分析

作者：王子毅
组织：扬州大学数学科学学院
时间：August 19, 2024
版本：0.0
Bio:Information

ElegantLATEX Program

求知若饥，虚心若愚

目录

前言

这份笔记是笔者在 2024 年 8 月复习《数学分析》时阅读中科大史济怀教授编写的《数学分析教程》第 3 版时所整理的，主要整理了所有书中的定义、定理、命题、推论，a.e. 没有证明。

这份笔记的主要目的是帮助已经学过一遍数学分析的同学在复习的时候快速回忆一些结果。

第 1 章 级数

内容提要

- 无穷级数基本性质
- 正项级数比较判别法

1.1 无穷级数基本性质

定义 1.1

无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1.1}$$

的前 n 项和

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

称为这个级数的第 n 个部分和。如果这些部分和构成的数列 $\{S_n\}$ 有有限的极限 S, 就说级数1.1是收敛的，其和为 S ，记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

如果数列 $\{S_n\}$ 没有有限的极限, 就说级数1.1是发散的.

例题 1.1 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

当 $\alpha > 1$ 时收敛, 当 $\alpha \leqslant 1$ 时发散. 这一事实在下面的讨论中经常要用到.

命题 1.1 (级数收敛必要条件)

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

例题 1.2 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$ 发散. 这是因为

$$a_n = n \sin \frac{1}{n} \to 1 \neq 0 \quad (n \to \infty).$$

命题 1.2

如果级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 和 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 都收敛, 那么级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$$

也收敛，且

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k+\beta b_k)=\alpha\sum_{k=1}^{\infty}a_k+\beta\sum_{k=1}^{\infty}b_k,$$

这里 α,β 是任意两个实数.

命题 1.3

设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 是一收敛级数. 如果把级数的项任意结合而不改变其先后的次序, 得新级数

$$(a_1+\cdots+a_{k_1})+(a_{k_1+1}+\cdots+a_{k_2})+\cdots+\left(a_{k_{n-1}+1}+\cdots+a_{k_n}\right)+\cdots, \tag{1.2}$$

这里正整数 $k_j(j=1,2,\cdots)$ 满足 $k_1<k_2<\cdots$, 那么新级数也收敛, 且与原级数有相同的和.

注 如果级数 1.2 在同一括号中的项都有相同的符号, 那么从级数 1.2收敛, 便能推出原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 而且两者有相同的和.

命题 1.4

在级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 前面去掉有限项或加上有限项, 不影响级数的敛散性.

1.2 正项级数判别法

定义 1.2 (正项级数)

如果对 $n=1,2,\cdots$, 都有 $a_n\geqslant 0$, 就称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数.

注 只有有限个负项的级数也可以当成正项级数看待.

定理 1.1

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充分必要条件是其部分和数列 $\{S_n\}$ 有界.

定理 1.2 (正项级数比较判别法)

设有两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$. 如果从第 N 项开始有不等式

$$a_n\leqslant b_n,$$

那么:

1. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛;

2. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

例题 1.3 级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(\ln n)^{-\ln n}$ 收敛. 因为当 n 充分大时，有不等式

$$(\ln n)^{\ln n} = \mathrm{e}^{\ln n \ln\ln n} = n^{\ln\ln n} > n^2,$$

即当 $n > \mathrm{e}^9$ 时，有

$$(\ln n)^{-\ln n} < \frac{1}{n^2},$$

故原级数收敛.

定理 1.3 (比较判别法的极限形式)

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是两个正项级数. 如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = l,$$

那么:

1. 若 $0 < l < +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散.
2. 若 $l = 0$, 则当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.
3. 若 $l = +\infty$, 则当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散.

例题 1.4 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$ 的敛散性.

解

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{x}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{x^2}{2},$$

所以不论 x 取什么值, 级数都收敛.

定理 1.4 (Cauchy 积分判别法)

设当 $x \geqslant 1$ 时, $f(x) \geqslant 0$ 且递减, 那么无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同敛散.

例题 1.5 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ 当 $\alpha > 1$ 时收敛, 当 $\alpha \leqslant 1$ 时发散.

证明 函数 $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ 满足 Cauchy 积分判别法的条件, 因而原级数与无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ 同敛散. 而后者当 $\alpha > 1$ 时收敛, 当 $\alpha \leqslant 1$ 时发散. □

例题 1.6 讨论级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ 的敛散性.

解 根据积分判别法，原级数与积分

$$\int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^{\alpha}}$$

同敛散. 容易看出，这个反常积分当 $\alpha > 1$ 时收敛，当 $\alpha \leqslant 1$ 时发散.

1.3 正项级数其他判别法

定理 1.5 (Cauchy 判别法)

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个正项级数.

1. 如果存在正数 $q < 1$，使得对充分大的 n，有
$$\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1,$$
那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 如果对无穷多个 n，有
$$\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1,$$
那么级数 $\sum a_n$ 发散.

