SpiroGraph

El SpiroGraph és un joc molt popular de dibuix de figures des de fa anys. El joc està format per un conjunt d'anells i cercles que es poden combinar de moltíssimes maneres per formar dibuixos colorits i variats.

Ja en el segle XVII, en Galileu Galilei va anomenar com a *cicloides* els dibuixos resultants de pintar el desplaçament d'un punt sobre la circumferència d'un cercle al llarg d'una línia (figura 1a) i com a *trocoides* el desplaçament d'un punt interior del cercle (figura 1b).

(a) (b)

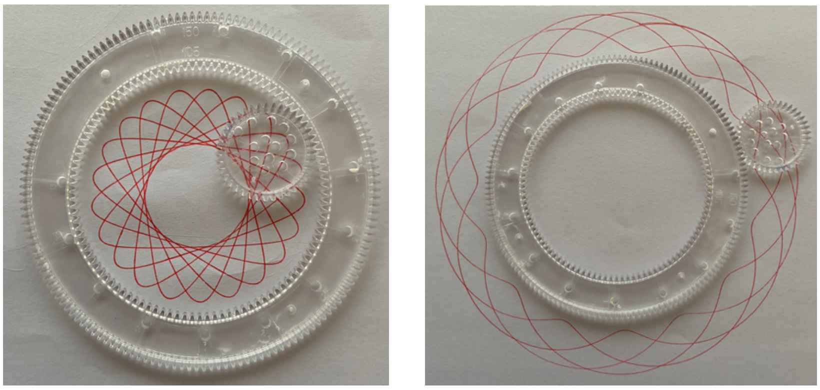
Figura 1: un cicloide (a) i un trocoide (b)

El spirograph és una generalització d'aquest tipus de corbes, només que en lloc de rodar per una línia, el cercle es fa rodar al voltant d'un altre cercle (anomenat anell), sigui per l'interior o per l'exterior. Tant el cercle com l'anell tenen un engranatge format per dents, que impedeixen que els dos discs patinin entre si.

La nomenclatura quan giram al voltant d'un altre cercle canvia una mica; si feim rodar un punt de la circumferència per l'interior d'un cercle, tenim una corba que es diu hipocicloide i si el que feim rodar és un punt interior de la circumferència, llavors tenim un hipotrocoide.

De la mateixa manera, si el feim rodar per l'exterior del cercle, llavors tenim un epicicloide o un epitrocoide respectivament, depenent de si el punt del llapis està damunt la circumferència o al seu interior.

Amb el spirograph, realment esteim dibuixant hipotrocoides i epitrocoides, ja que no podem posar el llapis exactament sobre la mateixa circumferència, l'hem de posar a un punt interior, on hi ha els forats (figura 2).



(a) (b)

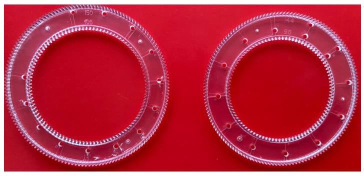
Figura 2: un hipotrocoide (a) i un epitrocoide (b)

En aquesta pràctica amb LISP, farem un sistema interactiu de dibuixat d'hipotrocoides i epitrocoides simulant un joc de spirograph.

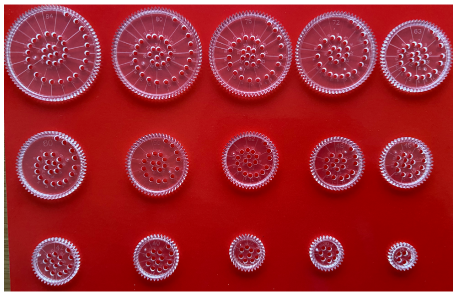
Descripció del joc

El nostre joc, que simularà el spirograph, tendrà dos anells i 15 cercles, amb les característiques que mostra la taula 1.

Anells	Dents exteriors	Dents interiors
1	150	105
2	144	96



Cercle	Dents	Forats	Diàmetre
1	84	35	56
2	80	33	53
3	75	31	50
4	72	29	48
5	63	25	42
6	60	23	40
7	56	21	37
8	52	19	35
9	48	17	32
10	45	16	30
11	42	14	28
12	40	13	27
13	32	9	21
14	30	8	20
15	24	5	16



Taula 1. Característiques dels anells i cercles disponibles

El joc també disposa de tres bolígrafs: un de blau, un de vermell i un de verd.

