

Eine graphentheoretische Herleitung und Implementierung des Netzwerk-Simplex-Algorithmus

Max Kanold

4. November 2018

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Netzwerk-Simplex-Algorithmus	2
2.1	Min-Cost-Flow-Problem	2
2.2	Der grundlegende Algorithmus	3
2.2.1	Degenerierte Iterationen	11
2.2.2	Pivotalgorithmen	13
2.2.3	Initialisierung	13
2.3	Erweiterung auf beschränkte Kapazitäten	14
3	Implementierung	17
3.1	Netzwerke	17
3.1.1	Knoten	17
3.1.2	Kanten	17
3.1.3	Graph	18
3.2	Die Klasse <i>Circle</i>	20
3.3	Stark zulässige Baumlösungen	25
3.4	Pivotalgorithmen	25
3.5	Initialisierung	25
4	Exponentielle Instanzen aus der Literatur	26
5	Experimentelle Ergebnisse	27
6	Ausblick	28

1 Einführung

Das Simplex-Verfahren, zu welchem eine Einführung in [1] gefunden werden kann, löst Lineare Programme in der Praxis sehr schnell, obwohl die Worst-Case-Laufzeit nicht polynomiell ist. Jedes Netzwerkproblem lässt sich als Lineares Programm darstellen und somit durch das Simplex-Verfahren lösen, durch die konkrete Struktur solcher Probleme genügt jedoch der von [2, Dantzig, 1951] und [3, Orden, 1956] vereinfachte Netzwerk-Simplex-Algorithmus. Auch für diesen gibt es exponentielle Instanzen (siehe Kapitel 4), in der Praxis wird er trotzdem vielfach verwendet.

TODO: Die Einführung wird ohnehin ausgebaut. Irgendwie erwähne ich auch unauffällig, dass in dieser Bachelorarbeit die Laufzeit des Algorithmus als Iterationsanzahl definiert ist, obwohl in der Praxis natürlich die Gesamtgeschwindigkeit zählt.

Sämtliche Bilder von Graphen im Verlauf dieser Bachelorarbeit sind nach folgender Legende zu lesen. Teilweise werden nur einzelne Werte angezeigt, Ausnahme ist die Kapazität, die nie ohne Flusswerte auftritt.

- b-Wert: schwarz im Knoten
- Fluss: blau auf Kante
- Kapazität: schwarz auf Kante, mit Schrägstrich (/) vom Fluss abgetrennt
- Kosten: rot auf Kante, falls notwendig mit Komma (,) abgetrennt

2 Netzwerk-Simplex-Algorithmus

Zunächst führen wir in Abschnitt 2.1 das Transportproblem und dessen Verallgemeinerung auf beschränkte Kapazitäten ein. Gleichzeitig geben wir die Einschränkungen an, auf denen insbesondere der Programmierteil dieser Bachelorarbeit fußt. Die Beschreibung des Netzwerk-Simplex-Algorithmus in Abschnitt 2.2 orientiert sich zuerst an [1, S. 291 ff.] zur Lösung des Transportproblems, danach wird in Abschnitt 2.3 der Algorithmus anhand von [1, S. 353 ff.] auf den allgemeinen Fall erweitert.

Wir werden nur endliche Graphen betrachten. Außerdem werden alle Graphen einfach sein, das heißt, sie weisen weder mehrfache Kanten noch Schleifen auf. Der später eingeführte Residualgraph wird weiterhin keine Schleifen besitzen, doppelte Kanten können unter Umständen vorkommen.

2.1 Min-Cost-Flow-Problem

Definition 1. Ein **Netzwerk** ist ein Tupel (G, b, c, u) aus einem gerichteten Graph $G = (V, E)$ und den Abbildungen $b: V \rightarrow \mathbb{R}$, $c: E \rightarrow \mathbb{R}$ sowie $u: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \infty$. Wir bezeichnen b als *b-Wert-Funktion*, c als *Kostenfunktion* und u als *Kapazitätsfunktion*.

Anmerkung. Knoten mit positivem b-Wert werden als *Quellen*, solche mit negativem als *Senken* bezeichnet. Knoten mit neutralem b-Wert werden *Transitknoten* genannt. Ein ungerichteter Graph kann durch das Verwandeln jeder Kante $\{v, w\}$ in zwei Kanten (v, w) und (w, v) zu einem gerichteten modifiziert werden.

Definition 2. Ein **maximaler Fluss** auf einem Netzwerk $(G = (V, E), b, c, u)$ ist eine Abbildung $f: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, die folgende Eigenschaften erfüllt:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \forall e \in E: f(e) \leq u(e) \\ \text{(ii)} \quad & \forall v \in V: \sum_{(w,v) \in E} f((w,v)) - \sum_{(v,w) \in E} f((v,w)) + b(v) = 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Die *Kosten* von f betragen $c(f) = \sum_{e \in E} f(e) \cdot c(e)$.

Definition 3. Sei $N = (G, b, c, u)$ ein Netzwerk. Als **Min-Cost-Flow-Problem** bezeichnen wir die Suche nach einem maximalen Fluss f auf N mit minimalen Kosten. Die vereinfachte Version, bei der die Kapazitätsfunktion unbeschränkt ist, also $u(e) = \infty$ für alle $e \in E(G)$ gilt, nennen wir **Transportproblem**.

In dieser Bachelorarbeit wird angenommen, dass b auf \mathbb{Z} sowie c und u auf $\mathbb{N}_{\geq 0}$ abbilden, um Gleitkommazahlungenauigkeit beim Programmieren zu vermeiden. Durch

eine entsprechende Skalierung des Problems können Funktionen nach \mathbb{R} bzw. $\mathbb{R}_{\geq 0}$ hinreichend genug angenähert werden. Es wird davon ausgegangen, dass die b-Werte der Quellen und Senken ausgeglichen sind, also $\sum_{v \in V(G)} b(v) = 0$ gilt. Sollte die Summe der Senken überwiegen, ist die Instanz unlösbar. Der Fall einer zu großen Summe der Quellen kann durch eine Dummy-Senke¹ abgefangen werden.

Durch die auf nicht-negative Werte eingeschränkte Kostenfunktion hat kein maximaler Fluss negative Kosten. Damit gibt es keine unbeschränkten Instanzen. Unbeschränkte Kapazitäten können somit in der konkreten Implementierung durch $1 + 0,5 \cdot \sum_{v \in V} |b(v)|$ abgeschätzt werden, ohne dass die Lösungsmenge verändert wird. Alle Netzwerke werden als zusammenhängend angenommen, da die Zusammenhangskomponenten einer Instanz einzeln gelöst werden können. Der programmierte Algorithmus verlangt keinen Zusammenhang.

2.2 Der grundlegende Algorithmus

Um die Funktionsweise des Netzwerk-Simplex-Algorithmus zu definieren, benötigen wir zuerst einige grundlegende Definitionen der Graphentheorie. Im Nachfolgenden sind die wichtigsten in Kürze aufgeführt, für eine vollständige Einführung sei der geneigte Leser auf [5] verwiesen.

Definition 4. Der einem gerichteten Graphen $G = (V, E)$ **zugrundeliegende ungerichtete Graph** $G' = (V, E')$ ist definiert durch:

$$\{v, w\} \in E' \iff (v, w) \in E \vee (w, v) \in E$$

Anmerkung. Nach dieser Definition bleibt der zugrundeliegende Graph einfach. Eine gängige Alternative behält alle Kanten und entfernt nur die Richtung, dies ist für unsere Zwecke jedoch nicht praktikabel.

Definition 5. Ein **Baum** T ist ein ungerichteter, zusammenhängender und kreisfreier Graph. Ein **Wald** ist ein Graph, bei dem jede Zusammenhangskomponente ein Baum ist.

Ein Teilgraph $T = (V', E')$ eines ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ heißt **aufspannender Baum**, wenn T ein Baum und $V' = V$ ist.

Anmerkung. Sprechen wir bei einem gerichteten Graphen G über einen Wald bzw. (aufspannenden) Baum, so bezieht sich das stets auf einen Teilgraphen T von G , dessen zugrundeliegender ungerichteter Graph ein Wald bzw. (aufspannender) Baum des G zugrundeliegenden ungerichteten Graphen ist.

Definition 6. Sei $N = (G, b, c, u)$ eine Instanz des Transportproblems. Ein aufspannender Baum T von G und ein maximaler Fluss f auf N bilden eine **zulässige Baumlösung** (T, f) , wenn für alle Kanten $e \in E(G) \setminus E(T)$ außerhalb des Baumes $f(e) = 0$ gilt.

¹Gemäß [4, S. 454] fügen wir G eine zusätzliche Senke s hinzu, die mit allen Quellen q_i über eine Kante $e_i = (q_i, s)$ verbunden ist und einen b-Wert von $b(s) = -\sum_{v \in V(G)} b(v)$ zugewiesen bekommt. Für die Kanten gilt $c(e_i) = 0$ und $u(e_i) = \infty$.

Notation. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $V' \subseteq V$ eine Teilmenge der Knoten. Der *induzierte Teilgraph* $G[V'] = (V', \{(v, w) \in E \mid v \in V' \wedge w \in V'\})$ enthält alle Knoten aus V' und alle Kanten zwischen ihnen, die schon in E vorhanden waren.

Lemma 7. *Jede zulässige Baumlösung (T, f) ist eindeutig durch den aufspannenden Baum T definiert.*

Beweis. Sei (T, f) eine zulässige Baumlösung einer Instanz des Transportproblems. Wir führen eine Induktion über die Anzahl der Knoten des Baumes durch. Die zulässige Baumlösung zum leeren Baum ist offensichtlich.

