

1. 先设 $a \geqslant 1$. 当 $n > a$ 时, 有

$$1 \leqslant a^{1/n} \leqslant n^{1/n}$$

已经证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$. 由夹逼原理，知 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$ 对 $a \geqslant 1$ 成立.

2. 再设 $a \in (0,1)$, 这时, $a^{-1} > 1$. 于是

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{a}\right)^{1/n}} = \frac{1}{1} = 1$$

命题 1.4

在结束本节的时候, 我们来叙述并证明一些通过不等式来表达的收敛数列的性质。

1. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \alpha, \beta$ 满足 $\alpha < a < \beta$, 那么当 n 充分大时, 有 $a_n > \alpha$;
同样, 当 n 充分大时, 有 $a_n < \beta$.
2. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 且 $a<b$, 那么当 n 充分大时, 一定有 $a_n < b_n$.
3. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 并且当 n 充分大时 $a_n \leqslant b_n$, 那么有 $a \leqslant b$.

1.3 数列极限概念的推广

定义 1.6

如果数列 $\{a_n\}$ 满足条件: 对任何正数 A, 都存在 $N \in \mathbf{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $a_n > A$, 则称数列 $\{a_n\}$ 趋向于 $+\infty$ (正无穷大), 记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

如果对任何正数 A, 都存在 $N \in \mathbf{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $a_n < -A$, 则称数列 $\{a_n\}$ 趋向于 $-\infty$ (负无穷大), 记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

定义 1.7

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$, 则称 $\{a_n\}$ 趋向于 ∞, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. 无论三种情形

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

中的哪一种, 数列 $\{a_n\}$ 都称为无穷大.

命题 1.5

1. 如果 $\{a_n\}$ 是无穷大, 那么 $\{a_n\}$ 必然无界. 注意, 上述命题的逆命题不成立, 例如

$$1, 0, 2, 0, 3, 0, \cdots, n, 0, \cdots$$

   是无界的, 但这个数列不是无穷大. 但有:
2. 从无界数列中一定能选出一个子列是无穷大.
3. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (或 $-\infty, \infty$), 那么对 $\{a_n\}$ 的任意子列 $\{a_{k_n}\}$, 也有

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = +\infty \quad (\text{或} -\infty, \infty).$$

4. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, 那么

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$$

   上述性质对 $a_n - b_n$ 和 a_n/b_n 不成立. 例如, $a_n = n, b_n = n$ 都是无穷大, 而 $a_n - b_n = 0, a_n/b_n = 1$ 都不是无穷大.
5. $\{a_n\}$ 是无穷大的充分必要条件是 $\{1/a_n\}$ 为无穷小.

1.4 单调数列

定理 1.5

单调且有界的数列一定有极限.

证明 将数列每一个项写成十进制小数，然后根据有界性对极限的数位上的数字作逼近.

□

例题 1.7 对 $n \in \mathbf{N}^*$, 设

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

求证: $\{a_n\}$ 发散.

证明

$$\begin{aligned}
a_{2^k} =& 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) \\
&+ \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) \\
\geqslant& 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right) \\
&+ \cdots + \left(\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) \\
=& 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{k\text{个}} = 1 + \frac{k}{2} \quad (k = 0, 1, \cdots).
\end{aligned}$$

□

例题 1.8 对 $n \in \mathbf{N}^*$, 设

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^a} + \cdots + \frac{1}{n^a},$$

这里 $\alpha > 1$. 求证: a_n 收敛.

证明 很明显, $\{a_n\}$ 是严格递增数列. 易知

$$\begin{aligned}
a_{2^k-1} =& 1 + \left(\frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a}\right) + \left(\frac{1}{4^a} + \cdots + \frac{1}{7^a}\right) + \left(\frac{1}{8^a} + \cdots + \frac{1}{15^a}\right) \\
&+ \cdots + \left(\frac{1}{(2^{k-1})^a} + \cdots + \frac{1}{(2^k-1)^a}\right) \\
\leqslant& 1 + \frac{2}{2^a} + \frac{4}{4^a} + \frac{8}{8^a} + \cdots + \frac{2^{k-1}}{(2^{k-1})^a} \\
=& 1 + \frac{1}{2^{a-1}} + \frac{1}{4^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{1}{(2^{k-1})^{a-1}} \\
=& 1 + \frac{1}{2^{a-1}} + \left(\frac{1}{2^{a-1}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2^{a-1}}\right)^{k-1} \\
=& \frac{1 - \left(\frac{1}{2^{a-1}}\right)^k}{1 - \frac{1}{2^{a-1}}} < \frac{2^{a-1}}{2^{a-1} - 1}
\end{aligned}$$

至此, 已证明 $\{a_n\}$ 有一子列 $\{a_{2^n-1}\}$ 是有上界的. 因为 $\{a_n\}$ 是递增数列, 由此得知 $\{a_n\}$ 也有上界, 从而 $\{a_n\}$ 是收敛数列.

□

定理 1.6 (闭区间套定理)

设 $I_n = [a_n, b_n]\,(n \in \mathbf{N}^*)$, 并且 $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots$. 如果这一列区间的长度 $|I_n| = b_n - a_n \to 0 (n \to \infty)$, 那么交集 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ 含有唯一的一点.

♡

证明 记左端点组成递增数列 $\{a_n\}$, 而右端点组成递减数列 $\{b_n\}$. 显然, $\{a_n\}$ 有上界 b_1, 而 $\{b_n\}$ 有下界

a_1. 因此以下两个极限存在:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n, \quad b = \lim_{n\to\infty} b_n$$

由于 $a_n \leqslant b_n\ (n \in \mathbf{N}^*)$, 可见 $a \leqslant b$. 因此, 不等式

$$a_n \leqslant a \leqslant b \leqslant b_n$$

对一切 $n \in \mathbf{N}^*$ 成立. 由此式可得

$$0 \leqslant b - a \leqslant b_n - a_n = |I_n|$$

由 $|I_n| \to 0(n \to \infty)$, 可知必有 $a = b$. 这时, $a_n \leqslant a \leqslant b_n$ 对 $n \in \mathbf{N}^*$ 成立, 即 $a \in I_n\ (n = 1, 2, \cdots)$. 由此得到 $a \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$. 显然, 点 a 是唯一的.

□

注 应当特别指出: 定理中的" 闭区间" 的" 闭" 字是不可以去掉的. 请看下面的例子: 设开区间 $I_n = (0, 1/n)(n = 1, 2, \cdots)$. 显然

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots$$

而且 $|I_n| = 1/n \to 0(n \to \infty)$, 但是 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n = \varnothing$, 是空集.

1.5 自然对数的底

命题 1.6

记

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad (n \in \mathbf{N}^*)$$

则

$$0 < \mathrm{e} - s_n \leqslant \frac{1}{n!n} \quad (n \in \mathbf{N}^*)$$

证明

$$\begin{aligned}
0 &< s_{n+m} - s_n \\
&= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+m)!} \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)\cdots(n+m)}\right] \\
&< \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{n+1}\right)^{m-1}\right] \\
&< \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!n}
\end{aligned}$$

令 $m \to \infty$, 得到

$$0 < \mathrm{e} - s_n \leqslant \frac{1}{n!n} \quad (n \in \mathbf{N}^*)$$

□

定理 1.7

自然对数的底 e 是无理数.

证明 用反证法. 假设 $\mathrm{e}=p/q$, 其中 $p,q\in\mathbf{N}^*$. 由于 $2<\mathrm{e}<3$, 可见 e 不是正整数, 因此 $q\geqslant 2$. 可得

$$0<q!\,(\mathrm{e}-s_q)\leqslant\frac{1}{q}\leqslant\frac{1}{2}$$

但是

$$q!\,(\mathrm{e}-s_q)=(q-1)!p-q!\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{q!}\right)$$

是整数, 矛盾!

□

例题 1.9 从 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^n=\mathrm{e}$, 很容易得到

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}=\frac{1}{\mathrm{e}}\\
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^n\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\
&=\mathrm{e}^2
\end{aligned}$$

1.6 基本列和 Cauchy 收敛原理

定义 1.8 (Cauchy 列)

设 $\{a_n\}$ 是一实数列. 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 若存在 $N\in\mathbf{N}^*$, 使得当 $m,n\in\mathbf{N}^*$ 且 $m,n>N$ 时, 有

$$|a_m-a_n|<\varepsilon,$$

则称数列 $\{a_n\}$ 是一个基本列或 Cauchy 列.

例题 1.10 当 $\alpha\leqslant 1$ 时, 设 $a_n=1+\dfrac{1}{2^\alpha}+\cdots+\dfrac{1}{n^\alpha}$. 求证: $\{a_n\}$ 不是基本列.

证明 我们总有

$$\begin{aligned}
a_{n+p}-a_n&=\frac{1}{(n+1)^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^\alpha}\\
&\geqslant\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}\geqslant\frac{p}{n+p}
\end{aligned}$$

由此可见, 对 $n\in\mathbf{N}^*$, 有

$$a_{2n}-a_n\geqslant\frac{n}{n+n}=\frac{1}{2}$$

因而 $\{a_n\}$ 不是基本列.

□

引理 1.1

从任一数列中必可取出一个单调子列.

证明 先引入一个定义: 如果数列中的一项大于这个项之后的所有各项, 则称这一项是一个" 龙头". 分两种情况来讨论.

1. 如果在数列中存在着无穷多个" 龙头", 那么把这些可作" 龙头" 的项依次取下来, 显然将得到一个严格递减的数列.
2. 设在此数列中只有有限多个项可作" 龙头". 这时取出最后一个" 龙头" 的下一项, 记作 a_{i_1}。由于 a_{i_1} 不是" 龙头", 在它的后边必有一项 $a_{i_2}\,(i_2>i_1)$ 满足 $a_{i_1}\leqslant a_{i_2}$; 因 a_{i_2} 也不是" 龙头", 在它的后边也必可找到一项 $a_{i_3}\,(i_3>i_2)$, 使得 $a_{i_3}\geqslant a_{i_2}$. 如此进行下去, 就得到子列 $\{a_{i_n}\}$, 它显然是一个递增的子列.

□

定理 1.8 (列紧性定理)

从任何有界的数列中必可选出一个收敛的子列.

注 此定理也称作 Bolzano-Weierstrass 定理.

定理 1.9 (Cauchy 收敛原理)

一个数列收敛的充分必要条件是, 它是基本列.

证明

1. 必要性.

   设 $\{a_n\}$ 是一个收敛数列, 其极限记作 a. 因此, 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 当 $n>N$ 时, 有
   $$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$$
   当 $m,n\in \mathrm{N}^*$, 且 $m,n>N$ 时, 可得
   $$\begin{aligned}|a_n-a_m|&=|a_n-a+a-a_m|\\&\leqslant|a_n-a|+|a-a_m|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$
   这表明 $\{a_n\}$ 是一个基本列.
2. 充分性.

   设 $\{a_n\}$ 是一个基本列. 首先证明基本列必是有界的. 对 $\varepsilon_0=1$ 而言, 可以取出一个 $N\in\mathbf{N}^*$, 且当 $n>N$ 时, 有
   $$|a_n-a_{N+1}|<\varepsilon_0=1$$
   由此知
   $$|a_n|\leqslant|a_n-a_{N+1}|+|a_{N+1}|<1+|a_{N+1}|$$
   再令
   $$M=\max\left(|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_N|,|a_{N+1}|+1\right),$$
   可见 $|a_n|\leqslant M$ 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立. 因此, $\{a_n\}$ 是有界数列.

   从有界数列 $\{a_n\}$ 中可选出一个收敛的子列 $\{a_{i_n}\}$, 设 $a_{i_n}\to a\ (n\to\infty)$. 我们来证明这个 a 也是

数列 $\{a_n\}$ 的极限。由于 $\{a_n\}$ 是基本列, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在一个 $N_1 \in \mathbf{N}^*$, 使得当 $m, n > N_1$ 时, 都有 $|a_m - a_n| < \varepsilon/2$. 又因 $\lim_{n\to\infty} a_{i_n} = a$, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_2 \in \mathbf{N}^*$, 当 $k > N_2$ 时, $|a_{i_k} - a| < \varepsilon/2$. 现取 $N = \max(N_1, N_2)$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n - a| \leqslant |a_n - a_{i_k}| + |a_{i_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

这正说明 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

1.7 上确界和下确界

定义 1.9 (上确界)

设 E 为一非空的有上界的集合, 实数 β 满足以下两个条件:

1. 对任何 $x \in E$, 有 $x \leqslant \beta$.
2. 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 必可找到一个 $x_\varepsilon \in E$, 使得 $x_\varepsilon > \beta - \varepsilon$ 。

这时, 称 β 为集合 E 的上确界, 记为 $\beta = \sup E$.

♣

注 E 的上确界 β 是 E 的最小上界

定义 1.10 (下确界)

设 E 为一非空的有下界的集合, 实数 α 满足以下两个条件:

1. 对任何 $x \in E$, 有 $x \geqslant \alpha$.
2. 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 必可找到一个 $y_\varepsilon \in E$, 使得 $y_\varepsilon < \alpha + \varepsilon$.

这时, 称 α 为集合 E 的下确界, 记为 $\alpha = \inf E$.

♣

注 E 的下确界是 E 的最大下界.

注 显然, 若集合 E 中有最大 (最小) 数 a, 那么 $\sup E(\inf E) = a$.

定理 1.10 (确界原理)

1. 非空的有上界的集合必有上确界.
2. 非空的有下界的集合必有下确界.

♡

证明

1. 设非空集合 E 有一个上界 γ. 任取一点 $x \in E$, 显然, $\sup E \in [x, \gamma]$ 中. 记 $a_1 = x, b_1 = \gamma$.
   (a). 用 $[a_1, b_1]$ 的中点 $(a_1 + b_1)/2$ 把这个区间一分为二, 先看右边那个闭区间中有没有 E 中的点, 若有 E 中的点, 将这个区间记为 $[a_2, b_2]$, 否则将左边那个区间记为 $[a_2, b_2]$.
   (b). 接着再把 $[a_2, b_2]$ 用其中点一分为二, 先看右边那个小区间, 若其中有 E 中的点, 把它记为 $[a_3, b_3]$, 否则把左边那个小区间记作 $[a_3, b_3]$.
   (c). 如此这般继续下去, 我们得出了一列闭区间套 $I_n = [a_n, b_n]\,(n \in \mathbf{N}^*)\,, I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$, 并且 $|I_n| = (\gamma - x)/2^{n-1}\,(n \in \mathbf{N}^*)$

   这个区间套的其他两个重要的特征是:
   (a). 在 I_n 右端点的右边再也没有 E 中的点.
   (b). I_n 总包含着 E 中的点, 这里 $n = 1, 2, \cdots$.

   根据闭区间套定理, 存在唯一的实数 β , 使得 $\beta \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

下证 $\beta=\sup E$. 注意，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\beta$. 任取 $c\in E$.
由性质 (1) 可知：对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $c\leqslant b_n$, 令 $n\to\infty$, 便得到 $c\leqslant\beta$. 这表明 β 是 E 的一个上界. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\beta$, 故对任给的 $\varepsilon>0$, 存在一个 $N\in\mathbf{N}^*$, 使得 $\beta-\varepsilon<a_N$.
在区间 I_N 中, 由性质 (2), 一定有 E 中的一点, 记为 d. 因此 $d\geqslant a_N>\beta-\varepsilon$, 这表明 β 是 E 的最小上界.

2. 第二个论断可以通过第一个论断来证明.
设 E 有下界 m, 即对每一个 $x\in E$, 有 $x\geqslant m$. 现定义 $F=\{-x:x\in E\}$, 则因 $x\geqslant m$, 所以 $-x\leqslant -m$, 即 $-m$ 是集合 F 的一个上界, 根据第一个论断, F 有上确界, 记 $\beta=\sup F$.
下证 $-\beta=\inf E$. 为此, 取 $x\in E$, 则 $-x\in F, -x\leqslant\beta$, 故 $x\geqslant-\beta$, 即 $-\beta$ 是 E 的一个下界.
为证明 $-\beta$ 是 E 的最大下界, 任取 $\varepsilon>0$, 要证明存在 $y_\varepsilon\in E$, 使得 $y_s<-\beta+\varepsilon$. 由于 $\beta=\sup F$, 所以存在 $x_\varepsilon\in F$, 使得 $x_\varepsilon>\beta-\varepsilon, -x_\varepsilon<-\beta+\varepsilon$. 记 $y_\varepsilon=-x_\varepsilon\in E$, 则有 $y_\varepsilon<-\beta+\varepsilon$，故 $-\beta=\inf E$.

□

注 若记 $F=-E$，则上面证明了

$$-\sup(-E)=\inf E \text{ 或 } \sup(-E)=-\inf E.$$

这一性质在下面的讨论中要多次用到.

1.8 有限覆盖定理

定义 1.11 (开覆盖)

如果 A 是实数集, $\mathscr{F}=\{I_\lambda\}$ 是一个开区间族, 其中 $\lambda\in\Lambda$, 这里的 Λ 称为指标集. 如果

$$A\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}I_\lambda$$

称开区间族 $\{I_\lambda\}$ 是 A 的一个开覆盖，或者说 $\{I_\lambda\}$ 盖住了 A.
$\mathscr{F}=\{I_\lambda\}$ 是 A 的开覆盖也可以等价地叙述为: 任取 $a\in A$, 总有 $\mathscr{F}$ 中的一个成员, 记为 $I_{\lambda(a)}$, 使得 $a\in I_{\lambda(a)}$.

♣

定理 1.11 (有限覆盖定理)

设 $[a,b]$ 是一个有限闭区间, 并且它有一个开覆盖 $\{I_\lambda\}$, 那么从这个开区间族中必可选出有限开区间，这有限个开区间所成的族仍是 $[a,b]$ 的开覆盖.

♡

注 这个定理常称为紧致性定理, 也叫作 Heine-Borel 定理.

证明 用反证法. 假如定理的结论不成立, 也就是说, $\{I_\lambda\}$ 中任意有限个区间都不能覆盖 $[a,b]$.
考虑用”二分法”来导出矛盾. 记 $a=a_1, b=b_1$.

