微积分II（第一层次）期末试卷 (2013.6.26)

一、计算下列各题(5分 × 10=50分)

1. 计算曲面积分 $\iint\limits_S z\,\mathrm{d}S$, 其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h$ $(0<h<a)$ 截出的顶部.

2. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}$ 的和.

3. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$ 的收敛半径, 收敛区间和收敛域.

4. 求微分方程 $y''-2y'+5y=0$ 的通解.

5. 解微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y^2}{xy+x^2}$.

6. 判别广义积分 $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性, 若收敛，计算其值.

7. 计算曲面积分 $\iint\limits_S xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧在 $x\ge 0, y\ge 0$ 的部分.

8. 计算曲线积分 $\int_l \dfrac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 其中 l 为椭圆周 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$, 积分按逆时针方向进行.

9. 求曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2$ 平行于平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面的方程.

10. 计算三重积分 $\iiint\limits_\Omega z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是区域 $x^2+y^2+z^2\le 4z, \sqrt{x^2+y^2}\le z$.

二、(8分)　设区域 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le t, x^2+y^2\le t^2\}$ $(t>0)$, 函数 $f(u)$ 可导并且 $f(0)=0, f'(0)=2, F(t)=\iiint\limits_\Omega f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 求 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{F(t)}{t^5}$.

三、(10分)　设函数 $f(x)$ 二阶连续可微，满足 $\int_0^x (x+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t=x^2+e^x-f(x)$, 求函数 $f(x)$.

四、(12分)　计算曲线积分 $\int_l (x^2-yz)\,\mathrm{d}x+(y^2-xz)\,\mathrm{d}y+(z^2-xy)\,\mathrm{d}z$, 其中积分曲线 l 是从 $A(a,0,0)$ 到 $B(a,0,h)$ 的螺线　$x=a\cos\varphi,\ y=a\sin\varphi,\ z=\dfrac{h}{2\pi}\varphi$.

五、(12分)　1. 设函数 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，且 $f(x)=2+|x|, (-1\le x\le 1)$, 求函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的傅立叶展开式;

2. 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}$ 的和.　　3. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 的和.

六、(8分)　设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的连续可微函数，使得广义积分 $\int_1^{+\infty}|f'(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛，证明：如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f(n)$ 收敛，则广义积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.