Fonaments matemàtics

Imaginau el dibuix de la figura 3. Tenim un cercle gran de radi R i un cercle petit, de radi r. El cercle petit va girant dins el cercle gran i el segments vermells (l1 i l2) representen els camins que ha recorregut el cercle petit (tant a la seva circumferència com a la del cercle gran).

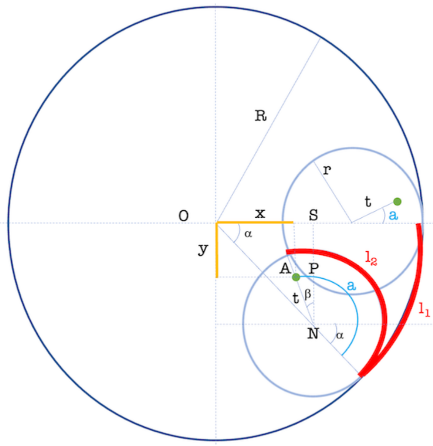


Figura 3. Càlcul de les equacions de la posició del llapis

Conseqüentment, podem veure que les dues longituds han de ser iguals:

$$l1 = l2 \tag{1}$$

A més, $l1$ és la longitud de l'arc de la circumferència gran, que ve donada per:

$$l1 = R \cdot \alpha \tag{2}$$

i $l2$ és la longitud de l'arc sobre la circumferència petita, que ve donada per:

$$l2 = r \cdot a \tag{3}$$

on a és (a partir del gràfic de la figura 3):

$$a = \alpha + \frac{\pi}{2} + \beta \tag{4}$$

Si ara substituïm a (1) els valors de $l1$ i $l2$ de (2) i (3):

$$R \cdot \alpha = r \cdot a \tag{5}$$

d'on tenim:

$$\alpha = \frac{r \cdot a}{R} \tag{6}$$

i a partir de (4) i (6), podem deduir el valor de β:

$$\beta = a - \frac{r \cdot a}{R} - \frac{\pi}{2} = \left(1 - \frac{r}{R}\right) \cdot a - \frac{\pi}{2} \tag{7}$$

Ens interessa calcular les coordenades del punt A, és a dir (x, y), ja que és el punt que hem de dibuixar a cada moviment del llapis. Si ens fixam en la figura 3, la *x* i la *y* venen donades per les següents distàncies:

$$\begin{aligned} x &= \overline{OS} - \overline{AP} \\ y &= \overline{SN} - \overline{NP} \end{aligned} \tag{8}$$

De la figura 3, també es pot deduir que:

$$\sin\alpha = \frac{SN}{ON}$$

$$\cos\alpha = \frac{OS}{ON}$$

$$\sin\beta = \frac{AP}{NA}$$

$$\cos\beta = \frac{NP}{NA}$$

o el què és el mateix:

$$\overline{SN} = \overline{ON} \cdot \sin\alpha$$
$$\overline{OS} = \overline{ON} \cdot \cos\alpha$$
$$\overline{AP} = \overline{NA} \cdot \sin\beta$$
$$\overline{NP} = \overline{NA} \cdot \cos\beta$$

com es pot veure a la figura 3:

$$\overline{NA} = t$$

i

$$\overline{ON} = R - r$$

podem substituir a les equacions 8 per conèixer x i y:

$$x = \overline{OS} - \overline{AP} = \overline{ON} \cdot \cos\alpha \; - \overline{NA} \cdot \sin\beta = (R - r) \cdot \cos\alpha \; - \; t \cdot \sin\beta$$
$$y = \overline{SN} - \overline{NP} = \overline{ON} \cdot \sin\alpha - \overline{NA} \; \cdot \cos\beta = (R - r) \cdot \sin\alpha - t \cdot \cos\beta$$

resumint:

$$x = (R - r) \cdot \cos\alpha \; - \; t \cdot \sin\beta$$
$$y = (R - r) \cdot \sin\alpha - t \cdot \cos\beta$$

i substituint el valor de α de l'equació (6) i el valor de β de l'equació (7):

$$x = (R - r) \cdot \cos\left(\frac{r \cdot a}{R}\right) \; - \; t \cdot \sin\left(\left(1 - \frac{r}{R}\right) \cdot a - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$y = (R - r) \cdot \sin\left(\frac{r \cdot a}{R}\right) \; - \; t \cdot \cos\left(\left(1 - \frac{r}{R}\right) \cdot a - \frac{\pi}{2}\right)$$

aprofitant les raons trigonomètriques:

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\ \alpha$$
$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = sin\ \alpha$$

tenim que les equacions que modelen el comportament d'un hipotrocoide són:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= (R - r) \cdot \cos\left(\frac{r \cdot a}{R}\right) \; + \; t \cdot \cos\left(\left(1 - \frac{r}{R}\right) \cdot a\right) \\ y &= (R - r) \cdot \sin\left(\frac{r \cdot a}{R}\right) \; - \; t \cdot \sin\left(\left(1 - \frac{r}{R}\right) \cdot a\right) \end{aligned}} \quad (9)$$

on:

R és el radi de la circumferència gran (anell),

r és el radi de la circumferència petita (cercle),

a és l'angle de gir del cercle, que anirem variant, i

t és la distancia des del centre del cercle petit fins al punt on posam el llapis.