1. 用 $[a_1,b_1]$ 的中点 $\frac{(a_1+b_1)}{2}$ 把这个区间一分为二:

$$\left[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}\right],\quad\left[\frac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$$

显然，这两个区间中至少有一个不能被 $\{I_\lambda\}$ 中的有限个区间所覆盖，否则，$[a_1,b_1]$ 就能被 $\{I_\lambda\}$ 中的有限个区间所覆盖. 把那个不能被 $\{I_\lambda\}$ 中有限个区间所覆盖的区间记为 $[a_2,b_2]$，再把 $[a_2,b_2]$

一分为二：

$$\left[a_2, \frac{a_2+b_2}{2}\right], \quad \left[\frac{a_2+b_2}{2}, b_2\right]$$

2. 同理，其中必有一个不能被 $\{I_\lambda\}$ 中的有限个区间所覆盖，把它记为 $[a_3, b_3]$.
3. 如此可以无限继续下去，得到一列区间 $\{[a_n, b_n]\}\,(n=1,2,\cdots)$. 它们具有下列性质：
   (a). $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]\,(n=1,2,\cdots)$;
   (b). $b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b_1 - a_1) \to 0 (n \to \infty)$;
   (c). 每个 $[a_n, b_n]$ 都不能被 $\{I_\lambda\}$ 中的有限个区间所覆盖.

从 (1),(2) 两条性质知道，$\{[a_n, b_n]\}$ 满足闭区间套定理的条件，因而存在唯一的 $\eta \in [a_n, b_n]\,(n = 1,2,\cdots)$, 且

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \eta \tag{1.3}$$

因为 $\eta \in [a_1, b_1] = [a, b]$，而 $\{I_\lambda\}$ 是 $[a, b]$ 的开覆盖，故 $\{I_\lambda\}$ 中必有区间 (α, β)，使得 $\eta \in (\alpha, \beta)$. 记

$$\varepsilon = \min(\eta - \alpha, \beta - \eta)$$

从式1.3可知，必有正整数 N_1, N_2，使得当 $n > N_1$ 时，$|a_n - \eta| < \varepsilon$；当 $n > N_2$ 时，$|b_n - \eta| < \varepsilon$. 因此当 $n > N = \max(N_1, N_2)$ 时，有

$$\alpha \leqslant \eta - \varepsilon < a_n < b_n < \eta + \varepsilon \leqslant \beta$$

这就是说 $[a_n, b_n] \subset (\alpha, \beta)$, 即 $\{I_\lambda\}$ 中一个区间就覆盖了 $[a_n, b_n]$, 这与性质 (3) 矛盾.

□

注 在定理条件中若把有限闭区间换成开区间或无穷区间，结论就不再成立.

例如，
1. $\{(\frac{1}{n}, 1)\}(n = 2, 3, \cdots)$ 是开区间 $(0, 1)$ 的一个开覆盖，但不可能从中选出有限个来覆盖 $(0, 1)$.
2. $\{(0, n)\}(n = 1, 2, \cdots)$ 是无穷区间 $(1, +\infty)$ 的一个开覆盖，从中也选不出有限个来覆盖 $(1, +\infty)$.

1.9 上下极限

定义 1.12 (上下极限的定义)

设 $\{a_n\}$ 是一个数列，E 是由 $\{a_n\}$ 的全部极限点构成的集合. 记

$$a^* = \sup E, \quad a_* = \inf E,$$

则 a^* 和 $a*$ 分别称为数列 $\{a_n\}$ 的上极限和下极限，记为

$$a^* = \limsup_{n\to\infty} a_n, \quad a_* = \liminf_{n\to\infty} a_n$$

♣

例题 1.11 考察数列

$$a_n = \frac{(-1)^n}{1 + 1/n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

由于

$$a_{2n}=\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-1}\to 1 \quad (n\to\infty),$$

$$a_{2n-1}=-\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{-1}\to -1 \quad (n\to\infty),$$

所以 $E=\{-1,1\}$, 从而

$$\liminf_{n\to\infty} a_n=-1,\quad \limsup_{n\to\infty} a_n=1$$

当 E 是一个无穷集合时, 就产生一个问题: $a^*=\sup E$ 或 $a*=\inf E$ 是不是 E 中的元素, 即 a^* 或 a. 是不是 $\{a_n\}$ 中某个子列的极限? 下面的定理给出了肯定的回答.

定理 1.12

设 $\{a_n\}$ 为一数列, E 与 a^* 的意义同上. 那么:

1. $a^*\in E$.
2. 若 $x>a^*$, 则存在 $N\in\mathbf{N}^*$, 使得当 $n\geqslant N$ 时, 有 $a_n<x$.
3. a^* 是满足前两条性质的唯一的数.

♡

证明

□

1.10 Stolz 定理

命题 1.7 (Stolz, $\frac{\infty}{\infty}$ 型)

设 b_n 是严格递增且趋于 $+\infty$ 的数列. 如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A \tag{1.4}$$

那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$$

其中 A 可以是 $+\infty$ 或 $-\infty$.

♠

证明

1. 先设 A 为有限数.

   由 Cauchy 收敛原理知, 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 n_0, 当 $n\geqslant n_0$ 时, 有

   $$A-\varepsilon<\frac{a_n-a_{n_0-1}}{b_n-b_{n_0-1}}<A+\varepsilon$$

   即

   $$A-\varepsilon<\frac{\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n_0-1}}{b_n}}{1-\frac{b_{n_0-1}}{b_n}}<A+\varepsilon$$

   于是得

   $$(A-\varepsilon)\left(1-\frac{b_{b_0-1}}{b_n}\right)+\frac{a_{n_0-1}}{b_n}<\frac{a_n}{b_n}<(A+\varepsilon)\left(1-\frac{b_{n_0-1}}{b_n}\right)+\frac{a_{n_0-1}}{b_n}$$

从而得

$$A-\varepsilon \leqslant \liminf_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} \leqslant A+\varepsilon$$

再令 $\varepsilon \to 0$ ，即得

$$A \leqslant \liminf_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} \leqslant A$$

2. 设 $A=+\infty$, 当 n 充分大时, 有 $a_n-a_{n-1}>b_n-b_{n-1}>0$, 因而 $\{a_n\}$ 也是严格递增且趋于 $+\infty$ 的数列. 现在把式1.4 写成

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n-b_{n-1}}{a_n-a_{n-1}}=0$$

由 (1)，知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=0$ ，因而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=+\infty$.

3. 设 $A=-\infty$, 记 $c_n=-a_n$, 那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n-c_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=-\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=+\infty$$

由 (2), 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c_n}{b_n}=+\infty$, 因而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=-\infty$.

□

例题 1.12 设 k 为正整数, 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$$

解 令 $a_n=1^k+2^k+\cdots+n^k, b_n=n^{k+1}$, 那么

$$b_n-b_{n-1}=n^{k+1}-(n-1)^{k+1}=(k+1)n^k+\cdots+(-1)^{k+1}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{(k+1)n^k+\cdots+(-1)^{k+1}}=\frac{1}{k+1}$$

由 Stolz 定理, 知所求的极限为 $\frac{1}{k+1}$.

第 2 章 函数连续性

2.1 函数的极限

定义 2.1 (函数极限的定义)

设函数 f 在点 x_0 的近旁有定义, 但 x_0 这一点自身可以是例外. 设 l 是一个实数. 如果对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在一个 $\delta > 0$, 使得对一切满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的 x, 均有

$$|f(x) - l| < \varepsilon,$$

则称当 x 趋于点 x_0 时函数 f 有极限 l, 记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l;$$

或者更简单一些，记作

$$f(x) \to l \quad (x \to x_0)$$

这时, 也可以说函数 f 在点 x_0 有极限 l. ♣

注

1. 在讨论 f 在点 x_0 的极限时, f 在 x_0 是否有定义并不重要, 因为不等式 $0 < |x - x_0|$ 已经把 $x = x_0$ 的可能性排除在外;
2. 在一般情形之下，δ 与 ε 有关系，为了强调这种依赖关系，有时把 δ 写为 $\delta(\varepsilon)$, 但这不意味着 δ 是 ε 的函数;
3. f 在 x_0 是否有极限、有极限时极限值等于多少, 只取决于 f 在点 x_0 的充分小的近旁的状态, 而与 f 在远处的值无关.

例题 2.1 求极限 $\lim\limits_{x \to 3} \left(x^2 - 4x + 4\right)$.

解

$$x^2 - 4x + 4 = (x-3)^2 + 2(x-3) + 1$$

对任给的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min(1, \varepsilon/3)$, 当 $0 < |x - 3| < \delta$ 时, 有

$$\begin{aligned} \left|\left(x^2 - 4x + 4\right) - 1\right| &\leqslant |x-3|(|x-3|+2) < |x-3|(1+2) \\ &= 3|x-3| < 3\delta \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

这就证明了所求的极限是 1.

例题 2.2 求极限 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - x}$.

解 这时所讨论的函数在 $x = 1$ 处没有定义. 由于 $x \neq 1$, 所以可以同时消去分子与分母中的公因式 $x - 1$, 从而得出

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - x} = \frac{x+1}{x}$$

由此我们察觉到当 $x \to 1$ 时, 函数的极限为 2 . 为了证明这一观察, 对任意给定的小于 1 的正数 ε, 取 $\delta = \varepsilon/2$, 当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时, 有

$$|x| = |x - 1 + 1| \geqslant 1 - |x - 1| \geqslant 1 - \delta = 1 - \frac{\varepsilon}{2} > \frac{1}{2}$$

由此得出

$$\left|\frac{x^2-1}{x^2-x}-2\right|=\frac{|x-1|}{|x|}<2|x-1|<2\delta=\varepsilon$$

所以

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-x}=2$$

定理 2.1

函数 f 在 x_0 处有极限 l 的充分必要条件是, 任何一个收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\neq x_0:n=1,2,3,\cdots\}$, 数列 $\{f(x_n)\}$ 有极限 l.

证明

1. 必要性

   设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$, 对任给的 $\varepsilon>0$, 存在一个 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-l|<\varepsilon$. 对已取定的 $\delta>0$, 只要 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$, 便存在一个 $N\in\mathbf{N}^*$, 使得当 $n>N$ 时, 有 $0<|x_n-x_0|<\delta$. 这样, 当 $n>N$ 时, 有

   $$|f(x_n)-l|<\varepsilon$$

   这正是 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=l$.
2. 充分性

   假设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$ 不成立, 那么, 必有一个正数 ε_0, 对每一个正整数 n , 一定有一点 x_n , 满足 $0<|x_n-x_0|<1/n$, 且使得 $|f(x_n)-l|\geqslant\varepsilon_0>0$. 这就是说, 我们已经找到了一个数列 $\{x_n\neq x_0:n=1,2,3,\cdots\}$, 虽然它收敛于 x_0 , 但是 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq l$.

□

注 该定理来判断函数极限不存在比较方便.

例题 2.3 求证: $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

证明 令

$$x_n=\frac{1}{(2n+1/2)\pi}\to 0,\quad x_n'=\frac{1}{2n\pi}\to 0\quad(n\to\infty),$$

以及 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$. 我们有 $f(x_n)=1\to 1, f(x_n')=0\to 0(n\to\infty)$. 由归结原则知该极限不存在.

□

例题 2.4 定义函数 $D:\mathbb{R}\to\{0,1\}$ 如下:

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当} x \text{ 为有理数时},\\ 0, & \text{当} x \text{ 为无理数时}.\end{cases}$$

证明: 对任意的 $x_0\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0}D(x)$ 不存在.

证明 证明对任意的 $x_0\in\mathbb{R}$, 一定存在全由有理数组成的数列 $\{s_n\}$ 和全由无理数组成的数列 $\{t_n\}$, 使它们都趋向于 x_0, 这样就有

$$\lim_{n\to\infty}D(s_n)=1,\quad\lim_{n\to\infty}D(t_n)=0$$

由归结原则, 即知 $\lim\limits_{x\to x_0}D(x)$ 不存在.

□

注 上例中定义的函数 D 叫作 Dirichlet 函数, 看上去这个函数有太多的人工雕琢的成分, 不太自然, 但

是用它来澄清一些似是而非的误解时,是十分方便的. 例如, 由上例可知, 处处不存在极限的函数是存在的. 以后还将多次遇到这个函数.

命题 2.1 (函数极限的唯一性)

若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在, 则它是唯一的.

证明 任取一收敛于 x_0 的数列 $\{x_n \neq x_0 : n \in \mathbb{N}^*\}$.

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

由数列的极限的唯一性, 从而知函数极限也是唯一的.

□

命题 2.2

若 f 在 x_0 处有极限, 那么 f 在 x_0 的一个近旁是有界的. 也就是说, 存在整数 M 及 δ , 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x)| < M$ 。

证明 设 f 在 x_0 处的极限等于 l. 依定义, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - l| < 1$. 因此

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - l| + |l| < 1 + |l|$$

对 $0 < |x - x_0| < \delta$ 成立. 由此可见, $M = 1 + |l|$ 满足要求.

□

命题 2.3

设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ 存在, 那么有:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} (f \pm g)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;
2. $\lim\limits_{x \to x_0} fg(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;
3. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$, 其中 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$.

证明

1. Trivial.
2. Trivial.
3. 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = m \neq 0$, 那么对任意收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$, 有 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = l$, $\lim\limits_{n \to \infty} g(x_n) = m \neq 0$. 于是由数列中已知的结果, 有 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = \dfrac{l}{m}$. 由于 $\{x_n\}$ 是任意趋于 x_0 的数列, 由归结原则即知
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$$

□

命题 2.4 (夹逼原理)

设函数 f, g 与 h 在点 x_0 的近旁 (点 x_0 自身可能是例外) 满足不等式

$$f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$$

如果 f 与 g 在点 x_0 有相同的极限 l, 那么函数 h 在点 x_0 也有极限 l.

证明 由于 $f(x) \to l\,(x \to x_0)$, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时, 有

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

类似地, 存在 δ_2, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时, 有

$$l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon$$

取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ ，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，我们可得

$$l - \varepsilon < f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x) < l + \varepsilon$$

由此推出，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$|h(x) - l| < \varepsilon$ 成立. 这便证明了 $h(x) \to l\,(x \to x_0)$.

□

命题 2.5

设存在 $r > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < r$ 时, 不等式 $f(x) \leqslant g(x)$ 成立. 又设在 x_0 处这两个函数都有极限, 那么

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leqslant \lim_{x \to x_0} g(x)$$

♠

证明 取收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$, 并让它满足

$$0 < |x_n - x_0| < r \quad (n \in \mathbf{N}^*)$$

从而有

$$f(x_n) \leqslant g(x_n) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

令 $n \to \infty$, 得 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) \leqslant \lim\limits_{n \to \infty} g(x_n)$. 再由归结原则, 可知这正是

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leqslant \lim_{x \to x_0} g(x)$$

定义 2.2

约定如下记号

$$B_\delta(x_0) = \{x : |x - x_0| < \delta\}, \quad B_\delta(\check{x}_0) = \{x : 0 < |x - x_0| < \delta\}.$$

称 $B_\delta(x_0)$ 为 x_0 的以 x_0 为中心、δ 为半径的邻域 (简称 x_0 的邻域), $B_\delta(\dot{x}_0)$ 为 x_0 的以 x_0 为中心、δ 为半径的空心邻域 (简称 x_0 的空心邻域). 利用这两个记号, 函数极限的定义可以叙述为:

如果对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在一个 $\delta > 0$, 使得对一切 $x \in B_\delta(\check{x})$, 均有

$$|f(x) - l| < \varepsilon,$$

就称 l 为 f 当 x 趋于 x_0 时的极限，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

♣

定理 2.2 (Cauchy 收敛原理)

函数 f 在 x_0 处有极限, 必须且只需对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 $x_1, x_2 \in B_\delta(\check{x}_0)$, 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

♡

证明 必要性比较显然，下证充分性.

设对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $x_1,x_2\in B_\delta(\dot{x}_0)$ 时, 有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

现设 $\{x_n\neq x_0:n\in\mathbf{N}^*\}$ 是任一个收敛于 x_0 的数列。对刚才已经确定的 $\delta>0$，可以找到正整数 N, 当 $m,n>N$ 时, 有 $0<|x_m-x_0|<\delta$, 且 $0<|x_n-x_0|<\delta$, 即 $x_m,x_n\in B_\delta(\dot{x}_0)$. 由此得到

$$|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon$$

这表明数列 $\{f(x_n)\}$ 是一个基本列，因此是收敛数列，设其极限是 l_x .

设 $\{\boldsymbol{y}_n\neq\boldsymbol{x}_0:n\in\mathbf{N}^*\}$ 是另一个收敛于 x_0 的数列，数列 $\{f(y_n)\}$ 也应有极限，记为 l_y.

下证 $l_x=l_y$. 事实上，把 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 交错地排列，作为一个新的数列 $\{z_n\}$:

$$x_1,y_1,x_2,y_2,\cdots,x_n,y_n,\cdots$$

显然 $z_n\neq x_0\,(n\in\mathbf{N}^*)$, 可是 $z_n\to x_0(n\to\infty)$. 因此数列 $\{f(z_n)\}$ 有极限，记为 l .

注意到 $\{f(x_n)\}$ 和 $\{f(y_n)\}$ 都是 $\{f(z_n)\}$ 的子列，所以必须

$$l_x=l_y=l$$

再根据归结原则, 知 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在.

定理 2.3

设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$, $\lim\limits_{t\to t_0}g(t)=x_0$. 如果在 t_0 的某个邻域 $B_\eta(t_0)$ 内 $g(t)\neq x_0$, 那么

$$\lim_{t\to t_0}f(g(t))=l.$$

注 条件 $g(t)\neq x_0$ 至为重要, 没有这个条件定理可能就不成立. 例如, 令

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ 0, & x\neq 0,\end{cases}\qquad g(t)\equiv 0$$

那么 $\lim\limits_{t\to 0}g(t)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$. 按照上述定理, 应有

$$\lim_{t\to 0}f(g(t))=0$$

但事实上, $f(g(t))\equiv 1$, 即上式不成立. 不成立的原因就在于条件 $g(t)\neq 0$ 被破坏了.

定义 2.3 (单边极限)

设函数 f 在 (x_0,x_0+r) (r 是一个确定的正数) 上有定义. 设 l 是一个给定的实数. 若对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在一个 $\delta\in(0,r)$, 使得当 $0<x-x_0<\delta$ 时, 有

$$|f(x)-l|<\varepsilon,$$

则称 l 为 f 在 x_0 处的右极限, 表示成

$$l=\lim_{x\to x_0^+}f(x)$$

在右极限存在的情形下, 这个右极限常记为 $f(x_0+)$ 或 $f(x_0+0)$. 也就是说,

$$f(x_0+)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)$$

类似地，可以定义 f 在 x_0 处的左极限 $f(x_0-)$. 右极限和左极限统称为单边极限.

命题 2.6

设函数 f 在 x_0 的某个邻域内 (x_0 可能是例外) 有定义, 那么 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充分必要条件是

$$f\left(x_0+\right)=f\left(x_0-\right),$$

这个共同的值也就是函数 f 在 x_0 处的极限值.

例题 2.5 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\left(\sin\frac{x}{2}\right)/\frac{x}{2}\right)^2.$$

若令 $t=x/2$, 那么 $x\to 0$ 等价于 $t\to 0$. 根据例 6 , 有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}&=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\right)^2\\&=\frac{1}{2}\times 1^2=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

注 例题中所用的技巧 $t=x/2$, 称为变量代换, 又称换元, 在数学分析的各个部分中都是非常有用的.

