КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
Кафедра обчислювальної математики

Експериментальна робота №5

з курсу „Теорія керування"

На тему:

Модель бойових дій двох армій

студента 3-го курсу групи ОМ

Гаврилка Євгенія

Київ – 2017

Зміст

1. Опис математичної моделі і постановка задачі 3

1.1. Модель бойових дій двох армій 3

1.2. Постановка задачі 3

2. Математичні викладки 4

3. Опис алгоритму 7

4. Опис програми 8

5. Опис обчислювальних експериментів 8

6. Висновки 8

Література 9

1. Опис математичної моделі і постановка задачі

1.1. Модель бойових дій двох армій

Нехай в протиборстві беруть участь як регулярні армії, так і парти- занські об'єднання. Головною характеристикою суперників є чисельність сторін $N_1(t) \geq 0$, $N_2(t) \geq 0$. У випадку дій між регулярними частинами динаміка їх чисельності визначається факторами: 1). Швидкість зменшення особового складу за причинами, не зв'я- заними безпосередньо з бойовими діями: хвороби, травми, дезертирство; 2). Темп втрат обумовлений бойовими діями; 3). Швидкість надання під- кріплення, що вважається деякою функцією від часу. При цих припущеннях для $N_1(t)$, $N_2(t)$ отримуємо систему диферен- ціальних рівнянь

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N_1(t) = -a_1(t)N_1(t) - b_2(t)N_2(t) + g_1(t) \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N_2(t) = -b_1(t)N_1(t) - a_2(t)N_2(t) + g_2(t) \tag{2}$$

Тут неперервні функції $a_i(t) \geq 0$ визначають швидкість втрат у силу причин, що не пов'язані з бойовими діями, неперервні функції $b_i(t) \geq 0$ показують темпи втрат через бойові дії супротивника, неперервні фун- кції $g_i(t)$ показують темп надання підкріплення (модель Ланчестера).

1.2. Постановка задачі

Розглядається система керування (1), (2), в якій $g_1(t), g_2(t)$ - функції керування, $t \in [0, T]$, $a_1(t) = a_1$, $a_2(t) = a_2$, $b_1(t) = b_1$, $b_2(t) = b_2$ - додатні константи.

Побудувати множину досяжності в момент $T > 0$ за умови, що обмеження на початковий стан задається нерівностями

$$0 \leq N_1 \leq \alpha \tag{3}$$

$$0 \leq N_2 \leq \beta \tag{4}$$

а обмеження на керування мають вигляд

$$-h_1 \leq g_1(t) \leq h_1 \tag{5}$$

$$-h_2 \leq g_2(t) \leq h_2 \tag{6}$$

де $\alpha, \beta, h1, h2$ – додатні константи.

2. Математичні викладки

З теорії відомо, що система (1), (2) за умов (5), (6) є стандарною задачею множини досяжності лінійної системи керування, яка може бути обчислена за формулою

$$X(t, M_0) = \Theta(t, t_0)M_0 + \int_{t_0}^{t} \Theta(t, s)B(s)U(s)\mathrm{d}s \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x\left(t\right) = -a_1 x\left(t\right) - b_2 y\left(t\right) \tag{8}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y\left(t\right) = -b_1 x\left(t\right) - a_2 y\left(t\right) \tag{9}$$

де $\Theta(t, s) = A(t)\Theta(t, s)$, $\Theta(s, s) = I$

Тут у позначеннях постанови задачі:

$$A(t) = A = \begin{bmatrix} -a_1 & -b_2 \\ -b_1 & -a_2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$B(t) = B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Очислемо матрицю Θ:

$$\Theta\left(t,s\right)=\left[\begin{array}{cc}\frac{p_1\mathrm{e}^{q_2(s-t)}+\mathrm{e}^{q_1(s-t)}p_2}{k^2} & \frac{b_2\left(-\mathrm{e}^{q_2(s-t)}+\mathrm{e}^{q_1(s-t)}\right)}{k^2}\\ \frac{p_1p_2\left(-\mathrm{e}^{q_2(s-t)}+\mathrm{e}^{q_1(s-t)}\right)}{k^2b_2} & \frac{p_2\mathrm{e}^{q_2(s-t)}+\mathrm{e}^{q_1(s-t)}p_1}{k^2}\end{array}\right] \tag{12}$$

