微积分II（第一层次）期末试卷 (2020.8.18)

一、(8分）设 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$ 讨论 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性、可偏导性、可微性以及连续可微性.

二、计算下列各题（7分×3 = 21 分）

1. 求过直线 $L:\begin{cases} 10x+2y-2z=27, \\ x+y-z=0 \end{cases}$ 且与曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 相切的平面方程.

2. 求旋转抛物面 $x^2+y^2=2az\ (a>0)$ 与半球面 $z=\sqrt{3a^2-x^2-y^2}$ 所围立体的表面积.

3. 计算 $I=\iint\limits_D \dfrac{1}{x^4+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D: x\geq 1, y\geq x^2$.

三、计算下列各题（7分×3 = 21 分）

1. 计算 $I=\int_C 2x\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+(x+2y-z)\mathrm{d}z$, 其中 C 是曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ y=z \end{cases}$ 上从点 $A(1,0,0)$ 到$B(0,\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}})$ 的位于第一卦限的一段曲线.

2. 计算 $I=\oint_C \dfrac{y^2}{2}\mathrm{d}x-xz\mathrm{d}y+\dfrac{y^2}{2}\mathrm{d}z$, 其中 C 是曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ x+y=R. \end{cases}$ 从 y 轴的正向看去是依顺时针方向.

3. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_S (x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的外侧.

四、计算下列各题（7分×4 = 28 分）

1. 考察级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n}\right)$ 的敛散性.

2. 判别级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 的敛散性.（提示：$\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$）

3. 求 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2x^n$ 的和函数，并求数项级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)^2\frac{1}{3^n}$ 的和.

4. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 它在 $[-1,1]$ 上的表达式为 $f(x)=x^2$. 将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数，并求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ 的和.

五、计算下列各题（7分×2 = 14 分）

1. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sin(1+x+y), y(0)=-1$ 的特解.　2. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y^3}{2(xy^2-x^2)}$ 的通解.

六、(8分) 求微分方程 $y''+2y'+y=x\mathrm{e}^{-x}$ 的通解.