例题 2.6 下面的函数称为 Riemann 函数:

$$R(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ \frac{1}{q}, & x=\frac{p}{q}(q>0,p,q\text{ 互素}),\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

对任意的实数 x_0, 证明: $\lim\limits_{x\to x_0} R(x)=0$.

证明 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 取充分大的正整数 q_0, 使得 $1/q_0<\varepsilon$.

容易知道, 在区间 (x_0-1,x_0+1) 中, 满足 $0<q\leqslant q_0$ 的分数 p/q 只有有限多个.

因此总能取到充分小的 $\delta>0$, 使得 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 中的有理数的分母 $q>q_0$.

故当无理数 x 满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, $R(x)=0$.

当有理数 $x=p/q$ 满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 必有 $q>q_0$. 因而

$$0\leqslant R(x)=\frac{1}{q}<\frac{1}{q_0}<\varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to x_0} R(x)=0$.

□

2.2 极限过程的其他形式

定义 2.4

设 l 是一确定的实数, 表达式

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=l$$

的意思是, 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在一个正数 A, 当 x 满足 $|x|>A$ 时, 有 $|f(x)-l|<\varepsilon$. 这时, 我们说” 当 x 趋向于无穷时, 函数 f 有极限 l ”. 上式也可以简记为

$$f(x)\to l=f(\infty)\quad(x\to\infty).$$

命题 2.7

$\lim_{x\to\infty} f(x)=l$ 当且仅当

$$f(-\infty)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=l,\quad f(+\infty)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$$

同时成立.

例题 2.7 设

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}\quad(x\geqslant 1)$$

这里 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数. 试求 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

解 已经证明数列 $\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$ 递增地趋向于自然对数的底 e . 因此, 对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbf{N}^*$, 使得

$$0<\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{N}\right)^N<\varepsilon$$

由于 f 是递增函数, 当 $x\geqslant N$ 时, 有 $[x]\geqslant N$, 从而有

$$0<\mathrm{e}-f(x)\leqslant \mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{N}\right)^N<\varepsilon$$

这就证明了

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}=\mathrm{e}$$

例题 2.8 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

解 先设 $x\geqslant 1$. 由不等式 $[x]\leqslant x<[x]+1$, 得

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

我们已经知道, 当 $x\to+\infty$ 时, 上式左、右两边的函数趋向于极限 e . 由夹逼原理, 便知

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

现在再来讨论 $x\to-\infty$ 的情形. 令 $y=-(x+1)$. 易知, 当 $x\to-\infty$ 时, $y\to+\infty$, 而

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x&=\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y+1}\\&=\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\left(1+\frac{1}{y}\right)\to\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e}\quad(y\to+\infty)\end{aligned}$$

综上, 可得

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

2.3 无穷小和无穷大

定义 2.5

设 x_0 是一个实数, 函数 $f(x)$ 在 x_0 的一个近旁（可能除 x_0 之外）有定义. 如果对任意给定的正数 A, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| > A$, 则称" 当 x 趋向于 x_0 时, 函数 f 趋向于无穷大", 记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty,$$

或者

$$f(x) \to \infty \quad (x \to x_0).$$

♣

注

1. 这些情形，我们说" 在所标明的极限过程中, f 是一个无穷大 (量)".
2. 与上述情形相对照, 如果在某一极限过程中, $\lim f(x) = 0$, 则称" 在该过程中, f 是一个无穷小 (量)".
3. 显然. 无穷大的倒数是无穷小; 不取零值的无穷小的倒数是无穷大.

定义 2.6

设当 $x \to x_0$ 时, f 与 g 都是无穷小, 并且 g 在 x_0 的一个充分小的近旁（除 x_0 之外）不取零值.

1. 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, 那么称 f 是比 g 更高阶的无穷小;
2. 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$, 则称 f 与 g 是同阶的无穷小;
3. 如果 (2) 中的极限值 $l = 1$, 那么称 f 与 g 是等价的无穷小, 记为

$$f \sim g \quad (x \to x_0).$$

♣

注 可以把无穷小的" 阶" 进行" 量化". 为此, 要取一个无穷小作为标准. 当 $x \to x_0$ 时, 很自然地取 $x - x_0$ 当作" 1 阶无穷小". 设当 $x \to x_0$ 时, f 是一个无穷小, 那么当 f 与 $(x - x_0)^\alpha$ $(\alpha > 0)$ 为同阶的无穷小时, 称 f 为 α 阶的无穷小.

例题 2.9 例如, 由于

$$\sin x \sim x \quad (x \to 0)$$
$$\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x \quad (x \to 0)$$
$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \quad (x \to 0)$$

可见当 $x \to 0$ 时, $\sin x$ 和 $\sqrt{1+x} - 1$ 都是 1 阶无穷小, $1 - \cos x$ 是 2 阶无穷小.

定义 2.7

在同一极限过程中的两个无穷大, 也可以按此进行比较. 具体地说, 设在某一极限过程中, f 与 g 都是无穷大, 那么:

1. 当 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ 时, 称 g 是比 f 更高阶的无穷大, 也可以说 f 是比 g 更低阶的无穷大.
2. 当 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在且不等于 0 时, 称它们是同阶的无穷大; 当这极限值等于 1 时. 称 f 与 g 是等价的无穷大.

♣

例题 2.10 例如, 当 $x \to 1$ 时, 最好取 $1/(x-1)$ 作为标准的无穷大. 由于

$$\frac{x^2+x-2}{(x^2-1)^3} = \frac{x+2}{(x-1)^2(x+1)^3} = \left(\frac{1}{x-1}\right)^2 \frac{x+2}{(x+1)^3}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+2}{(x+1)^3} = \frac{3}{8} \neq 0$$

因此 $\dfrac{x^2+x-2}{(x^2-1)^3}$ 是一个 2 阶的无穷大.

例题 2.11 当 $x \to \infty$ 时, 取 $|x|$ 为标准的无穷大是十分合理的. 因此, 由

$$\sqrt{2x^2+1} = |x|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}$$

$$\sqrt{2} < \sqrt{2+\frac{1}{x^2}} < \sqrt{2}+\frac{1}{|x|}$$

可知

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{|x|} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{2+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{2} \neq 0,$$

从而得出当 $x \to \infty$ 时, $\sqrt{2x^2+1}$ 是 1 阶的无穷大.

注 值得注意的是, 不是对每一个无穷小或无穷大都能定出" 阶" 来. 大家知道, 当 $x \to 0$ 时, $x\sin\dfrac{1}{x}$ 是一个无穷小. 可是, 把 x 取为标准的无穷小时, 不可能为无穷小 $x\sin\dfrac{1}{x}$ " 定阶".

命题 2.8

如果当 $x \to x_0$ (x_0 可以是 $\pm\infty$) 时, f, g 是等价的无穷小或无穷大, 那么:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)h(x)$;
2. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{h(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(x)}{h(x)}$.

例题 2.12 例如, 我们已知

$$\sin x \sim x \quad (x \to 0)$$

当 a, b 为常数且 $a, b \neq 0$ 时, 有

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x\to 0} \frac{ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

例题 2.13 计算

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+\sqrt{x}}-1)\tan\frac{x}{2}}{1-\cos x^{3/4}}$$

因为当 $x \to 0$ 时, 有

$$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1 \sim \frac{1}{2}\sqrt{x}, \quad \tan\frac{x}{2} \sim \frac{x}{2}, \quad 1-\cos x^{3/4} \sim \frac{1}{2}x^{3/2}$$

得

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+\sqrt{x}}-1)\tan\frac{x}{2}}{1-\cos x^{3/4}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\sqrt{x}\cdot\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x^{3/2}} = \frac{1}{2}$$

注 特别应注意的是: 这种代替只能发生在以因式形式出现的无穷小 (或无穷大) 上, 而不能发生在以加项或减项出现的无穷小（或无穷大）上。不牢记这一点, 将会产生错误。例如, 计算

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$$

这时如果错误地将 $\sin x$ 和 $\tan x$ 都用 x 来代替, 得到的结果将是 0 . 但事实上,

$$\sin x-\tan x=\sin x\left(1-\frac{1}{\cos x}\right)=\frac{\sin x(\cos x-1)}{\cos x}$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{1}{\cos x}=-\frac{1}{2}$$

定义 2.8

设函数 f 与 g 在 x_0 的近旁 (x_0 除外) 有定义, 并且 $g(x)\neq 0$.

1. 当 $x\to x_0$ 时, 若比值 $f(x)/g(x)$ 保持有界, 即存在正常数 M, 使得 $|f(x)|\leqslant M|g(x)|$ 成立, 就用 $f(x)=O(g(x))\,(x\to x_0)$ 来表示;
2. 当 $x\to x_0$ 时, 若 $f(x)/g(x)$ 是一个无穷小, 即
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$
就用 $f(x)=o(g(x))\,(x\to x_0)$ 来表示.

♣

注 特别地, 记号 $f(x)=O(1)\,(x\to x_0)$ 与 $f(x)=o(1)\,(x\to x_0)$ 分别表示在 $x\to x_0$ 的过程中函数 f 有界与 f 是一个无穷小.

例题 2.14 例如

$$\begin{aligned}&3x^2-2x+10=O\left(x^2\right)\quad(x\to\infty)\\&x=O(\sin x)\quad(x\to 0)\\&x^{3/2}\sin\frac{1}{x}=o(x)\quad(x\to 0)\end{aligned}$$

对符号 O,o 的用法作一点说明. 记号 $O(g(x))$ 与 $o(g(x))$ 并不具体地代表一个量, 而只是表示量的一种状态、一种类型. 式子 $f(x)=O(g(x))$ 或 $f(x)=o(g(x))$ 中的符号" $=$ " 应当理解为属于 $(\in)$ 的意思, 表示函数 f 属于等式右边所代表的类型, 而式子 $O(g(x))=f(x)$ 或 $o(f(x))=f(x)$ 都没有明确的意义, 所以这里的" 等式" 两边的项不能像通常的等式那样进行交换. 又如, 式子

$$O(1)+o(1)=O(1)\quad(x\to x_0)$$

是有意义的, 它表示当 $x\to x_0$ 时, 一个有界量与无穷小量的和仍是一个有界量; 但是我们不能去掉等式左边与右边的 $O(1)$ 而得出 $o(1)=0$ 这种结论. 又如 $O(1)+O(1)=O(1)$ 有着明确的意义, 即在 $x\to x_0$ 的过程中, 两个有界量之和仍是一个有界量, 这时我们既不能从等式的两边同时取走一个 $O(1)$, 也无须把上式写为 $O(1)+O(1)=2O(1)$.

2.4 连续函数

第 3 章 级数

内容提要

- 无穷级数基本性质
- 正项级数比较判别法

3.1 无穷级数基本性质

定义 3.1

无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{3.1}$$

的前 n 项和

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

称为这个级数的第 n 个部分和。如果这些部分和构成的数列 $\{S_n\}$ 有有限的极限 S, 就说级数3.1是收敛的，其和为 S ，记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

如果数列 $\{S_n\}$ 没有有限的极限, 就说级数3.1是发散的.

例题 3.1 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

当 $\alpha > 1$ 时收敛, 当 $\alpha \leqslant 1$ 时发散. 这一事实在下面的讨论中经常要用到.

命题 3.1 (级数收敛必要条件)

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

例题 3.2 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\sin\dfrac{1}{n}$ 发散. 这是因为

$$a_n = n\sin\frac{1}{n} \to 1 \neq 0 \quad (n\to\infty).$$

命题 3.2

如果级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 和 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ 都收敛, 那么级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$$

也收敛，且

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k+\beta b_k)=\alpha\sum_{k=1}^{\infty}a_k+\beta\sum_{k=1}^{\infty}b_k,$$

这里 α,β 是任意两个实数.

命题 3.3

设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 是一收敛级数. 如果把级数的项任意结合而不改变其先后的次序, 得新级数

$$(a_1+\cdots+a_{k_1})+(a_{k_1+1}+\cdots+a_{k_2})+\cdots+(a_{k_{n-1}+1}+\cdots+a_{k_n})+\cdots, \tag{3.2}$$

这里正整数 $k_j(j=1,2,\cdots)$ 满足 $k_1<k_2<\cdots$, 那么新级数也收敛, 且与原级数有相同的和.

注 如果级数 3.2 在同一括号中的项都有相同的符号, 那么从级数 3.2收敛, 便能推出原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 而且两者有相同的和.

命题 3.4

在级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 前面去掉有限项或加上有限项, 不影响级数的敛散性.

3.2 正项级数判别法

定义 3.2 (正项级数)

如果对 $n=1,2,\cdots$, 都有 $a_n\geqslant 0$, 就称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数.

注 只有有限个负项的级数也可以当成正项级数看待.

定理 3.1

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充分必要条件是其部分和数列 $\{S_n\}$ 有界.

定理 3.2 (正项级数比较判别法)

设有两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$. 如果从第 N 项开始有不等式

$$a_n\leqslant b_n,$$

那么:

1. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛;

2. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

例题 3.3 级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(\ln n)^{-\ln n}$ 收敛. 因为当 n 充分大时，有不等式

$$(\ln n)^{\ln n} = \mathrm{e}^{\ln n \ln\ln n} = n^{\ln\ln n} > n^2,$$

即当 $n > \mathrm{e}^9$ 时，有

$$(\ln n)^{-\ln n} < \frac{1}{n^2},$$

故原级数收敛.

定理 3.3 (比较判别法的极限形式)

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是两个正项级数. 如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l,$$

那么:

1. 若 $0 < l < +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散.
2. 若 $l = 0$, 则当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.
3. 若 $l = +\infty$, 则当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散.

例题 3.4 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$ 的敛散性.

解

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos\frac{x}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{x^2}{2},$$

所以不论 x 取什么值, 级数都收敛.

定理 3.4 (Cauchy 积分判别法)

设当 $x \geqslant 1$ 时, $f(x) \geqslant 0$ 且递减, 那么无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同敛散.

例题 3.5 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ 当 $\alpha > 1$ 时收敛, 当 $\alpha \leqslant 1$ 时发散.

证明 函数 $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ 满足 Cauchy 积分判别法的条件, 因而原级数与无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ 同敛散. 而后者当 $\alpha > 1$ 时收敛, 当 $\alpha \leqslant 1$ 时发散. □

例题 3.6 讨论级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ 的敛散性.

解 根据积分判别法, 原级数与积分

$$\int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^{\alpha}}$$

同敛散. 容易看出, 这个反常积分当 $\alpha > 1$ 时收敛, 当 $\alpha \leqslant 1$ 时发散.

3.3 正项级数其他判别法

定理 3.5 (Cauchy 判别法)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个正项级数.

1. 如果存在正数 $q < 1$, 使得对充分大的 n, 有
$$\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1,$$
那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 如果对无穷多个 n, 有
$$\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1,$$
那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

定理 3.6 (Cauchy 判别法的极限形式)

设对所有的 $n = 1, 2, \cdots$, 有 $a_n \geqslant 0$, 且

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

那么:

1. 当 $q < 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 当 $q > 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;
3. 当 $q = 1$ 时, 无法判断.

例题 3.7 对级数

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots$$

而言, $a_{2n-1} = \dfrac{1}{2^n}$, $a_{2n} = \dfrac{1}{3^n}$, 所以

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n-1]{a_{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n/(2n-1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{a_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

因而 $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1/\sqrt{2} < 1$. 从而由 Cauchy 判别法知原级数收敛.

引理 3.1

设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是两个正数列. 如果当 $n \geqslant n_0$ 时, 有不等式

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

那么:

1. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛;
2. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

♡

定理 3.7 (D'Alembert 判别法)

设 $a_n > 0(n = 1, 2, \cdots)$.

1. 如果存在正数 $q < 1$, 使得当 $n \geqslant n_0$ 时, 有
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q,$$
那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 如果当 $n \geqslant n_0$ 时, 有
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1,$$
那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

♡

注 在引理3.1中取 $b_n = q^n(0 < q < 1)$, 就得到 D' Alembert (达朗贝尔, 1717 ∼ 1783) 判别法.

定理 3.8 (D'Alembert 判别法的极限形式)

设 $a_n > 0(n = 1, 2, \cdots)$.

1. 如果 $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$;
2. 如果 $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q' > 1$, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$;
3. 如果 $q = 1$ 或 $q' = 1$, 那么无法判断.

♡

注 若 $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$ 不能断言 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

命题 3.5

设 $\{a_n\}$ 是任意的正数列, 那么

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

♠

注

1. 从这个定理可以看出, 凡是用 D'Alembert 判别法能判别的, 用 Cauchy 判别法也一定能判别; 但反之不然.
2. 由此可见, Cauchy 判别法比 D'Alembert 判别法适用的面要宽些, 但在有些场合中, 使用 D'Alembert

判别法要方便些.

3. 这两个判别法的适用面都不算宽, 原因是它们只能判别一些比几何级数收敛得还快的级数.

定理 3.9 (Raabe 判别法)

设 $a_n > 0(n = 1, 2, \cdots)$

1. 如果存在 $r > 1$, 使得当 $n > n_0$ 时, 有
$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geqslant r,$$
那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.
2. 如果对充分大的 n, 有
$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leqslant 1,$$
那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

命题 3.6

设正数列 $\{a_n\}$ 满足
$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = l,$$
或
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{l}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \to \infty).$$

1. 当 $l > 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 当 $l < 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;
3. 当 $l = 1$ 时, 无法判断.

例题 3.8 下面给出 Raabe 判别法中 $l = 1$ 时的例子

事实上, 有
$$\begin{aligned}
\frac{\ln(n+1)}{\ln n} &= \frac{\ln n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} \\
&= 1 + \frac{1}{\ln n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{\ln n}\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= 1 + \frac{1}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right) \quad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

因此
$$\begin{aligned}
\frac{n+1}{n}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{\alpha} &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right) \\
&= 1 + \frac{1}{n} + \frac{\alpha}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

现取 $a_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$. 已知当 $\alpha > 1$ 时, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n < +\infty$; 当 $\alpha \leqslant 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.
但由式3.3, 即得

$$\begin{aligned} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) &= n\left(\frac{n+1}{n}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^\alpha - 1\right) \\ &= n\left(\frac{1}{n} + \frac{\alpha}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right). \\ &= 1 + \frac{\alpha}{\ln n} + o\left(\frac{1}{\ln n}\right) \to 1 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

这就说明当 $l = 1$ 时, Raabe 判别法无效.

