微积分II（第一层次）期末试卷 (2012.6.20)

一、计算下列各题(6分 × 10=60分)

1. 计算曲面积分 $\iint\limits_S z\,\mathrm{d}S$, 其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h\ (0<h<a)$ 截出的顶部.

2. 计算曲面积分 $\iint\limits_S (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+(y-z)x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 S 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0, z=3$ 所围成的空间闭区域 V 的整个边界曲面的外侧.

3. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$ 的和.

4. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}$ 的收敛半径和收敛域.

5. 求微分方程 $y''+y=x^2$ 的通解.

6. 求微分方程 $(x-y)\,\mathrm{d}x+(x+y)\,\mathrm{d}y=0$ 的通解.

7. 求函数 $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 在 $x=0$ 处的泰勒展式.

8. 判别广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\arctan x}{1+x^p}\,\mathrm{d}x\ (p>0)$ 的敛散性.

9. 计算曲线积分 $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为圆周 $x^2+y^2=ay\ (a>0)$.

10. 计算三重积分 $\iiint\limits_\Omega y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 为锥面 $z=\sqrt{4x^2+4y^2}$ 与 $z=2$ 所围立体.

二、(10分)　讨论实数 p 为何值时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\sin\dfrac{1}{n}\right)^p$ 收敛，实数 p 为何值时，级数发散.

三、(10分)　设函数 $f(x), g(x)$ 连续可微，$f(0)=g(0)=0$, 使得曲线积分

$$\int_{(0,1,0)}^{(1,0,1)}\left((x^2-f(x))y+\frac{1}{2}g(x)y^2\right)\mathrm{d}x+\big(f(x)y-g(x)\big)\,\mathrm{d}y+\,\mathrm{d}z$$

与路径无关，求出 $f(x), g(x)$, 并求出该曲线积分的值.

四、(10分)　1. 设函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，它在 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式为 $f(x)=\pi^2-x^2$, $(-\pi\le x\le\pi)$, 求函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅立叶级数展开式；

2. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2}$ 的和.

3. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 的和.

五、(本题非商学院的学生必做题，10分) 已知曲线积分 $\int_L\dfrac{1}{f(x)+8y^2}(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x)$ 恒等于常数 A , 其中函数 $f(x)$ 连续可导，$f(1)=1$, L 为任意包围原点 $O(0,0)$ 的简单闭曲线，取正向，

(1) 设 G 为不包含原点的单连通区域，证明：G 内的曲线积分 $\int_C\dfrac{1}{f(x)+8y^2}(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x)$ 与路径无关，其中 C 为完全位于 G 内的曲线；

(2) 求函数 $f(x)$ 与常数 A .

六、(本题商学院学生做，非商学院学生做了不给分，10分)　利用斯托克斯公式计算曲线积分

$$\oint_C (y-z)\,\mathrm{d}x+(z-x)\,\mathrm{d}y+(x-y)\,\mathrm{d}z,$$

其中 C 是椭圆 $x^2+y^2=a^2, \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{h}=1(a>0,h>0)$, 从 x 轴的正向看去，此椭圆取逆时针方向.