Für jedes Blatt von $l \in V(T)$ sei $e_l \in E(T)$ die Kante in T zwischen dem Knoten l und seinem eindeutigen Nachbarknoten k_l . Für alle Blätter l ist der Wert von $f(e_l)$ nach Gleichung (2.1) eindeutig. Wir betrachten nun die eingeschränkte Knotenmenge $V' = \{v \in V(T) \mid v \text{ ist kein Blatt in } T\}$. Da jeder Baum mindestens zwei Blätter besitzt, ist $|V'| < |V(T)|$. Sei $T' = T[V'] \subsetneq T$ der durch V' induzierte Teilbaum von T . Damit sind $E(T')$ genau die Kanten, für die f noch nicht bestimmt wurde.

Sei $N' = (G' = G[V'], b', c_{|E(G')}, u_{|E(G')})$ das auf V' eingeschränkte Netzwerk N mit der folgendermaßen angepassten b-Wert-Funktion b' :

$$\forall v' \in V': \quad b'(v') = b(v') + \sum_{\substack{l \in V(T) \setminus V': \\ (l, v') \in E(T)}} b(l) - \sum_{\substack{l \in V(T) \setminus V': \\ (v', l) \in E(T)}} b(l) \quad (2.2)$$

Die b-Werte von Blattnachbarn bezogen auf Blätter in T werden angepasst, alle anderen bleiben identisch. Nun bekommen wir durch die Induktionsbehauptung für den aufspannenden Baum T' von G' einen eindeutigen Fluss f' . Wir setzen für alle Kanten $e \in E(T')$ den Fluss $f(e) := f'(e)$. Nach Gleichung (2.2) ist f ein maximaler Fluss von N , außerdem ist f nach Konstruktion eindeutig. \square

Wie Abb. 2.1 veranschaulicht, gibt es maximale Flüsse, zu denen wir keine zulässige Baumlösung finden können. Auch wenn wir uns auf die maximalen Flüsse beschränken, zu denen es zulässige Baumlösungen gibt, gilt die Gegenrichtung, also dass T eindeutig aus f bestimmt werden kann, gemäß Abb. 2.1 nicht.

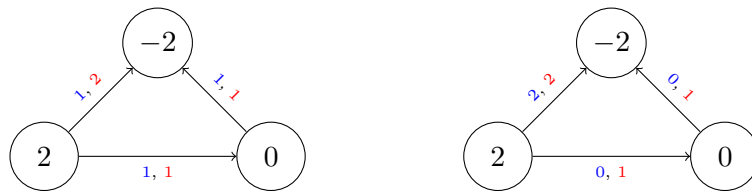


Abbildung 2.1: Links ein maximaler Fluss ohne zulässige Baumlösung, rechts ein maximaler Fluss mit uneindeutiger zulässiger Baumlösung.

Wie wir in Korollar 11 zeigen werden, existiert für das Min-Cost-Flow-Problem immer eine Lösung, die auch eine zulässige Baumlösung ist. Die dem Algorithmus zugrundeliegende Idee ist es, über die Bäume zulässiger Baumlösungen mit sinkenden

Kosten zu iterieren. Der Übergang basiert dabei auf dem Augmentieren negativer Kreise, eine Methode, für die das Konzept des Residualgraphen hilfreich ist.

Definition 8. Sei $N = (G = (V, E), b, c, u)$ ein Netzwerk mit einem maximalen Fluss f . Die **Residualkante** \bar{e} einer Kante $e = (v, w) \in E$ verläuft von w nach v . Sei $\bar{E} = \{\bar{e} \mid e \in E\}$ die Menge aller Residualkanten. Die *Residualkapazität* $u_f: \bar{E} \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 0}$ ist bestimmt durch $u_f(\bar{e}) = f(e)$, die *Residualkosten* $c_f: \bar{E} \rightarrow \mathbb{Z}$ durch $c_f(\bar{e}) = -c(e)$.

Der **Residualgraph** R ist ein Tupel $R_{N,f} = (\bar{G} = (V, E \amalg \bar{E}), \bar{f}, b, \bar{c}, \bar{u})$ mit dem gerichteten Multigraphen \bar{G} aus der bisherigen Knotenmenge und der disjunkten Vereinigung von Kanten und Residualkanten, dem maximalen Fluss \bar{f} mit $\bar{f}(e) = f(e)$ für alle $e \in E$ und $\bar{f}(\bar{e}) = 0$ für alle $\bar{e} \in \bar{E}$, der b-Wert-Funktion b wie gehabt, der Kostenfunktion $\bar{c} = c \amalg c_f: E \amalg \bar{E} \rightarrow \mathbb{Z}$ und der Kapazitätsfunktion $\bar{u} = u \amalg u_f: E \amalg \bar{E} \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 0} \cup \infty$.

Notation. Mit $\varphi: E \leftrightarrow \bar{E}$ bezeichnen wir die kanonische Bijektion zwischen den Kanten und ihren Residualkanten.

Wenn wir uns in einem Residualgraphen $R_{N,f}$ befinden und dort den Fluss einer Residualkante \bar{e} um $0 \leq \delta \leq u_f(\bar{e})$ erhöhen, so wird in Wirklichkeit der Fluss $f(\varphi(\bar{e}))$ um δ reduziert. Nach obiger Definition ist sichergestellt, dass $f(\varphi(\bar{e})) - \delta \geq 0$.

Verändern wir den maximalen Fluss f auf nur einer Kante, so ist die resultierende Funktion f' kein maximaler Fluss mehr. Deswegen werden wir stattdessen gerichtete Kreise C im Residualgraph $R_{N,f}$ zu einer Abbildung f' augmentieren, das heißt, wir erhöhen den Fluss auf allen Kanten $e \in E(C)$ um einen festen Betrag $\delta \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, ohne dabei Kapazitätsschranken zu verletzen. Damit ist Gleichung (2.1) für maximale Flüsse weiterhin erfüllt:

$$\begin{aligned} \forall v \in V(C): \quad & \sum_{(w,v) \in E(G)} f'((w,v)) - \sum_{(v,w) \in E(G)} f'((v,w)) + b(v) \\ &= \sum_{(w,v) \in E(G)} f((w,v)) + \delta - \sum_{(v,w) \in E(G)} f((v,w)) - \delta + b(v) = 0 \end{aligned}$$

Also ist f' ein maximaler Fluss. Seine Kosten betragen $c(f') = c(f) + \delta \cdot c(C)$.

Lemma 9. Sei N eine Instanz des Transportproblems, $R_{N,f}$ ihr Residualgraph und C ein gerichteter Kreis in $R_{N,f}$ mit negativen Kosten. Der größte Wert δ , um den C augmentiert werden kann, ist endlich, und nach der Augmentierung um δ zum neuen maximalen Fluss f' existiert eine Residualkante $\bar{e} \in E(C)$, sodass die korrespondierende Kante einen Fluss von $f'(\varphi(\bar{e})) = 0$ besitzt.

Beweis. Sei $N = (G, b, c, u)$ ein Instanz des Transportproblems mit maximalen Fluss f und C ein negativer Kreis in $R_{N,f}$. Wir setzen $\delta := \min_{e \in E(C)} \{\bar{u}(e) - \bar{f}(e)\}$. Da $c: E(G) \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 0}$ in die natürlichen Zahlen abbildet, enthält jeder negative Kreis in $R_{N,f}$ mindestens eine Residualkante \bar{e} . Damit ist $0 \leq \delta \leq u_f(\bar{e}) < \infty$.

Wir haben δ unter allen zulässigen Werten größtmöglich gewählt. Da alle Kanten $e \in E(G)$ unbeschränkte Kapazität haben und ihr Fluss $f(e)$ endlich ist, gibt es eine

2 Netzwerk-Simplex-Algorithmus

Residualkante \bar{e} mit $u_f(\bar{e}) = \delta$. Nachdem wir C um δ zu einem maximalen Fluss f' augmentiert haben, ist der neue Fluss auf der korrespondierenden Kante $e := \varphi(\bar{e})$

$$f'(e) = f(e) - \delta = f(e) - u_f(\bar{e}) = f(e) - f(e) = 0. \quad \square$$

Notation. Sei f ein maximaler Fluss für ein Netzwerk $(G = (V, E), b, c, u)$ und $H = (V' \subseteq V, E' \subseteq E)$ ein Teilgraph von G . Mit $H_f = (V', \{e \in E' \mid f(e) \neq 0\})$ bezeichnen wir den Graph aller durchflossenen Kanten von H .

Dank Lemma 9 wissen wir, dass nach maximaler Augmentierung eines negativen Kreises C alle seine durchflossenen Kanten C_f einen Wald bilden. Damit können wir nun zeigen, dass eine zulässige Baumlösung (T, f) mit einem maximalen Fluss f minimaler Kosten existiert.

Theorem 10. *Sei N eine Instanz des Transportproblems mit einem maximalen Fluss f . Es existiert ein maximaler Fluss \hat{f} , sodass $c(\hat{f}) \leq c(f)$ ist und eine zulässige Baumlösung (\hat{T}, \hat{f}) existiert.*

Beweis. Sei $N = (G, b, c, u)$ ein Instanz des Transportproblems mit maximalen Fluss f . Wir werden f zu einem maximalen Fluss \hat{f} umwandeln, sodass $G_{\hat{f}}$ ein Wald ist. Für \hat{f} finden wir dann leicht eine zulässige Baumlösung. Wenn wir für die endlich vielen maximalen Zwischenflüsse $f = f_0, f_1, f_2, \dots, f_n = \hat{f}$ sicherstellen, dass $c(f_{i+1}) \leq c(f_i)$ ist, gilt auch $c(\hat{f}) \leq c(f)$.

