微积分II（第一层次）期末试卷 (2018.7.3)

一、计算下列各题(6分 $\times$ 5=30分)

1. 设 $u=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$, 其中 $f(v)$ 具有二阶连续导数，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

2. 讨论广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt[n]{1+x}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

3. 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n}}{n5^n}$ 的收敛域.

4. 求微分方程 $(x-\sin y)\mathrm{d}y+\tan y\mathrm{d}x=0$ 满足初始条件 $y(1)=\dfrac{\pi}{6}$ 的特解.

5. 求微分方程 $\left(\dfrac{1}{y}\sin\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}+5\right)\mathrm{d}x+\left(-\dfrac{x}{y^2}\sin\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x}+\dfrac{6}{y^3}\right)\mathrm{d}y=0$ 的通积分.

二、(10分)　计算 $I_1=\displaystyle\iint_S(x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 为曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ $(a>0)$ 的上侧.

三、(10分)　计算 $I_2=\displaystyle\oint_C(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$, 其中 C 是立方体 $0\le x\le a, 0\le y\le a, 0\le z\le a$ 的表面与平面 $x+y+z=\dfrac{3a}{2}$ 的交线，从 z 轴正向看去是逆时针方向.

四、(10分)　对常数 p, 讨论数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{n^p}$ 何时绝对收敛，何时条件收敛，何时发散.

五、(10分)　试将函数 $f(x)=\dfrac{x^2-4x+14}{(x-3)^2(2x+5)}$ 展成马克劳林级数，并写出其收敛域.

六、(10分)　将函数 $f(x)=\dfrac{x}{4}$ 在 $[0,\pi]$ 上展开成正弦级数，并求级数 $1+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{17}-\cdots$ 的和.

七、(10分)　求二阶微分方程 $y''-y=2x+e^{2x}\cos x$ 的通解.

八、(10分)　(1) (非商学院学生做) 设函数 $f(x)$ 对定义域内任意两点 x,y 有等式 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-4f(x)f(y)}$, 且 $f'(0)=a$ $(a\neq 0)$, 求函数 $f(x)$.

(2) (商学院学生做) 已知 $\displaystyle\int_0^1 f(ax)\mathrm{d}a=\frac{1}{2}f(x)+1$, 求 $f(x)$ 满足的微分方程并求 $f(x)$.