练习 3.1 设 $\alpha > 0$. 证明: 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\dbinom{\alpha}{n}\right|$ 收敛, 这里

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

证明

$$\begin{aligned} n\left(\left|\binom{\alpha}{n}\right| \Big/ \left|\binom{\alpha}{n+1}\right| - 1\right) &= n\left(\frac{n+1}{n-\alpha} - 1\right) \\ &= \frac{n(1+\alpha)}{n-\alpha} \to 1 + \alpha > 1, \end{aligned}$$

所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\dbinom{\alpha}{n}\right| < +\infty$.

□

定理 3.10 (Gauss 判别法)

设正数列 $\{a_n\}$ 满足条件

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\beta}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right) \quad (n \to \infty).$$

1. 当 $\beta > 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 当 $\beta < 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

3.4 任意项级数判别法

命题 3.7 (Cauchy 收敛原理)

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 当 $n > N$ 时,

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

对一切正整数 p 成立.

注 这个定理告诉我们, 就收敛级数而言, 对事先给定的任意正数 ε, 在充分多项之后任意截取一段 (不论这一段有多少项), 它的绝对值可以小于 ε.

推论 3.1

设 $\{a_n\}$ 是递减的正数列. 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么必有 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

注 逆命题并不成立. 即若 $\{a_n\}$ 是递减的正数列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$, 则未必有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$.

最简单的例子是 $a_n = \dfrac{1}{n\ln n}$, 它满足递减且 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$ 的条件, 但 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln n}$ 是发散的.

定理 3.11 (Leibniz 判别法)

如果 $\{a_n\}$ 递减趋于 0 , 那么交错级数 $\sum\limits_{n=1}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛.

注

1. 满足上述条件的交错级数称为 Leibniz 级数.
2. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 是一个 Leibniz 级数, 其和为 S. 若用 S_n 代替 S, 其误差不超过第 $n+1$ 项的绝对值, 即 $|S_n - S| \leqslant a_{n+1}$.
3. Leibniz 级数的和是一个不超过它首项之值的非负数.

引理 3.2 (Abel 分部求和公式)

设 $\{a_k\}, \{b_k\}$ 是两列实数, 则对任意的正整数 n, 有

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k\left(b_k - b_{k+1}\right) + S_n b_n,$$

这里 $S_k = \sum\limits_{l=1}^{k} a_l$.

引理 3.3 (Abel 引理)

设 $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n$ 或 $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$, 记 $S_k = \sum\limits_{l=1}^{k} a_l$. 如果 $|S_k| \leqslant M(k=1,2,\cdots,n)$, 那么

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant M\left(|b_1| + 2\,|b_n|\right).$$

定理 3.12 (Dirichlet 判别法)

设 $\{a_k\}, \{b_k\}$ 是两个数列, $S_k = \sum\limits_{l=1}^{k} a_l$, 它们满足以下两个条件:

1. $\{b_k\}$ 单调趋于 0 ;
2. $\{S_k\}$ 有界.

那么级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 收敛.

注 Leibniz 判别法只是 Dirichlet 判别法在 $a_k=(-1)^{k-1}$ 时的特殊情形.

定理 3.13 (Abel 判别法)

设 $\{a_k\},\{b_k\}$ 满足以下两个条件:

1. $\{b_k\}$ 单调有界;
2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛.

那么级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 收敛.

注 以上两个判别法的条件互有强弱:

1. Dirichlet 判别法中 $\{b_k\}$ 单调趋于 0 的条件比 Abel 判别法中 $\{b_k\}$ 单调有界强;
2. 而 $\{S_k\}$ 有界的条件则比 Abel 判别法中 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛的条件弱.

因此, 在使用时究竟哪个判别法较好, 要针对具体问题作具体分析.

例题 3.9 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n}$ 的敛散性.

解 令 $b_n=1/n$, 则 b_n 递减趋于 0 . 因此若能证明

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\cos nx\right|\leqslant M\quad(N=1,2,\cdots),$$

那么由 Dirichlet 判别法即知该级数收敛. 事实上, 当 $x\neq 2k\pi$ 时, 有

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\cos nx\right|=\left|\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

因此, 只要 x 不是 2π 的整数倍, 上面的和式便有界.

所以, 原级数当 $x\neq 2k\pi$ $(k=0,\pm1,\cdots)$ 时收敛; 当 $x=2k\pi$ 时, 原级数就变成调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, 所以是发散的.

注

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\sin nx\right|=\left|\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\qquad(x\neq 2k\pi)$$

例题 3.10 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 3n}{n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 的敛散性.

解 由例 3.9 知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 3n}{n}$ 收敛, 而数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ 递增趋于 e, 因而有界. 根据 Abel 判别法, 原级数收敛.

例题 3.11 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sin^2 n}{n}$ 的敛散性.

解 因为 $\sin^2 n=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2n)$, 故若能证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n},\quad\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos 2n}{n}$$

都收敛, 那么原级数收敛. 由 Leibniz 判别法知第一个级数收敛. 由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos 2n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n+n\pi)}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(2+\pi)}{n},$$

故由例3.9 知它也是收敛级数. 因而原级数收敛.

注 例 3.11中的级数是一个交错级数, 这时 $a_n=\dfrac{\sin^2 n}{n}$ 非单调地趋于 0 , 这说明在 Leibniz 判别法中, $\{a_n\}$ 单调地趋于 0 的" 单调" 并不是必要的.

3.5 绝对收敛和条件收敛

命题 3.8

如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛, 那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

注 逆命题是不成立的, 即从 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛不能断定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 便是这样的例子.

定义 3.3

1. 绝对收敛级数: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 也收敛.
2. 条件收敛级数: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散.

例题 3.12 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin^2 n}{n}$ 条件收敛.

证明 这个级数的收敛性已在例 3.11 中证明过. 现在证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n} \tag{3.4}$$

发散. 如果式3.4收敛, 则因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2n}{n}$ 收敛, 故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

也收敛, 这显然不成立. 因而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 n}{n}$ 发散.

□

注 绝对收敛级数和条件收敛级数有十分显著的差别.

1. 有限个数相加时，被加项可以任意交换次序而不影响其和.
2. 无限多个数相加时, 情况就不同了. 当然, 如果只交换级数中有限多项的次序, 那么既不会改变级数的收敛性，也不会改变它的和. 但若交换级数中无穷多项的次序，在级数是条件收敛的情况下，就有可能改变级数的和，甚至使其发散. 而绝对收敛级数则可以任意改变其项的次序而不影响级数的绝对收敛性, 也不改变其和.

定理 3.14

交换绝对收敛级数中无穷多项的次序，所得的新级数仍然绝对收敛，其和也不变. ♡

缺少！

3.6 级数的乘法 *

3.7 无穷乘积 *

第 4 章 函数列与函数项级数

4.1 一致收敛

定义 4.1 (逐点收敛)

设 $\{f_n\}$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的一个函数列.

1. 对 $\forall x_0 \in [a,b]$, 如果数列 $\{f_n(x_0)\}$ 收敛, 则称函数列 $\{f_n\}$ 在点 x_0 收敛.
2. 如果 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 内的每一点都收敛, 则称 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛或在 $[a,b]$ 上逐点收敛.

♣

注 现设 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛于 f，$[a,b]$ 内有无穷多个点, 这就意味着无穷多个数列收敛.

一般来说, 这些数列收敛的速度是不一致的, 有的收敛得快些, 有的慢些. 用 $\varepsilon - N$ 的语言来说，对任给的 $x_0 \in [a,b]$ 和任给的 $\varepsilon > 0$，存在 $N = N(x_0, \varepsilon)$，当 $n > N$ 时, 有

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

这里的 $N = N(x_0, \varepsilon)$ 不仅与 ε 有关, 也与 x_0 有关. 对同一个 $\varepsilon > 0$, 不同的 x_0 所要求的 $N(\varepsilon, x_0)$ 值可以相差很大.

定义 4.2 (一致收敛)

设函数列 $\{f_n\}$ 在点集 I (可以是区间, 也可以不是区间) 上收敛于 f. 如果对任意给定的正数 ε, 都存在与 x 无关的正整数 $N(\varepsilon)$, 使得当 $n > N(\varepsilon)$ 时, 不等式

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

对 I 中一切的 x 都成立, 则称函数列 $\{f_n\}$ 在 I 上一致收敛于函数 f.

♣

定理 4.1

函数列 $\{f_n\}$ 在 I 上一致收敛于 f 的一个充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

♡

例题 4.1 讨论函数列 $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 和 $[\delta,+\infty)$ 上的一致收敛性, 其中 $\delta > 0$.

解 对任意给定的 $x > 0$, $f_n(x) \to 0 (n \to \infty)$.

1. 当 $\delta \leqslant x < +\infty$ 时, 由于

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{nx}{1+n^2x^2} \leqslant \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{nx} < \frac{1}{n\delta}$$

故

$$\beta_n = \sup_{\delta \leqslant x < +\infty} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{n\delta} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

由定理5.1知 $\{f_n\}$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛于 0 .

2. 当 $0 < x < +\infty$ 时, 由于

$$\beta_n \geqslant \left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \frac{1}{2}$$

所以 $\beta_n \nrightarrow 0$. 由定理 5.1知 $\{f_n\}$ 在 $(0,1)$ 上不一致收敛于 0 .

注 从这个例子看出，用定理 5.1来证明函数列不一致收敛比较方便.

例题 4.2 讨论函数列

$$f_n(x) = 2n^2 x\mathrm{e}^{-n^2x^2} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

在 $[0,1]$ 上的一致收敛性.

解 已知它在 $[0,1]$ 上收敛于 $f(x) = 0$. 由于

$$\beta_n \geqslant \left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = 2n\mathrm{e}^{-1} \nrightarrow 0$$

所以这个函数列在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

定理 4.2 (Cauchy 收敛原理)

设 $\{f_n\}$ 是定义在区间 I 上的一个函数列，那么 $\{f_n\}$ 在 I 上一致收敛的充分必要条件是，对任意的 $\varepsilon > 0$，存在正整数 $N(\varepsilon)$，当 $n > N(\varepsilon)$ 时，

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

对任意的 $x \in I$ 及任意的正整数 p 成立.

定义 4.3

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 是定义在区间 I 上的一个函数项级数，令 $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ 为它的部分和. 如果函数列 $\{S_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛于 $S(x)$，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 $S(x)$.

命题 4.1 (函数项级数 Cauchy 收敛原理)

定义在区间 I 上的函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛的一个充分必要的条件是，对任意的 $\varepsilon > 0$，存在正整数 $N(\varepsilon)$，当 $n > N(\varepsilon)$ 时，不等式

$$|u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

对任意的 $x \in I$ 及任意的正整数 p 成立。

注 利用函数列的 Cauchy 收敛原理，即可得到函数项级数的 Cauchy 收敛原理.

推论 4.1

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛的一个必要条件是，它的通项 $u_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 0.

例题 4.3 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $(0, +\infty)$ 上的一致收敛性.

解 容易知道该级数在 $(0, +\infty)$ 上收玫，其通项 $u_n(x) = n\mathrm{e}^{-nx}$ 。由于

$$\beta_n = \sup_{0<x<+\infty} u_n(x) \geqslant u_n\left(\frac{1}{n}\right) = n\mathrm{e}^{-1} \nrightarrow 0$$

故 $\{u_n(x)\}$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛于 0. 从而该级数在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛.

定理 4.3 (Weierstrass 判别法)

如果存在收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 使得在区间 I 上有不等式

$$|u_n(x)| \leqslant a_n \quad (n = 1, 2, \cdots), \tag{4.1}$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛.

注 满足条件式 5.1 的数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上的一个优级数. Weierstrass 判别法是说，在区间 I 上有收敛的优级数的函数项级数必在 I 上一致收敛.

例题 4.4 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛. 这是因为当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时, 有不等式

$$\left|\frac{x}{1+n^4x^2}\right| \leqslant \frac{1}{2n^2} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

定义 4.4

设 $\{f_n\}$ 是定义在区间 I 上的函数列.

1. 如果对每一个 $x \in I$, 都有正数 $M(x)$, 使得 $|f_n(x)| \leqslant M(x)$ 对 $n = 1, 2, \cdots$ 成立, 则称函数 $\{f_n\}$ 在 I 上逐点有界. 应当注意, 这里的 $M(x)$ 是随 x 的变化而变化的.
2. 如果能找到一个常数 M, 使得
$$|f_n(x)| \leqslant M \quad (n = 1, 2, \cdots)$$
对一切 $x \in I$ 成立, 则称函数列 $\{f_n\}$ 在 I 上一致有界.

定理 4.4 (Dirichlet 判别法)

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在区间 I 上满足下面两个条件:

1. $\{b_n(x)\}$ 对每个固定的 $x \in I$ 都是单调的, 且在区间 I 上一致收敛于 0 ;
2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的部分和在 I 上一致有界, 即
$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\right| \leqslant M \quad (x \in I, n = 1, 2, \cdots)$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

定理 4.5 (Abel 判别法)

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在区间 I 上满足下面两个条件:

1. $\{b_n(x)\}$ 对每个固定的 $x \in I$ 都是单调的, 且在 I 上一致有界, 即
$$|b_n(x)| \leqslant M \quad (x \in I, n = 1, 2, \cdots)$$

2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

例题 4.5 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $[\delta, 2\pi-\delta](0<\delta<\pi)$ 上一致收敛.

证明 令 $a_n(x)=\cos nx, b_n(x)=1/n$, 则 $b_n(x)$ 递减趋于 0, 并且

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| \leqslant \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}$$

由于 $x \in [\delta, 2\pi-\delta]$, 所以 $\sin \frac{x}{2} \geqslant \sin \frac{\delta}{2}$, 从而有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| \leqslant \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}$$

即 $\sum_{k=1}^{n} \cos kx$ 在 $[\delta, 2\pi-\delta]$ 上一致有界.

故由 Dirichlet 判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ 在 $[\delta, 2\pi-\delta]$ 上一致收敛.

同理, 可证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 的一致收敛性.

□

注 例 5.5中的两个级数在 $(0,\pi)$ 上不是绝对收敛的. 这说明一致收敛的级数未必绝对收敛.

而级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ 在 $[0,1)$ 上绝对收玫，但并不一致收敛. 由此可见，绝对收敛和一致收敛是两个毫不相关的概念.

4.2 极限函数与和函数的性质

定理 4.6

如果函数列 $\{f_n\}$ 的每一项都在区间 I 上连续, 且 $\{f_n\}$ 在 I 上一致收敛于函数 f, 那么 f 也在 I 上连续.

定理 4.7

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛于 $S(x)$, 且每一项 $u_n(x)$ 都在 I 上连续, 那么和函数 $S(x)$ 也在 I 上连续.

例题 4.6 设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} \cos n\pi x^2$. 计算 $\lim_{x\to 1} f(x)$.

解 在区间 $[-2,2]$ 上考察这个函数. 由于

$$\left|\frac{x^n}{3^n} \cos n\pi x^2\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

故由 Weierstrass 判别法知原级数在 $[-2,2]$ 上一致收敛, 从而 f 是 $[-2,2]$ 上的连续函数. 于是

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}\cos n\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{3}{4}.$$

例题 4.7 证明: $f(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{x}{\ln n}\right)^n$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数.

证明 容易证明原级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是一致收敛的, 但对任意的正数 M, 当 $|x| \leqslant M$ 时, 有

$$\left(\frac{|x|}{\ln n}\right)^n \leqslant \left(\frac{M}{\ln n}\right)^n$$

由 Cauchy 判别法知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{M}{\ln n}\right)^n < +\infty$. 从而由 Weierstrass 判别法知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{x}{\ln n}\right)^n$ 在 $[-M,M]$ 上一致收敛, 因而 f 是 $[-M,M]$ 上的连续函数. 由于 M 是任意的正数, 所以 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

□

定理 4.8 (Dini 定理)

设函数列 $\{f_n\}$ 在有限闭区间 $[a,b]$ 上连续. 如果对每一个 $x\in[a,b]$, 数列 $\{f_n(x)\}$ 递减地趋于 0, 那么 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 0.

♡

证明 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N_x = N(\varepsilon, x)$, 使得

$$0 \leqslant f_{N_x}(x) < \varepsilon$$

由于 f_{N_x} 在点 x 处连续, 故必存在 $\delta_x > 0$, 使得当 $t\in[a,b]$ 且 $t\in(x-\delta_x, x+\delta_x)$ 时, 仍有

$$0 \leqslant f_{N_x}(x) < \varepsilon \tag{4.2}$$

于是这些区间的并

$$\bigcup_{x\in[a,b]} (x-\delta_x, x+\delta_x)$$

构成 $[a,b]$ 的一个开覆盖. 由有限覆盖定理知, 从中可以选出有限个开区间

$$(x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i}) \quad (i = 1,\cdots,m)$$

它们仍构成 $[a,b]$ 的一个开覆盖. 令

$$N = \max\left(N_{x_1},\cdots,N_{x_m}\right)$$

由式5.2和 $\{f_n\}$ 的递减性知, 当 $n \geqslant N$ 时, 不等式

$$0 \leqslant f_n(x) < \varepsilon$$

对一切 $x\in[a,b]$ 成立. 这正说明 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ 在 $[a,b]$ 上一致地成立.

□

注 如果把定理中的有限闭区间 $[a,b]$ 改成开区间或无穷区间, 结论则不再成立. 例如,

1. $f_n(x) = x^n$ 在 $(0,1)$ 上单调递减地趋于 0, 但它不一致收敛于 0.
2. 如 $f_n(x) = x/n$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减地趋于 0, 但不一致地趋于 0.

定理 4.9 (级数 Dini 定理)

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的每一项在有限闭区间 $[a,b]$ 上连续且非负. 如果它的和函数 $S(x)$ 也在 $[a,b]$ 上

连续, 那么该级数在 $[a,b]$ 上一致收敛.

定理 4.10

如果 $[a,b]$ 上的可积函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f, 那么 f 也在 $[a,b]$ 上可积, 并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

注 如果 $\{f_n\}$ 不一致收敛于 f, 那么 f 可能在 $[a,b]$ 上不可积.

推论 4.2

如果 $[a,b]$ 上的连续函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f, 那么

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

定理 4.11

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$, 且每一项 $u_n(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积, 那么 $S(x)$ 也在 $[a,b]$ 上可积, 并且

$$\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x.$$

推论 4.3

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 且每一项 $u_n(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续, 那么

$$\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x.$$

定理 4.12

设函数列 $\{f_n\}$ 满足条件:

1. 每一个 f_n 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数;
2. 由导函数构成的函数列 $\{f_n'\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 g;
3. 至少在某一点 $x_0\in[a,b]$ 上收敛.

那么函数列 $\{f_n\}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛于某个连续可微函数 f, 并且对每一个 $x\in[a,b]$, 有

$$f'(x)=g(x),\ 即\ \left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)'=\lim_{n\to\infty}f_n'(x).$$

定理 4.13

设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 满足条件:

1. 每一项 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数;

2. 由各项的导函数组成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $g(x)$;
3. 至少在某一点 $x_0 \in [a,b]$ 处收敛.