Betrachte einen maximalen Fluss f_i . Wenn G_{f_i} ein Wald ist, setzen wir $\hat{f} := f_i$ und sind fertig. Ansonsten gibt es einen ungerichteten Kreis $C \subseteq G_{f_i}$. Betrachte die beiden dazugehörigen, gerichteten, kantendisjunkten Kreise C_1 und C_2 in R_{N, f_i} . Nach Definition 8 gilt $c(C_1) = -c(C_2)$. Wir werden einen der Kreise so augmentieren, dass $|E(G_{f_{i+1}})| < |E(G_{f_i})|$ ist.

Fall 1: $c(C_1) = 0$

Mindestens einer der beiden Kreise enthält eine Residualkante, sei dies o. B. d. A. C_1 . Augmentiere nun C_1 analog zum Beweis von Lemma 9 größtmöglich zu einem maximalen Fluss f_{i+1} . Damit ist $C \not\subseteq G_{f_{i+1}}$ und $c(f_{i+1}) = c(f_i)$.

Fall 2: $c(C_1) \neq 0$

O. B. d. A. sei $c(C_1) < 0$. Nach Lemma 9 erhalten wir einen maximalen Fluss f_{i+1} , sodass $C \not\subseteq G_{f_{i+1}}$ und $c(f_{i+1}) = c(f_i) + \delta \cdot c(C_1) < c(f_i)$.

Damit ist $G_{f_{i+1}} \subsetneq G_{f_i}$ sowie $c(f_{i+1}) \leq c(f_i)$. Nach endlich vielen Iterationen erhalten wir somit \hat{f} . \square

Korollar 11. *Für jede lösbare Instanz des Transportproblems existiert eine zulässige Baumlösung (T, f) , sodass der maximale Fluss f minimale Kosten hat.* \square

Notation. Sei $N = (G, b, c, u)$ ein Netzwerk mit maximalen Fluss f , T ein aufspannender Baum von G , $R_{N, f} = (\bar{G}, \bar{f}, b, \bar{c}, \bar{u})$ der Residualgraph und $e \in E(\bar{G}) \setminus E(T)$ eine weitere Kante. Mit $C_{T, e}$ bezeichnen wir den eindeutigen Teilgraph von $T \cup \{e\}$, dessen zugrundeliegender Graph ein Kreis ist, und mit $\bar{C}_{T, e}$ den eindeutigen gerichteten Kreis in \bar{G} zu $C_{T, e}$, der e enthält.

Sei $N = (G, b, c, u)$ eine Instanz des Transportproblems. Wie beim Simplex-Algorithmus gibt es beim Netzwerk-Simplex-Algorithmus zwei Phasen. In der ersten wird eine initiale zulässige Baumlösung (T_0, f_0) auf N erzeugt; die beiden etablierten Vorgehensweisen werden in Abschnitt 2.2.3 beschrieben. Die Problematik einer Instanz ohne Lösung wird ebenfalls dort behandelt.

Die zweite Phase iteriert folgende Vorgehensweise: Betrachte Iteration i mit zulässiger Baumlösung (T_i, f_i) . Wähle einen negativen Kreis $\bar{C}_{T,e}$ mit $e \in E(G) \setminus E(T)$. Existiert kein solcher, beende den Algorithmus. Andernfalls augmentiere $\bar{C}_{T,e}$ größtmöglich zum maximalen Fluss f_{i+1} ; jetzt existiert nach Lemma 9 eine Kante $e \neq e' \in E(C_{T,e})$ mit $f_{i+1}(e') = 0$. Die neue zulässige Baumlösung ist $(T_{i+1} = T_i \setminus \{e'\} \cup \{e\}, f_{i+1})$. Die verschiedenen Möglichkeiten zur Wahl von e und e' werden in Abschnitt 2.2.2 und Abschnitt 2.2.1 näher beleuchtet.

Wir werden nun beweisen, dass der Algorithmus eine optimale Lösung des Transportproblems gefunden hat, wenn Phase 2 in Ermangelung einer geeigneten Kante e beendet wird. Lemma 12 ist etwas abstrakter gehalten, damit es noch mal in Abschnitt 2.3 Verwendung finden kann.

Notation. Sei $N = (G, b, c, u)$ ein Netzwerk mit einem maximalen Fluss f , T ein Wald von G und $v, w \in V(G)$ zwei beliebige Knoten. Mit $v \xrightarrow{T} w$ bezeichnen wir den eindeutigen gerichteten Weg von v nach w in $R_{N,f}$, der nur über Kanten $e \in E(T)$ oder deren Residualkanten $\varphi(e)$ verläuft. Sollten v und w in T nicht verbunden sein, entspricht der Weg dem leeren Graph. Insbesondere ist dieser Weg unabhängig von f und für die Kosten gilt $c(w \xrightarrow{T} v) = -c(v \xrightarrow{T} w)$.

Lemma 12. Sei $N = (G, b, c, u)$ ein Netzwerk mit einer zulässigen Baumlösung (T, f) und C ein ungerichteter Kreis in G , sodass für einen korrespondierenden gerichteten Kreis \bar{C} in $R_{N,f}$ gilt:

$$(i) \quad c(\bar{C}) < 0$$

(ii) $\forall e \in E(C) \setminus E(T)$: die korrespondierende Kante $\bar{e} \in E(\bar{C})$ darf vom Netzwerk-Simplex-Algorithmus mit zulässiger Baumlösung (T, f) als eingehende Kante gewählt werden

Dann existiert ein vom Algorithmus wählbares $\bar{e} \in \bar{C}$, sodass $c(\bar{C}_{T,\bar{e}}) < 0$.

Beweis. Sei N ein Netzwerk, (T, f) eine zulässige Baumlösung und C mit \bar{C} zwei Kreise wie gefordert. Sei $E_{\bar{C},-T} \subseteq E(\bar{C})$ die Menge der korrespondierenden Kanten in \bar{C} von den Nichtbaumkanten $E(C) \setminus E(T)$ und $E_{\bar{C},T} = E(\bar{C}) \setminus E_{\bar{C},-T}$ dessen Komplement. Betrachten wir zunächst den Fall, dass $E_{\bar{C},T} = \emptyset$:

Nach Eigenschaft (ii) gibt es für alle Kanten $e_1, \dots, e_c \in E_{\bar{C},-T} = E(\bar{C})$ einen Kreis \bar{C}_{T,e_i} . Wie Abb. 2.2 veranschaulicht, können wir einen Kreis \bar{C}_{T,e_i} erzeugen, indem wir \bar{C} für alle $j \neq i$ um die Kreise \bar{C}_{T,e_j} invertiert augmentieren. Damit gilt für die Kosten:

$$c(\bar{C}_{T,e_i}) = c(\bar{C}) - \sum_{j \neq i} c(\bar{C}_{T,e_j}) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^c c(\bar{C}_{T,e_i}) = c(\bar{C}) \quad (2.3)$$

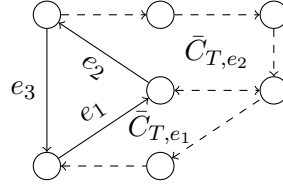


Abbildung 2.2: Die durchgezogenen Kanten bilden den negativen Kreis \bar{C} . Jede Kante $(v, w) \in E(\bar{C})$ wird über $w \xrightarrow{T} v$ zu einem Kreis ergänzt.

Nach Gleichung (2.3) muss mindestens ein Kreis \bar{C}_{T, e_i} negative Kosten besitzen, da $c(\bar{C}) < 0$ ist. Mittels dieses Kreises ist die Aussage gezeigt.

Kommen wir zum Fall $E_{\bar{C}, T} \neq \emptyset$. Da T ein Baum ist, ist auch $E_{\bar{C}, -T} \neq \emptyset$. Sollte $|E_{\bar{C}, -T}| = 1$ sein, ist \bar{C} der gesuchte Kreis. Ansonsten werden wir \bar{C} iterativ derart zu einem Kreis \hat{C} verändern, dass $E_{\hat{C}, -T} \subseteq E_{\bar{C}, -T}$ und $|E_{\hat{C}, -T}| = 1$. Besitzt \hat{C} negative Kosten, sind wir ebenfalls fertig, andernfalls werden wir zwischendurch bereits einen negativen Kreis $\bar{C}_{T, e}$ mit $e \in E_{\bar{C}, -T}$ gefunden haben.

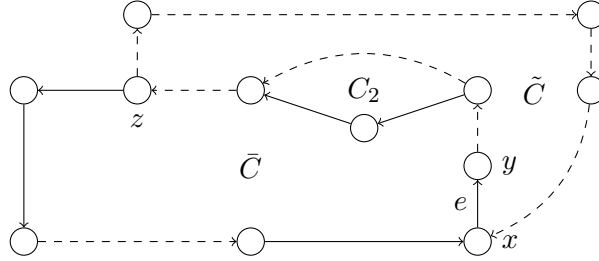


Abbildung 2.3: Gestrichelte Linien sind zum Baum T assoziiert. Der neue Kreis C_1 entsteht hier, indem wir von x beginnend entgegen \tilde{C} bis z gehen und dann dem bisherigen Kreisverlauf \bar{C} folgen.

Betrachte einen Iterationsschritt mit negativen Kreis \bar{C} , sodass $|E_{\bar{C}, -T}| > 1$ gilt. Sei $e = (x, y) \in E_{\bar{C}, -T}$ eine beliebige Nichtbaumkante. Wir betrachten nun den Kreis $\tilde{C} := \bar{C}_{T, e} = y \xrightarrow{T} x \cup \{(x, y)\}$ und den Kantenzug $W := x \xrightarrow{T} y \xrightarrow{\bar{C} - \{e\}} x$. Letzterer zerfällt bereinigt um in beide Richtungen begangene Kanten in kantendisjunkte Kreise C_1, \dots, C_c mit $c(W) = \sum_{i=1}^c c(C_i)$. O. B. d. A. sei die Kante e in C_1 enthalten.

