微积分II（第一层次）期末试卷 (2019.6.17)

一、计算下列各题(6分 × 5=30分)

1. 求平面 $x+4y-8z=18$ 被圆柱面 $x^2+y^2=6y$ 所截部分的面积.

2. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\arcsin\dfrac{\pi}{5^n}$ 的敛散性.

3. 讨论广义积分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

4. 求微分方程 $2xy\cdot y'-y^2+x=0$ 的解.

5. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x^2-y+5}{x+y^2+2}$ 的通积分.

二、(10分) 求过直线 $L:\begin{cases}10x+2y-2z=27,\\ x+y-z=0\end{cases}$ 且与曲面 $S:3x^2+y^2-z^2=27$ 相切的切平面方程.

三、(10分) 设 $C: x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ $(t\in[0,2\pi])$ 为旋轮线的一拱，方向由原点到 $A(2\pi a,0)$, 计算 $I_1=\displaystyle\int_C[(x+y+1)e^x-e^y+y]\mathrm{d}x+[e^x-(x+y+1)e^y-x]\mathrm{d}y$.

四、(10分) 计算 $I_2=\displaystyle\iint\limits_S 2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 为曲面 $z=1-x^2-y^2$ $(z\geq 0)$ 的上侧.

五、(10分) 设 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$, 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性；若收敛，求其和.

六、(10分) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的收敛域、和函数，并由此计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}$ 的和.

七、(10分) 将函数 $f(x)=\pi^2-x^2$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上展开成余弦级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$ 的和.

八、(10分) 已知 $y_1=xe^x+e^{2x}$, $y_2=xe^x+e^{-x}$, $y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶线性非齐次微分方程的三个解，求出此微分方程，写出其通解.