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 其和函数 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导, 并且 $S'(x) = g(x)$, 即

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

♡

例题 4.8 证明: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^4}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有二阶连续导函数, 并计算 $f''(x)$.

证明 容易看出, 原级数以及每一项求导后所得的级数都在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛, 因而有

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$$

对这个级数再逐项求导, 所得的级数仍在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛, 因而有

$$f''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

□

4.3 由幂级数确定的函数

定理 4.14 (Abel 定理)

1. 如果幂级数 5.3在点 $x = x_0$ $(x_0 \neq 0)$ 处收敛, 那么它必在区间 $|x| < |x_0|$ 上绝对收敛.
2. 如果幂级数 5.3在点 $x = x_1$ 处发散, 那么它必在 $|x| > |x_1|$ 上发散.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{4.3}$$

♡

定理 4.15 (Cauchy-Hadamard)

对给定的幂级数 5.3 , 记

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

那么

1. 当 $R = 0$ 时, 级数 5.3 只在 $x = 0$ 这一点处收敛;
2. 当 $R = +\infty$ 时, 级数 5.3 在整个数轴上都绝对收敛;
3. 当 $0 < R < +\infty$ 时, 级数 5.3 在区间 $(-R, R)$ 内绝对收敛, 在 $[-R, R]$ 之外发散。

♡

注 由此可见, 幂级数5.3 的收敛点集是区间 $(-R, R)$, R 称为级数 5.3的收敛半径, $(-R, R)$ 称为级数5.3 的收敛区间.

这时幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + \cdots + a_n (x - x_0)^n + \cdots$$

的收敛区间是 $(x_0 - R,\, x_0 + R)$. 定理5.15实际上给出了计算 R 的公式.

注 必须指出, 在幂级数的收敛区间 $(-R, R)$ 的两个端点 $x = \pm R$ 处, 级数的收敛性没有肯定的结论. 下面三个级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

的收敛半径都是 1, 收敛区间是 $(-1, 1)$.

1. 第一个级数在左端点 $x = -1$ 处条件收敛, 在右端点 $x = 1$ 处发散;
2. 第二个级数在两个端点处都绝对收敛;
3. 第三个级数在两个端点处都发散.

例题 4.9 计算幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k x^{2k}$ 的收敛半径.

解

1. 当 $n = 2k$ 时, $a_n = 2^k$;
2. 当 $n = 2k+1$ 时, $a_n = 0$. 于是

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{2^k} = \sqrt{2}$$

因此 $R = 1/\sqrt{2}$.

定理 4.16

设级数 5.3 的收敛半径为 R, 则对任意的 $r \in (0, R)$, 级数 5.3 在 $[-r, r]$ 上一致收敛.
这时称级数 5.3在 $(-R, R)$ 上**内闭一致收敛**.

证明 因为当 $x \in [-r, r]$ 时, 有

$$|a_n x^n| \leqslant |a_n|\, r^n,$$

而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|\, r^n$ 收敛, 故由 Weierstrass 判别法, 知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[-r, r]$ 上一致收敛. □

定理 4.17

设级数5.3 的收敛半径为 R, 则其和函数 $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 内连续, 而且在 $(-R, R)$ 内有任意阶导数:

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k} \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

注 这条定理所揭示的正是幂级数和多项式的相似之处.

推论 4.4

设级数 5.3的收敛半径为 R, $S(x)$ 是它的和函数, 那么对任意的 $x \in (-R, R)$, 有

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \tag{4.4}$$

而且式 5.4右边幂级数的收敛半径仍为 R.

例题 4.10 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^n$ 的和.

解 易知这个幂级数的收玫半径 $R=1$. 为了求出它的和, 对幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (|x|<1)$$

逐项求导, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

因而

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (|x|<1).$$

注 在上式中取 x 的一些特殊值, 即可求得一些数项级数的和. 例如, 分别取 $x=\frac{1}{2},\frac{1}{3}$, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}.$$

例题 4.11 把 $\ln(1+x)$ 和 $\arctan x$ 展开成幂级数。

解

1. 当 $x \in (-1,1)$ 时, 有

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

从 0 到 x 对上式逐项积分, 得

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (-1<x<1)\end{aligned}$$

2. 再对等式

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

逐项积分, 即得 $\arctan x$ 的展开式:

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (-1<x<1)$$

在收敛区间的两端点处, 和函数有如下性质.

定理 4.18 (Abel 第二定理)

设级数5.3的收敛半径为 R.

1. 如果在 $x=R$ 处级数 5.3 收敛, 则其和函数 $S(x)$ 在 $x=R$ 处左连续;
2. 如果在 $x=-R$ 处级数 5.3 收敛, 则 $S(x)$ 在 $x=-R$ 处右连续.

证明 设级数 5.3 在 $x=R$ 处收敛, 我们证明级数5.3 必在 $[0,R]$ 上一致收敛. 事实上, 把级数5.3写成

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$$

由于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 收敛, 数列 $\left\{\left(\frac{x}{R}\right)^n\right\}$ 对 $[0, R]$ 中的每一个 x 而言是递减的, 且一致有界.

根据级数一致收敛的 Abel 判别法, 级数 5.3 在 $[0, R]$ 上一致收敛. 所以 $S(x)$ 在 $x = R$ 处左连续. 同理可证定理的另一半.

注 Abel 第二定理的逆定理是否成立?

即若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1 (设 $R = 1$), 且 $\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$ 存在, 能否断言 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$?

很容易举出使上述结论不成立的例子. 例如, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ 的收敛半径为 1 , 它在 $(-1, 1)$ 内等于 $1/(1 + x)$, 因而

$$\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{2}$$

存在, 但级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ 显然是发散的.

例题 4.12 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

解 已知当 $x \in (-1, 1)$ 时, 有等式

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

因为上式右边的级数在 $x = 1$ 处收敛, 故由 Abel 第二定理, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{x \to 1^-} \ln(1 + x) = \ln 2$$

用另一个展开式

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (-1 < x < 1)$$

可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

例题 4.13 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n+1}$ 的和.

解 考虑幂级数

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n+1} x^{3n+1}$$

易知, 它的收敛半径是 1 . 由于它在 $x = 1$ 处收敛, 故由 Abel 第二定理知, 它的和函数 $S(x)$ 在 $x = 1$ 处左连续, 因而有

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n+1} = \lim_{x \to 1^-} S(x)$$

由于 $S(0)=0, S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}=\frac{1}{1+x^3}$, 所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n+1}=\lim_{x\to 1^-}S(x)=\lim_{x\to 1}\int_0^x S'(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\left(\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$$

定理 4.19 (Tauber 定理))

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 1 , 且

$$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=A$$

存在. 如果

$$a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$$

那么 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=A$.

定理 4.20

设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径均为 R, 那么当 $x\in(-R,R)$ 时, 有

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

其中 $c_n=\sum_{l=0}^{n}a_lb_{n-1}(n=0,1,2,\cdots)$.

例题 4.14 由于当 $|x|<1$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$, 故若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径是 1 , 那么当 $|x|<1$ 时, 有

$$\frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}S_nx^n$$

这里 $S_n=\sum_{l=0}^{n}a_l$.

类推下去, 便有

$$\frac{1}{(1-x)^2}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(S_0+S_1+\cdots+S_n)\,x^n,$$

等等.

例题 4.15 证明: 当 $x\in(-1,1)$ 时, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n=\frac{2}{(1-x)^3}$$

证明 由例 5.15, 知

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

再用一次例 5.15 的结果，即得

$$\frac{1}{(1-x)^3}=\frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n.$$

这就是要证的等式.

□

4.4 函数的幂级数展开式

定义 4.5

设 f 在 $x=x_0$ 处有任意阶导数, 那么由 f 就能作出幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

称这个幂级数为 f 在 $x=x_0$ 处的 **Taylor 级数**, 记为

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

特别地, 当 $x_0=0$ 时, 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

也称为 f 的 **Maclaurin 级数**.

♣

注 只要 f 在 $x=x_0$ 处有任意阶导数, 就能作出它的 Taylor 级数. 但这个级数不一定是收敛的, 即使收敛, 也未必收敛到 f 自己. 例如函数

$$f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

容易计算

$$f^{(n)}(0)=0\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

因而它的 Taylor 级数收敛于 0 , 而不收敛于 f 自己.

定义 4.6

设 f 在 (x_0-R,x_0+R) 上有任意阶导数. 根据 Taylor 公式, 对 (x_0-R,x_0+R) 内的任一点 x, 有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)$ 是余项. 它有两种表示:

1. Lagrange 余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

2. Cauchy 余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{n!}(x-\eta)^n(x-x_0),$$

其中 ξ 和 η 是介于 x_0 和 x 之间的数.

命题 4.2

f 能在 (x_0-R,x_0+R) 上展开为 Taylor 级数的充分必要条件是, 对任意的 $x\in(x_0-R,x_0+R)$, 有

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

定理 4.21

如果存在常数 M, 使得对 (x_0-R,x_0+R) 内的所有 x 及一切充分大的正整数 n, 均有

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\leqslant M,$$

那么 f 能在 (x_0-R,x_0+R) 上展开为 Taylor 级数.

证明

$$\begin{aligned}|R_n(x)|&=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\\&\leqslant M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\leqslant M\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

由于级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R^n}{n!}$ 收敛, 所以 $\lim_{n\to\infty}\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}=0$, 从而得·

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0\quad(x_0-R<x<x_0+R)$$

□

例题 4.16 求函数 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的 Maclaurin 展开式.

解 因为

$$\begin{aligned}\left.(\sin x)^{(n)}\right|_{x=0}&=\left.\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\right|_{x=0}=\sin\frac{n\pi}{2}\\&=\begin{cases}0, & n=2k\\(-1)^k, & n=2k+1\end{cases}\end{aligned}$$

且

$$\left|(\sin x)^{(n)}\right|=\left|\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\right|\leqslant 1\quad(-\infty<x<+\infty)$$

所以根据定理 5.21, 有

$$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

用同样的方法，可得

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

例题 4.17 求函数 $\dfrac{1}{(1-x)(2-x)}$ 的 Maclaurin 展开式.

解 易知

$$\frac{1}{(1-x)(2-x)}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2-x},$$

而

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\quad(-1<x<1)$$

$$\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\quad(-2<x<2)$$

因此当 $-1<x<1$ 时, 有

$$\frac{1}{(1-x)(2-x)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n$$

例题 4.18 把函数 $\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$ 展开为 Maclaurin 级数.

解 易知

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\quad(-1\leqslant x<1)$$

$$\frac{\ln(1-x)}{1-x}=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n\quad(-1<x<1).$$

例题 4.19 把函数 $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 展开为幂级数.

解 已知

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\quad(-1<x\leqslant 1)$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\quad(-1\leqslant x<1)$$

两式相减即得

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\quad(-1<x<1)$$

命题 4.3 (常见的 Taylor 展开)

1.

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

2.

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

3.
$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

4.
$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\quad(-1<x\leqslant 1)$$

5.
$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\quad(-1\leqslant x\leqslant 1),$$

6.
$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n.$$

注 最后一个展开式的成立范围视 α 的数值而定.

4.5 多项式一致逼近连续函数

定义 4.7

设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$. 称
$$B_n(f;x)=\sum_{i=0}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}=\sum_{i=0}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)B_i^n(x)$$
为 f 的 n 次 Bernstein 多项式.

定理 4.22 (Weierstrass 逼近定理)

闭区间 $[a,b]$ 上的任何连续函数 f 都能在这个区间上用多项式一致逼近.

4.6 幂级数在组合数学中的应用 *

4.7 两个著名的例子 *

第 5 章 函数列与函数项级数

5.1 一致收敛

定义 5.1 (逐点收敛)

设 $\{f_n\}$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的一个函数列.

1. 对 $\forall x_0 \in [a,b]$, 如果数列 $\{f_n(x_0)\}$ 收敛, 则称函数列 $\{f_n\}$ 在点 x_0 收敛.
2. 如果 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 内的每一点都收敛, 则称 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛或在 $[a,b]$ 上逐点收敛.

♣

注 现设 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛于 f，$[a,b]$ 内有无穷多个点, 这就意味着无穷多个数列收敛.

一般来说, 这些数列收敛的速度是不一致的, 有的收敛得快些, 有的慢些. 用 $\varepsilon-N$ 的语言来说，对任给的 $x_0 \in [a,b]$ 和任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N=N(x_0,\varepsilon)$，当 $n>N$ 时, 有

$$|f_n(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

这里的 $N=N(x_0,\varepsilon)$ 不仅与 ε 有关, 也与 x_0 有关. 对同一个 $\varepsilon>0$, 不同的 x_0 所要求的 $N(\varepsilon,x_0)$ 值可以相差很大.

定义 5.2 (一致收敛)

设函数列 $\{f_n\}$ 在点集 I (可以是区间, 也可以不是区间) 上收敛于 f. 如果对任意给定的正数 ε, 都存在与 x 无关的正整数 $N(\varepsilon)$, 使得当 $n>N(\varepsilon)$ 时, 不等式

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

对 I 中一切的 x 都成立, 则称函数列 $\{f_n\}$ 在 I 上一致收敛于函数 f.

♣

定理 5.1

函数列 $\{f_n\}$ 在 I 上一致收敛于 f 的一个充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=0$$

♡

例题 5.1 讨论函数列 $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 和 $[\delta,+\infty)$ 上的一致收敛性, 其中 $\delta>0$.

解 对任意给定的 $x>0$, $f_n(x)\to 0(n\to\infty)$.

1. 当 $\delta \leqslant x<+\infty$ 时, 由于

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{nx}{1+n^2x^2}\leqslant\frac{nx}{n^2x^2}=\frac{1}{nx}<\frac{1}{n\delta}$$

故

$$\beta_n=\sup_{\delta\leqslant x<+\infty}|f_n(x)-f(x)|\leqslant\frac{1}{n\delta}\to 0 \quad (n\to\infty).$$

由定理5.1知 $\{f_n\}$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛于 0 .

2. 当 $0<x<+\infty$ 时, 由于

$$\beta_n\geqslant\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\frac{1}{2}$$

所以 $\beta_n \nrightarrow 0$. 由定理 5.1知 $\{f_n\}$ 在 $(0,1)$ 上不一致收敛于 0 .

注 从这个例子看出，用定理 5.1来证明函数列不一致收敛比较方便.

例题 5.2 讨论函数列

$$f_n(x) = 2n^2 x \mathrm{e}^{-n^2x^2} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

在 $[0, 1]$ 上的一致收敛性.

解 已知它在 $[0, 1]$ 上收敛于 $f(x) = 0$. 由于

$$\beta_n \geqslant \left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = 2n\mathrm{e}^{-1} \nrightarrow 0$$

所以这个函数列在 $[0, 1]$ 上不一致收敛.

定理 5.2 (Cauchy 收敛原理)

设 $\{f_n\}$ 是定义在区间 I 上的一个函数列，那么 $\{f_n\}$ 在 I 上一致收敛的充分必要条件是，对任意的 $\varepsilon > 0$，存在正整数 $N(\varepsilon)$，当 $n > N(\varepsilon)$ 时，

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

对任意的 $x \in I$ 及任意的正整数 p 成立.

定义 5.3

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 是定义在区间 I 上的一个函数项级数，令 $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ 为它的部分和. 如果函数列 $\{S_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛于 $S(x)$，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 $S(x)$.

命题 5.1 (函数项级数 Cauchy 收敛原理)

定义在区间 I 上的函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛的一个充分必要的条件是，对任意的 $\varepsilon > 0$，存在正整数 $N(\varepsilon)$，当 $n > N(\varepsilon)$ 时，不等式

$$|u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

对任意的 $x \in I$ 及任意的正整数 p 成立。

注 利用函数列的 Cauchy 收敛原理，即可得到函数项级数的 Cauchy 收敛原理.

推论 5.1

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛的一个必要条件是，它的通项 $u_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 0 .

例题 5.3 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $(0, +\infty)$ 上的一致收敛性.

解 容易知道该级数在 $(0, +\infty)$ 上收玫，其通项 $u_n(x) = n\mathrm{e}^{-nx}$ 。由于

$$\beta_n = \sup_{0<x<+\infty} u_n(x) \geqslant u_n\left(\frac{1}{n}\right) = n\mathrm{e}^{-1} \nrightarrow 0$$

故 $\{u_n(x)\}$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛于 0 . 从而该级数在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛.

定理 5.3 (Weierstrass 判别法)

如果存在收敛的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 使得在区间 I 上有不等式

$$|u_n(x)| \leqslant a_n \quad (n=1,2,\cdots), \tag{5.1}$$

那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛.

注 满足条件式 5.1 的数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上的一个优级数. Weierstrass 判别法是说，在区间 I 上有收敛的优级数的函数项级数必在 I 上一致收敛.

例题 5.4 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{1+n^4x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛. 这是因为当 $x \in (-\infty,+\infty)$ 时, 有不等式

$$\left|\frac{x}{1+n^4x^2}\right| \leqslant \frac{1}{2n^2} \quad (n=1,2,\cdots).$$

定义 5.4

设 $\{f_n\}$ 是定义在区间 I 上的函数列.

1. 如果对每一个 $x \in I$, 都有正数 $M(x)$, 使得 $|f_n(x)| \leqslant M(x)$ 对 $n=1,2,\cdots$ 成立, 则称函数 $\{f_n\}$ 在 I 上逐点有界. 应当注意, 这里的 $M(x)$ 是随 x 的变化而变化的.
2. 如果能找到一个常数 M, 使得

$$|f_n(x)| \leqslant M \quad (n=1,2,\cdots)$$

对一切 $x \in I$ 成立, 则称函数列 $\{f_n\}$ 在 I 上一致有界.

定理 5.4 (Dirichlet 判别法)

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在区间 I 上满足下面两个条件:

1. $\{b_n(x)\}$ 对每个固定的 $x \in I$ 都是单调的, 且在区间 I 上一致收敛于 0 ;
2. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的部分和在 I 上一致有界, 即

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\right| \leqslant M \quad (x \in I, n=1,2,\cdots)$$

那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

定理 5.5 (Abel 判别法)

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在区间 I 上满足下面两个条件:

1. $\{b_n(x)\}$ 对每个固定的 $x \in I$ 都是单调的, 且在 I 上一致有界, 即

$$|b_n(x)| \leqslant M \quad (x \in I, n=1,2,\cdots)$$

2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

例题 5.5 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $[\delta, 2\pi-\delta](0<\delta<\pi)$ 上一致收敛.