Sollten die Kosten $c(\bar{C}) < 0$ negativ sein, ist \bar{C} nach Eigenschaft (ii) der gesuchte Kreis. Ist einer der Kreise C_2, \dots, C_c negativ, ersetzen wir \bar{C} durch diesen Kreis. Andernfalls gilt für den Kreis C_1 :

- (i) $|E_{C_1, -T}| < |E_{\bar{C}, -T}|$
- (ii) $c(C_1) = c(\bar{C}) - c(\tilde{C}) - \sum_{i=2}^c c(C_i) \leq c(\bar{C}) < 0$

Damit können wir $\bar{C} := C_1$ setzen. In beiden Fällen ist $|E_{\bar{C}, -T}|$ im Vergleich zum

Anfang der Iteration echt kleiner geworden. Wir iterieren weiter, bis $|E_{\bar{C}, \neg T}| = 1$ ist; dann ist $\hat{C} := \bar{C}$ der gesuchte Kreis. \square

Um unser gewünschtes Theorem 16 zu zeigen, genügt es, einen negativen Kreis gemäß Lemma 12 zu finden. Dafür werden wir den Begriff der Zirkulation einführen und den Zusammenhang zwischen maximalen Flüssen und Zirkulationen herstellen.

Definition 13. Sei $R_{N,f} = (\bar{G}, \bar{f}, b, \bar{c}, \bar{u})$ ein Residualgraph. Eine **Zirkulation** auf $R_{N,f}$ ist eine Abbildung $z: E(\bar{G}) \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 0}$, die folgende Eigenschaften erfüllt:

$$(i) \quad \forall e \in E(\bar{G}): z(e) \leq \bar{u}(e) \quad (2.4)$$

$$(ii) \quad \forall v \in V(\bar{G}): \sum_{(w,v) \in E(\bar{G})} z((w,v)) - \sum_{(v,w) \in E(\bar{G})} z((v,w)) + b(v) = b(v) \quad (2.5)$$

Die *Kosten* von z betragen $c(z) = \sum_{e \in E(\bar{G})} z(e) \cdot \bar{c}(e)$.

Anmerkung. Zirkulationen sind an sich für beliebige gerichtete Graphen mit einer Kapazitätsfunktion definiert, für unsere Zwecke genügt die obige Version. Die Notation für den Graph der durchflossenen Kanten überträgt sich.

Lemma 14. Für jede Zirkulation z gibt es eine endliche Menge von gerichteten Kreisen $\{C_1, \dots, C_n\}$, sodass für Faktoren $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{N}$ die Kosten $c(z) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot c(C_i)$ zerfallen.

Beweis. Sei $R_{N,f} = (\bar{G}, \bar{f}, b, \bar{c}, \bar{u})$ ein Residualgraph und z eine Zirkulation. Wir führen eine Induktion über die Gesamtmenge Fluss $\sigma_z := \sum_{e \in E(\bar{G})} z(e)$ der Zirkulation durch. Ist $\sigma_z = 0$, so erfüllt die leere Menge das Lemma.

Sei $\sigma_z \neq 0$ und damit gemäß Definition 13 $\sigma_z > 0$. Damit ist G_z nicht der leere Graph und nach Gleichung (2.5) existiert ein gerichteter Kreis $C \subseteq G_z$. Wir definieren eine Abbildung z' wie folgt:

$$z'(e) = \begin{cases} z(e) - 1 & \text{wenn } e \in E(C) \\ z(e) & \text{sonst} \end{cases}$$

Offensichtlich ist z' eine Zirkulation und $\sigma_{z'} < \sigma_z$. Durch die Induktionsbehauptung bekommen wir für z' eine Menge $\mathcal{C}' := \{C'_1, \dots, C'_n\}$ mit Faktoren $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n$, sodass $c(z') = \sum_{i=1}^n \lambda'_i \cdot c(C'_i)$.

Wir wandeln jetzt $\mathcal{C} := \mathcal{C}'$ und die dazugehörigen Faktoren $\lambda_i := \lambda'_i$ so ab, dass die Eigenschaft für z erfüllt ist. Sollte $C = C_j \in \mathcal{C}$ sein, erhöhen wir den Wert λ_j um 1, andernfalls fügen wir C zu \mathcal{C} hinzu und ergänzen den Faktor $\lambda_{n+1} := 1$. In beiden Fällen gilt

$$c(z) = c(C) + c(z') = c(C) + \sum_{i=1}^n \lambda'_i \cdot c(C'_i) = \sum_{i=1}^{|\mathcal{C}|} \lambda_i \cdot c(C_i)$$

nach Konstruktion. Damit ist die Aussage für alle Zirkulationen gezeigt. \square

2 Netzwerk-Simplex-Algorithmus

Notation. Seien \hat{f} und f zwei maximale Flüsse auf einem Netzwerk (G, b, c, u) . Mit $\hat{f} - f$ sei die folgendermaßen auf dem Residualgraphen $R_{N,f}$ definierte Abbildung $z: E(\bar{G}) \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 0}$ gemeint:

$$z(e) = \begin{cases} \max\{\hat{f}(e) - f(e), 0\} & \text{wenn } e \in E(G) \\ \max\{f(\varphi(e)) - \hat{f}(\varphi(e)), 0\} & \text{wenn } e \in \varphi(E(G)) \end{cases}$$

Lemma 15. Seien \hat{f} und f zwei maximale Flüsse auf einem Netzwerk (G, b, c, u) . Dann ist $z := \hat{f} - f$ eine Zirkulation auf $R_{N,f}$ und für die Kosten gilt $c(z) = c(\hat{f}) - c(f)$.

Beweis. Seien $E := E(G)$ alle Kanten des Graphen und $\bar{E} := \varphi(E)$ ihre Residualkanten in $R_{N,f}$. Zunächst betrachten wir die Kosten von z :

$$\begin{aligned} c(z) &= \sum_{e \in E \cup \bar{E}} z(e) \cdot \bar{c}(e) \\ &= \sum_{e \in E} \max\{\hat{f}(e) - f(e), 0\} \cdot c(e) + \sum_{\bar{e} \in \bar{E}} \max\{f(\varphi(\bar{e})) - \hat{f}(\varphi(\bar{e})), 0\} \cdot c_f(\bar{e}) \\ &= \sum_{e \in E} \max\{\hat{f}(e) - f(e), 0\} \cdot c(e) + \sum_{\bar{e} \in \bar{E}} -\min\{\hat{f}(\varphi(\bar{e})) - f(\varphi(\bar{e})), 0\} \cdot (-c(\varphi(\bar{e}))) \\ &= \sum_{e \in E} \max\{\hat{f}(e) - f(e), 0\} \cdot c(e) + \sum_{e \in E} \min\{\hat{f}(e) - f(e), 0\} \cdot c(e) \\ &= \sum_{e \in E} (\hat{f}(e) - f(e)) \cdot c(e) = c(\hat{f}) - c(f) \end{aligned}$$

Diese Teilaussage gilt also. Nun überprüfen wir, ob z alle Eigenschaften wie in Definition 13 gefordert erfüllt. Für alle Kanten $e \in E$ ist

$$z(e) = \max\{\hat{f}(e) - f(e), 0\} \leq \hat{f}(e) \leq u(e) = \bar{u}(e),$$

für Residualkanten $\bar{e} \in \bar{E}$ gilt

$$z(\bar{e}) = \max\{f(\varphi(\bar{e})) - \hat{f}(\varphi(\bar{e})), 0\} \leq f(\varphi(\bar{e})) \leq u_f(\bar{e}) \leq \bar{u}(e).$$

Gleichung (2.4) ist also gegeben. Damit bleibt zu zeigen, dass sich der Fluss von z für alle Knoten $v \in V(\bar{G})$ gemäß Gleichung (2.5) ausgleicht:

$$\begin{aligned} &\sum_{(w,v) \in E \cup \bar{E}} z((w,v)) - \sum_{(v,w) \in E \cup \bar{E}} z((v,w)) + b(v) \\ &= \sum_{(w,v) \in E} \left(\hat{f}((w,v)) - f((w,v)) \right) - \sum_{(v,w) \in E} \left(\hat{f}((v,w)) - f((v,w)) \right) + b(v) \\ &= b(v) - b(v) + b(v) = b(v) \end{aligned}$$

Die erste Gleichheit gilt gemäß Konstruktion von z , da ein theoretischer negativer Fluss auf einer Kante $e \in E(G)$ als positiver auf der Residualkante $\varphi(e)$ umgesetzt wird. Die zweite Gleichheit gilt gemäß Gleichung (2.1) aus Definition 2. Damit ist Gleichung (2.5) erfüllt und z eine Zirkulation. \square

Zur Veranschaulichung eines Beweises mittels Zirkulation zeigen wir erneut Lemma 7, bevor wir zu Theorem 16 übergehen.

Lemma 7. *Jede zulässige Baumlösung (T, f) ist eindeutig durch den aufspannenden Baum T definiert.*

Beweis. Seien (T, f) und (T, f') zwei zulässige Baumlösungen über demselben aufspannenden Baum T des Netzwerkes $N = (G, b, c, u)$ und $z := f' - f$ eine Zirkulation auf $R_{N,f}$. Da $G_f \cup G_{f'} \subseteq T$ ein Wald ist, gilt dies auch für \bar{G}_z . Damit gilt $z(\bar{e}) = 0$ für alle Kanten $\bar{e} \in E(\bar{G})$, womit schon $f = f'$ war. \square

Theorem 16. *Sei N eine Instanz des Transportproblems mit einer zulässigen Baumlösung (T, f) . Existiert kein negativer Kreis $\bar{C}_{T,e}$, so ist f eine optimale Lösung.*

Beweis. Wir werden zeigen, dass ein negativer Kreis $\bar{C}_{T,e}$ existiert, wenn die betrachtete zulässige Baumlösung (T, f) nicht optimal ist. Dazu finden wir einen gerichteten negativen Kreis, für den wir Lemma 12 anwenden können.