定理 1.6 (Cauchy 判别法的极限形式)

设对所有的 $n = 1, 2, \cdots$，有 $a_n \geqslant 0$，且

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

那么:

1. 当 $q < 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 当 $q > 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;
3. 当 $q = 1$ 时，无法判断.

例题 1.7 对级数

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots$$

而言，$a_{2n-1} = \dfrac{1}{2^n}$，$a_{2n} = \dfrac{1}{3^n}$，所以

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n-1]{a_{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n/(2n-1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{a_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

因而 $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1/\sqrt{2} < 1$. 从而由 Cauchy 判别法知原级数收敛.

引理 1.1

设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是两个正数列. 如果当 $n \geqslant n_0$ 时, 有不等式

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

那么:

1. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛;
2. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

♡

定理 1.7 (D'Alembert 判别法)

设 $a_n > 0 (n = 1, 2, \cdots)$.

1. 如果存在正数 $q < 1$, 使得当 $n \geqslant n_0$ 时, 有
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q,$$
那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 如果当 $n \geqslant n_0$ 时, 有
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1,$$
那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

♡

注 在引理1.1中取 $b_n = q^n (0 < q < 1)$, 就得到 D' Alembert (达朗贝尔, 1717 ∼ 1783) 判别法.

定理 1.8 (D'Alembert 判别法的极限形式)

设 $a_n > 0 (n = 1, 2, \cdots)$.

1. 如果 $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$;
2. 如果 $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q' > 1$, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$;
3. 如果 $q = 1$ 或 $q' = 1$, 那么无法判断.

♡

注 若 $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$ 不能断言 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

命题 1.5

设 $\{a_n\}$ 是任意的正数列, 那么

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

♠

注

1. 从这个定理可以看出, 凡是用 D'Alembert 判别法能判别的, 用 Cauchy 判别法也一定能判别; 但反之不然.
2. 由此可见, Cauchy 判别法比 D'Alembert 判别法适用的面要宽些, 但在有些场合中, 使用 D'Alembert

判别法要方便些.

3. 这两个判别法的适用面都不算宽, 原因是它们只能判别一些比几何级数收敛得还快的级数.

定理 1.9 (Raabe 判别法)

设 $a_n > 0(n = 1, 2, \cdots)$

1. 如果存在 $r > 1$, 使得当 $n > n_0$ 时, 有
$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geqslant r,$$
那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.
2. 如果对充分大的 n, 有
$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leqslant 1,$$
那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

命题 1.6

设正数列 $\{a_n\}$ 满足
$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = l,$$
或
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{l}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \to \infty).$$

1. 当 $l > 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 当 $l < 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;
3. 当 $l = 1$ 时, 无法判断.

例题 1.8 下面给出 Raabe 判别法中 $l = 1$ 时的例子

事实上, 有
$$\begin{aligned}\frac{\ln(n+1)}{\ln n} &= \frac{\ln n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\\ &= 1 + \frac{1}{\ln n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &= 1 + \frac{1}{\ln n}\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= 1 + \frac{1}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right) \quad (n \to \infty).\end{aligned}$$

因此
$$\begin{aligned}\frac{n+1}{n}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{\alpha} &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\alpha}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right)\\ &= 1 + \frac{1}{n} + \frac{\alpha}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\end{aligned} \tag{1.3}$$

现取 $a_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$. 已知当 $\alpha > 1$ 时, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n < +\infty$; 当 $\alpha \leqslant 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.
但由式1.3，即得

$$\begin{aligned} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) &= n\left(\frac{n+1}{n}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^\alpha - 1\right) \\ &= n\left(\frac{1}{n} + \frac{\alpha}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right). \\ &= 1 + \frac{\alpha}{\ln n} + o\left(\frac{1}{\ln n}\right) \to 1 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

这就说明当 $l = 1$ 时, Raabe 判别法无效.

✍ **练习 1.1** 设 $\alpha > 0$. 证明：级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\binom{\alpha}{n}\right|$ 收敛，这里

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

证明

$$\begin{aligned} n\left(\left|\binom{\alpha}{n}\right| / \left|\binom{\alpha}{n+1}\right| - 1\right) &= n\left(\frac{n+1}{n-\alpha} - 1\right) \\ &= \frac{n(1+\alpha)}{n-\alpha} \to 1+\alpha > 1, \end{aligned}$$

所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\binom{\alpha}{n}\right| < +\infty.$

□

定理 1.10 (Gauss 判别法)

设正数列 $\{a_n\}$ 满足条件

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\beta}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right) \quad (n \to \infty).$$

1. 当 $\beta > 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
2. 当 $\beta < 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

♡

1.4 任意项级数判别法

命题 1.7 (Cauchy 收敛原理)

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 当 $n > N$ 时,

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

对一切正整数 p 成立.