Com que els radis són proporcionals al número de dents, podeu utilitzar el número de dents del cercle gran com a R i el número de dents del cercle petit com a r.

En el cas en què volguem que el cercle petit giri per defora del cercle gran, llavors, seguint el mateix procés, podríem deduir les equacions que modelen el comportament d'un epitrocoide:

$$x = (R + r) \cdot \cos\left(\frac{r \cdot a}{R}\right) - t \cdot \cos\left(\left(1 + \frac{r}{R}\right) \cdot a\right)$$
$$y = (R + r) \cdot \sin\left(\frac{r \cdot a}{R}\right) - t \cdot \sin\left(\left(1 + \frac{r}{R}\right) \cdot a\right) \tag{10}$$

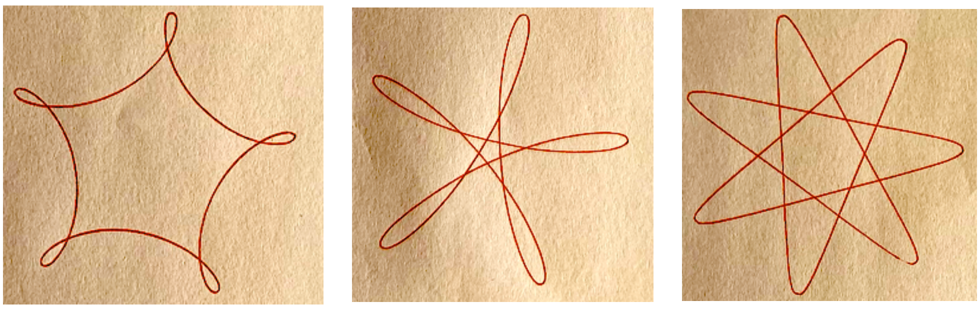
Per fer un dibuix, haurem d'anar variant el valor de a i pintant el punt (x, y) a cada moviment.

Una pregunta addicional que se'ns presenta és quin és el límit en què haurem d'aturar la rotació. És a dir, quantes voltes ha de fer el nostre cercle petit per acabar el recorregut del dibuix? (pensau que si no l'aturam, donarà voltes damunt el mateix dibuix contínuament).

Podem trobar el número de voltes que s'han de fer perquè el traçat arribi al punt de partida a partir de la fracció reduïda que relaciona els radis (o els número de dents) dels dos cercles. Si reduïm a la seva mínima expressió la relació f entre R i r, obtenim R' i r'. El valor R' seria el número de puntes que té el dibuix final i el valor r' seria el número total de voltes que hem de fer per tancar el recorregut de la figura:

$$f = \frac{R}{r} = \frac{R'}{r'} = \frac{\textit{Número de puntes del dibuix}}{\textit{Número de voltes per tancar el recorregut}}$$

Aquest resultat es pot observar als diferents exemples de la figura 4. Les successives voltes per aconseguir el primer dibuix de la figura 4 es poden observar a la figura 5.

