微积分 II（第一层次）期末试卷参考答案 (2021.6.22)

一、 1. 法平面方程为 $x-2y+z=0$, 切线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$.

2. 解：柱面在第一卦限部分记为 $S_1$, 则 $S_1: x=\sqrt{ay-y^2}, (y,z)\in D$, $D=\{(y,z)|0\le z\le \sqrt{a^2-ay}, 0\le y\le a\}$.

$$S=4S_1=\iint\limits_D \sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint\limits_D \frac{a}{2\sqrt{ay-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^a \mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{a^2-ay}}\frac{a}{\sqrt{ay-y^2}}\mathrm{d}x=4a^2.$$

3. 解：$P=\cos(x+y^2), Q=2y\cos(x+y^2)-\sqrt{1+y^4}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=-2y\sin(x+y^2)$, 所以积分与路径无关. 取直线段 $\overline{OA}: y=0, x: 0\to 2\pi a$, 则 $I_1=\displaystyle\int_{\overline{OA}} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi a}\cos x\mathrm{d}x=\sin(2\pi a)$.

4. 解：$S$ 关于 $y=0$ 对称，$xy+yz$ 关于 $y$ 是奇函数，则

$$I_2=\iint\limits_S zx\mathrm{d}S=\iint\limits_D x\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{(1+z'_x)^2+(z'_y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\rho^3\cos\theta\mathrm{d}\rho=\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4.$$

5. 解：$\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

对于 $I_1=\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$, (1) $p\ge 1$ 时是定积分，收敛; (2) $p<1$ 时，0 是奇点，$\displaystyle\lim_{x\to 0^+}x^{p-1}e^{-x}\cdot x^{1-p}=1$, 由柯西判别法, 当 $0<1-p<1$ 即 $0<p<1$ 时收敛, 当 $1-p\ge 1$ 即 $p\le 0$ 时发散. 由(1)(2)可知，$I_1$ 仅当 $p>0$ 时收敛.

对于 $I_2=\displaystyle\int_1^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$, $+\infty$ 是奇点，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^{p-1}e^{-x}\cdot x^2=0$，所以 $I_2$ 收敛.

综上，原式仅当 $p>0$ 时收敛；

二、1. 解：$0<u_n=\dfrac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}<\dfrac{n^{n-1}}{(n^2)^{\frac{n+1}{2}}}=\dfrac{1}{n^2}$, 而级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以原级数收敛.

2. 解：因为数列 $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ 单调减少趋于零,

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{6}\right|=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}\left|\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{k\pi}{6}\sin\frac{\pi}{12}\right|=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{(2k-1)\pi}{12}-\cos\frac{(2k+1)\pi}{12}\right)\right|$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}\left|\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{(2n+1)\pi}{12}\right|\le\frac{1}{\sin\frac{\pi}{12}},$$

故级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{6}$ 的部分和有界. 由狄利克莱判别法知级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{6}}{\sqrt{n}}$ 收敛.

又 $\left|\dfrac{\sin\frac{n\pi}{6}}{\sqrt{n}}\right|\ge\dfrac{\sin^2\frac{n\pi}{6}}{\sqrt{n}}=\dfrac{1}{2\sqrt{n}}-\dfrac{\cos\frac{n\pi}{3}}{2\sqrt{n}}$. 与上面的证明类似, 可以知道级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{2\sqrt{n}}$ 收敛, 而级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}$ 发散. 一个发散级数与一个收敛级数逐项相减所得的级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{n\pi}{6}}{\sqrt{n}}$ 必发散, 由比较判别法可知级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{6}}{\sqrt{n}}\right|$ 发散. 综上所述，原级数条件收敛.

3. 解：注意到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\ln(1+x)$, $x\in(-1,1]$, 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\Big(1-\frac{1}{3^n}\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{1}{3^n}=\ln(1+1)-\ln(1+\frac{1}{3})=\ln\frac{3}{2}.$$

4. 解：原方程化为 $(3x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy)\mathrm{d}y=0$, 这是全微分方程，通积分为 $x^3+x^2y-xy^2=C$.

5. 解：原方程化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{x}y=x^3\cdot y^{-2}$, 这是伯努利方程，令 $y^3=u$, 则原方程化为 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-\frac{3}{x}\cdot u=3x^2$, 解得 $u=\mathrm{e}^{\int\frac{3}{x}\mathrm{d}x}\Big(C+\int 3x^3\mathrm{e}^{-\int\frac{3}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\Big)=x^3(C+3x)$, 故所求通积分为 $y^3=x^3(C+3x)$.

三、解：设 $S$ 是平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限的部分的上侧，则由斯托克斯公式，

$$I_3=-2\iint_S z\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_S(x+y+z)\mathrm{d}S=\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma(S)=-1.$$

四、解：曲面 $S$ 的方程为 $z=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}$, 其中 $(x,y)\in D, D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq a^2\}$. 设 $S_1: z=\mathrm{e}^a, (x,y)\in D$, 取上侧. $P=4xz, Q=-2yz, R=1-z^2$, 则由高斯公式 $\iint_{S+S_1}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，所以 $I_4=-\iint_{S_1}(1-\mathrm{e}^{2a})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(\mathrm{e}^{2a}-1)\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(\mathrm{e}^{2a}-1)\pi a^2$

五、解：$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$, $f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(2n)!!}{(2n-1)!!}x^{2n}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(2n)!!}{(2n-1)!!}x^{2n-1}=xs(x)$,

$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(2n)!!}{(2n-1)!!}x^{2n-1}$, 两边积分得

$$\int_0^x s(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n-1}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$$

$$=x\Big(4x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}\Big)=x(4x+f'(x))=4x^2+xf'(x),$$

所以 $s(x)=8x+f'(x)+xf''(x)$, 故 $f''(x)=xs(x)=8x^2+xf'(x)+x^2f''(x)$，

所以 $f(x)$ 满足的微分方程为 $f''(x)-\frac{x}{1-x^2}f'(x)=\frac{8x^2}{1-x^2}$,

这是关于 $f'(x)$ 的一阶线性微分方程，解得

$$f'(x)=\mathrm{e}^{\int\frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x}\Big(C_1+\int\frac{8x^2}{1-x^2}\mathrm{e}^{-\int\frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\Big)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Big(C_1+8\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\Big)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Big(C_1+4\arcsin x-4x\sqrt{1-x^2}\Big)$$

由 $f'(0)=0$ 得 $C_1=0$, 所以 $f'(x)=4\Big(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}-x\Big)$, 两边再积分得 $f(x)=2(\arcsin x)^2-2x^2+C_2$,

由 $f(0)=0$ 得 $C_2=0$, 所以 $f(x)=2(\arcsin x)^2-2x^2$