Sei $N = (G, b, c, u)$ ein Netzwerk mit einer optimalen zulässigen Baumlösung (\hat{T}, \hat{f}) und einer zulässigen Baumlösung (T, f) , sodass $c(f) > c(\hat{f})$. Nach Lemma 14 für die Zirkulation $z := \hat{f} - f$ sind ihre Kosten $c(z) = c(\hat{f}) - c(f) < 0$ negativ und zerfallen für eine Menge $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ mit Faktoren $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. O. B. d. A. seien alle $\lambda_i \neq 0$.

Da $\sum_{C_i \in \mathcal{C}} \lambda_i \cdot c(C_i) = c(z) < 0$ ist, gibt es mindestens einen negativen Kreis $C_j \in \mathcal{C}$. Sei $e \in E(C_j)$ eine Kante dieses Kreises. Ist e eine Residualkante, so gilt $\hat{f}(\varphi(e)) - f(\varphi(e)) < 0$, woraus $f(e) > 0$ und damit $\varphi(e) \in E(T)$ folgt. Ansonsten ist $e \in E(G)$ und vom Algorithmus wählbar. Wir können also Lemma 12 anwenden und sind fertig. \square

Korollar 17. *Sei N eine Instanz des Transportproblems mit einer zulässigen Initialbaumlösung (T_0, f_0) . Determiniert der Netzwerk-Simplex-Algorithmus, so ist er korrekt.* \square

Bislang haben wir nicht gezeigt, dass der Algorithmus immer terminiert. Dies wäre offensichtlich, wenn bei jeder Iteration von (T, f) zu (T', f') die Kosten sinken würden, also $c(f') < c(f)$ wäre. Es gibt jedoch sogenannte *degenerierte Iterationen*, in denen ein negativer Kreis $\bar{C}_{T,e}$ um $\delta = 0$ augmentiert wird. Entfernt der Algorithmus danach eine Kante $e \neq e' \in E(C_{T,e})$, verändert sich nur der Baum. Der nächste Abschnitt beschäftigt sich damit, wie sichergestellt werden kann, dass der Algorithmus zumindest jeden Baum höchstens einmal betrachtet.

2.2.1 Degenerierte Iterationen

Definition 18. Wird in einer Iteration der Phase 2 des Netzwerk-Simplex-Algorithmus ein negativer Kreis $\bar{C}_{T,e}$ um $\delta = 0$ augmentiert, so bezeichnen wir dies als **degenerierte Iteration**.

2 Netzwerk-Simplex-Algorithmus

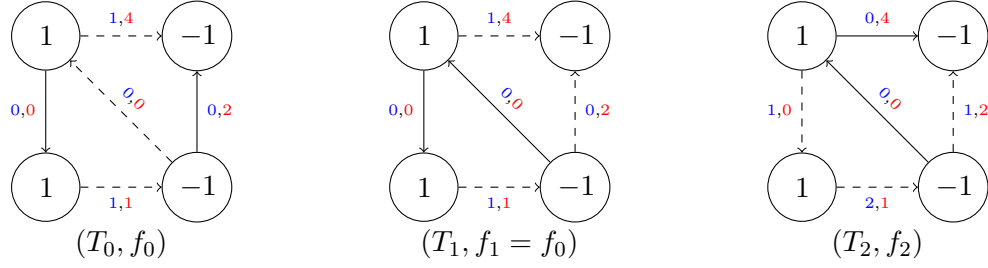


Abbildung 2.4: Die Kanten des Baumes T_i sind gestrichelt, der gewählte negative Kreis ist jeweils eindeutig. Die Startlösung kann erst nach einer degenerierten Iteration verbessert werden.

Degenerierte Iterationen entstehen, wenn bei einer zulässigen Baumlösung (T, f) nicht alle Kanten von T Fluss aufweisen, also $T \neq T_f$ ist. (T, f) wird dann auch als *degeneriert* bezeichnet. In einer ungünstigen Konstellation von der deterministischen Wahl der hinzugefügten Kante e und entfernten Kante e' kann es zum *Cycling* kommen, also zu einem Kreisschluss von Bäumen, die wiederholt iteriert werden. Dies tritt sehr selten auf, für ein künstlich konstruiertes Beispiel siehe [1, S. 303].

[6, Cunningham, 1976] führte eine Methode ein, mit der Cycling verhindert werden kann, ohne dass die Wahl der hinzugefügten Kante e eingeschränkt wird. Dafür benötigen wir folgende Definition:

Definition 19. Sei $N = (G, b, c, u)$ eine Instanz des Transportproblems. Ein aufspannender Baum T von G , ein maximaler Fluss f auf N und ein Wurzelknoten $r \in V(T) = V(G)$ bilden eine **stark zulässige Baumlösung** $(T, f)_r$, wenn (T, f) eine zulässige Baumlösung ist und zusätzlich jede Kante $e = (v, w) \in E(T)$ mit $f(e) = 0$ von der Wurzel weggerichtet, also e im Weg $r \xrightarrow{T} w$ enthalten ist.

TODO: An dieser Stelle folgt ein Absatz, der erklärt, wie genau die ausgehende Kante abhängig vom Kreis und dem Wurzelknoten gewählt werden muss. Es folgt das Lemma, dass dann der Algorithmus terminiert, für den Beweis wird auf die Literatur verwiesen. Dieser Teil fehlt momentan noch, da ich das noch mit meinem programmierten Algorithmus abgleichen muss. Außerdem stimmten die Informationen im nächsten Absatz nicht bzw. sind unvollständig.

Die Laufzeit des Netzwerk-Simplex-Algorithmus ist bislang ungeklärt. Für bestimmte Varianten wurden exponentielle Instanzen gefunden, die auf *Stalling* basieren, also einer exponentiellen Anzahl degenerierter Iterationen. Mit diesen werden wir uns in Kapitel 4 näher befassen. Meine eigene, experimentelle Suche nach schlechten Instanzen findet sich in Kapitel 5. Zunächst vervollständigen wir den Algorithmus um die Wahl des negativen Kreises $\tilde{C}_{T,e}$ und die Erzeugung einer initialen Baumlösung.

2.2.2 Pivotalgorithmen

Sei $N = (G, b, c, u)$ ein Netzwerk mit zulässiger Baumlösung (T, f) . Algorithmen, die aus der Menge $\bar{C}_T = \{\bar{C}_{T,e} \mid c(\bar{C}_{T,e}) < 0\}$ aller sinnvollen Iterationen eine auswählen, heißen *Pivotalgorithmen*. In der Praxis wird der Pivotalgorithmus nur auf einer Teilmenge von \bar{C}_T ausgeführt, um Rechenzeit zu sparen. In dieser Bachelorarbeit werden nur drei naheliegende, einfache Pivotalgorithmen betrachtet.

Maximum Value

Der erste Ansatz ist es, den negativsten Kreis zu wählen, sprich

$$\tilde{C} := \arg \min_{\bar{C}_{T,e} \in \bar{C}_T} \{c(\bar{C}_{T,e})\}$$

Diesen Weg werden wir mit *MaxVal* bezeichnen.

Maximum Revenue

Die Kostenverringerung nach der Augmentierung beträgt $\delta \cdot c(\bar{C}_{T,e})$, ist also von δ abhängig. Der Pivotalgorithmus *MaxRev* maximiert diesen Wert:

$$\tilde{C} := \arg \min_{\bar{C}_{T,e} \in \bar{C}_T} \{\delta_e \cdot c(\bar{C}_{T,e})\}, \quad \text{wobei } \delta_e := \min_{e' \in E(\bar{C}_{T,e})} \{\bar{u}(e') - \bar{f}(e')\}$$

Nach Lemma 9 ist jedes δ_e endlich. Sollten nur degenerierte Iterationen zur Auswahl stehen, ist $c(\tilde{C}) = 0$. In dem Fall wendet meine konkrete Implementierung *MaxVal* an; hier sind aber auch andere Strategien denkbar.

Random

Ein überraschend effektiver Ansatz ist es, $\tilde{C} \in \bar{C}_T$ zufällig zu wählen. Gerade für diesen mit *Random* bezeichneten Weg ist es schwierig, untere oder obere Schranken zu beweisen.

2.2.3 Initialisierung

Der letzte verbleibende Schritt, um einen vollständigen Algorithmus zur Lösung des Transportproblems zu erlangen, ist das Finden einer initialen, stark zulässigen Baumlösung $(T_0, f_0)_r$.

Hierfür wenden wir einen Trick an: Sei $N = (G, b, c, u)$ eine Instanz des Transportproblems. Wir fügen dem Netzwerk einen zusätzlichen Transitknoten a mit $b(a) = 0$ hinzu, der gemeinhin als künstlicher (*artificial*) Knoten bezeichnet wird. Für alle Quellen $v \in V(G): b(v) > 0$ ergänzen wir eine künstliche Kante (v, a) , für alle Senken und Transitknoten $a \neq w \in V(G): b(w) \leq 0$ eine künstliche Kante (a, w) . Sei G' der entstehende Graph.

Sämtliche künstlichen Kanten e_v haben eine unbegrenzte Kapazität, die Kosten sind ebenfalls unendlich und können mit $c(e_v) = |V(G)| \cdot \max_{e \in E(G)} \{c(e)\} + 1$ abgeschätzt

2 Netzwerk-Simplex-Algorithmus

werden, da jeder Weg in G geringere Kosten aufweist. Leicht finden wir nun die stark zulässige Baumlösung $(T_0, f_0)_a$, wobei $T_0 = (V(G), \{e_v \mid v \in V(G)\})$ ist. Nach Lemma 7 ist f_0 eindeutig. Diese Art der Initialisierung werden wir im Folgenden mit *HC* für *High-Cost-Initialisierung* abkürzen.