♠

注 这个定理告诉我们，就收敛级数而言，对事先给定的任意正数 ε ，在充分多项之后任意截取一段 (不论这一段有多少项), 它的绝对值可以小于 ε.

推论 1.1

设 $\{a_n\}$ 是递减的正数列. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么必有 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

注 逆命题并不成立. 即若 $\{a_n\}$ 是递减的正数列, 且 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$, 则未必有 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$.

最简单的例子是 $a_n = \dfrac{1}{n\ln n}$, 它满足递减且 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ 的条件, 但 $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln n}$ 是发散的.

定理 1.11 (Leibniz 判别法)

如果 $\{a_n\}$ 递减趋于 0, 那么交错级数 $\sum_{n=1}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛.

注

1. 满足上述条件的交错级数称为 Leibniz 级数.
2. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 是一个 Leibniz 级数, 其和为 S. 若用 S_n 代替 S, 其误差不超过第 $n+1$ 项的绝对值, 即 $|S_n - S| \leqslant a_{n+1}$.
3. Leibniz 级数的和是一个不超过它首项之值的非负数.

引理 1.2 (Abel 分部求和公式)

设 $\{a_k\}, \{b_k\}$ 是两列实数, 则对任意的正整数 n, 有

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k\left(b_k - b_{k+1}\right) + S_n b_n,$$

这里 $S_k = \sum_{l=1}^{k} a_l$.

引理 1.3 (Abel 引理)

设 $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n$ 或 $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$, 记 $S_k = \sum_{l=1}^{k} a_l$. 如果 $|S_k| \leqslant M (k = 1, 2, \cdots, n)$, 那么

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant M\left(|b_1| + 2|b_n|\right).$$

定理 1.12 (Dirichlet 判别法)

设 $\{a_k\}, \{b_k\}$ 是两个数列, $S_k = \sum_{l=1}^{k} a_l$, 它们满足以下两个条件:

1. $\{b_k\}$ 单调趋于 0;
2. $\{S_k\}$ 有界.

那么级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 收敛.

注 Leibniz 判别法只是 Dirichlet 判别法在 $a_k=(-1)^{k-1}$ 时的特殊情形.

定理 1.13 (Abel 判别法)

设 $\{a_k\},\{b_k\}$ 满足以下两个条件:

1. $\{b_k\}$ 单调有界;
2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛.

那么级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 收敛.

♡

注 以上两个判别法的条件互有强弱:

1. Dirichlet 判别法中 $\{b_k\}$ 单调趋于 0 的条件比 Abel 判别法中 $\{b_k\}$ 单调有界强;
2. 而 $\{S_k\}$ 有界的条件则比 Abel 判别法中 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛的条件弱.

因此, 在使用时究竟哪个判别法较好, 要针对具体问题作具体分析.

例题 1.9 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n}$ 的敛散性.

解 令 $b_n=1/n$, 则 b_n 递减趋于 0 . 因此若能证明

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \cos nx\right| \leqslant M \quad (N=1,2,\cdots),$$

那么由 Dirichlet 判别法即知该级数收敛. 事实上, 当 $x \neq 2k\pi$ 时, 有

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \cos nx\right|=\left|\frac{\sin \left(N+\frac{1}{2}\right) x-\sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}.$$

因此, 只要 x 不是 2π 的整数倍, 上面的和式便有界.

所以, 原级数当 $x \neq 2k\pi$ $(k=0,\pm 1,\cdots)$ 时收敛; 当 $x=2k\pi$ 时, 原级数就变成调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, 所以是发散的.

注

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \sin nx\right|=\left|\frac{\cos \frac{x}{2}-\cos \left(N+\frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{x}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|} \quad (x \neq 2k\pi)$$

例题 1.10 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 3n}{n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$ 的敛散性.

解 由例 1.9 知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 3n}{n}$ 收敛, 而数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right\}$ 递增趋于 e , 因而有界. 根据 Abel 判别法, 原级数收敛.

例题 1.11 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \dfrac{\sin^{2} n}{n}$ 的敛散性.

解 因为 $\sin^{2} n=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2n)$, 故若能证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{\cos 2n}{n}$$

都收敛, 那么原级数收敛. 由 Leibniz 判别法知第一个级数收敛. 由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos 2n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n+n\pi)}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(2+\pi)}{n},$$

故由例1.9 知它也是收敛级数. 因而原级数收敛.

注 例 1.11中的级数是一个交错级数, 这时 $a_n=\dfrac{\sin^2 n}{n}$ 非单调地趋于 0 , 这说明在 Leibniz 判别法中, $\{a_n\}$ 单调地趋于 0 的" 单调" 并不是必要的.