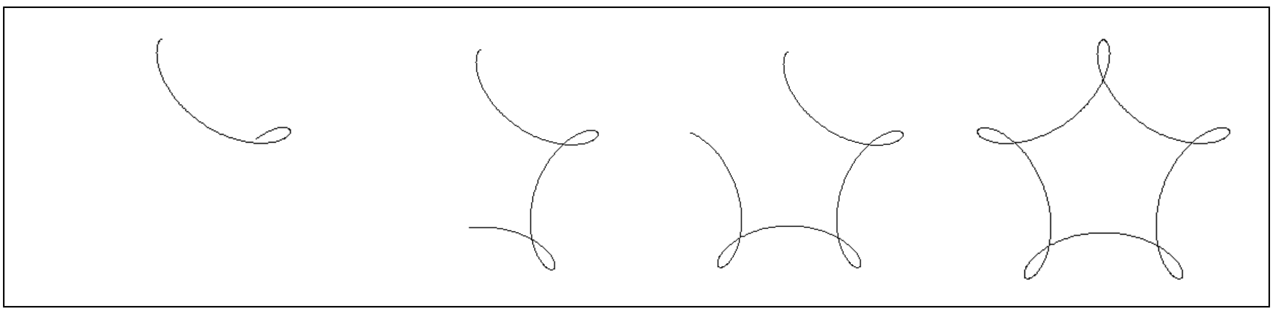


$f = \frac{105}{84} = \frac{35}{28} = \frac{5}{4}$ 5 puntes, 4 voltes

$f = \frac{105}{63} = \frac{35}{21} = \frac{5}{3}$ 5 puntes, 3 voltes

$f = \frac{105}{45} = \frac{35}{15} = \frac{7}{3}$ 7 puntes, 3 voltes

Figura 4. Diferents resultats segons la relació entre els radis dels cercles



Volta 1 Volta 2 Volta 3 Volta 4

Figura 5. Dibuix resultant després de completar cada volta del cercle petit dins el gran amb $f = \frac{5}{4}$

i si el número de voltes que tenim el multiplicam per 2π, tendrem el número total de radians que hem de girar el cercle petit per obtenir la figura final:

$$màxim\ a = r' \cdot 2\pi$$

Què s'ha de fer a la pràctica?

En aquesta pràctica s'han d'implementar les següents funcions utilitzant el llenguatge LISP:

<u>Part 1 (3 punts)</u>

- `(guarda-informacio)`:

  Ha de guardar dins les propietats d'un àtom simbòlic anomenat "spiro" la següent informació:

  - grans: conté una llista on cada element és una llista amb la informació d'un dels cercles grans (número de dents exteriors i interiors).
  - petits: conté una llista on cada element és una llista amb la informació d'un dels cercles petits (dents, número de forats i diàmetre).
  - rgran: conté el valor del número de dents del cercle gran (per defecte 150).
  - rpetit: conté el valor del número de dents del cercle petit (per defecte 50).
  - punt: conté el número de punt a partir del que pintarem (per defecte 3).
  - inici: conté l'angle en graus del cercle gran a partir del que començarem el dibuix.
  - escala: valor que escalarà el dibuix (per defecte 1.8).
  - interior: valor booleà que indica si esteim pintant per l'interior o no.
  - x: coordenada x de la posició on es pintarà el dibuix.
  - y: coordenada y de la posició on es pintarà el dibuix.
  - pas: indica la variació de l'angle a cada passa dels càlculs (per defecte 0.2).

  Aquesta funció, que inicialitza les dades del nostre spirograph, s'ha d'avaluar cada cop que es llegeixi el fitxer que conté el codi font en LISP de la vostra pràctica.

- `(vermell)`, `(blau)`, `(verd)` i `(negre)`:

  Per posar el color de dibuix per a cada bolígraf i per tornar al negre.

```
> (vermell)
t
> (verd)
t
> (blau)
t
> (negre)
t
> _
```

- **`(cercle x y radi n)`:**

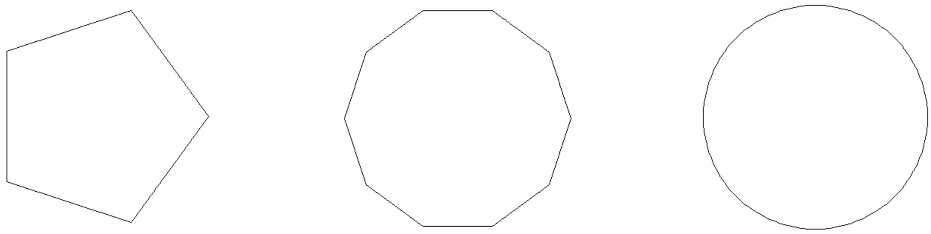
  Dibuixa un cercle centrat en el punt (*x,y*), de radi *r* i que està dividit en *n* segments.

  Pista: per pintar el cercle utilitzau les funcions sinus i cosinus i anau variant l'angle per calcular les coordenades de cada vèrtex. Pensau que el sinus i el cosinus funciona amb radians, per tant, l'angle haurà de variar entre 0 i 2π amb un increment depenent del número de segments!.

  Vos serà útil ver una funció "radians" que converteixi de graus a radians:

```
>(radians 180)
3.14159
```

  La figura 6 mostra els cercles resultants de l'execució de la funció per pintar un cercle centrat a l'origen i de radi 100 per a 5, 10 i 100 segments.