Lemma 20. Sei $N = (G, b, c, u)$ eine Instanz des Transportproblems und (T', f) die Lösung des Netzwerk-Simplex-Algorithmus mit *HC* auf dem erweiterten Graphen G' . Die Instanz N ist genau dann lösbar, wenn G'_f keine künstlichen Kanten enthält.

Beweis.

„ \Rightarrow “ Sei \hat{f} ein maximaler Fluss von N und (T', f) die Lösung des Algorithmus. \hat{f} ist auch ein maximaler Fluss des Netzwerkes (G', b, c, u) ; damit gilt nach Theorem 10 und Korollar 17 $c(f) \leq c(\hat{f}) < \infty$. Da die Kosten einer künstlichen Kante unendlich sind, kann keine davon in G'_f enthalten sein.

„ \Leftarrow “ Sei (T', f) die Lösung des Algorithmus. Wenn G'_f keine künstlichen Kanten enthält, ist $f|_{E(G)}$ ein maximaler Fluss von N , womit diese Instanz wiederum lösbar ist. \square

Sollen Instanzen mit vielen Knoten oder hohen Kosten der teuersten Kante gelöst werden, so kann es passieren, dass die Kosten der künstlichen Kanten den darstellbaren Bereich der gängigen Datentypen sprengen. Unter anderem aus diesem Grund gibt es die *Low-Cost-Initialisierung*, bei uns kurz *LC*.

Bei dieser wird die gegebene Instanz $N = (G, b, c, u)$ des Transportproblems zunächst zu $N' = (G, b, c', u)$ abgewandelt. Dabei ist c' die Nullfunktion, also $c(e) = 0$ für jede Kante $e \in E(G)$. Für N' verwenden wir den Netzwerk-Simplex-Algorithmus mit *HC* und erhalten eine stark zulässige Baumlösung $(T', f')_a$, wobei die Kosten einer künstlichen Kante $c(e_v) = |V(G)| \cdot 0 + 1 = 1$ betragen.

Offensichtlicherweise ist N genau dann lösbar, wenn N' lösbar ist. Wenn $c(f') > 0$ ist, so ist N nicht lösbar und wir sind fertig. Andernfalls iterieren wir $(T', f')_a$ degeneriert, bis a ein Blatt von T' ist. Dies wird in Abschnitt 3.5 detailliert erläutert.

Damit bekommen wir die zulässige Baumlösung $(T = T' - a, f = f'|_{E(G)})$ für N' und damit für N . Als neuen Wurzelknoten können wir den eindeutigen Nachbar k_a von a in T' wählen; damit bekommen wir die stark zulässige Baumlösung $(T, f)_{k_a}$.

2.3 Erweiterung auf beschränkte Kapazitäten

Wir werden nun den Netzwerk-Simplex-Algorithmus auf das Min-Cost-Flow-Problem erweitern. Die Funktionsweise bleibt dieselbe, nur die betrachteten zulässigen Baumlösungen verändern sich leicht:

Definition 21. Sei $N = (G, b, c, u)$ ein Netzwerk. Ein aufspannender Baum T von G und ein maximaler Fluss f auf N bilden eine **zulässige Baumlösung** (T, f) , wenn für alle Kanten $e \in E(G) \setminus E(T)$ außerhalb des Baums $f(e) = 0$ oder $f(e) = u(e)$ gilt.

Anmerkung. Kanten, die maximal durchflossen sind, bezeichnen wir als *saturiert*.

Definition 22. Sei $N = (G, b, c, u)$ ein Netzwerk. Ein aufspannender Baum T von G , ein maximaler Fluss f auf N und ein Wurzelknoten $r \in V(T) = V(G)$ bilden eine **stark zulässige Baumlösung** $(T, f)_r$, wenn (T, f) eine zulässige Baumlösung ist und folgendes gilt:

$$\forall e = (v, w) \in E(T): (f(e) = 0 \Rightarrow e \in E(r \xrightarrow{T} w)) \quad \wedge \\ (f(e) = u(e) \Rightarrow e \in E(w \xrightarrow{T} r))$$

Anmerkung. An dieser Stelle sollten sämtliche Kanten $e \in E(G)$ mit $u(e) = 0$ aus dem Graphen entfernt werden; sie sind für das Problem ohnehin irrelevant.



Abbildung 2.5: Derselbe, durch gestrichelte Linien dargestellte Baum mit unterschiedlichen maximalen Flüssen. Der Wurzelknoten ist die Senke.

Im Falle beschränkter Kapazitäten erlauben wir für eine zulässige Baumlösung (T, f) auch Fluss außerhalb von T , insofern er die Kapazität der Kante voll ausnutzt. Abb. 2.5 veranschaulicht, warum dies notwendig ist. Solche saturierten Kanten $e \in E(G) \setminus E(T)$ sind als eingehende Kante keine sinnvolle Wahl mehr, stattdessen kann der Algorithmus über den Kreis $\bar{C}_{T, \bar{e}}$ der Residualkante \bar{e} augmentieren, sofern er negativ ist. Für stark zulässige Baumlösungen müssen nun zusätzlich alle saturierten Kanten des Baumes zum Wurzelknoten hingerichtet sein.

Die in Lemma 7 bewiesene Eindeutigkeit von f gilt nun nicht mehr, wie Abb. 2.5 veranschaulicht. Wir haben diese Eigenschaft bei der Initialisierung genutzt. Der Leser kann sich an dieser Stelle davon überzeugen, dass diese trotzdem komplett identisch durchführbar ist.

Wir werden jetzt Lemma 9, Theoreme 10 und 16 und Korollar 11 auf das Min-Cost-Flow-Problem erweitern.

Lemma 23. Sei N ein Netzwerk, $R_{N, f}$ sein Residualgraph und C ein gerichteter Kreis in $R_{N, f}$ mit negativen Kosten. Der größte Wert δ , um den C augmentiert werden kann, ist endlich, und nach der Augmentierung um δ zum neuen maximalen Fluss f' existiert eine Residualkante $\bar{e} \in E(C)$, sodass die korrespondierende Kante einen Fluss von $f'(\varphi(e)) = 0$ besitzt, oder eine Kante $e \in E(C) \cap E(G)$ mit $f'(e) = u(e)$.

Beweis. Sei $N = (G, b, c, u)$ ein Netzwerk mit maximalen Fluss f und C ein negativer Kreis in $R_{N, f}$. Sei $\bar{e} := \arg \min_{e \in E(C)} \{\bar{u}(e) - \bar{f}(e)\}$ und $\delta := \bar{u}(\bar{e}) - \bar{f}(\bar{e})$. Analog zum Beweis von Lemma 9 ist δ endlich.

Ist \bar{e} eine Residualkante, so besitzt $e := \varphi(e)$ einen Fluss von

$$f'(e) = f(e) - \delta = f(e) - u_f(\bar{e}) = f(e) - f(e) = 0.$$

2 Netzwerk-Simplex-Algorithmus

Andernfalls ist $\tilde{e} \in E(C) \cap E(G)$ mit einem Fluss von

$$f'(\tilde{e}) = f(\tilde{e}) + \delta = f(\tilde{e}) + \bar{u}(\tilde{e}) - \bar{f}(\tilde{e}) = \bar{u}(\tilde{e}) = u(\tilde{e}). \quad \square$$

Notation. Sei f ein maximaler Fluss für ein Netzwerk $(G = (V, E), b, c, u)$ und $H = (V' \subseteq V, E' \subseteq E)$ ein Teilgraph. Mit $H^f = H_f \setminus \{e \in E' \mid f(e) = u(e)\}$ bezeichnen wir den Graph aller durchflossenen, aber nicht saturierten Kanten.

Theorem 24. *Sei N ein Netzwerk mit einem maximalen Fluss f . Es existiert ein maximaler Fluss \hat{f} , sodass $c(\hat{f}) \leq c(f)$ ist und eine zulässige Baumlösung (\hat{T}, \hat{f}) existiert.*

Beweis. Sei $N = (G, b, c, u)$ ein Netzwerk mit maximalen Fluss f . Diesmal werden wir f zu einem maximalen Fluss \hat{f} umwandeln, sodass $G^{\hat{f}}$ ein Wald ist. Der Beweis verläuft nun komplett analog zum Beweis von Theorem 10, statt Lemma 9 benutzen wir Lemma 23. \square

Korollar 25. *Für jede lösbare Instanz des Min-Cost-Flow-Problems existiert eine zulässige Baumlösung (T, f) , sodass der maximale Fluss f minimale Kosten hat.* \square

Theorem 26. *Sei N ein Netzwerk mit einer zulässigen Baumlösung (T, f) . Existiert kein negativer Kreis $\bar{C}_{T,e}$, so ist f eine optimale Lösung.*

Beweis. Wir werden wiederum zeigen, dass ein negativer Kreis $\bar{C}_{T,e}$ existiert, wenn die betrachtete Baumlösung nicht optimal ist.

Sei $N = (G, b, c, u)$ ein Netzwerk mit einer optimalen zulässigen Baumlösung (\hat{T}, \hat{f}) und einer zulässigen Baumlösung (T, f) , sodass $c(f) > c(\hat{f})$ ist. Wieder betrachten wir die Zirkulation $z := \hat{f} - f$, ihre Zerlegung in eine Menge \mathcal{C} gerichteter Kreise mit Faktoren $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und den negativen Kreis $C_j \in \mathcal{C}$.