1.5 绝对收敛和条件收敛

命题 1.8

如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

注 逆命题是不成立的, 即从 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛不能断定 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 便是这样的例子.

定义 1.3

1. 绝对收敛级数: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 也收敛.
2. 条件收敛级数: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散.

例题 1.12 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin^2 n}{n}$ 条件收敛.

证明 这个级数的收敛性已在例 1.11 中证明过. 现在证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n} \tag{1.4}$$

发散. 如果式1.4收敛, 则因 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2n}{n}$ 收敛, 故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

也收敛, 这显然不成立. 因而 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 n}{n}$ 发散.

□

注 绝对收敛级数和条件收敛级数有十分显著的差别.

1. 有限个数相加时，被加项可以任意交换次序而不影响其和.
2. 无限多个数相加时, 情况就不同了. 当然, 如果只交换级数中有限多项的次序, 那么既不会改变级数的收敛性，也不会改变它的和. 但若交换级数中无穷多项的次序，在级数是条件收敛的情况下，就有可能改变级数的和，甚至使其发散. 而绝对收敛级数则可以任意改变其项的次序而不影响级数的绝对收敛性, 也不改变其和.

定理 1.14

交换绝对收敛级数中无穷多项的次序, 所得的新级数仍然绝对收敛, 其和也不变.

♡

缺少!

1.6 级数的乘法 *

1.7 无穷乘积 *

第 2 章 函数列与函数项级数

2.1 一致收敛

定义 2.1 (逐点收敛)

设 $\{f_n\}$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的一个函数列.

1. 对 $\forall x_0 \in [a,b]$, 如果数列 $\{f_n(x_0)\}$ 收敛, 则称函数列 $\{f_n\}$ 在点 x_0 收敛.
2. 如果 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 内的每一点都收敛, 则称 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛或在 $[a,b]$ 上逐点收敛.

♣

注 现设 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛于 f，$[a,b]$ 内有无穷多个点, 这就意味着无穷多个数列收敛.

一般来说, 这些数列收敛的速度是不一致的, 有的收敛得快些, 有的慢些. 用 $\varepsilon - N$ 的语言来说，对任给的 $x_0 \in [a,b]$ 和任给的 $\varepsilon > 0$，存在 $N = N(x_0, \varepsilon)$，当 $n > N$ 时, 有

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

这里的 $N = N(x_0, \varepsilon)$ 不仅与 ε 有关, 也与 x_0 有关. 对同一个 $\varepsilon > 0$, 不同的 x_0 所要求的 $N(\varepsilon, x_0)$ 值可以相差很大.

定义 2.2 (一致收敛)

设函数列 $\{f_n\}$ 在点集 I (可以是区间, 也可以不是区间) 上收敛于 f. 如果对任意给定的正数 ε, 都存在与 x 无关的正整数 $N(\varepsilon)$, 使得当 $n > N(\varepsilon)$ 时, 不等式

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

对 I 中一切的 x 都成立, 则称函数列 $\{f_n\}$ 在 I 上一致收敛于函数 f.

♣

定理 2.1

函数列 $\{f_n\}$ 在 I 上一致收敛于 f 的一个充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

♡

例题 2.1 讨论函数列 $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 和 $[\delta,+\infty)$ 上的一致收敛性, 其中 $\delta > 0$.

解 对任意给定的 $x > 0$, $f_n(x) \to 0 (n \to \infty)$.

1. 当 $\delta \leqslant x < +\infty$ 时, 由于

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{nx}{1+n^2x^2} \leqslant \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{nx} < \frac{1}{n\delta}$$

故

$$\beta_n = \sup_{\delta\leqslant x<+\infty} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{n\delta} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

由定理2.1知 $\{f_n\}$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛于 0 .

2. 当 $0 < x < +\infty$ 时, 由于

$$\beta_n \geqslant \left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \frac{1}{2}$$

所以 $\beta_n \nrightarrow 0$. 由定理 2.1知 $\{f_n\}$ 在 $(0,1)$ 上不一致收敛于 0 .

注 从这个例子看出，用定理 2.1来证明函数列不一致收敛比较方便.

例题 2.2 讨论函数列

$$f_n(x)=2n^2xe^{-n^2x^2}\quad(n=1,2,\cdots)$$

在 $[0,1]$ 上的一致收敛性.

解 已知它在 $[0,1]$ 上收敛于 $f(x)=0$. 由于

$$\beta_n\geqslant\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=2ne^{-1}\nrightarrow 0$$

所以这个函数列在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

定理 2.2 (Cauchy 收敛原理)

设 $\{f_n\}$ 是定义在区间 I 上的一个函数列，那么 $\{f_n\}$ 在 I 上一致收敛的充分必要条件是，对任意的 $\varepsilon>0$，存在正整数 $N(\varepsilon)$，当 $n>N(\varepsilon)$ 时，

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

对任意的 $x\in I$ 及任意的正整数 p 成立.