>(cercle 0 0 100 5) ; de 5 segments >(cercle 0 0 100 10); de 10 segments >(cercle 0 0 100 100); de 100 segments

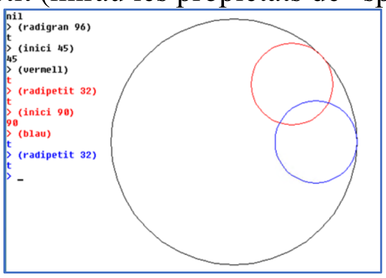
Figura 6. Aspecte del cercle amb diferents número de segments

- `(radigran r):`

  Posa *r* com a nou valor per defecte del radi gran, també pinta un cercle d'aquest radi centrat en la posició per defecte del spirograph (mirau les propietats de "spiro").

- `(radipetit r):`

  Posa *r* com a nou valor per defecte del radi petit, també pinta un cercle d'aquest radi a la posició inicial del cercle petit (mirau les propietats de "spiro").



- `(punt p),(inici angle),(escala e),(posicio x y):`

  Estableix el valor per defecte de les propietats de "spiro" als valors indicats (*p,angle,e,x,y*).

```
> (punt 3)
3
> (inici 45)
45
> (posicio 200 200)
200
> (escala 1.9)
1.9
> (get 'spiro 'escala)
1.9
> (get 'spiro 'punt)
3
```

- `(reduir m n):`

  Calcula la fracció reduïda de *m* i *n* i torna una llista amb els dos valors de la nova fracció. Això es pot fer calculant el màxim comú divisor (mcd) de *m* i *n* i després dividint tant el numerador com el denominador pel mcd:

$$f = \frac{R}{r} = \frac{R/_{mcd(R,r)}}{r/_{mcd(R,r)}} = \frac{R'}{r'}$$

```
>(reduir 105 84) ;el mcd de 105 i 84, és 21. Hem de dividir 105 i 84 per 21
(5 4)
```

<u>Part 2 (4 punts)</u>

- `(spirograph p gran petit t inc inici):`

  Simula el comportament d'un spirograph amb el número de passes *p*, amb els radis *gran* i *petit*, amb la distancia t (veure la figura 3), un increment *inc* a cada passa i amb l'*inici* del dibuixat a l'angle donat en graus. Les passes determinen el valor de *a* de la fórmula de dibuix (equacions 9 i 10).

En aquest apartat heu d'utilitzar les fórmules (9) i (10) depenent de si s'utilitza l'exterior del cercle gran (144 o 150 dents) o l'interior (96 o 105 dents). Si és interior o exterior ho podeu deduir segons el valor de la propietat "*interior*" de *spiro*.

Per a poder establir l'angle inicial, una vegada calculat el punt que heu de pintar, haureu de rotar el punt (x,y) segons l'angle "inici" amb les fórmules:

$$x' = x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha$$

$$y' = -x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha$$

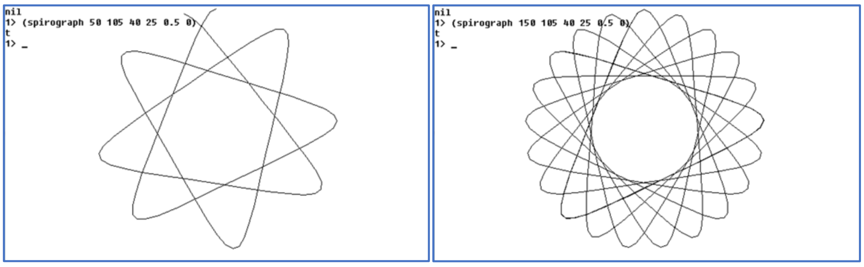


Figura 6: funcionament de ***spirograph*** amb diferents valors del número de passes

- `(spiro gran petit p inc inici):`

  Simula el comportament d'un spirograph amb el número de voltes necessàries per acabar tot el traçat.

  Aquesta funció té dues diferències respecte a l'anterior:

  1. No hi ha l'argument del número de passes, ja que aquesta funció ha de calcular quantes voltes són necessàries per acabar tot el recorregut i,
  2. Fixau-vos que el paràmetre *t* s'ha substituït per *p*, aquest fet serveix per indicar que ja no utilitzam la distància a la que es troba el punt de dibuix des del centre del cercle petit, ara volem utilitzar, a partir de la informació proporcionada a la taula 1, un dels punts enumerats del cercle petit (distribuïts sobre el radi del cercle). La numeració dels punts va de fora cap a dins (igual que a la jogueta original).

