大学数学理一(II)期末试卷(A卷)参考答案 (2013.6.26)

一、 1. $\pi a(a^2-h^2)$.

2. 解法1： $S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$, $\quad 2S_n=1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}$,

$$S_n=2S_n-S_n=1+\big(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\big)+\big(\frac{5}{2^2}-\frac{3}{2^2}\big)+\cdots+\big(\frac{2n-1}{2^{n-1}}-\frac{2n-3}{2^{n-1}}\big)-\frac{2n-1}{2^n}$$

$$=1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n},\qquad \text{所以}\, S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\big(1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}\big)=3.$$

解法2： $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, $\quad$ 设 $S(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$,

则 $S(x)=\Big(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n\int_0^x x^{n-1}\mathrm{d}x\Big)'=\Big(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\Big)'=\Big(\frac{x}{1-x}\Big)'=\frac{1}{(1-x)^2}$, $\ x\in(-1,1)$,

故 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}=S\big(\frac{1}{2}\big)=4$, 而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\big(1-\frac{1}{2^n}\big)}{1-\frac{1}{2}}=1$, $\quad$ 故 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=4-1=3$.

3. 令 $x+1=t$, 则原级数化为 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}t^n$, $a_n=\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}$,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{3^n+(-2)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{3+(-2)(-\frac{2}{3})^n}{1+(-\frac{2}{3})^n}=3$, 收敛半径$R=\dfrac{1}{3}$.

收敛区间为$t\in\big(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\big)$, 即$x\in\big(-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\big)$.

当$x=-\frac{4}{3}$时，级数为$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n+(-2)^n}{n\cdot 3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\big(\frac{2}{3}\big)^n$, 两个级数都收敛, 故原级数收敛;

当$x=-\frac{2}{3}$时，级数为$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n\cdot 3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\big(-\frac{2}{3}\big)^n$, 一个收敛一个发散，故原级数发散；

所以级数的收敛域为$\big[-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\big)$.

4. 原方程的特征方程为$\lambda^2-2\lambda+5=0$, 解之得$\lambda=1\pm 2i$, 因此所求通解为$y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

5. 原方程化为$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x}+1}$, 这是一个齐次方程. 令$u=\dfrac{y}{x}$, 则$y=ux$, $\mathrm{d}y=u\mathrm{d}x+x\mathrm{d}u$, 原方程化为 $u\mathrm{d}x+x\mathrm{d}u=\dfrac{u^2}{u+1}\mathrm{d}x$, 分离变量得$\big(1+\dfrac{1}{u}\big)\mathrm{d}u=-\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$, 两边积分得$u+\ln|u|=-\ln|x|+C$, 所以原方程的通积分为$\dfrac{y}{x}+\ln|y|=C$. 另外$y=0$是奇解. (或者原方程的通积分为$ye^{\frac{y}{x}}=C$.)

6. $$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\int_2^A\frac{1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\int_2^A\frac{1}{(x-1)(x+2)}\,\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\int_2^A\frac{1}{3}\big(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\big)\,\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\Bigg|_2^A=\frac{2}{3}\ln 2.$$

7. 计算曲面积分$\displaystyle\iint_S xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$S$是球面$x^2+y^2+z^2=1$外侧在$x\geq 0,y\geq 0$的部分.

解法1 记$S_1: z=\sqrt{1-x^2-y^2},(x,y)\in D_{xy}$, 取上侧；$S_2: z=-\sqrt{1-x^2-y^2},(x,y)\in D_{xy}$, 取下侧；其中$D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 1,x\geq 0,y\geq 0\}$, 则

$$\iint\limits_{S} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{S_1} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_{S_2} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_{xy}} xy\big(-\sqrt{1-x^2-y^2}\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^2\sin\theta\cos\theta\sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho\mathrm{d}\rho=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}\rho=\frac{2}{15}.$$

解法2　曲面 S 的方程为 $x=\sqrt{1-y^2-z^2}$, $(y,z)\in D_{yz}$, $D_{yz}=\{(y,z)\,|\,y^2+z^2\le 1, y\ge 0\}$.

$$\iint\limits_{S} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{1-y^2-z^2}\cdot yz\cdot(-x'_z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{yz}} yz^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\cos\theta\cdot\rho^2\sin^2\theta\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho=\frac{2}{15}.$$

8. $P=\dfrac{-y}{x^2+y^2}, Q=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $(x,y)\ne(0,0)$, 令 $c: x^2+y^2=1$, 取逆时针方向，则由格林公式可得 $\displaystyle\int_{l+c^-}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=0$, 所以 $\displaystyle\int_l\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_c\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi$.

9. 设切点为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$, 则 $z_0=\dfrac{x_0^2}{2}+y_0^2$, 点 M_0 处的法向量为 $\overrightarrow{n_0}=(x_0,2y_0,-1)$, 平面 $2x+2y-z=0$ 的法向量为 $\overrightarrow{n}=(2,2,-1)$, $\overrightarrow{n_0}//\overrightarrow{n}$, 所以 $x_0=2, y_0=1, z_0=3$, 故所求切平面方程为 $2(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$, 即 $2x+2y-z=3$.

10. 用球坐标变换将 Ω 变为 Ω', Ω': $0\le r\le 4\cos\varphi$, $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4}$, $0\le\theta\le 2\pi$,

$$\text{原式}=\iiint\limits_{\Omega'} r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{4\cos\varphi}r^3\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}r=\frac{56}{3}\pi.$$

二、 采用柱坐标变换，则 $F(t)=\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t\mathrm{d}\rho\int_0^t f(\rho^2)\rho\,\mathrm{d}z=2\pi t\int_0^t f(\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{t^5}=\lim_{t\to 0^+}\frac{2\pi\int_0^t f(\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho}{t^4}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{t\to 0^+}\frac{2\pi t f(t^2)}{4t^3}=\frac{\pi}{2}\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t^2)-f(0)}{t^2-0}=\frac{\pi}{2}f'(0)=\pi.$$

三、(10分) 将 $x=0$ 代入 $\displaystyle\int_0^x(x+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t=x^2+e^x-f(x)$, 可得 $f(0)=1$.