Тут:

$$k=\sqrt{{a_1}^2-2\,a_1a_2+{a_2}^2+4\,b_1b_2} \tag{13}$$

$$q_1=1/2\,k+1/2\,a_1+1/2\,a_2 \tag{14}$$

$$q_2=1/2\,k-1/2\,a_1-1/2\,a_2 \tag{15}$$

$$p_1=1/2\,k-1/2\,a_1+1/2\,a_2 \tag{16}$$

$$p_2=1/2\,k+1/2\,a_1-1/2\,a_2 \tag{17}$$

Зауважимо, що діагональні елементи фундаментальної матриці додадтні, а інші - від'ємні

Знайдемо множину досяжності $X(t,M_0)$:

$$X(t,M_0)=\bigcup_{x\in M_0}\bigcup_{u(t)\in U(t)}\Theta(T,0)\cdot x_0+\int_0^T\Theta(T,s)\cdot B(s)\cdot u(s)\mathrm{d}s \tag{18}$$

Враховуючи, що кожен доданок залежить лише від однієї змінної об'єднання та $B(s)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$:

$$X(T,M_0)=\bigcup_{x\in M_0}\Theta(T,0)\cdot x_0+\bigcup_{u(t)\in U(t)}\int_{t_0}^T\Theta(T,s)\cdot u(s)\mathrm{d}s \tag{19}$$

Розглянемо другий доданок:

$$\bigcup_{u(t)\in U(t)}\int_0^T\Theta(T,s)\cdot u(s)\mathrm{d}s=\bigcup_{|u_i(t)|\le h_i}\int_0^T\begin{bmatrix}B_{1,1}(s)&B_{1,2}(s)\\B_{2,1}(s)&B_{2,2}(s)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u_1(s)\\u_2(s)\end{bmatrix}\mathrm{d}s \tag{20}$$

Доведемо, що наклавши на умову u_i що вона константа ми отримаэмо ту саму множину.

Не обмежуючи загальності вважаємо, що $h_i = 1$. Тоді розкрівши добуток і розглядаючи пари доданків з фіксованим і, маэмо 2 інтеграли (додатній та відємний на всьому проміжку) $u_i(s)$ - задають лише на скільки зтиснути інтеграл. Таким чинном відношення пложин не змінюється, отже існує константа, така, що інтеграли мають таке саме значення.

Тому можемо інтегрувати $B_{i,j}(s)$ окремо.

$$X(T, M_0) = \bigcup_{0 \le |x_{i,0}| \le N_i} \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{bmatrix} + \bigcup_{|u_i| \le h_i} \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$A_{1,1} = \frac{p_1 \mathrm{e}^{q_2 T} + p_2 \mathrm{e}^{-q_1 T}}{k} \tag{22}$$

$$A_{1,2} = \frac{b_2 \left(-\mathrm{e}^{q_2 T} + \mathrm{e}^{-q_1 T}\right)}{k} \tag{23}$$

$$A_{2,1} = -\frac{p_1 p_2 \left(\mathrm{e}^{q_2 T} - \mathrm{e}^{-q_1 T}\right)}{k b_2} \tag{24}$$

$$A_{2,2} = \frac{\mathrm{e}^{q_2 T} p_2 + \mathrm{e}^{-q_1 T} p_1}{k} \tag{25}$$

$$B_{1,1} = \frac{p_1 \mathrm{e}^{q_2 T} q_1 - p_2 \mathrm{e}^{-q_1 T} q_2 - p_1 q_1 + p_2 q_2}{k q_2 q_1} \tag{26}$$

$$B_{1,2} = -\frac{b_2 \left(\mathrm{e}^{q_2 T} q_1 + \mathrm{e}^{-q_1 T} q_2 - q_1 - q_2\right)}{k q_2 q_1} \tag{27}$$

$$B_{2,1} = -\frac{p_1 p_2 \left(\mathrm{e}^{q_2 T} q_1 + \mathrm{e}^{-q_1 T} q_2 - q_1 - q_2\right)}{k b_2 q_2 q_1} \tag{28}$$

$$B_{2,2} = \frac{p_2 \mathrm{e}^{q_2 T} q_1 - p_1 \mathrm{e}^{-q_1 T} q_2 + p_1 q_2 - p_2 q_1}{k q_2 q_1} \tag{29}$$

Як бачимо, ми маємо сумму 2х параллелограмів. Враховуючи що сумма опуклих є опуклою, нам залишається знайти опуклу оболонку точок, що утворюються сумами вершин паралеллограмів. Їх всього 16.