证明 令 $a_n(x)=\cos nx, b_n(x)=1/n$, 则 $b_n(x)$ 递减趋于 0 , 并且

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| \leqslant \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}$$

由于 $x \in[\delta, 2\pi-\delta]$, 所以 $\sin \frac{x}{2} \geqslant \sin \frac{\delta}{2}$, 从而有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| \leqslant \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}$$

即 $\sum_{k=1}^{n} \cos kx$ 在 $[\delta, 2\pi-\delta]$ 上一致有界.

故由 Dirichlet 判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ 在 $[\delta, 2\pi-\delta]$ 上一致收敛.

同理, 可证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 的一致收敛性.

□

注 例 5.5中的两个级数在 $(0, \pi)$ 上不是绝对收敛的. 这说明一致收敛的级数未必绝对收敛.

而级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ 在 $[0,1)$ 上绝对收攻，但并不一致收敛. 由此可见，绝对收敛和一致收敛是两个毫不相关的概念.

5.2 极限函数与和函数的性质

定理 5.6

如果函数列 $\{f_n\}$ 的每一项都在区间 I 上连续, 且 $\{f_n\}$ 在 I 上一致收敛于函数 f, 那么 f 也在 I 上连续.

定理 5.7

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛于 $S(x)$, 且每一项 $u_n(x)$ 都在 I 上连续, 那么和函数 $S(x)$ 也在 I 上连续.

例题 5.6 设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} \cos n\pi x^2$. 计算 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

解 在区间 $[-2,2]$ 上考察这个函数. 由于

$$\left|\frac{x^n}{3^n} \cos n\pi x^2\right| \leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

故由 Weierstrass 判别法知原级数在 $[-2,2]$ 上一致收敛, 从而 f 是 $[-2,2]$ 上的连续函数. 于是

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}\cos n\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{3}{4}.$$

例题 5.7 证明: $f(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{x}{\ln n}\right)^n$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数.

证明 容易证明原级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是一致收敛的, 但对任意的正数 M, 当 $|x| \leqslant M$ 时，有

$$\left(\frac{|x|}{\ln n}\right)^n \leqslant \left(\frac{M}{\ln n}\right)^n$$

由 Cauchy 判别法知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{M}{\ln n}\right)^n < +\infty$. 从而由 Weierstrass 判别法知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{x}{\ln n}\right)^n$ 在 $[-M,M]$ 上一致收敛, 因而 f 是 $[-M,M]$ 上的连续函数. 由于 M 是任意的正数, 所以 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

□

定理 5.8 (Dini 定理)

设函数列 $\{f_n\}$ 在有限闭区间 $[a,b]$ 上连续. 如果对每一个 $x \in [a,b]$, 数列 $\{f_n(x)\}$ 递减地趋于 0, 那么 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 0.

♡

证明 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N_x = N(\varepsilon, x)$, 使得

$$0 \leqslant f_{N_x}(x) < \varepsilon$$

由于 f_{N_x} 在点 x 处连续, 故必存在 $\delta_x > 0$, 使得当 $t \in [a,b]$ 且 $t \in (x-\delta_x, x+\delta_x)$ 时，仍有

$$0 \leqslant f_{N_x}(x) < \varepsilon \tag{5.2}$$

于是这些区间的并

$$\bigcup_{x\in[a,b]} (x-\delta_x, x+\delta_x)$$

构成 $[a,b]$ 的一个开覆盖. 由有限覆盖定理知，从中可以选出有限个开区间

$$(x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i}) \quad (i = 1, \cdots, m)$$

它们仍构成 $[a,b]$ 的一个开覆盖. 令

$$N = \max\left(N_{x_1}, \cdots, N_{x_m}\right)$$

由式5.2和 $\{f_n\}$ 的递减性知，当 $n \geqslant N$ 时，不等式

$$0 \leqslant f_n(x) < \varepsilon$$

对一切 $x \in [a,b]$ 成立. 这正说明 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ 在 $[a,b]$ 上一致地成立.

□

注 如果把定理中的有限闭区间 $[a,b]$ 改成开区间或无穷区间, 结论则不再成立. 例如,

1. $f_n(x) = x^n$ 在 $(0,1)$ 上单调递减地趋于 0, 但它不一致收敛于 0.
2. 如 $f_n(x) = x/n$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减地趋于 0, 但不一致地趋于 0.

定理 5.9 (级数 Dini 定理)

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的每一项在有限闭区间 $[a,b]$ 上连续且非负. 如果它的和函数 $S(x)$ 也在 $[a,b]$ 上

连续，那么该级数在 $[a,b]$ 上一致收敛.

定理 5.10

如果 $[a,b]$ 上的可积函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f，那么 f 也在 $[a,b]$ 上可积，并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

注 如果 $\{f_n\}$ 不一致收敛于 f，那么 f 可能在 $[a,b]$ 上不可积.

推论 5.2

如果 $[a,b]$ 上的连续函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f，那么

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

定理 5.11

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$，且每一项 $u_n(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积，那么 $S(x)$ 也在 $[a,b]$ 上可积，并且

$$\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x.$$

推论 5.3

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，且每一项 $u_n(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续，那么

$$\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x.$$

定理 5.12

设函数列 $\{f_n\}$ 满足条件:

1. 每一个 f_n 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数;
2. 由导函数构成的函数列 $\{f_n'\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 g;
3. 至少在某一点 $x_0\in[a,b]$ 上收敛.

那么函数列 $\{f_n\}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛于某个连续可微函数 f，并且对每一个 $x\in[a,b]$，有

$$f'(x)=g(x),\ 即\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)'=\lim_{n\to\infty}f_n'(x).$$

定理 5.13

设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 满足条件:

1. 每一项 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数;

2. 由各项的导函数组成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $g(x)$;
3. 至少在某一点 $x_0 \in [a,b]$ 处收敛.

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 其和函数 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导, 并且 $S'(x) = g(x)$, 即

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

♡

例题 5.8 证明: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^4}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有二阶连续导函数, 并计算 $f''(x)$.

证明 容易看出, 原级数以及每一项求导后所得的级数都在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛, 因而有

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$$

对这个级数再逐项求导, 所得的级数仍在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛, 因而有

$$f''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

□

5.3 由幂级数确定的函数

定理 5.14 (Abel 定理)

1. 如果幂级数 5.3在点 $x = x_0$ $(x_0 \neq 0)$ 处收敛, 那么它必在区间 $|x| < |x_0|$ 上绝对收敛.
2. 如果幂级数 5.3在点 $x = x_1$ 处发散, 那么它必在 $|x| > |x_1|$ 上发散.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{5.3}$$

♡

定理 5.15 (Cauchy-Hadamard)

对给定的幂级数 5.3 , 记

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

那么

1. 当 $R = 0$ 时, 级数 5.3 只在 $x = 0$ 这一点处收敛;
2. 当 $R = +\infty$ 时, 级数 5.3 在整个数轴上都绝对收敛;
3. 当 $0 < R < +\infty$ 时, 级数 5.3 在区间 $(-R, R)$ 内绝对收敛, 在 $[-R, R]$ 之外发散。

♡

注 由此可见, 幂级数5.3 的收敛点集是区间 $(-R, R)$, R 称为级数 5.3的收敛半径, $(-R, R)$ 称为级数5.3 的收敛区间.

这时幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + \cdots + a_n (x - x_0)^n + \cdots$$

的收敛区间是 $(x_0-R,\ x_0+R)$. 定理5.15实际上给出了计算 R 的公式.

注 必须指出, 在幂级数的收敛区间 $(-R,R)$ 的两个端点 $x=\pm R$ 处, 级数的收敛性没有肯定的结论. 下面三个级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}nx^n$$

的收敛半径都是 1, 收敛区间是 $(-1,1)$.

1. 第一个级数在左端点 $x=-1$ 处条件收敛, 在右端点 $x=1$ 处发散;
2. 第二个级数在两个端点处都绝对收敛;
3. 第三个级数在两个端点处都发散.

例题 5.9 计算幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}2^k x^{2k}$ 的收敛半径.

解

1. 当 $n=2k$ 时, $a_n=2^k$;
2. 当 $n=2k+1$ 时, $a_n=0$. 于是

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[2k]{2^k}=\sqrt{2}$$

因此 $R=1/\sqrt{2}$.

定理 5.16

设级数 5.3的收敛半径为 R, 则对任意的 $r\in(0,R)$, 级数 5.3 在 $[-r,r]$ 上一致收敛.

这时称级数 5.3在 $(-R,R)$ 上**内闭一致收敛**.

证明 因为当 $x\in[-r,r]$ 时, 有

$$|a_nx^n|\leqslant|a_n|\,r^n,$$

而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|\,r^n$ 收敛, 故由 Weierstrass 判别法, 知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $[-r,r]$ 上一致收敛.

□

定理 5.17

设级数5.3 的收敛半径为 R, 则其和函数 $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 内连续, 而且在 $(-R,R)$ 内有任意阶导数:

$$S^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)a_nx^{n-k}\quad(k=1,2,\cdots).$$

注 这条定理所揭示的正是幂级数和多项式的相似之处.

推论 5.4

设级数 5.3的收敛半径为 R, $S(x)$ 是它的和函数, 那么对任意的 $x\in(-R,R)$, 有

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},\tag{5.4}$$

而且式 5.4右边幂级数的收敛半径仍为 R.

例题 5.10 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$ 的和.

解 易知这个幂级数的收玫半径 $R=1$. 为了求出它的和, 对幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (|x|<1)$$

逐项求导, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

因而

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (|x|<1).$$

注 在上式中取 x 的一些特殊值, 即可求得一些数项级数的和. 例如, 分别取 $x=\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}.$$

例题 5.11 把 $\ln(1+x)$ 和 $\arctan x$ 展开成幂级数。

解

1. 当 $x \in (-1,1)$ 时, 有

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

从 0 到 x 对上式逐项积分, 得

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (-1<x<1) \end{aligned}$$

2. 再对等式

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

逐项积分, 即得 $\arctan x$ 的展开式:

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (-1<x<1)$$

在收敛区间的两端点处, 和函数有如下性质.

定理 5.18 (Abel 第二定理)

设级数5.3的收敛半径为 R.

1. 如果在 $x=R$ 处级数 5.3 收敛, 则其和函数 $S(x)$ 在 $x=R$ 处左连续;
2. 如果在 $x=-R$ 处级数 5.3 收敛, 则 $S(x)$ 在 $x=-R$ 处右连续.

♡

证明 设级数 5.3 在 $x=R$ 处收敛, 我们证明级数5.3 必在 $[0,R]$ 上一致收敛. 事实上，把级数5.3写成

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$$

由于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 收敛, 数列 $\left\{\left(\frac{x}{R}\right)^n\right\}$ 对 $[0,R]$ 中的每一个 x 而言是递减的, 且一致有界.

根据级数一致收敛的 Abel 判别法, 级数 5.3 在 $[0,R]$ 上一致收敛. 所以 $S(x)$ 在 $x=R$ 处左连续. 同理可证定理的另一半.

注 Abel 第二定理的逆定理是否成立?

即若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1 (设 $R=1$), 且 $\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$ 存在, 能否断言 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$?

很容易举出使上述结论不成立的例子. 例如, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ 的收敛半径为 1 , 它在 $(-1,1)$ 内等于 $1/(1+x)$, 因而

$$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{2}$$

存在, 但级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ 显然是发散的.

例题 5.12 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

解 已知当 $x\in(-1,1)$ 时, 有等式

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

因为上式右边的级数在 $x=1$ 处收敛, 故由 Abel 第二定理, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\lim_{x\to 1^-}\ln(1+x)=\ln 2$$

用另一个展开式

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\quad(-1<x<1)$$

可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$$

例题 5.13 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n+1}$ 的和.

解 考虑幂级数

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n+1}x^{3n+1}$$

易知, 它的收敛半径是 1 . 由于它在 $x=1$ 处收敛, 故由 Abel 第二定理知, 它的和函数 $S(x)$ 在 $x=1$ 处左连续, 因而有

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n+1}=\lim_{x\to 1^-}S(x)$$

由于 $S(0)=0, S'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}=\dfrac{1}{1+x^3}$, 所以

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n+1}&=\lim_{x\to1^-}S(x)=\lim_{x\to1}\int_0^x S'(t)\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\left(\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

定理 5.19 (Tauber 定理))

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 1，且

$$\lim_{x\to1^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=A$$

存在. 如果

$$a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$$

那么 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=A.$

定理 5.20

设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径均为 R, 那么当 $x\in(-R,R)$ 时, 有

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

其中 $c_n=\sum\limits_{l=0}^{n}a_lb_{n-1}(n=0,1,2,\cdots).$

例题 5.14 由于当 $|x|<1$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x}$, 故若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径是 1，那么当 $|x|<1$ 时, 有

$$\frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}S_nx^n$$

这里 $S_n=\sum\limits_{l=0}^{n}a_l$.

类推下去, 便有

$$\frac{1}{(1-x)^2}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(S_0+S_1+\cdots+S_n)\,x^n,$$

等等.

例题 5.15 证明: 当 $x\in(-1,1)$ 时, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n=\frac{2}{(1-x)^3}$$

证明 由例 5.15, 知

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

再用一次例 5.15 的结果，即得

$$\frac{1}{(1-x)^3}=\frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n.$$

这就是要证的等式.

□

5.4 函数的幂级数展开式

定义 5.5

设 f 在 $x=x_0$ 处有任意阶导数, 那么由 f 就能作出幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

称这个幂级数为 f 在 $x=x_0$ 处的 **Taylor** 级数, 记为

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

特别地, 当 $x_0=0$ 时, 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

也称为 f 的 **Maclaurin** 级数.

♣

注 只要 f 在 $x=x_0$ 处有任意阶导数, 就能作出它的 Taylor 级数. 但这个级数不一定是收敛的, 即使收敛, 也未必收敛到 f 自己. 例如函数

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-1/x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

容易计算

$$f^{(n)}(0)=0\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

因而它的 Taylor 级数收敛于 0, 而不收敛于 f 自己.

定义 5.6

设 f 在 (x_0-R,x_0+R) 上有任意阶导数. 根据 Taylor 公式, 对 (x_0-R,x_0+R) 内的任一点 x, 有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)$ 是余项. 它有两种表示:

1. Lagrange 余项

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

2. Cauchy 余项

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{n!}(x-\eta)^n(x-x_0),$$

其中 ξ 和 η 是介于 x_0 和 x 之间的数.

命题 5.2

f 能在 (x_0-R, x_0+R) 上展开为 Taylor 级数的充分必要条件是, 对任意的 $x\in(x_0-R, x_0+R)$, 有

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

定理 5.21

如果存在常数 M, 使得对 (x_0-R, x_0+R) 内的所有 x 及一切充分大的正整数 n, 均有

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant M,$$

那么 f 能在 (x_0-R, x_0+R) 上展开为 Taylor 级数.

证明

$$\begin{aligned}|R_n(x)| &= \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| \\ &\leqslant M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant M\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

由于级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R^n}{n!}$ 收敛, 所以 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}=0$, 从而得 ·

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad (x_0-R<x<x_0+R)$$

□

例题 5.16 求函数 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的 Maclaurin 展开式.

解 因为

$$\begin{aligned}(\sin x)^{(n)}\Big|_{x=0} &= \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\Big|_{x=0} = \sin\frac{n\pi}{2} \\ &= \begin{cases}0, & n=2k \\ (-1)^k, & n=2k+1\end{cases}\end{aligned}$$

且

$$\left|(\sin x)^{(n)}\right| = \left|\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\right| \leqslant 1 \quad (-\infty<x<+\infty)$$

所以根据定理 5.21 , 有

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \quad (-\infty<x<+\infty)$$

用同样的方法，可得

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

例题 5.17 求函数 $\dfrac{1}{(1-x)(2-x)}$ 的 Maclaurin 展开式.

解 易知

$$\frac{1}{(1-x)(2-x)} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x},$$

而

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1 < x < 1)$$

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n \quad (-2 < x < 2)$$

因此当 $-1 < x < 1$ 时, 有

$$\frac{1}{(1-x)(2-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n$$

例题 5.18 把函数 $\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$ 展开为 Maclaurin 级数.

解 易知

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \quad (-1 \leqslant x < 1)$$

$$\frac{\ln(1-x)}{1-x} = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)x^n \quad (-1 < x < 1).$$

例题 5.19 把函数 $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 展开为幂级数.

解 已知

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \quad (-1 < x \leqslant 1)$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \quad (-1 \leqslant x < 1)$$

两式相减即得

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad (-1 < x < 1)$$

命题 5.3 (常见的 Taylor 展开)

1.

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

2.

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

3.
$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

4.
$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\quad(-1<x\leqslant 1)$$

5.
$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\quad(-1\leqslant x\leqslant 1),$$

6.
$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n.$$

注 最后一个展开式的成立范围视 α 的数值而定.

5.5 多项式一致逼近连续函数

定义 5.7

设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$. 称
$$B_n(f;x)=\sum_{i=0}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}=\sum_{i=0}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)B_i^n(x)$$
为 f 的 n 次 Bernstein 多项式.

定理 5.22 (Weierstrass 逼近定理)

闭区间 $[a,b]$ 上的任何连续函数 f 都能在这个区间上用多项式一致逼近.

5.6 幂级数在组合数学中的应用 *

5.7 两个著名的例子 *

第 6 章 含参变量积分

6.1 含参变量的常义积分

命题 6.1

如果函数 f 在闭矩形 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，那么

$$\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$$

是区间 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数.

注 注意，φ 在 u_0 处连续意味着

$$\lim_{u\to u_0}\varphi(u)=\varphi\left(u_0\right) \tag{6.1}$$

而

$$\varphi\left(u_0\right)=\int_a^b f\left(x,u_0\right)\mathrm{d}x=\int_a^b \lim_{u\to u_0} f(x,u)\mathrm{d}x,$$

这样，式6.1可写为

$$\lim_{u\to u_0}\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x=\int_a^b \lim_{u\to u_0} f(x,u)\mathrm{d}x.$$

这就是说，f 的连续性保证了积分运算和极限运算可以交换次序.

命题 6.2

如果函数 f 及其偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ 都在闭矩形 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，那么函数

$$\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$$

在 $[\alpha,\beta]$ 上可微，而且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\varphi(u)=\int_a^b\left(\frac{\partial}{\partial u}f(x,u)\right)\mathrm{d}x.$$

定理 6.1

如果函数 f 在闭矩形 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，那么

$$\int_a^\beta\left(\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u=\int_a^b\left(\int_a^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x$$

证明 下证，对任意的 $t\in(\alpha,\beta]$，有

$$\int_a^t\left(\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u=\int_a^b\left(\int_a^t f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x. \tag{6.2}$$

令 $t=\beta$ 即完成证明.