定义 2.3

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 是定义在区间 I 上的一个函数项级数，令 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)$ 为它的部分和. 如果函数列 $\{S_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛于 $S(x)$，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 $S(x)$.

命题 2.1 (函数项级数 Cauchy 收敛原理)

定义在区间 I 上的函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上一致收敛的一个充分必要的条件是，对任意的 $\varepsilon>0$，存在正整数 $N(\varepsilon)$，当 $n>N(\varepsilon)$ 时，不等式

$$|u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon$$

对任意的 $x\in I$ 及任意的正整数 p 成立。

注 利用函数列的 Cauchy 收敛原理，即可得到函数项级数的 Cauchy 收敛原理.

推论 2.1

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上一致收敛的一个必要条件是，它的通项 $u_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 0 .

例题 2.3 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的一致收敛性.

解 容易知道该级数在 $(0,+\infty)$ 上收玫，其通项 $u_n(x)=ne^{-nx}$ 。由于

$$\beta_n=\sup_{0<x<+\infty}u_n(x)\geqslant u_n\left(\frac{1}{n}\right)=ne^{-1}\nrightarrow 0$$

故 $\{u_n(x)\}$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛于 0 . 从而该级数在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

定理 2.3 (Weierstrass 判别法)

如果存在收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 使得在区间 I 上有不等式

$$|u_n(x)| \leqslant a_n \quad (n=1,2,\cdots), \tag{2.1}$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛.

注 满足条件式 2.1 的数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上的一个优级数. Weierstrass 判别法是说，在区间 I 上有收敛的优级数的函数项级数必在 I 上一致收敛.

例题 2.4 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛. 这是因为当 $x \in (-\infty,+\infty)$ 时, 有不等式

$$\left|\frac{x}{1+n^4x^2}\right| \leqslant \frac{1}{2n^2} \quad (n=1,2,\cdots).$$

定义 2.4

设 $\{f_n\}$ 是定义在区间 I 上的函数列.

1. 如果对每一个 $x \in I$, 都有正数 $M(x)$, 使得 $|f_n(x)| \leqslant M(x)$ 对 $n=1,2,\cdots$ 成立, 则称函数 $\{f_n\}$ 在 I 上逐点有界. 应当注意, 这里的 $M(x)$ 是随 x 的变化而变化的.
2. 如果能找到一个常数 M, 使得

$$|f_n(x)| \leqslant M \quad (n=1,2,\cdots)$$

对一切 $x \in I$ 成立, 则称函数列 $\{f_n\}$ 在 I 上一致有界.

定理 2.4 (Dirichlet 判别法)

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在区间 I 上满足下面两个条件:

1. $\{b_n(x)\}$ 对每个固定的 $x \in I$ 都是单调的, 且在区间 I 上一致收敛于 0 ;
2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的部分和在 I 上一致有界, 即

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\right| \leqslant M \quad (x \in I, n=1,2,\cdots)$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

定理 2.5 (Abel 判别法)

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在区间 I 上满足下面两个条件:

1. $\{b_n(x)\}$ 对每个固定的 $x \in I$ 都是单调的, 且在 I 上一致有界, 即

$$|b_n(x)| \leqslant M \quad (x \in I, n=1,2,\cdots)$$

2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

例题 2.5 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $[\delta, 2\pi-\delta](0<\delta<\pi)$ 上一致收敛.

证明 令 $a_n(x)=\cos nx, b_n(x)=1/n$, 则 $b_n(x)$ 递减趋于 0, 并且

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| \leqslant \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}$$

由于 $x\in[\delta, 2\pi-\delta]$, 所以 $\sin\frac{x}{2} \geqslant \sin\frac{\delta}{2}$, 从而有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| \leqslant \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}$$

即 $\sum_{k=1}^{n} \cos kx$ 在 $[\delta, 2\pi-\delta]$ 上一致有界.

故由 Dirichlet 判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ 在 $[\delta, 2\pi-\delta]$ 上一致收敛.

同理, 可证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 的一致收敛性.

□

注 例 2.5中的两个级数在 $(0,\pi)$ 上不是绝对收敛的. 这说明一致收敛的级数未必绝对收敛.

而级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ 在 $[0,1)$ 上绝对收玫，但并不一致收敛. 由此可见，绝对收敛和一致收敛是两个毫不相关的概念.

2.2 极限函数与和函数的性质

定理 2.6

如果函数列 $\{f_n\}$ 的每一项都在区间 I 上连续, 且 $\{f_n\}$ 在 I 上一致收敛于函数 f, 那么 f 也在 I 上连续.

定理 2.7

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛于 $S(x)$, 且每一项 $u_n(x)$ 都在 I 上连续, 那么和函数 $S(x)$ 也在 I 上连续.