Sei $e \in E(C_j)$ eine Kante dieses Kreises. Ist e eine Residualkante, so gilt wie gehabt $\hat{f}(\varphi(e)) - f(\varphi(e)) < 0$, woraus $f(e) > 0$ folgt. Damit ist $\varphi(e) \in E(T)$ oder $\varphi(e)$ saturiert. Andernfalls ist $e \in E(G)$ und $f(e) < \hat{f}(e)$, womit e nicht saturiert sein kann. Die Bedingungen für Lemma 12 sind erneut gegeben. \square

Korollar 27. *Der Netzwerk-Simplex-Algorithmus mit einer Initialisierung nach Abschnitt 2.2.3, einem beliebigen Pivotalgorithmus und gemäß Abschnitt 2.2.1 auf stark zulässige Baumlösungen beschränkt löst das Min-Cost-Flow-Problem korrekt.* \square

3 Implementierung

Der Programmierteil dieser Bachelorarbeit implementiert den Netzwerk-Simplex-Algorithmus wie in Kapitel 2 beschrieben, wobei einzelne Strukturen verändert wurden. Der Code ist in C++ geschrieben und hält sich an den C++11-Standard. Es folgt eine vollständige Übersicht der Codebestandteile, für das Gesamtkonstrukt siehe TODO Anhang.

3.1 Netzwerke

Zur Umsetzung der Graphenstruktur habe ich eine Klasse `class Network` geschrieben, die auf `struct Node` sowie `class Edge` basiert und den Fluss händelt. Damit kann `Network` beispielsweise sicherstellen, dass nie Kanten entfernt werden, die aktuell durchflossen sind.

3.1.1 Knoten

`struct Node` hat außer einem Konstruktor keinerlei Funktionen, weswegen es nicht in einer eigenen Klasse ausgelagert, sondern in `network.h` enthalten ist.

```
struct Node {
    size_t id;
    intmax_t b_value;
    //defined by (the other) nodeID
    //always incoming and outgoing due to residual edges
    std::set<size_t> neighbours;

    //constructor
    Node (size_t _id, intmax_t _b_value)
        : id(_id), b_value(_b_value) {};
};
```

Ein Knoten wird eindeutig durch seine `size_t` `id` identifiziert, weitere Eigenschaften sind sein `b`-Wert aus \mathbb{Z} und seine Nachbarknoten. Letztere Menge differenziert nicht zwischen Nachbarn aus eingehenden und ausgehenden Knoten, da diese Unterscheidung im Residualgraphen entfällt.

3.1.2 Kanten

Die Klasse `class Edge` enthält alle Informationen über Kanten: Kosten, Kapazität, Fluss und die jeweiligen Endknoten. Residualkanten werden durch das Flag `isResidual`

3 Implementierung

gekennzeichnet. An dieser Stelle fällt auf, dass die Kapazität nicht nachträglich verändert werden kann, obwohl dies für Residualkanten notwendig wäre. Ich habe mich in meiner Implementierung dafür entschieden, auf Residualkanten Fluss zu erlauben und damit eine veränderliche Kapazität zu simulieren. Dies wird in Abschnitt 3.1.3 näher erläutert.

```
class Edge {
public:
    //edges are initialized with a flow of zero
    Edge (size_t node0, size_t node1, intmax_t cost,
          intmax_t capacity, bool isResidual = false);

    //returns true when flow change was successful
    bool changeFlow (intmax_t value);
    bool changeFlowPossible (intmax_t value);
    //toggles cost between itself and 0
    void toggleCost ();

private:
    size_t node0, node1;
    intmax_t cost, capacity, flow, toggledCost;
    bool isResidual, isToggled = false;
};
```

Die Funktion `changeFlow` stellt über die Hilfsfunktion `changeFlowPossible` sicher, dass bei einer Flussveränderung keine Kapazitätsschranken verletzt werden. Mittels `toggleCost` können die Kosten einer Kante zwischen Null und ihrem eigentlichen Wert variiert werden. Somit lässt sich leicht die in Abschnitt 2.2.3 beschriebene Low-Cost-Initialisierung umsetzen, siehe dazu Abschnitt 3.5.

3.1.3 Graph

Werfen wir einen Blick darauf, wie die Knoten und Kanten in einem Netzwerk gespeichert werden. Ich habe mich dafür entschieden, die Objekte für eine logarithmische Laufzeit von `find`, `insert` sowie `delete` in einer `std::map` abzulegen. Die Knoten werden durch ihre `size_t` `id` identifiziert, Kanten durch Anfangsknoten, Endknoten und die `bool` `isResidual`. Ein `std::set` benötigt einen Vergleichsoperator, daher habe ich für die Kanten `custComp` definiert, das nach `size_t` `node0`, `size_t` `node1` und zuletzt `bool` `isResidual` vergleicht.

```
class Network {
private:
    intmax_t flow = 0, cost = 0;
    std::vector<size_t> sources, sinks, transit;

    std::map<std::tuple<size_t, size_t, bool>,
             Edge, custComp> edges;
```

```
std::map<size_t, Node, std::less<size_t>> nodes;
};
```

Ein Netzwerk kennt außerdem seinen `intmax_t` `flow`, also die Anzahl an Fluss, die von den Quellen zu den Senken transportiert wird, und die dafür anfallenden Kosten `intmax_t` `cost`. Für den Algorithmus ist ersteres nicht relevant, da wir nur auf maximalen Flüssen arbeiten.

Der Graph G mit einem Fluss f und der dazugehörige Residualgraph $G_{N,f}$ werden nicht als zwei verschiedene Objekte der Netzwerk-Klasse geführt, sondern in einer Instanz gemeinsam gespeichert. Um dies zu bewerkstelligen, wird bei jeder Veränderung an einer Kante gleichzeitig die eindeutige Residualkante aktualisiert. Zur Veranschaulichung folgt der Quellcode von `Network::addEdge` ohne die Prüfung der Zulässigkeit.

```
bool Network::addEdge(Edge e) {
    std::tuple<size_t, size_t, bool> key
        = std::make_tuple(e.node0, e.node1, e.isResidual);

    //insert both the edge and the residual edge
    edges.insert(std::make_pair(key, e));
    e.invert();
    edges.insert(std::make_pair(invertKey(key), e));

    nodes.find(node0)->second.neighbours.insert(node1);
    nodes.find(node1)->second.neighbours.insert(node0);
    return true;
}
```

Dabei vertauscht `invertKey` die beiden Knoten und negiert `isResidual`. Die oben nicht erwähnte Funktion `Edge::invert` spiegelt die Veränderungen von `invertKey` und negiert die Kosten gemäß Definition 8. Die Kapazität wird beibehalten, stattdessen wird der Fluss auf `flow = capacity - flow`; gesetzt. Der größte Wert, um den die Residualkante \bar{e} augmentiert werden kann, ist also gleich $f(e)$. Sofern wir für f nur Nicht-Residualkanten betrachten, ist diese Implementierung äquivalent zur Definition. Dieser alternative Ansatz fordert noch ein wenig Aufmerksamkeit bei der Klassenfunktion `Network::changeFlow`,¹ danach können wir bei der Umsetzung des Algorithmus größtenteils ignorieren, ob eine Kante residual ist.

Das Netzwerk wird leer oder mit einer Anzahl `size_t` `noOfNodes` von Transitknoten initialisiert und durch Hinzufügen von Knoten und Kanten vervollständigt. Sofern keine Knoten gelöscht werden, ist die `size_t` `id` bei null beginnend lückenlos aufsteigend.

```
class Network {
public:
    Network(size_t noOfNodes);
```

¹Für alle Kanten e des Kreises wenden wir `e.changeFlow(f)` sowie `e.invert().changeFlow(-f)` an und aktualisieren die Kosten auf `this->cost += e.cost*f`;

3 Implementierung

```
bool addEdge(Edge e);
//returns nodeID
size_t addNode(intmax_t b_value = 0);

//fails and returns 0 if there's flow left
bool deleteEdge(size_t node0, size_t node1);
//fails if there's flow on an edge to this node left
bool deleteNode(size_t nodeID);

//takes a path from a source to a sink
//doesn't use residual edges
bool addFlow(std::vector<size_t>& path, intmax_t flow);
//takes a circle
bool changeFlow(Circle& c, intmax_t flow);
};
```

Die Funktionen `deleteEdge` und `deleteNode` schlagen fehl, wenn auf den zu löschen den Kanten noch Fluss ist. So kann unter anderem durch Löschen des künstlichen Knotens überprüft werden, ob die Instanz lösbar ist. Für Phase 1 des Algorithmus nutzen wir die Funktion `addFlow`, die einen Weg von einer Quelle zu einer Senke verlangt.

`changeFlow` wird in jeder Iteration der zweiten Phase des Netzwerk-Simplex-Algorithmus aufgerufen und augmentiert den übergebenen Kreis `Circle c` um einen beliebigen Wert, sofern dies möglich ist. Dieser Wert wird analog zur δ aus Kapitel 2 der größte zulässige sein. Die hier genutzte `class Circle` werden wir uns nun genauer anschauen.

3.2 Die Klasse *Circle*

Sei G ein gerichteter Graph mit n Knoten sowie m Kanten und T ein aufspannender Baum von G . In der Herleitung des Algorithmus haben wir genutzt, dass für eine Kante $e \in E(G) \setminus E(T)$ außerhalb des Baumes der Kreis $C_{T,e}$ eindeutig ist. Ein Kreis $C_{T,e}$ lässt sich in Laufzeit $\mathcal{O}(n)$ berechnen, womit wir pro Iteration bei einer Komplexität von $\mathcal{O}(n \cdot (m - n) \cdot \text{poly}(n, m))^2$ für Laufzeit $\text{poly}(n, m)$ des Pivotalgorithmus sind.