     A la figura 7 es poden veure els cinc punts del cercle de radi 24. Heu de relacionar el número del punt amb el valor de la *t*. En aquesta funció només es podran utilitzar els valors dels radis de la taula 1, per tant, s'haurà de comprovar que els arguments *gran* i *petit* són valors acceptables.

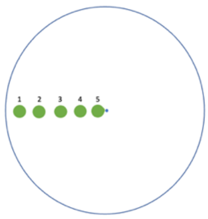


Figura 7: els punts del cercle de radi 24

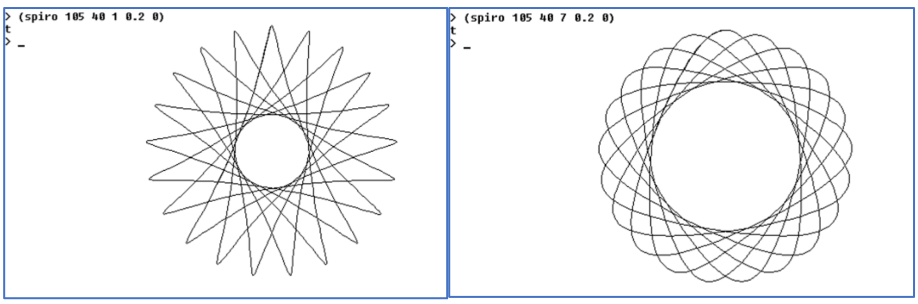


Figura 8: funcionament de ***spiro*** amb diferents valors del punt (1 i 7)

Part 3 (3 punts)

- `(roda):`

  Fa una simulació completa del spirograph agafant els valors que tenen en aquest moment les propietats de l'àtom "*spiro*".

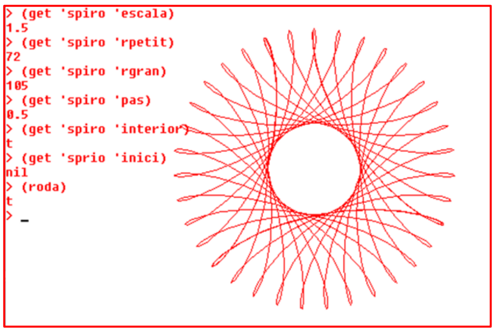


Figura 9: Execució de (***roda)*** amb els valors de les propietats de *spiro*

- `(roda-voltes n):`

  Fa el mateix que a l'apartat anterior però només fa *n* voltes.

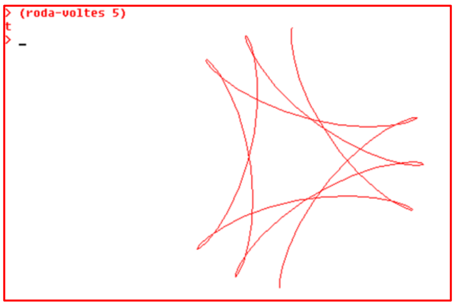


Figura 10: Execució de (***roda-voltes 5)*** amb els valors de les propietats de *spiro: fa 5 voltes*

- `(spiro-voltes voltes gran petit p in inici):`

  És igual que l'anterior però simula el comportament d'un spirograph amb els arguments indicats (veure la figura 5).

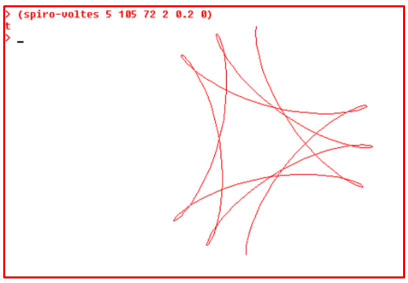
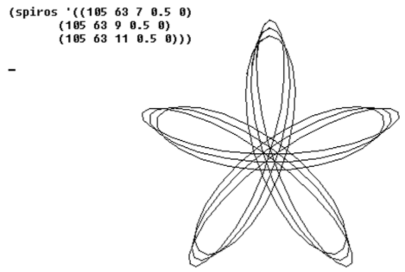


Figura 10: Execució de ***spiro-voltes***

- `(spiros l):`

  Fa totes les simulacions amb els arguments de les llistes contingudes dins la llista l (el format de cada element de la llista és una llista amb els paràmetres corresponents a la crida a la funció "spiro" definida anteriorment (és a dir, el radi gran, el radi petit, la p, el increment i l'angle d'inici).



- `(dibuix):`

  Pinta un joc de proves de 12 figures que es traçaran a partir de diferents combinacions de cercles grans, petits, interiors i exteriors utilitzant totes les funcions de dibuix del spirograph definides a la pràctica (spirograph, spiro, spiro-voltes, roda, spiros).