例题 2.6 设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} \cos n\pi x^2$. 计算 $\lim_{x\to 1} f(x)$.

解 在区间 $[-2,2]$ 上考察这个函数. 由于

$$\left|\frac{x^n}{3^n} \cos n\pi x^2\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

故由 Weierstrass 判别法知原级数在 $[-2,2]$ 上一致收敛, 从而 f 是 $[-2,2]$ 上的连续函数. 于是

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cos n\pi=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}=\frac{3}{4}.$$

例题 2.7 证明: $f(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{x}{\ln n}\right)^n$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数.

证明 容易证明原级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是一致收敛的, 但对任意的正数 M, 当 $|x|\leqslant M$ 时，有

$$\left(\frac{|x|}{\ln n}\right)^n\leqslant\left(\frac{M}{\ln n}\right)^n$$

由 Cauchy 判别法知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{M}{\ln n}\right)^n<+\infty$. 从而由 Weierstrass 判别法知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{x}{\ln n}\right)^n$ 在 $[-M,M]$ 上一致收敛, 因而 f 是 $[-M,M]$ 上的连续函数. 由于 M 是任意的正数, 所以 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

□

定理 2.8 (Dini 定理)

设函数列 $\{f_n\}$ 在有限闭区间 $[a,b]$ 上连续. 如果对每一个 $x\in[a,b]$, 数列 $\{f_n(x)\}$ 递减地趋于 0, 那么 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 0.

♡

证明 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 $N_x=N(\varepsilon,x)$, 使得

$$0\leqslant f_{N_x}(x)<\varepsilon$$

由于 f_{N_x} 在点 x 处连续, 故必存在 $\delta_x>0$, 使得当 $t\in[a,b]$ 且 $t\in(x-\delta_x,x+\delta_x)$ 时，仍有

$$0\leqslant f_{N_x}(x)<\varepsilon \tag{2.2}$$

于是这些区间的并

$$\bigcup_{x\in[a,b]}(x-\delta_x,x+\delta_x)$$

构成 $[a,b]$ 的一个开覆盖. 由有限覆盖定理知，从中可以选出有限个开区间

$$(x_i-\delta_{x_i},x_i+\delta_{x_i})\quad(i=1,\cdots,m)$$

它们仍构成 $[a,b]$ 的一个开覆盖. 令

$$N=\max\left(N_{x_1},\cdots,N_{x_m}\right)$$

由式2.2和 $\{f_n\}$ 的递减性知，当 $n\geqslant N$ 时，不等式

$$0\leqslant f_n(x)<\varepsilon$$

对一切 $x\in[a,b]$ 成立. 这正说明 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$ 在 $[a,b]$ 上一致地成立.

□

注 如果把定理中的有限闭区间 $[a,b]$ 改成开区间或无穷区间, 结论则不再成立. 例如,

1. $f_n(x)=x^n$ 在 $(0,1)$ 上单调递减地趋于 0, 但它不一致收敛于 0.
2. 如 $f_n(x)=x/n$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减地趋于 0, 但不一致地趋于 0.

定理 2.9 (级数 Dini 定理)

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的每一项在有限闭区间 $[a,b]$ 上连续且非负. 如果它的和函数 $S(x)$ 也在 $[a,b]$ 上

连续, 那么该级数在 $[a,b]$ 上一致收敛.

定理 2.10

如果 $[a,b]$ 上的可积函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f, 那么 f 也在 $[a,b]$ 上可积, 并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

注 如果 $\{f_n\}$ 不一致收敛于 f, 那么 f 可能在 $[a,b]$ 上不可积.

推论 2.2

如果 $[a,b]$ 上的连续函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f, 那么

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

定理 2.11

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$, 且每一项 $u_n(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积, 那么 $S(x)$ 也在 $[a,b]$ 上可积, 并且

$$\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x.$$

推论 2.3

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 且每一项 $u_n(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续, 那么

$$\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x.$$

定理 2.12

设函数列 $\{f_n\}$ 满足条件:

1. 每一个 f_n 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数;
2. 由导函数构成的函数列 $\{f_n'\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 g;
3. 至少在某一点 $x_0\in[a,b]$ 上收敛.

那么函数列 $\{f_n\}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛于某个连续可微函数 f, 并且对每一个 $x\in[a,b]$, 有

$$f'(x)=g(x),\ 即\ \left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)'=\lim_{n\to\infty}f_n'(x).$$

定理 2.13

设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 满足条件:

1. 每一项 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数;

2. 由各项的导函数组成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $g(x)$;
3. 至少在某一点 $x_0 \in [a,b]$ 处收敛.

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 其和函数 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导, 并且 $S'(x) = g(x)$, 即

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

例题 2.8 证明: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^4}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有二阶连续导函数, 并计算 $f''(x)$.

