微积分II（第一层次）期末试卷参考答案2018.7.3

一、1. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{xy}{x^2+y^2+z^2}f''(\sqrt{x^2+y^2+z^2})-\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}f'(\sqrt{x^2+y^2+z^2});$$

2. $+\infty$是唯一奇点. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x\sqrt[n]{1+x}}\cdot x^{1+\frac{1}{n}}=1$, $1+\frac{1}{n}>1$, 所以原广义积分收敛。

3. 解法一： 令$t=(x-3)^2$, 对于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{t^n}{n5^n}$, $a_n=\dfrac{1}{n5^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot 5^n}{(n+1)5^{n+1}}=\dfrac{1}{5}$, 所以$R=5$. $t=5$时，级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, 发散; 所以$0\le(x-3)^2<5$, 解得$3-\sqrt{5}<x<3+\sqrt{5}$, 收敛域为$(3-\sqrt{5},3+\sqrt{5})$.

解法二：令$u_n=\dfrac{(x-3)^{2n}}{n5^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot 5^n(x-3)^2}{(n+1)5^{n+1}}=\dfrac{(x-3)^2}{5}$, 当$\dfrac{(x-3)^2}{5}<1$ 时，原级数绝对收敛；当$\dfrac{(x-3)^2}{5}>1$时，原级数发散；当$\dfrac{(x-3)^2}{5}=1$时，级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, 发散; 所以$\dfrac{(x-3)^2}{5}<1$, 解得$3-\sqrt{5}<x<3+\sqrt{5}$, 收敛域为$(3-\sqrt{5},3+\sqrt{5})$.

4. 原方程化为$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+x\cot y=\cos y$, 关于$x$是一阶线性方程，解得

$$x=e^{-\int\cot y\mathrm{d}y}(C+\int\cos y e^{\int\cot y\mathrm{d}y}\mathrm{d}y)=\frac{C}{\sin y}+\frac{\sin y}{2}.$$

$y(1)=\dfrac{\pi}{6}$代入得$C=\dfrac{3}{8}$, 所以所求特解为$8x\sin y=3+4\sin^2 y$.

5. (全微分方程，通解为$\sin\dfrac{y}{x}-\cos\dfrac{x}{y}+5x-\dfrac{3}{y^2}=C$)

二、 设曲面$S_1: z=0,(x^2+y^2\le a^2)$, 取下侧，则

$$\iint\limits_{S+S_1}(x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}(3x^2+3y^2+3z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^4\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{6\pi a^5}{5}.$$

$$\iint\limits_{S_1}(x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}ay^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho^3\sin^2\theta\mathrm{d}\rho=-\frac{\pi a^5}{4}.\qquad \text{原式}=\frac{6\pi a^5}{5}+\frac{\pi a^5}{4}=\frac{29\pi a^5}{20}.$$

三、 设C所围的正六边形为$S: x+y+z=\dfrac{3a}{2}$, 取上侧，则S的面积为$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2$. 由斯托克斯公式，

$$I_2=-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint\limits_{S}(x+y+z)\mathrm{d}S=-\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3a}{2}\iint\limits_{S}\mathrm{d}S=-\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3a}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2=-\frac{9}{2}a^3.$$

四、 $a_n=\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{n^p}=\dfrac{2}{n^p(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}\sim\dfrac{1}{n^{p+1/2}}$,

所以 $p>\dfrac{1}{2}$ 时绝对收敛，$-\dfrac{1}{2}<p\le\dfrac{1}{2}$ 时，非绝对收敛。

$-\dfrac{1}{2}<p\le\dfrac{1}{2}$ 时，原级数是交错级数，用莱布尼茨判别法可得级数条件收敛；

$p\le-\dfrac{1}{2}$ 时，一般项不趋向于0，级数发散.

五、 $f(x)=\dfrac{x^2-4x+14}{(x-3)^2(2x+5)}=\dfrac{1}{2x+5}+\dfrac{1}{(x-3)^2}=\dfrac{1}{5}(1+\dfrac{2}{5}x)^{-1}+\dfrac{1}{9}(1-\dfrac{x}{3})^{-2}$

$(1+\dfrac{2}{5}x)^{-1}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)(-2)\cdots(-n)}{n!}(\dfrac{2}{5}x)^n=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^n}{5^n}x^n,\quad x\in(-\dfrac{5}{2},\dfrac{5}{2})$,

$(1-\dfrac{x}{3})^{-2}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-2)(-3)\cdots(-n-1)}{n!}(-\dfrac{x}{3})^n=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{3^n}x^n,\quad x\in(-3,3)$,

所以 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\Big(\dfrac{n+1}{3^{n+2}}+(-1)^n\dfrac{2^n}{5^{n+1}}\Big)x^n,\ \ x\in\Big(-\dfrac{5}{2},\dfrac{5}{2}\Big)$.

六、$f(x)=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx,\quad x\in[0,\pi)$.

在上式中取 $x=\dfrac{\pi}{2}$, 得 $I=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}-\cdots=\dfrac{\pi}{4}$, 于是

$1+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{17}-\cdots=I+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{15}-\dfrac{1}{21}+\cdots=I+\dfrac{1}{3}I=\dfrac{\pi}{3}$.

七、$y=C_1e^x+C_2e^{-x}-2x+\dfrac{e^{2x}}{10}(\cos x+2\sin x)$.

八、(1) 在 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-4f(x)f(y)}$ 中令 $x=y=0$ 得 $f(0)=0$.

因为 $f'(0)$ 存在，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，即 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$.

且 $f'(0)=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(y)-f(0)}{y}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(y)}{y}$.

$\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\frac{f(x)+f(y)}{1-4f(x)f(y)}-f(x)}{y}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(y)}{y}(1+4f^2(x))=f'(0)(1+4f^2(x))$,

即 $f'(x)=a(1+4f^2(x))$, 这是一个可分离变量的方程，解得 $f(x)=\dfrac{1}{2}\tan(2ax+C)$,

由 $f(0)=0$ 得 $C=0$, 所以 $f(x)=\dfrac{1}{2}\tan(2ax)$.

(2) $f'(x)-\dfrac{1}{x}f(x)=-\dfrac{2}{x},\quad f(x)=2+Cx$.