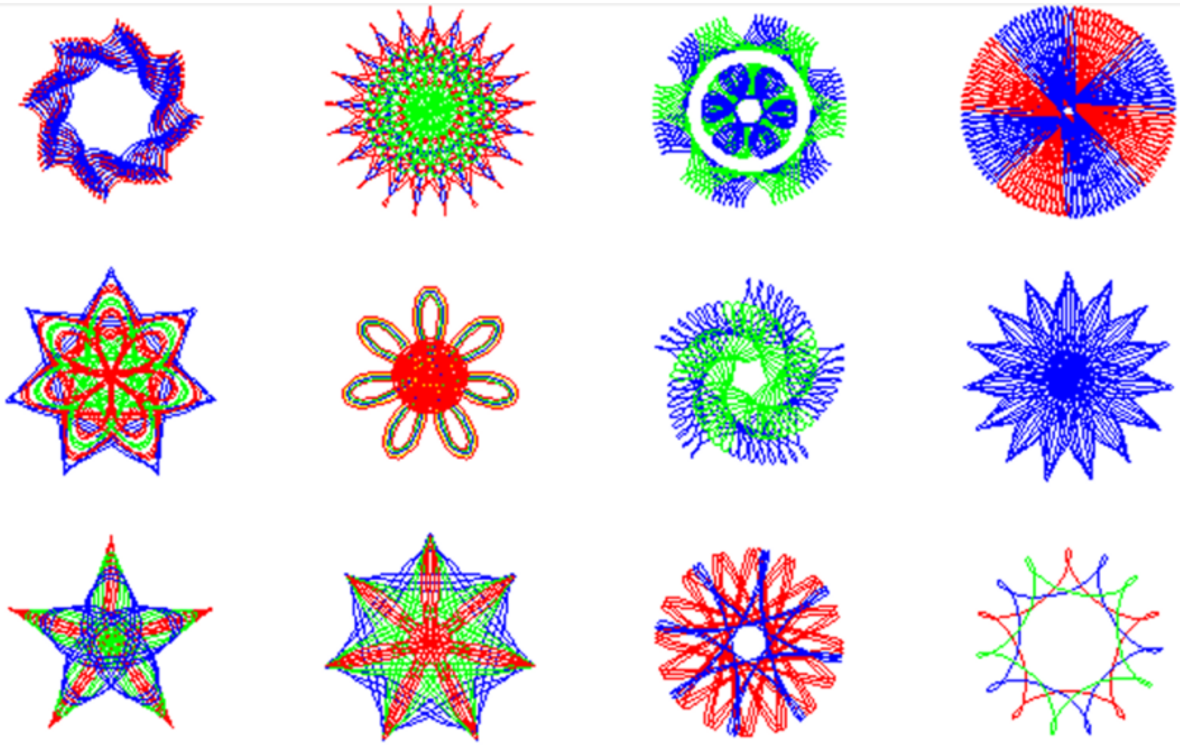


Figura 11: Exemple d'execució de ***(dibuix)***

- Definiu totes les funcions addicionals necessàries per a poder dur a terme la tasca encomanada.

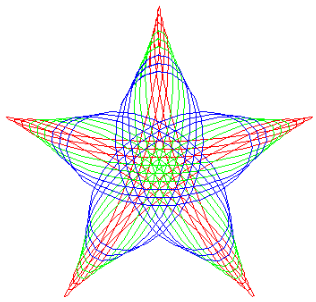
Exemple de funcionament amb les funcions:

Aquestes dues versions de figura1 haurien de fer exactament el mateix, només que a la segona posam l'inici a 45 graus i la figura surt rotada 45 graus:

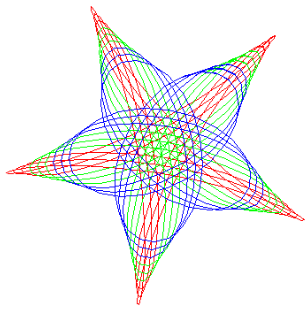
```
(defun figura1 ()
   (cls)
   (vermell)
   (spiros '((105 63 1 0.5 0)
             (105 63 3 0.5 0)
             (105 63 5 0.5 0)))
   (verd)
   (spiros '((105 63 7 0.5 0)
             (105 63 9 0.5 0)
             (105 63 11 0.5 0)))
   (blau)
```

```
(defun figura1 ()
   (radigran 105)
   (radipetit 63)
   (inici 45)
   (cls)
   (vermell)
   (punt 1)(roda)
   (punt 3)(roda)
   (punt 5)(roda)
   (verd)
   (punt 7)(roda)
```

```
    (spiros '((105 63 13 0.5 0)
              (105 63 15 0.5 0)
              (105 63 17 0.5 0)))
)

>(figura1)
```

