微积分II（第一层次）期末试卷 (2021.6.22)

一、计算下列各题（6分×5 = 30分）

1. 求空间曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=14, \\ 3x+2y+z=10 \end{cases}$ 在点 $P(1,2,3)$ 处的法平面与切线方程.

2. 求柱面 $x^2+y^2=ay\ (a>0)$ 位于球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 内部分曲面的面积.

3. 计算第二类曲线积分 $I_1=\int_C \cos(x+y^2)\mathrm{d}x+\left(2y\cos(x+y^2)-\sqrt{1+y^4}\ \right)\mathrm{d}y$, 其中 C 为旋轮线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$, 由 $O(0,0)$ 到 $A(2\pi a,0)$, 其中 $a>0$.

4. 计算第一类曲面积分 $I_2=\iint\limits_S (xy+yz+zx)\mathrm{d}S$, 其中 S 为圆锥面 $x=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax\ (a>0)$ 所截下的部分.

5. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty} x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

二、计算下列各题（8分×5 = 40分）

1. 讨论数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$ 的敛散性.

2. 讨论数项级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{6})}{\sqrt{n}}$ 的敛散性. 如果收敛，是绝对收敛还是条件收敛?

3. 求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$ 的和.

4. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{3x^2+2xy-y^2}{2xy-x^2}$ 的通积分.

5. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x^4+y^3}{xy^2}$ 的通积分.

三、（本题10分）计算 $I_3=\int_C y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z$, 其中 C 是平面 $x+y+z=1$ 的第一卦限部分与三个坐标面的交线，从 z 周正向往 z 轴负向看去是逆时针方向.

四、（本题10分）计算 $I_4=\iint\limits_S 4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S为曲线 $z=\mathrm{e}^y(0\le y\le a)$ 绕 z 轴旋转生成的旋转曲面，取下侧.

五、（本题10分）设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)}x^{2(n+1)}$, $x\in(-1,1)$. 求出 $f(x)$ 满足的微分方程，并求解之. 计算 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n+1)!!(n+1)}$.