令

$$g(t)=\int_a^t\left(\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u=\int_a^t\varphi(u)\mathrm{d}u,$$

式中 $\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$;

$$h(t)=\int_a^b\left(\int_a^t f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x=\int_a^b \psi(x,t)\mathrm{d}x,$$

式中 $\psi(x,t)=\int_a^t f(x,u)\mathrm{d}u$.
$\varphi(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续, 所以

$$g'(t)=\varphi(t). \tag{6.3}$$

又因 $\psi(x,t)$ 和 $\dfrac{\partial\psi}{\partial t}=f(x,t)$ 都在 $[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续, 故

$$h'(t)=\int_a^b \frac{\partial\psi}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x=\varphi(t). \tag{6.4}$$

比较式6.3 和式6.4 即知 $g'(t)=h'(t)$, 所以 $g(t)=h(t)+c$. 由于 $g(\alpha)=h(\alpha)=0$, 所以 $c=0$. 因而 $g(t)=h(t)$.

□

例题 6.1 计算积分

$$I=\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x \quad (0<a<b).$$

解

1. 方法 1

$$\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int_a^b x^u\,\mathrm{d}u$$

那么

$$I=\int_0^1\left(\int_a^b x^u\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x$$

交换积分次序，即得

$$I=\int_a^b\left(\int_0^1 x^u\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u=\int_a^b\frac{\mathrm{d}u}{u+1}=\ln\frac{b+1}{a+1}.$$

2. 方法 2

在上述积分中把 a 看做常数，把 b 看做参变量，可得

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}b}=\int_0^1 x^b\,\mathrm{d}x=\frac{1}{b+1}$$

因此

$$I=\ln(b+1)+c$$

显然, 当 $b=a$ 时, $I=0$, 因而 $c=-\ln(a+1)$, 重新得到

$$I=\ln\frac{b+1}{a+1}$$

例题 6.2 计算积分

$$I(r)=\int_0^\pi \ln\left(1-2r\cos x+r^2\right)\mathrm{d}x.$$

解 未完待续

命题 6.3

设函数 f 在闭矩形 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，函数 $p(u),q(u)$ 都在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，而且当 $\alpha\leqslant u\leqslant\beta$ 时，$a\leqslant p(u)\leqslant b, a\leqslant q(u)\leqslant b$，那么由式6.5所确定的函数 ψ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续.

$$\psi(u)=\int_{p(u)}^{q(u)} f(x,u)\mathrm{d}x \tag{6.5}$$

命题 6.4

如果函数 f 和 $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ 都在闭矩形 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，函数 $p(u),q(u)$ 都在 $[\alpha,\beta]$ 上可微，而且当 $\alpha\leqslant u\leqslant\beta$ 时，$a\leqslant p(u)\leqslant b, a\leqslant q(u)\leqslant b$，那么由式6.5 确定的函数 ψ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微，并且

$$\psi'(u)=\int_{p(u)}^{q(u)}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x+f(q(u),u)q'(u)-f(p(u),u)p'(u)$$

例题 6.3 设

$$\psi(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\mathrm{e}^{t^2+xt}\,\mathrm{d}t$$

计算 $\psi'(0)$.

解

$$\psi'(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}t\mathrm{e}^{t^2+xt}\,\mathrm{d}t-\mathrm{e}^{\cos^2x+x\cos x}\sin x-\mathrm{e}^{\sin^2x+x\sin x}\cos x$$

因而

$$\psi'(0)=\int_0^1 t\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t-1=\frac{1}{2}(\mathrm{e}-3)$$

例题 6.4 设 f 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数，

$$\varphi(x)=\int_0^x\left(\int_{t^2}^{x^2}f(t,s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t$$

计算 $\varphi'(x)$.

解 记 $G(t,x)=\displaystyle\int_{t^2}^{x^2}f(t,s)\mathrm{d}s$，则

$$\varphi(x)=\int_0^x G(t,x)\mathrm{d}t$$

因而

$$\varphi'(x)=\int_0^x\frac{\partial G}{\partial x}(t,x)\mathrm{d}t+G(x,x)=2x\int_0^x f\left(t,x^2\right)\mathrm{d}t$$

6.2 含参变量反常积分的一致收敛性

定义 6.1

设 D 和 E 是 $\mathbb{R}$ 的子集，u_0 (可以是 $+\infty$) 是 E 的极限点，$f(x,u)$ 在 $D\times E$ 上定义，且对任意的 $x\in D$，存在有限的极限：

$$\lim_{u\to u_0}f(x,u)=g(x)\left(\text{或者}\lim_{u\to+\infty}f(x,u)=g(x)\right).$$

如果对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ (或者 $U>0$)，使得当 $u\in E, 0<|u-u_0|<\delta$ (或者 $u\in E, u>$

U) 时,

$$|f(x,u)-g(x)|<\varepsilon$$

对所有的 $x\in D$ 成立, 我们就说当 $u\to u_0$ (或者 $u\to+\infty$) 时, 函数 $f(x,u)$ 对 $x\in D$ 一致收敛于极限函数 $g(x)$. 容易看出, 如果 $D=[a,b], E=\mathbf{N}^*, u_0=+\infty$, 那么 $f(x,u)$ 就可写成 $f_n(x)$, 而

$$\lim_{u\to+\infty} f(x,u)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

定理 6.2

当 $u\to u_0$ 时 (或者 $u\to+\infty$ 时), 函数 $f(x,u)$ 对 $x\in D$ 一致收敛于极限函数 $g(x)$ 的充分必要条件是, 对 $E\backslash\{u_0\}$ 中满足条件 $u_n\to u_0$ 的任意序列 $\{u_n\}$ (或者 E 中满足条件 $u_n\to+\infty$ 的任意序列 $\{u_n\}$), 相应的每一函数序列

$$\psi_n(x)=f\left(x,u_n\right) \quad (n=1,2,\cdots)$$

都在 D 上一致收敛于函数 $g(x)$.

证明 条件的必要性是显然的, 现在来证明条件的充分性. 用反证法. 如果当 $u\to u_0$ 时 (或者 $u\to+\infty$ 时), 函数 $f(x,u)$ 对 $x\in D$ 不一致收敛于 $g(x)$, 那么对某个 $\varepsilon>0$, 不管 $n\in\mathbf{N}^*$ 怎样大, 总存在 $u_n\in E$, 使得

$$0<|u_n-u_0|<\frac{1}{n}\,(\text{或者}u_n>n\,),$$

有

$$\sup_{x\in D}\left|f\left(x,u_n\right)-g(x)\right|\geqslant\varepsilon_0.$$

对这样的 $\{u_n\}$, 虽然有

$$u_n\in E\backslash\left\{u_0\right\}, u_n\to u_0\,(\text{或者}u_n\in E, u_n\to+\infty\,),$$

但相应的函数列

$$\psi_n(x)=f\left(x,u_n\right) \quad (n=1,2,\cdots)$$

不能在 D 上一致地收敛于 $g(x)$, 与假设矛盾.

□

定理 6.3

设 $f(x,u)$ 定义在 $[a,b]\times E$ 上, u_0 (可以是 $+\infty$) 是 E 的一个极限点, 并且对每个给定的 $u\in E$, $f(x,u)$ 是 x 的连续函数. 如果当 $u\to u_0$ 时 (或者当 $u\to+\infty$ 时), $f(x,u)$ 对 $x\in[a,b]$ 一致收敛于 $g(x)$, 那么 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

定理 6.4

设 $f(x,u)$ 定义在 $[a,b]\times E$ 上, u_0 (可以是 $+\infty$) 是 E 的一个极限点, 并且对每个给定的 $u\in E$, $f(x,u)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 如果当 $u\to u_0$ 时 (或者当 $u\to+\infty$ 时), $f(x,u)$ 对 $x\in[a,b]$ 一致收敛

于 $g(x)$, 那么 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 并且

$$\lim_{u\to u_0}\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\quad\left(\text{或者}\lim_{u\to+\infty}\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right).$$

定义 6.2

如果对任意给定的 $\varepsilon>0$, 总能找到只与 ε 有关的 $A_0(>a)$, 当, 不等式

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

对 $[\alpha,\beta]$ 中所有的 u 成立, 则称反常积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 关于 u 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

定义 6.3

设 a 是瑕点. 如果对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在只与 ε 有关的 $\delta_0>0$, 当 $0<\delta<\delta_0$ 时, 不等式

$$\left|\int_a^{a+\delta} f(x,u)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

对 $[\alpha,\beta]$ 中所有的 u 成立, 则称积分 $\displaystyle\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$ 关于 u 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

注 上面两个定义中的 $[\alpha,\beta]$ 可以换成开区间或无穷区间.

定理 6.5

记

$$\eta(A)=\sup_{u\in[\alpha,\beta]}\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right|.$$

积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛的充分必要条件是

$$\lim_{A\to+\infty}\eta(A)=0$$

例题 6.5 讨论积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-xu}\,\mathrm{d}x(u\geqslant 0)$ 的一致收敛性.

解 当 $u>0$ 时, 令 $xu=t$, 那么

$$\int_A^{+\infty} u\mathrm{e}^{-xu}\,\mathrm{d}x=\int_{uA}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-uA}$$

因此

$$\eta(A)=\sup_{u\in(0,+\infty)}\left|\int_A^{+\infty} u\mathrm{e}^{-xu}\,\mathrm{d}x\right|=1\nrightarrow 0$$

从而积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-xu}\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

注 但若任取 $\delta>0$, 考虑它在 $[\delta,+\infty)$ 上的一致收敛性, 那么由于

$$\eta(A)=\sup_{u\in[\delta,+\infty)}\left|\int_A^{+\infty} u\mathrm{e}^{-xu}\,\mathrm{d}x\right|=\mathrm{e}^{-\delta A}\to 0\quad(A\to+\infty),$$

故在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛.

命题 6.5 (Cauchy 收敛原理)

积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛的充分必要条件是, 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在只与 ε 有关的 A_0, 当 $A', A''>A_0$ 时, 不等式

$$\left|\int_{A''}^{A''} f(x,u)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

对 $[\alpha,\beta]$ 中所有的 u 都成立.

命题 6.6 (Weierstrass 判别法)

设 $f(x,u)$ 关于 x 在 $[a,+\infty)$ 上连续. 如果存在 $[\alpha,+\infty)$ 上的连续函数 F, 使得 $\int_a^{+\infty} F(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 而且对一切充分大的 x 及 $[\alpha,\beta]$ 上的一切 u, 都有

$$|f(x,u)|\leqslant F(x)$$

那么积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

例题 6.6 证明: 积分

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\alpha+u^2)t}\sin t\,\mathrm{d}t \quad (\alpha>0)$$

关于 u 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

证明 因为对任意的 $u\in[0,+\infty)$, 有不等式

$$\left|\mathrm{e}^{-(a+u^2)t}\sin t\right|\leqslant \mathrm{e}^{-at} \quad (0\leqslant t<+\infty),$$

而 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ 收敛, 故由 Weierstrass 判别法知, 积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\alpha+u^2)t}\sin t\,\mathrm{d}t$ 关于 u 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

□

例题 6.7 证明: 积分

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\alpha+u^2)t}\sin t\,\mathrm{d}u \quad (\alpha>0)$$

关于 t 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

证明 因为 $u=0$ 不是被积函数的瑕点, 所以只需证明积分

$$\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\alpha+u^2)t}\sin t\,\mathrm{d}u \tag{6.6}$$

关于 t 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛就行了. 由于

$$\left|\mathrm{e}^{-(\alpha+u^2)t}\sin t\right|\leqslant t\mathrm{e}^{-u^2t}\leqslant\frac{t}{1+u^2t}\leqslant\frac{1}{u^2},$$

而 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2}<+\infty$, 所以由 Weierstrass 判别法知式6.6关于 t 在 $[0,+\infty\,)$ 上一致收敛.

□

命题 6.7 (Dirichlet 判别法)

设 f,g 满足以下两个条件:

1. 当 $A \to +\infty$ 时, 积分 $\int_a^A f(x,u)\mathrm{d}x$ 对 $u \in [\alpha,\beta]$ 一致有界, 即存在常数 M ，使得当 A 充分大时，对每个 $u \in [\alpha,\beta]$ ，有
$$\left|\int_a^A f(x,u)\mathrm{d}x\right| \leqslant M$$
2. 对每个固定的 $u \in [\alpha,\beta], g(x,u)$ 是 x 的单调函数, 且当 $x \to +\infty$ 时关于 u 一致地趋于 0.

那么积分
$$\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)\mathrm{d}x$$
在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

证明 因为 $g(x,u)$ 关于 x 是单调的, 故可用推广的第二积分平均值定理:
$$\int_{A'}^{A''} f(x,u)g(x,u)\mathrm{d}x = g\left(A',u\right)\int_{A'}^{\xi} f(x,u)\mathrm{d}x + g\left(A'',u\right)\int_{\xi}^{A''} f(x,u)\mathrm{d}x,$$
其中 $\xi \in [A',A'']$.

由条件 (1), 对任意的 $A',A'' > a$ 及一切 $u \in [\alpha,\beta]$ ，有
$$\left|\int_{A'}^{\xi} f(x,u)\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_a^{\xi} f(x,u)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^{A'} f(x,u)\mathrm{d}x\right| \leqslant 2M,$$
$$\left|\int_{\xi}^{A''} f(x,u)\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_a^{A''} f(x,u)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^{\xi} f(x,u)\mathrm{d}x\right| \leqslant 2M$$
由条件 (2), 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $A_0 > a$, 只要 $x > A_0$,
$$|g(x,u)| < \frac{\varepsilon}{4M}$$
就对一切 $u \in [\alpha,\beta]$ 成立. 于是取 $A',A'' > A_0$, 即得
$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,u)g(x,u)\mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon \quad (\alpha \leqslant u \leqslant \beta)$$
因此, 由 Cauchy 收敛原理, 知积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

□

命题 6.8 (Abel 判别法)

设 f,g 满足以下两个条件:

1. 积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 关于 $u \in [\alpha,\beta]$ 一致收敛;
2. 对每个固定的 $u \in [\alpha,\beta], g(x,u)$ 关于 x 单调，且关于 u 一致有界.

那么积分
$$\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)\mathrm{d}x$$
在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

注 在实际情况中, 经常遇到的是 f,g 两个因子中只有一个包含参变量 u. 这时 Dirichlet 判别法和 Able 判别法叙述起来就可简单些. 例如, Abel 判别法可写成:

如果积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 函数 $g(x,u)$ 关于 x 单调, 且关于 $u\in[\alpha,\beta]$ 一致有界, 那么积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x,u)\mathrm{d}x$$

在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

例题 6.8 证明: 积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xu}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

证明 因为 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 而函数 e^{-xu} 关于 x 递减, 且 $\mathrm{e}^{-xu}\leqslant 1$ 对 $x\in[0,+\infty)$ 和 $u\in[0,+\infty)$ 成立, 故由 Abel 判别法知原积分在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

□

例题 6.9 证明: 积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin ux}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛, 这里 a 及 $\delta>0$ 是常数.

证明 一方面, 对任意的 $A>0$, 有

$$\left|\int_0^A \sin ux\,\mathrm{d}x\right| = \frac{1-\cos uA}{u}\leqslant\frac{2}{\delta}.$$

另一方面, 当 $x\to+\infty$ 时, 函数 $\frac{x}{a^2+x^2}$ 递减趋于 0. 故由 Dirichlet 判别法知该积分在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛.

□

例题 6.10 讨论积分

$$\int_0^1\frac{\sin(1/x)}{x^p}\,\mathrm{d}x$$

关于 p 在 $(0,2)$ 上的一致收敛性.

定理 6.6

设函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,+\infty)$ 上收敛于 g, 满足:

1. 对任意的 $A>a$, $\{f_n\}$ 在 $[a,A]$ 上一致收敛;
2. 积分 $\int_a^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$ 对 n 一致收敛.

那么积分 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 且

$$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

定理 6.7

设 $E\subset\mathbb{R}$, $f(x,u)$ 定义在 $[a,+\infty)\times E$ 上, 又设 u_0 (可以是 $+\infty$) 是 E 的一个极限点, 满足:

1. 对任何 $A>a$, 等式

$$\lim_{\substack{u\to u_0\\ u\in E}} f(x,u)=g(x)$$

   在 $[a,A]$ 上一致地成立;
2. $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 对 $u\in E$ 一致收敛.

那么积分 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 且

$$\lim_{\substack{u\to u_0\\ u\in E}} \int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x.$$

证明 由条件 (2) 知, 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $A_0>a$, 当 $A',A''>A_0$ 时,

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,u)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon \tag{6.7}$$

对任意的 $u\in E$ 成立.

再由条件 (1), 知

$$\lim_{u\to u_0} f(x,u) = g(x)$$

在 $[A',A'']$ 上一致地成立. 在式6.7中令 $u\to u_0$ ，即得

$$\left|\int_{A'}^{A''} g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon.$$

这就证明了 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收玫. 于是存在 $A_1>a$, 使得

$$\left|\int_{A_1}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{3},\quad \left|\int_{A_1}^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

对 $u\in E$ 成立. 由条件 (1) 知, 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $0<|u-u_0|<\delta$ 时（若 $u_0=+\infty$, 则存在 U, 使得当 $u>U$ 时),

$$|f(x,u)-g(x)| < \frac{\varepsilon}{3\left(A_1-a\right)}$$

对 $[a,A_1]$ 中所有的 x 成立. 因而当 $0<|u-u_0|<\delta$ (或 $u>U$) 时, 有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x - \int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x\right| &\leqslant \int_a^{A_1} |f(x,u)-g(x)|\mathrm{d}x + \left|\int_{A_1}^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{A_1}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

□

例题 6.11 计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x (0<p<1)$.

例题 6.12 计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^\alpha} (\alpha>1)$.

6.3 含参变量反常积分

设含参变量的反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 对 $[\alpha,\beta]$ 中的每个 u 都收敛. 我们要研究由它所确定的函数

$$\varphi(u) = \int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x \tag{6.8}$$

的性质. 与连续函数项级数的一致收敛性保证了级数和函数的连续性一样, 积分 6.8的一致收敛性保证了 φ 的连续性.

定理 6.8

如果函数 $f(x,u)$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续, 而且积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛, 那么由式 6.8 所确定的函数 φ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续.

例题 6.13 讨论

$$\varphi(u)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^u\left(2+x^3\right)}\mathrm{d}x$$

的连续性区间.

解 先看函数 $\varphi(u)$ 的定义域是什么, 即上述积分在什么范围内收敛.

在 $x=0$ 附近,

$$\frac{\arctan x}{x^u\left(2+x^3\right)}\sim\frac{1}{2}\frac{1}{x^{u-1}}$$

因而当 $u<2$ 时, 积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{\arctan x}{x^u\left(2+x^3\right)}\mathrm{d}x$ 收敛.

