微积分 **II**（第一层次）期末试卷参考答案 (2020.8.18)

一、　解：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0=f(0,0)$, 所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

$f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,\ f'_y(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0,$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可偏导.

$\omega=f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y=f(x,y)=xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$

$\lim\limits_{\rho\to 0^+}\dfrac{\omega}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0^+}\rho\cos\theta\sin\theta\sin\dfrac{1}{\rho}=0$, 所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时, $f'_x(x,y)=y\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\dfrac{x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}},$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f'_x(x,y)=\lim\limits_{\rho\to 0^+}(\rho\sin\theta\sin\dfrac{1}{\rho}-\cos^2\theta\sin\theta\cos\dfrac{1}{r})$ 不存在，故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续可微.

二、1. $9x+y-z=27$ 或 $9x+17y-17z+27=0$.

2. 解：$S=\iint\limits_{x^2+y^2\le 2a^2}\Big(\dfrac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}}+\dfrac{\sqrt{a^2+x^2+y^2}}{a}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2^{1/2}}\Big(\dfrac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3a^2-\rho^2}}+\dfrac{\sqrt{a^2+\rho^2}}{a}\Big)\rho\mathrm{d}\rho=\dfrac{16}{3}\pi a^2.$

3. $I=\int_1^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{+\infty}\dfrac{1}{x^4+y^2}\mathrm{d}y=\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}\arctan\dfrac{y}{x^2}\Big|_{y=x^2}^{y\to+\infty}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{4}\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{4}.$

三、1. 曲线的参数方程为 $x=\cos\theta, y=\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}}, z=\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}}, \theta$ 从 0 到 $\dfrac{\pi}{2}$, 则

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos\theta\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{\sqrt{2}\pi}{8}-\frac{1}{2}.$$

2. 记 $S: x+y=R$ 后侧, $I=\iint\limits_S(y+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-(y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\dfrac{R}{\sqrt{2}}\iint\limits_S\mathrm{d}S=-\dfrac{\sqrt{2}\pi R^3}{4}.$

3. 设 $S_1: z=0, ((x,y)\in D)$ 取下侧, 其中 $D: x^2+y^2\le a^2$. Ω 是 S 与 S_1 所围立体，

$P=x^3+az^2, Q=y^3+ax^2, R=z^3+ay^2$, 则

$$\iint\limits_{S+S_1}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_\Omega 3(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^4\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{6\pi a^5}{5},$$

$$\iint\limits_{S_1}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_D ay^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho^3\sin^2\theta\mathrm{d}\rho=-\frac{\pi a^5}{4},$$

所以 $I=\dfrac{6\pi a^5}{5}+\dfrac{\pi a^5}{4}=\dfrac{29}{20}\pi a^5$

四、1. 解：$\arctan x=x-\dfrac{x^3}{3}+o(x^4)$, $a_n=\dfrac{1}{n}-\arctan\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n}-\Big(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{3n^3}+o(\dfrac{1}{n^4})\Big)\sim\dfrac{1}{3n^3},$

所以级数收敛.

2. 解：$a_n=\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, a_n 单调减，$\dfrac{1}{2n}<a_n<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$, 由夹逼准则可知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，所以由莱布尼茨判别法可知原级数收敛；由 $a_n>\frac{1}{2n}$ 可知原级数非绝对收敛, 故原级数条件收敛.

3. 解：设 $S(x) = \mathop{}\limits_{n=0} (n+1)^2x^n$, 两边积分得

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=x\Big(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\Big)'=x\Big(\frac{x}{1-x}\Big)'=\frac{x}{(1-x)^2},(|x|<1)$$

两边求导 $S(x)=\Big(\dfrac{x}{(1-x)^2}\Big)'=\dfrac{x+1}{(1-x)^3},(-1<x<1)$. 令 $x=-\dfrac{1}{3}$ 得 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)^2\frac{1}{3^n}=\frac{9}{32}$.

4. $x^2=\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}\cos n\pi x, x\in(-\infty,+\infty)$, 取 $x=0$ 即得 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

五、1. $\tan(1+x+y)-\sec(1+x+y)=x-1$.

2. 原方程可以写成 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\dfrac{2x}{y}=-2\dfrac{x^2}{y^3}$, 这是一个关于 x 的伯努利方程，通积分为 $y^2=C\mathrm{e}^{\frac{y^2}{x}}$.

六、$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}+\dfrac{1}{6}x^3\mathrm{e}^{-x}$.