证明 容易看出, 原级数以及每一项求导后所得的级数都在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛，因而有

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$$

对这个级数再逐项求导, 所得的级数仍在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛, 因而有

$$f''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

□

2.3 由幂级数确定的函数

定理 2.14 (Abel 定理)

1. 如果幂级数 2.3在点 $x = x_0\ (x_0 \neq 0)$ 处收敛, 那么它必在区间 $|x| < |x_0|$ 上绝对收敛.
2. 如果幂级数 2.3在点 $x = x_1$ 处发散，那么它必在 $|x| > |x_1|$ 上发散.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{2.3}$$

定理 2.15 (Cauchy-Hadamard)

对给定的幂级数 2.3 , 记

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

那么

1. 当 $R = 0$ 时, 级数 2.3 只在 $x = 0$ 这一点处收敛;
2. 当 $R = +\infty$ 时, 级数 2.3 在整个数轴上都绝对收敛;
3. 当 $0 < R < +\infty$ 时, 级数 2.3 在区间 $(-R, R)$ 内绝对收敛, 在 $[-R, R]$ 之外发散。

注 由此可见, 幂级数2.3 的收敛点集是区间 $(-R, R)$, R 称为级数 2.3的收敛半径, $(-R, R)$ 称为级数2.3 的收敛区间.

这时幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + \cdots + a_n (x - x_0)^n + \cdots$$

的收敛区间是 $(x_0-R,\ x_0+R)$. 定理2.15实际上给出了计算 R 的公式.

注 必须指出, 在幂级数的收敛区间 $(-R,R)$ 的两个端点 $x=\pm R$ 处, 级数的收敛性没有肯定的结论. 下面三个级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}nx^n$$

的收敛半径都是 1, 收敛区间是 $(-1,1)$.

1. 第一个级数在左端点 $x=-1$ 处条件收敛, 在右端点 $x=1$ 处发散;
2. 第二个级数在两个端点处都绝对收敛;
3. 第三个级数在两个端点处都发散.

例题 2.9 计算幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}2^k x^{2k}$ 的收敛半径.

解

1. 当 $n=2k$ 时, $a_n=2^k$;
2. 当 $n=2k+1$ 时, $a_n=0$. 于是

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[2k]{2^k}=\sqrt{2}$$

因此 $R=1/\sqrt{2}$.

定理 2.16

设级数 2.3的收敛半径为 R, 则对任意的 $r\in(0,R)$, 级数 2.3 在 $[-r,r]$ 上一致收敛.
这时称级数 2.3在 $(-R,R)$ 上**内闭一致收敛**.

证明 因为当 $x\in[-r,r]$ 时, 有

$$|a_nx^n|\leqslant|a_n|\,r^n,$$

而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|\,r^n$ 收敛, 故由 Weierstrass 判别法, 知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $[-r,r]$ 上一致收敛. □

定理 2.17

设级数2.3 的收敛半径为 R, 则其和函数 $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 内连续, 而且在 $(-R,R)$ 内有任意阶导数:

$$S^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)a_nx^{n-k}\quad(k=1,2,\cdots).$$

注 这条定理所揭示的正是幂级数和多项式的相似之处.

推论 2.4

设级数 2.3的收敛半径为 R, $S(x)$ 是它的和函数, 那么对任意的 $x\in(-R,R)$, 有

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},\tag{2.4}$$

而且式 2.4右边幂级数的收敛半径仍为 R.

例题 2.10 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$ 的和.

解 易知这个幂级数的收敛半径 $R=1$. 为了求出它的和, 对幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (|x|<1)$$

逐项求导, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

因而

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (|x|<1).$$

注 在上式中取 x 的一些特殊值, 即可求得一些数项级数的和. 例如, 分别取 $x=\frac{1}{2},\frac{1}{3}$, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}.$$

例题 2.11 把 $\ln(1+x)$ 和 $\arctan x$ 展开成幂级数。

解

1. 当 $x \in (-1,1)$ 时, 有

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

从 0 到 x 对上式逐项积分, 得

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (-1<x<1) \end{aligned}$$

2. 再对等式

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

逐项积分, 即得 $\arctan x$ 的展开式:

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (-1<x<1)$$

在收敛区间的两端点处, 和函数有如下性质.

定理 2.18 (Abel 第二定理)

设级数2.3的收敛半径为 R.

1. 如果在 $x=R$ 处级数 2.3 收敛, 则其和函数 $S(x)$ 在 $x=R$ 处左连续;
2. 如果在 $x=-R$ 处级数 2.3 收敛, 则 $S(x)$ 在 $x=-R$ 处右连续.

证明 设级数 2.3 在 $x=R$ 处收敛, 我们证明级数2.3 必在 $[0,R]$ 上一致收敛. 事实上，把级数2.3写成

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$$

由于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 收敛, 数列 $\left\{\left(\frac{x}{R}\right)^n\right\}$ 对 $[0,R]$ 中的每一个 x 而言是递减的, 且一致有界.