当 $x\to+\infty$ 时,

$$\frac{\arctan x}{x^u\left(2+x^3\right)}\sim\frac{\pi}{2}\frac{1}{x^{u+3}}$$

从而积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^u\left(2+x^3\right)}\mathrm{d}x$ 当 $u>-2$ 时收敛. 由此得知 $\varphi(u)$ 的定义域是 $(-2,2)$. 我们证明 φ 在 $(-2,2)$ 上连续, 为此, 只需证明 φ 在任意的 $[a,b]\subset(-2,2)$ 上连续就行了. 只需证明上面的反常含参积分在 $[a,b]$ 上一致收敛.

当 $x\in(0,1)$ 时, 设 $a\leqslant b<2$, 则存在常数 c, 使得

$$\frac{\arctan x}{x^u\left(2+x^3\right)}\leqslant\frac{c}{x^{a-1}}\leqslant\frac{c}{x^{b-1}}$$

而 $b-1<1$, 故由比较判别法, 知 $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^u\left(2+x^3\right)}\mathrm{d}x$ 在 $(-\infty,b]$ 上一致收敛.

当 $x\in[1,+\infty)$ 时, 设 $-2<a\leqslant u$, 则

$$\frac{\arctan x}{x^u\left(2+x^3\right)}\leqslant\frac{\pi}{2}\frac{1}{x^{u+3}}\leqslant\frac{\pi}{2}\frac{1}{x^{a+3}},$$

且 $a+3>1$. 故由比较判别法, 知积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^u\left(2+x^3\right)}\mathrm{d}x$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛. 把两个积分合在一起, 即知 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^u\left(2+x^3\right)}\mathrm{d}x$ 在 $[a,b]\subset(-2,2)$ 上一致收敛, 故 φ 在 $(-2,2)$ 上连续.

注 与级数的情形一样, 积分的一致收敛只是保证 φ 连续的一个充分条件, 但并不是必要的. 但在 f 非负的条件下, 积分的一致收敛便是 φ 连续的必要条件.

定理 6.9 (Dini 定理)

设 $f(x,u)$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续、非负. 如果由式6.8 定义的 φ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续, 那么积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

注 与级数的情形一样, 这里的 $[\alpha,\beta]$ 必须是有界的闭区间, 否则定理将不成立.

定理 6.10

设 $[\alpha,\beta]$ 是一有限区间，那么在定理6.8的同样条件下，φ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积，且

$$\int_\alpha^\beta \varphi(u)\mathrm{d}u=\int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x.$$

也就是说，x 与 u 的积分次序可以交换：

$$\int_\alpha^\beta\left(\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u=\int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x.$$

例题 6.14 设 $a>0,b>0,c$ 是任意的实数. 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\cos cx\,\mathrm{d}x$.

解 因为 $\displaystyle\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}=\int_a^b \mathrm{e}^{-ux}\,\mathrm{d}u$，所以

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\cos cx\,\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\int_a^b\left(\mathrm{e}^{-ux}\cos cx\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x\\&=\int_a^b\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ux}\cos cx\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u\\&=\int_a^b\frac{u}{u^2+c^2}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}\end{aligned}$$

上面两个积分之所以能交换，是因为积分

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ux}\cos cx\,\mathrm{d}x$$

关于 $u\in[a,b]$ 一致收敛.

定理 6.11

设 f 满足下列条件:

1. f 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,+\infty)$ 上连续;
2. 积分
$$\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x,\quad \int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u$$
分别关于 u 在任何区间 $[\alpha,\beta]$ 上和关于 x 在任何区间 $[a,b]$ 上一致收敛;
3. 积分
$$\int_a^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty}|f(x,u)|\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x,\quad \int_a^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty}|f(x,u)|\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u$$
中至少有一个存在.

那么积分

$$\int_a^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x,\quad \int_a^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u$$

都存在，且相等，即

$$\int_a^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u.$$

定理 6.12

设 f 满足下列条件:

1. f 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,+\infty)$ 上连续、非负;
2. 函数
$$\varphi(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x,\quad \psi(x)=\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u$$
分别在 $[\alpha,+\infty)$ 和 $[a,+\infty)$ 上连续;
3. 积分
$$\int_a^{+\infty}\varphi(u)\mathrm{d}u,\quad \int_a^{+\infty}\psi(x)\mathrm{d}x$$
中至少有一个收敛.

那么 (3) 中另一个积分也收敛, 而且两者相等.

例题 6.15 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解 记 $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x>0$. 作变换 $x=ut(u>0)$, 得
$$I=\int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-u^2t^2}\,\mathrm{d}t$$
如果记
$$\varphi(u)=\int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-u^2t^2}\,\mathrm{d}t$$
那么 $\varphi(u)=I$ 是个取常数值的函数. 现在有
$$\begin{aligned}I^2=I\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u&=\int_0^{+\infty} I\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u\\&=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-u^2t^2}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u\\&=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-u^2(1+t^2)}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u\end{aligned}$$
如果这两个无穷积分能交换次序, 那么
$$I^2=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-u^2(1+t^2)}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}$$
综上, 有
$$I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
现在来证明交换次序的合理性. 因为 $f(t,u)=u\mathrm{e}^{-u^2(1+t^2)}$ 在 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上是连续非负,
$$\varphi(u)=\int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-u^2(1+t^2)}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-u^2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2t^2}\,\mathrm{d}(ut)=I\mathrm{e}^{-u^2}\quad(u>0),$$
$\varphi(0)=0$, 所以 $\varphi(u)$ 在 $[\delta,+\infty)(\delta>0)$ 上是连续函数. 而
$$\psi(t)=\int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-u^2(1+t^2)}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2}$$

是 $[0,+\infty)$ 上的连续函数. 可得

$$\begin{aligned}\int_{\delta}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-u^2\left(1+t^2\right)}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u &= \int_0^{+\infty}\left(\int_{\delta}^{+\infty} u\mathrm{e}^{-u^2\left(1+t^2\right)}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\delta^2\left(1+t^2\right)}}{2\left(1+t^2\right)}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

记 $f(\delta,t)=\dfrac{\mathrm{e}^{-\delta^2\left(1+t^2\right)}}{2\left(1+t^2\right)}$, 它在 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上连续. 由于

$$0<\frac{\mathrm{e}^{-\delta^2\left(1+t^2\right)}}{2\left(1+t^2\right)}\leqslant\frac{1}{1+t^2}$$

所以积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\delta^2\left(1+t^2\right)}}{2\left(1+t^2\right)}\mathrm{d}t$$

关于 δ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛, 从而 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(\delta,t)\mathrm{d}t$ 在 $\delta=0$ 处连续, 得到

$$\begin{aligned}I^2 &= \lim_{\delta\to0}\int_{\delta}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-u^2\left(1+t^2\right)}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u \\ &= \lim_{\delta\to0}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\delta^2\left(1+t^2\right)}}{2\left(1+t^2\right)}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

例题 6.16 计算 Fresnel(菲涅耳, 1788 1827) 积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin x^2\,\mathrm{d}x$.

定理 6.13

如果函数 f 和 $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ 都在 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续, 且积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛, 那么 $\varphi(u)=\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微, 且

$$\varphi'(u)=\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x\quad(\alpha\leqslant u\leqslant\beta).$$

♡

例题 6.17 利用对参数的微分法, 计算积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax^2}-\mathrm{e}^{-bx^2}}{x^2}\mathrm{d}x\quad(a>0,b>0)$$

解 把 a 看做参数, 记上面的积分为 $I(a)$, 那么

$$I'(a)=-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x \tag{6.9}$$

为了说明微分运算和积分运算的交换是允许的, 我们把 a 限制在区间 $[\delta,+\infty)$ 中, 这里 δ 是任意的正数. 于是

$$\mathrm{e}^{-ax^2}\leqslant\mathrm{e}^{-\delta x^2}$$

由于 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\delta x^2}\mathrm{d}x$ 收敛, 故由 Weierstrass 判别法, 知积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x$ 关于 a 在 $[\delta,+\infty)$ 上一

致收敛, 从而可知上面的运算是允许的. 由于 $\delta > 0$ 是任意的, 故式 6.9在 $(0, +\infty)$ 上成立. 得

$$I'(a) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}$$

因此 $I(a) = -\sqrt{\pi a} + c$. 由于 $I(b) = 0, c = \sqrt{\pi b}$, 故最后得

$$I(a) = \sqrt{\pi}(\sqrt{b} - \sqrt{a}).$$

例题 6.18 计算积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} \cos bx \, \mathrm{d}x (a > 0)$.

解 把 b 看做参数, 记上面的积分为 $I(b)$. 先证明

$$I'(b) = -\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-ax^2} \sin bx \, \mathrm{d}x \tag{6.10}$$

对任意的 $b \in (-\infty, +\infty)$ 成立。事实上，由于

$$\left| x\mathrm{e}^{-ax^2} \sin bx \right| \leqslant x\mathrm{e}^{-ax^2}$$

而 $\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-ax^2} \, \mathrm{d}x$ 收敛，故由 Weierstrass 判别法，知式6.10右边的积分对 $b \in (-\infty, +\infty)$ 一致收敛，因而式6.10成立.

用分部积分法，容易算出

$$I'(b) = -\frac{b}{2a} I(b)$$

由此得

$$\ln I(b) = -\frac{b^2}{4a} + c$$

或者

$$I(b) = c'\mathrm{e}^{-b^2/(4a)}$$

已知 $I(0) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/a}$, 所以

$$I(b) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-b^2/(4a)}$$

6.4 Γ 函数和 B 函数

定义 6.4

含参变量的反常积分

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}\mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$$

$$\mathrm{B}(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} \, \mathrm{d}t$$

分别称为 Γ (Gamma) 函数和 B (Beta) 函数, 前者是含一个参变量 s 的函数, 后者是含两个参变量 p, q 的函数, 它们都是由含参变量的反常积分所确定的非初等函数. 这两个积分都是由 Euler 首先提出并研究的.

♣

定理 6.14

$\Gamma(s)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续, 且有各阶连续导数.

♡

命题 6.9

Γ 函数具有以下三条性质:

1. 对任意的 $s>0, \Gamma(s)>0$, 且 $\Gamma(1)=1$;
2. 对任意的 $s>0, \Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$;
3. $\ln\Gamma(s)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数.

证明

1. 由定义，Trivial.
2. 由分部积分法, 得
$$\Gamma(s+1)=\int_0^{+\infty} t^s \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=-\left.t^s \mathrm{e}^{-t}\right|_0^{+\infty}+s\int_0^{+\infty} t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=s\Gamma(s).$$
3. 只要证明对 $p\in(1,+\infty), \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1, s_1, s_2\in(0,+\infty)$, 有不等式
$$\ln\Gamma\left(\frac{s_1}{p}+\frac{s_2}{q}\right)\leqslant\frac{1}{p}\ln\Gamma\left(s_1\right)+\frac{1}{q}\ln\Gamma\left(s_2\right),$$
或者
$$\Gamma\left(\frac{s_1}{p}+\frac{s_2}{q}\right)\leqslant\left(\Gamma\left(s_1\right)\right)^{1/p}\left(\Gamma\left(s_2\right)\right)^{1/q}.$$
事实上, 由 Hölder 不等式, 即得
$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{s_1}{p}+\frac{s_2}{q}\right)&=\int_0^{+\infty} t^{s_1/p+s_2/q-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}\left(t^{(s_1-1)/p}\mathrm{e}^{-t/p}\right)\left(t^{(s_2-1)/q}\mathrm{e}^{-t/q}\right)\mathrm{d}t\\&\leqslant\left(\int_0^{+\infty} t^{s_1-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}\left(\int_0^{+\infty} t^{s_2-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)^{1/q}\\&=\left(\Gamma\left(s_1\right)\right)^{1/p}\left(\Gamma\left(s_2\right)\right)^{1/q}\end{aligned}$$
这里我们使用了无穷积分的 Hölder 不等式, 这从通常的 Hölder 不等式取极限就能得到.

□

推论 6.1

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1)&=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=\cdots\\&=n(n-1)\cdots1\Gamma(1)=n!\end{aligned}$$

定理 6.15

设 $(0,+\infty)$ 上的函数 f 满足以下三个条件:

1. 对任意的 $x>0, f(x)>0$ 且 $f(1)=1$.
2. 对任意的 $x>0, f(x+1)=xf(x)$.
3. $\ln f$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数.

那么 $f(x)=\Gamma(x)$ 对任何 $x>0$ 成立.

注 由 Bohr 和 Mollerup 在 1922 年首先发现的.

命题 6.10

对任意的 $x>0$, 有

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

命题 6.11

对任意的 $p>0,q>0$, 有

$$\mathrm{B}(p+1,q)=\frac{p}{p+q}\,\mathrm{B}(p,q).$$

证明 使用分部积分

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}(p+1,q)&=\int_0^1 t^p(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t\\
&=\int_0^1\left(\frac{t}{1-t}\right)^p(1-t)^{p+q-1}\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{p+q}\int_0^1\left(\frac{t}{1-t}\right)^p\left[-\mathrm{d}((1-t)^{p+q})\right]\\
&=\frac{p}{p+q}\int_0^1\left(\frac{t}{1-t}\right)^{p-1}(1-t)^{p+q}\frac{1}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{p}{p+q}\,\mathrm{B}(p,q).
\end{aligned}$$

□

定理 6.16

对任意的 $p>0,q>0$, 有

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

证明 固定 $q>0$, 令

$$f(p)=\frac{\Gamma(p+q)\mathrm{B}(p,q)}{\Gamma(q)}.$$

下证 f 满足三条性质. 首先

$$\begin{aligned}
f(p+1)&=\frac{1}{\Gamma(q)}\Gamma(p+1+q)\mathrm{B}(p+1,q)\\
&=\frac{1}{\Gamma(q)}(p+q)\Gamma(p+q)\frac{p}{p+q}\,\mathrm{B}(p,q)\\
&=pf(p)
\end{aligned}$$

其次

$$\mathrm{B}(1,q)=\int_0^1(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{q}$$

可得

$$f(1)=\frac{\Gamma(1+q)\mathrm{B}(1,q)}{\Gamma(q)}=\frac{\Gamma(q+1)}{q\Gamma(q)}=1$$

另外，显然有 $f(p)>0$.

最后证明 $\ln f$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数. 由于

$$\ln f(p)=\ln\Gamma(p+q)+\ln\mathrm{B}(p,q)-\ln\Gamma(q),$$

用与证明 $\ln\Gamma$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数完全相同的方法，可以证明 $\ln \mathrm{B}(p,q)$ 是关于变量 p 在 $(0,+\infty)$ 上的凸函数，因而 $\ln f$ 也是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数.

综上，$f(p)=\Gamma(p)$.

□

命题 6.12

$\mathrm{B}(p,q)$ 在 $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ 上连续且有各阶连续偏导数;

1. $\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p)(p>0,q>0)$;
2. $\mathrm{B}(p+1,q+1)=\dfrac{pq}{(p+q+1)(p+q)}\mathrm{B}(p,q)(p>0,q>0)$.

注 证明是显然的.

例题 6.19 计算积分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^\alpha x\sin^\beta x\,\mathrm{d}x(\alpha>-1,\beta>-1)$.

解 令 $t=\sin^2 x$ ，则有

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\cos^\alpha x\sin^\beta x\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{(\beta-1)/2}(1-t)^{(\alpha-1)/2}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{\beta+1}{2},\frac{\alpha+1}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}\end{aligned}$$

注

1. 如果在上式中取 $\alpha=\beta=0$, 则可得到
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$
2. 如果在 $\Gamma(s)=\displaystyle\int_0^{+\infty}t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ 中作变量代换 $t=x^2$, 则有
$$\Gamma(s)=2\int_0^{+\infty}x^{2s-1}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$
令 $s=1/2$, 并利用本题的结果, 我们再一次得到
$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
3. 由于当 $\alpha=m,\beta=n$ 为正整数时, $\Gamma((m+1)/2)$ 和 $\Gamma((n+1)/2)$ 的值容易算出, 这时类似于本题这种积分的值便可直接写出. 例如
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 x\sin^4 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(6)}$$
而
$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)&=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}\\\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)&=\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{15}{8}\sqrt{\pi}\end{aligned}$$
所以
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 x\sin^4 x\,\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{512}.$$

例题 6.20 证明: $\mathrm{B}(p,q)$ 可表示为

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}\,\mathrm{d}x\quad(p>0,q>0)\tag{6.11}$$

利用上面的公式, 计算积分 $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{3/2}}{(1+x^5)^3}\,\mathrm{d}x$.

解 对

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t$$

作变量代换 $t=1/(1+x)$, 即得要证明的式子. 对积分 I 作变量代换 $x^5=t$, 得

$$I=\frac{1}{5}\int_0^{+\infty}\frac{t^{-1/2}}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{5}\int_0^{+\infty}\frac{t^{1/2-1}}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t$$

利用式6.11, 即得

$$I=\mathrm{B}\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{5}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)}=\frac{3}{40}\pi$$

例题 6.21 计算级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\binom{2n}{n}}$ 的和.

解

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\binom{2n}{n}}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{n!n!}{(2n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!n!}{(2n)!}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(n)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{B}(n+1,n)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 t^n(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

由于当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时, $0\leqslant t(1-t)\leqslant 1/4$, 所以

$$0\leqslant t^n(1-t)^{n-1}\leqslant\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

因而级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}t^n(1-t)^{n-1}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛, 于是有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\binom{2n}{n}}&=\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}t^n(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t=\int_0^1 t\sum_{n=1}^{\infty}(t(1-t))^{n-1}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\frac{t}{1-t(1-t)}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{t}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\end{aligned}$$

命题 6.13 (加倍公式)

对任意的 $s>0$, 有

$$\Gamma(2s)=\frac{2^{2s-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right).$$

命题 6.14 (余元公式)

对任意的 $p \in (0,1)$, 有

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}$$

注 根据余元公式, 只要知道 Γ 在 $(0,1/2)$ 上的值, 便能算出 Γ 在 $(0,1)$ 上的值, 从而算出 Γ 在 $(0,+\infty)$ 上的值.

定理 6.17 (Stirling)

对任意的 $x>0$, 存在 $\theta(x)\in(0,1)$, 使得

$$\Gamma(x+1)=\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^{x}\mathrm{e}^{\frac{\theta(x)}{12x}}.$$

推论 6.2

对于任意的实数 a, 有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{a}\Gamma(x)}{\Gamma(x+a)}=1$$

例题 6.22 计算极限 $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\sqrt{\alpha}\int_0^1\left(1-x^2\right)^{a}\,\mathrm{d}x.$

解 令 $x^2=t$, 则

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(1-x^2\right)^{\alpha}\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^{a}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\alpha+1\right)\\&=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)}\end{aligned}$$

由推论，可得

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to+\infty}\sqrt{\alpha}\int_0^1\left(1-x^2\right)^{\alpha}\mathrm{d}x&=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\sqrt{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)}\\&=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\end{aligned}$$