微积分 II（第一层次）期末试卷参考答案 (2019.6.17)

一、 1．平面方程为 $z=\dfrac{1}{8}x+\dfrac{1}{2}y-\dfrac{9}{4}$, $(x,y)\in D$, 其中 $D: x^2+(y-3)^2\le 9$.

则所求面积 $S=\displaystyle\iint\limits_D\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\frac{9}{8}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{9}{8}\cdot 9\pi=\frac{81}{8}\pi.$

2. $a_n=n\arcsin\dfrac{\pi}{5^n}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot\arcsin\frac{\pi}{5^{n+1}}}{n\cdot\arcsin\frac{\pi}{5^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot\frac{\pi}{5^{n+1}}}{n\cdot\frac{\pi}{5^n}}=\frac{1}{5}<1,$

所以级数收敛.

3. $x=1$ 是奇点. $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\cdot\sqrt{1-x}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}}=\frac{1}{2}$, 所以广义积分收敛.

4. 这是伯努利方程，令 $y^2=u$, 方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-\dfrac{1}{x}u=-1$, 通积分为 $y^2=Cx-x\ln|x|$.

5. 方程化为 $(x^2-y+5)\mathrm{d}x-(x+y^2+2)\mathrm{d}y=0$, 这是全微分方程，通积分为 $\frac{x^3-y^3}{3}-xy+5x-2y=C$.

二、 解：直线 L 过点 $M_0(\frac{27}{8},-\frac{27}{8},0)$, 方向向量为 $(10,2,-2)\times(1,1,-1)=8(0,1,1)$.

设切点为 (x_0,y_0,z_0), 则法向量为 $(3x_0,y_0,-z_0)$, 切平面方程为 $3x_0x+y_0y-z_0z=27$.

所以 $\begin{cases}3x_0\cdot\frac{27}{8}+y_0\cdot(-\frac{27}{8})=27,\\(3x_0,y_0,-z_0)\cdot(0,1,1)=0,\\3x_0^2+y_0^2-z_0^2=27.\end{cases}$ 解得 $(x_0,y_0,z_0)=(3,1,1)$ 或 $(-3,-17,-17)$,

所以切平面方程为 $9x+y-z=27$ 或 $9x+17y-17z=-27$.

三、 记 $P(x,y)=(x+y+1)e^x-e^y+y$, $Q(x,y)=e^x-(x+y+1)e^y-x$, 则 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=-2$

$\displaystyle\int_{C+\overline{AO}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=-\iint\limits_D(-2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ （其中 D 为旋轮线的一拱与 x 轴所围的区域）

$$=2\int_0^{2\pi a}y\mathrm{d}x=2\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\mathrm{d}t=6\pi a^2,$$

所以 $I_1=6\pi a^2+\displaystyle\int_0^{2\pi a}((x+1)e^x-1)\mathrm{d}x=6\pi a^2+2\pi a(e^{2\pi a}-1).$

四、方法一: 设 $S_1: z=0$, $(x^2+y^2\le 1)$, 取下侧, 则

$\displaystyle\iint\limits_{S+S_1}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_\Omega 6(x^2+y^2+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ （柱坐标）

$=6\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_0^{1-\rho^2}(\rho^3+\rho z)\mathrm{d}z=2\pi$, 所以

$I_2=2\pi-\displaystyle\iint\limits_{S_1}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi+\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(-3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\pi.$

方法二: $S: z=1-x^2-y^2$, $(x,y)\in D$, $D: x^2+y^2\le 1$, 则

$$I_2=\iint\limits_D\Big(2x^3(-z'_x)+2y^3(-z'_y)+3\big((1-x^2-y^2)^2-1\big)\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_D(7x^4+7y^4-6x^2-6y^2+6x^2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \text{(极坐标)}$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \left(7\rho^5\cos^4\theta + 7\rho^5\sin^4\theta - 6\rho^3 + 6\rho^5\cos^2\theta\sin^2\theta\right)\mathrm{d}\rho = -\pi.$$

五、(10分)　设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性；若收敛，求其和.

解：$x > 0$ 时，$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x)$, 令 $x = \frac{1}{k}$, 则 $\frac{1}{k+1} < \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$, 取 $k = 1, 2, \cdots, n-1$,

再将各式相加可得 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < \ln n + 1 < 2\ln n\ (n \geq 3)$, 所以 $\frac{a_n}{(n+1)(n+2)} < \frac{2\ln n}{n^2}$.

而 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\ln n}{n^2} \cdot n^{\frac{3}{2}} = 0$, 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2\ln n}{n^2}$ 收敛. 由比较判别法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$ 收敛.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} a_k\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2 - a_1}{3} + \cdots + \frac{a_n - a_{n-1}}{n+1} - \frac{a_n}{n+2}$$

$= 1 - \frac{1}{n+1} - \frac{a_n}{n+2}$, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)(n+2)} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$.

六、　令 $t = x^2$, 对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} t^{n-1}$, $a_n = \frac{2n-1}{2^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)\cdot 2^n}{(2n-1)2^{n+1}} = \frac{1}{2}$,

所以 $R = 2$. $t = 2$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2}$ 发散; 所以 $0 \leq x^2 < 2$, 收敛域为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

设 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$, 则 $\int_0^x S(x)\mathrm{d}x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{2n-1} = \frac{1}{x} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n = \frac{\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}}{1 - \frac{x^2}{2}} = \frac{x}{2-x^2}$,

所以 $S(x) = \left(\frac{x}{2-x^2}\right)' = \frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$, $\quad x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. $\qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = S(1) = 3$.

七、$f(x)$ 是偶函数，所以 $b_n = 0,\ n = 1, 2, \cdots$.

$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2)\mathrm{d}x = \frac{4\pi^2}{3}$, $\quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2},\ n = 1, 2, \cdots$,

所以 $\pi^2 - x^2 = \frac{2}{3}\pi^2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx$, $\quad x \in [-\pi, \pi]$.

代入 $x = 0$ 得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$, $\quad$ 代入 $x = \pi$ 得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{4}$, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

八、　$y_1 - y_3 = e^{-x}$ 是对应的齐次方程的一个解，则 $y_4 = y_2 - e^{-x} = xe^x$ 是非齐次方程的一个解，

$y_1 - y_4 = e^{2x}$ 是对应的齐次方程的另一个解。所以 $-1, 2$ 是特征根。

二阶线性非齐次微分方程为 $y'' - y' - 2y = f(x)$, 将 $y_4 = xe^x$ 带入方程可得 $f(x) = (1-2x)e^x$.

所以微分方程为 $y'' - y' - 2y = (1-2x)e^x$, 通解为 $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + xe^x$.