$\displaystyle\int_0^x(x+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t=x^2+e^x-f(x)$ 化简得 $\displaystyle(x+1)\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x tf'(t)\,\mathrm{d}t=x^2+e^x-f(x)$,

两边对 x 求导数得 $\displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t+(x+1)f'(x)-xf'(x)=2x+e^x-f'(x)$,

即 $f(x)-f(0)+f'(x)=2x+e^x-f'(x)$, 化简得 $f'(x)+\dfrac{1}{2}f(x)=x+\dfrac{1}{2}e^x+\dfrac{1}{2}$,

这是一阶线性非齐次方程，解之得 $f(x)=e^{\int-\frac{1}{2}\mathrm{d}x}\Big(C+\displaystyle\int\big(x+\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}\big)e^{\int\frac{1}{2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\Big)=Ce^{-\frac{1}{2}x}+\dfrac{1}{3}e^x+2x-3$

又因为 $f(0)=1$, 所以 $C=\dfrac{11}{3}$, 所以 $f(x)=\dfrac{11}{3}e^{-\frac{1}{2}x}+\dfrac{1}{3}e^x+2x-3$.

四、解法1 记 $P=x^2-yz$, $Q=y^2-xz$, $R=z^2-xy$, 则 $\dfrac{\partial R}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial z}=0$, $\dfrac{\partial P}{\partial z}-\dfrac{\partial R}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=0$,

所以积分与路径无关，取直线段 $L:\begin{cases}x=a,\\ y=0\end{cases}$ $0\le z\le h$, 则　原式$=\displaystyle\int_0^h z^2\,\mathrm{d}z=\frac{1}{3}h^3$.

解法2　记 $P=x^2-yz$, $Q=y^2-xz$, $R=z^2-xy$, 则 $\dfrac{\partial R}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial z}=0$, $\dfrac{\partial P}{\partial z}-\dfrac{\partial R}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=0$,

$$(x^2-yz)\,\mathrm{d}x+(y^2-xz)\,\mathrm{d}y+(z^2-xy)\,\mathrm{d}z=\mathrm{d}\Big(\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-xyz\Big),$$

原式$=\left(\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-xyz\right)\Big|_{(a,0,0)}^{(a,0,h)}=\frac{1}{3}h^3.$

五、 (1) 因为$f(x)$是偶函数，所以$b_n=0(n=1,2,\ldots)$. $\quad a_0=\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^1(2+x)\,\mathrm{d}x=5.$

$$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x=2\int_0^1(2+x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\int_0^1(2+x)\,\mathrm{d}\sin n\pi x$$
$$=\frac{2}{n\pi}(x+2)\sin n\pi x\Big|_0^1-\frac{2}{n\pi}\int_0^1\sin n\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1],\qquad n=1,2,\cdots$$

$$f(x)=\frac{5}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-4}{(2n+1)^2\pi^2}\cos(2n+1)\pi x.\qquad x\in[-1,1].$$

(2) 在上式中令$x=0$, 得 $f(0)=\frac{5}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-4}{(2n+1)^2\pi^2}\Longrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{6}.$

六、证明：因为$\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_1^A f(x)\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{A\to+\infty}\left(\int_1^{[A]}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{[A]}^A f(x)\,\mathrm{d}x\right)$

$$=\lim_{A\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{[A]-1}\int_n^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{[A]}^A f(x)\,\mathrm{d}x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x+\lim_{A\to+\infty}\int_{[A]}^A f(x)\,\mathrm{d}x.$$

要证广义积分$\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$收敛，只需证级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，极限$\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{[A]}^A f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在.

因为$\int_1^{+\infty}|f'(x)|\mathrm{d}x$收敛, 所以$\int_1^{+\infty}f'(x)\mathrm{d}x$收敛, 而$\int_1^{+\infty}f'(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-f(1)$, 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq0$, 则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 发散，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

$$\min_{x\in[[A],A]}f(x)\cdot(A-[A])\le\int_{[A]}^A f(x)\,\mathrm{d}x\le\max_{x\in[[A],A]}f(x)\cdot(A-[A]),$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, 故 $\lim\limits_{A\to+\infty}\min\limits_{x\in[[A],A]}f(x)=\lim\limits_{A\to+\infty}\min\limits_{x\in[[A],A]}f(x)=0$. 而$|A-[A]|\le1$, 由夹逼准则可知$\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{[A]}^A f(x)\,\mathrm{d}x=0.$

令$a_n=\int_n^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x-f(n)$,

$$|a_n|=\left|\int_n^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x-f(n)\right|=\left|\int_n^{n+1}(f(x)-f(n))\,\mathrm{d}x\right|=\left|\int_n^{n+1}\left(\int_n^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\right|$$
$$\le\int_n^{n+1}\left(\int_n^{n+1}|f'(t)|\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=\int_n^{n+1}|f'(t)|\,\mathrm{d}t,$$

所以$\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|=\sum\limits_{k=1}^{n}\left|\int_k^{k+1}f(x)\,\mathrm{d}x-f(k)\right|\le\sum\limits_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}|f'(x)|\,\mathrm{d}x=\int_1^{n+1}|f'(x)|\,\mathrm{d}x$有上界，

部分和数列有上界，所以正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，从而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+f(n))=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$, 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x$收敛.