3. Опис алгоритму

$$k = \sqrt{{a_1}^2 - 2\,a_1a_2 + {a_2}^2 + 4\,b_1b_2} \tag{30}$$

$$q_1 = 1/2\,k + 1/2\,a_1 + 1/2\,a_2 \tag{31}$$

$$q_2 = 1/2\,k - 1/2\,a_1 - 1/2\,a_2 \tag{32}$$

$$p_1 = 1/2\,k - 1/2\,a_1 + 1/2\,a_2 \tag{33}$$

$$p_2 = 1/2\,k + 1/2\,a_1 - 1/2\,a_2 \tag{34}$$

$$A_{1,1} = \frac{p_1 \mathrm{e}^{q_2T} + p_2 \mathrm{e}^{-q_1T}}{k} \tag{35}$$

$$A_{1,2} = \frac{b_2 \left(-\mathrm{e}^{q_2T} + \mathrm{e}^{-q_1T}\right)}{k} \tag{36}$$

$$A_{2,1} = -\frac{p_1p_2 \left(\mathrm{e}^{q_2T} - \mathrm{e}^{-q_1T}\right)}{kb_2} \tag{37}$$

$$A_{2,2} = \frac{\mathrm{e}^{q_2T}p_2 + \mathrm{e}^{-q_1T}p_1}{k} \tag{38}$$

$$B_{1,1} = \frac{p_1\mathrm{e}^{q_2T}q_1 - p_2\mathrm{e}^{-q_1T}q_2 - p_1q_1 + p_2q_2}{kq_2q_1} \tag{39}$$

$$B_{1,2} = -\frac{b_2 \left(\mathrm{e}^{q_2T}q_1 + \mathrm{e}^{-q_1T}q_2 - q_1 - q_2\right)}{kq_2q_1} \tag{40}$$

$$B_{2,1} = -\frac{p_1p_2 \left(\mathrm{e}^{q_2T}q_1 + \mathrm{e}^{-q_1T}q_2 - q_1 - q_2\right)}{kb_2q_2q_1} \tag{41}$$

$$B_{2,2} = \frac{p_2\mathrm{e}^{q_2T}q_1 - p_1\mathrm{e}^{-q_1T}q_2 + p_1q_2 - p_2q_1}{kq_2q_1} \tag{42}$$

Знайти 4 точки, для $x = 0, N_1$; $y = 0, N_2$:

$$[A_{1,1} \cdot x + A_{1,2} \cdot y, A_{2,1} \cdot x + A_{2,2} \cdot y] \tag{43}$$

Знайти 4 точки, для $x = -h_1, h_1$; $y = -h_2, h_2$:

$$[B_{1,1} \cdot x + B_{1,2} \cdot y, B_{2,1} \cdot x + B_{2,2} \cdot y] \tag{44}$$

Попарно просумувати і отримати 16 точок. Знайти їх опуклу оболонку, що складається з 8 точок.

4. Опис програми

Програма послідовно рахує коефіцієнти. Опуклу оболонку за алгоритмом.

5. Опис обчислювальних експериментів

Для моделюваняя множини досяжності вирішувалась поставленна задача з константними керуючими функціями та періодичними. Як результат був отриманий 8 кутник. Задачі вирішувалися окремо з дискретним кроком. Точки досяжності візуалізуються на площині (див. додаток).

6. Висновки

Керування однаково змінює множину досяжності не залежно від початкового стану.

Сумма 2-х параллелограмів - 8 кутник з параллельними протилежними сторонами.

Література

[1] Лекції з теорії керування. Пічкур В.В.

[2] https://en.wikibooks.org/wiki/Algorithm_Implementation/Geometry/Convex_hull/Monotone_chain

[3] https://golang.org/