根据级数一致收敛的 Abel 判别法, 级数 2.3 在 $[0,R]$ 上一致收敛. 所以 $S(x)$ 在 $x=R$ 处左连续. 同理可证定理的另一半.

注 Abel 第二定理的逆定理是否成立?

即若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1 (设 $R=1$), 且 $\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$ 存在, 能否断言 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$?

很容易举出使上述结论不成立的例子. 例如, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ 的收敛半径为 1 , 它在 $(-1,1)$ 内等于 $1/(1+x)$, 因而

$$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{2}$$

存在, 但级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ 显然是发散的.

例题 2.12 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

解 已知当 $x\in(-1,1)$ 时, 有等式

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

因为上式右边的级数在 $x=1$ 处收敛, 故由 Abel 第二定理, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\lim_{x\to 1^-}\ln(1+x)=\ln 2$$

用另一个展开式

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\quad(-1<x<1)$$

可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$$

例题 2.13 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n+1}$ 的和.

解 考虑幂级数

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n+1}x^{3n+1}$$

易知, 它的收敛半径是 1 . 由于它在 $x=1$ 处收敛, 故由 Abel 第二定理知, 它的和函数 $S(x)$ 在 $x=1$ 处左连续, 因而有

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n+1}=\lim_{x\to 1^-}S(x)$$

由于 $S(0)=0, S'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}=\dfrac{1}{1+x^3}$, 所以

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n+1}&=\lim_{x\to1^-}S(x)=\lim_{x\to1}\int_0^x S'(t)\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\left(\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

定理 2.19 (Tauber 定理))

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为 1，且

$$\lim_{x\to1^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=A$$

存在. 如果

$$a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$$

那么 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=A$.

定理 2.20

设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ 的收敛半径均为 R, 那么当 $x\in(-R,R)$ 时, 有

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$$

其中 $c_n=\sum\limits_{l=0}^{n}a_l b_{n-1}(n=0,1,2,\cdots)$.

例题 2.14 由于当 $|x|<1$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x}$, 故若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径是 1，那么当 $|x|<1$ 时, 有

$$\frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}S_n x^n$$

这里 $S_n=\sum\limits_{l=0}^{n}a_l$.

类推下去, 便有

$$\frac{1}{(1-x)^2}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(S_0+S_1+\cdots+S_n)\,x^n,$$

等等.

例题 2.15 证明: 当 $x\in(-1,1)$ 时, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n=\frac{2}{(1-x)^3}$$

证明 由例 2.15 , 知

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

再用一次例 2.15 的结果，即得

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n.$$

这就是要证的等式.

□

2.4 函数的幂级数展开式

定义 2.5

设 f 在 $x=x_0$ 处有任意阶导数, 那么由 f 就能作出幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

称这个幂级数为 f 在 $x=x_0$ 处的 **Taylor 级数**, 记为

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

特别地, 当 $x_0=0$ 时, 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

也称为 f 的 **Maclaurin 级数**.

♣

注 只要 f 在 $x=x_0$ 处有任意阶导数, 就能作出它的 Taylor 级数. 但这个级数不一定是收敛的, 即使收敛, 也未必收敛到 f 自己. 例如函数

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

容易计算

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

因而它的 Taylor 级数收敛于 0 , 而不收敛于 f 自己.

定义 2.6

设 f 在 (x_0-R, x_0+R) 上有任意阶导数. 根据 Taylor 公式, 对 (x_0-R, x_0+R) 内的任一点 x, 有

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x),$$

其中 $R_n(x)$ 是余项. 它有两种表示:

1. Lagrange 余项

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

2. Cauchy 余项

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{n!}(x-\eta)^n(x-x_0),$$

其中 ξ 和 η 是介于 x_0 和 x 之间的数.

♣

命题 2.2

f 能在 (x_0-R, x_0+R) 上展开为 Taylor 级数的充分必要条件是, 对任意的 $x \in (x_0-R, x_0+R)$, 有

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

♠

定理 2.21

如果存在常数 M, 使得对 (x_0-R, x_0+R) 内的所有 x 及一切充分大的正整数 n, 均有

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant M,$$

那么 f 能在 (x_0-R, x_0+R) 上展开为 Taylor 级数.

♡

证明

$$\begin{aligned}|R_n(x)| &= \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| \\ &\leqslant M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant M\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

由于级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R^n}{n!}$ 收敛, 所以 $\lim_{n\to\infty}\frac{R^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, 从而得 ·

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad (x_0-R < x < x_0+R)$$

□

2.5 多项式一致逼近连续函数

2.6 幂级数在组合数学中的应用 *

2.7 两个著名的例子 *