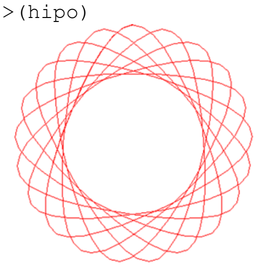


```
    (punt 9)(roda)
    (punt 11)(roda)
    (blau)
    (punt 13)(roda)
    (punt 15)(roda)
    (punt 17)(roda)
)
>(figura1)
```

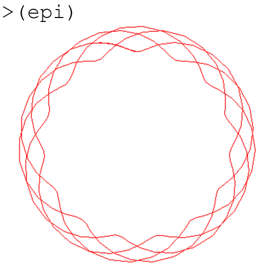


Simulacions de la figura 2:

```
(defun hipo ()
   (escala 1.2)
   (radigran 105)
   (radipetit 40)
   (inici 0)
   (interior t)
   (cls)
   (vermell)
   (punt 7)(roda)
)

>(hipo)
```



```
(defun epi ()
   (escala 0.8)
   (radigran 150)
   (radipetit 40)
   (inici 0)
   (interior nil)
   (cls)
   (vermell)
   (punt 5)(roda)

)

>(epi)
```



Com podem dibuixar les coses a LISP?

Heu de tenir en compte que la coordenada (0,0) correspon al punt inferior esquerra de la finestra i que les dimensions de la finestra de dibuix són de 640x375 píxels.

Per al dibuix, es disposa de les següents funcions, que actuen sobre la pantalla de LISP:

`(cls)`	Esborra completament la pantalla.
`(color R G B Rf Gf Bf)`	Estableix el color d'escriptura (R, G i B són valors de 0 a 255 i representen la component de cada color: vermell, verd i blau, Rf, Gf i Bf són el mateix però corresponen al color del fons.
`(move x y)`	Mou el punt on es troba el llapis a la posició (x, y) sense pintar.
`(moverel x y)`	Mou el punt on es troba el llapis *x* píxels horitzontalment i *y* píxels verticalment sense pintar.
`(draw x y)`	Pinta des de la posició en què es troba el llapis fins al punt x, y (pintat absolut).
`(drawrel x y)`	Desplaça el llapis *x* píxels horitzontalment i y píxels verticalment, pintant tot el recorregut (pintat relatiu).

`(goto-xy m n)`	Col·loca el cursor d'escriptura a la columna m i la fila n (mode text).
`(cleol)`	Borra fins al final de la línia (mode text).

Funcions que vos poden ser útils:

`(sin x)`	Calcula el sinus de l'angle x (expressat en radians).
`(cos x)`	Calcula el cosinus de l'angle x (expressat en radians).
`(gcd m n)`	Calcula el màxim comú divisor de *m* i *n*.
`(realpart (round (x)))`	Aquesta combinació converteix el número real x en enter. Serà necessària per arrodonir i convertir en enters els números reals (les funcions de dibuix només funcionen amb enters).

Notes:

- Aquest exercici s'ha de fer en grups de dues persones.
- S'ha d'entregar el dia de l'examen.
- Mecanisme d'entrega: Pujada al node corresponent d'Aula digital fins al dia de l'examen.
- S'ha d'entregar:
  - Un fitxer amb el codi LISP comentat i amb el nom "spiro.lsp" (recordau que els comentaris en LISP s'inicien amb el caràcter ';'). Al principi del fitxer heu de posar el nom complet dels integrants del grup.
  - Dins el fitxer hi ha d'haver un joc de proves que mostri l'execució de les funcions implementades.
- El procediment per comprovar el funcionament de l'exercici consistirà en llegir l'arxiu entregat amb un "load" dins l'intèrpret de LISP per posteriorment comprovar l'execució de les funcions. Comprovau si aquest procediment funciona amb el vostre fitxer abans d'enviar-ho.

Criteris d'avaluació:

- Per a l'avaluació es considerarà:
  - La correctesa de les funcions implementades
  - L'organització i comentaris del codi font
  - El funcionament de la pràctica

Alerta: Només es podrà utilitzar *set* i *setq* per guardar valors temporal i/o evitar càlculs duplicats