Im Normalfall verändern sich von einer Iteration auf die nächste nur ein Bruchteil der Kreise. Diese lassen sich jedoch schlecht herausfiltern, wenn nur die Veränderung der zulässigen Baumlösung betrachtet wird. Daher habe ich mich entschieden, nach [7] nicht den Baum abzuspeichern, sondern alle Kreise. Die Klasse `class Circle` speichert gerichtete Kreise als zwei Vektoren (`std::vector`), die Kanten wie gehabt über Anfangsknoten, Endknoten und die `bool isResidual` identifizieren. Außerdem speichern sie ihre jeweiligen Werte für δ und $c(\tilde{C}_{T,e})$; diese müssen jedoch vom Algorithmus gesetzt werden.

²Wie in Abschnitt 2.2.2 erwähnt, betrachten wir Pivotalgorithmen, die sämtliche Kreise in ihre Entscheidung einbeziehen.

Nicht explizit in der Klassendeklaration schlägt sich die Invariante nieder, dass im Verlauf des Algorithmus jeder Kreis durch die erste Kante als einzige Nichtbaumkante spezifiziert wird.

```
//first edge of edges is not part of the underlying tree
class Circle {
public:
    //circles don't know about their graphs
    intmax_t flow = 0, costPerFlow = 0;

private:
    std::vector<std::pair<size_t, size_t>> edges;
    //std::vector<char>, because std::vector<bool> is broken3
    std::vector<char> isResidual;
};
```

Bevor wir uns die Umsetzung anschauen, überlegen wir uns theoretisch, was die Klasse leisten muss. Dazu betrachten wir eine Iteration, in der $C_1 = \tilde{C}_{T,e_1}$ ausgewählt wurde. Sei $C_2 = \tilde{C}_{T,e_2}$ mit $e_1 \neq e_2$ ein weiterer Kreis. Abb. 3.1 stellt für die zugrundeliegenden ungerichteten Kreise \tilde{C}_1 und \tilde{C}_2 dar, wie sich C_1 und C_2 zueinander verhalten können.

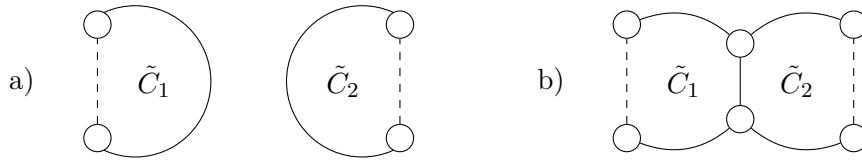


Abbildung 3.1: Beide Beispiele zeigen je zwei Kreise $\tilde{C}_i = C_{T,e_i}$, wobei e_i die gestrichelte Kante ist. Alle anderen Kanten gehören zum nicht vollständig dargestellten Baum T . Im zweiten Fall sind \tilde{C}_1 und \tilde{C}_2 nicht disjunkt.

Der Algorithmus wird nun e_i zum neuen Baum T' hinzufügen und eine ausgehende Kante $e_i \neq e' \in E(C_{T,e_1})$ wählen, die dafür entfernt wird. Zunächst halten wir fest, dass es vor der Iteration keinen weiteren Fall als die beiden aus Abb. 3.1 geben kann: Wären e_1 und e_2 im Schnitt der ungerichteten Kreise $E(C_{T,e_1}) \cap E(C_{T,e_2})$ enthalten, dann wäre T nicht kreisfrei.

Für den neuen ungerichteten Kreis gilt $C_{T',e'} = C_{T,e_1}$, zur Beibehaltung der Invariante muss `class Circle` die gespeicherten Kanten rotieren. Für die Konstellation, dass e_1 im Gegensatz zu e' nicht saturiert ist oder vice versa ändert sich zusätzlich die Richtung von $\tilde{C}_{T',e'}$ im Vergleich zu \tilde{C}_{T,e_1} . All dies leistet die Funktion `Circle::rotateBy`:

```
void Circle::rotateBy (size_t index, bool toReverse) {
    //rotate, such that the correct edge is on front
    std::rotate(edges.begin(),
```

³Für mehr Informationen siehe [8, Item 18: Avoid using `vector<bool>`].

3 Implementierung

```
        edges.begin()+index, edges.end());
std::rotate(isResidual.begin(),
            isResidual.begin()+index, isResidual.end());
//all but the first entry have to be reversed in position
if (toReverse) {
    //change direction of all edges
    for (size_t i = 0; i < this->length; i++) {
        std::swap(edges[i].first, edges[i].second);
        isResidual[i] = not isResidual[i];
    }
    std::reverse(edges.begin() + 1, edges.end());
    std::reverse(isResidual.begin() + 1, isResidual.end());
}
}
```

Der einfache Fall a) aus Abb. 3.1 ist damit abgehandelt, da C_2 unverändert bleibt. Die gilt ebenfalls für Fall b), insofern $e' \notin E(C_{T,e_1}) \cap E(C_{T,e_2})$. Andernfalls TODO XOR der ungerichteten Kreis, Orientierung ergibt sich (Bild tikzen!)

```

void Circle::update(Circle& c) {
    bool iR = c.getIsResidual()[0];
    std::pair<size_t, size_t> edgeSame = c.getEdges()[0];
    std::pair<size_t, size_t> edgeReverse = std::make_pair(edgeSame.second, edgeSame.first);

    bool reversed = false;
    size_t index = 0;
    std::vector<std::pair<size_t, size_t>>::iterator it = edges.begin();
    //find edgeSame if existent
    for (index = 0; it != edges.end(); index++) {
        if (iR == isResidual[index] and edges[index] == edgeSame) {break;}
        it++;
    }
    //if edgeSame is in this->edges, reverse c, do second if-case
    //and reverse back
    if (it != edges.end()) {
        c.rotateBy(0, true);
        reversed = true;
    }
    //else try to find edgeReverse
    else {
        it = edges.begin();
        for (index = 0; it != edges.end(); index++) {
            if (iR != isResidual[index] and edges[index] == edgeReverse) {break;}
            it++;
        }
    }

    //redirect this circle over c
    if (reversed or it != edges.end()) {
        std::vector<bool> toCopy (c.length, true);
        size_t indexLeft = index - 1, indexRight = index + 1;

        //take out all edges existent in both circles
        toCopy[0] = false; //first edge not even in tree
        //left from first edge
        for (; indexLeft > 0; indexLeft--) {
            //circles are in opposite directions, so reverse the edge for existence check
            std::pair<size_t, size_t> checkEdge =
            std::make_pair(c.getEdges()[index - indexLeft].second, c.getEdges()[index - indexLeft].first);
            iR = c.getIsResidual()[index - indexLeft];
            if (iR != isResidual[indexLeft] and edges[indexLeft] == checkEdge) {toCopy[indexLeft] = false;}
            else {break;}
        }
        //right from first edge
        for (; indexRight < this->length; indexRight++) {
            //circles are in opposite directions, so reverse the edge for existence check
            std::pair<size_t, size_t> checkEdge =
            std::make_pair(c.getEdges()[c.length + index - indexRight].second, c.getEdges()[c.length + index - indexRight].first);
            iR = c.getIsResidual()[c.length + index - indexRight];
            if (iR != isResidual[indexRight] and edges[indexRight] == checkEdge) {toCopy[indexRight] = false;}
            else {break;}
        }
    }
}

```

3 Implementierung

```
iR = c.getIsResidual()[c.length + index - indexRight];
if (iR != isResidual[indexRight] and edges[indexRight] == checkEdge) {toCopy[i] = edges[indexRight];
else {break;}}
}

//construct new circle
std::vector<std::pair<size_t, size_t>> edgesNew;
std::vector<char> isResidualNew;

//first part of old circle
for (size_t i = 0; i <= indexLeft; i++) {
    edgesNew.push_back(this->edges[i]);
    isResidualNew.push_back(this->isResidual[i]);
}
//bypass
for (size_t i = 0; i < c.length; i++) {
    if (toCopy[i]) {
        edgesNew.push_back(c.getEdges()[i]);
        isResidualNew.push_back(c.getIsResidual()[i]);
    }
}
//last part of old circle
for (size_t i = indexRight; i < this->length; i++) {
    edgesNew.push_back(this->edges[i]);
    isResidualNew.push_back(this->isResidual[i]);
}

this->edges = edgesNew;
this->isResidual = isResidualNew;
}

//reverse back
if(reversed) {c.rotateBy(0, true);}
length = edges.size();
}
```

3.3 Stark zulässige Baumlösungen

Öhm, ja ...

3.4 Pivotalgorithmen

Sehr kurz? Probably nur Code

3.5 Initialisierung

Beweis LC

4 Exponentielle Instanzen aus der Literatur

5 Experimentelle Ergebnisse

Meh.

6 Ausblick

La la la.

Literaturverzeichnis

- [1] V. Chvátal, *Linear Programming*, pp. 291 ff. Series of books in the mathematical sciences, W. H. Freeman, 16 ed., 2002.
- [2] G. B. Dantzig, “Application of the simplex method to a transportation problem,” in *Activity Analysis of Production and Allocation* (T. C. Koopmans, ed.), ch. XXIII, pp. 359–373, New York: Wiley, 1951.
- [3] A. Orden, “The transshipment problem,” *Management Science*, vol. 2, no. 3, pp. 276–285, 1956.
- [4] M. S. Bazaraa, J. J. Jarvis, and H. D. Sherali, *Linear Programming and Network Flows*, pp. 453 ff. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 4 ed., 2010.
- [5] S. Hougardy and J. Vygen, *Algorithmische Mathematik*. Springer-Lehrbuch, Berlin/Heidelberg: Springer Spektrum, 2015.
- [6] W. H. Cunningham, “A network simplex method,” *Mathematical Programming*, vol. 11, no. 1, pp. 105–116, 1976.
- [7] X. Zhong. Persönliche Mitteilung, 2018.
- [8] S. Meyers, *Effective STL: 50 Specific Ways to Improve Your Use of the Standard Template Library*. Addison-Wesley Professional, 1 ed., 2001.