Експериментальна робота №5
з курсу „Теорія керування”
студента 3-го курсу групи ОМ
Гаврилка Євгенія

2017-05-26

1 Опис математичної моделі і постановка задачі

1.1 Модель бойових дій двох армій

Нехай в протиборстві беруть участь як регулярні армії, так і парти- занські об'єднання. Головною характеристикою суперників є чисельність сторін $N_1(t) \geq 0$, $N_2(t) \geq 0$. У випадку дій між регулярними частинами динаміка їх чисельності визначається факторами: 1). Швидкість зменшення особового складу за причинами, не зв'я- заними безпосередньо з бойовими діями: хвороби, травми, дезертирство; 2). Темп втрат обумовлений бойовими діями; 3). Швидкість надання під- кріплення, що вважається деякою функцією від часу. При цих припущеннях для $N_1(t)$, $N_2(t)$ отримуємо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N_1(t) = -a_1(t)N_1(t) - b_2(t)N_2(t) + g_1(t) \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N_2(t) = -b_1(t)N_1(t) - a_2(t)N_2(t) + g_2(t) \tag{2}$$

Тут неперервні функції $a_i(t) \geq 0$ визначають швидкість втрат у силу причин, що не пов'язані з бойовими діями, неперервні функції $b_i(t) \geq 0$ показують темпи втрат через бойові дії супротивника, неперервні фун- кції $g_i(t)$ показують темп надання підкріплення (модель Ланчестера).

1.2 Постановка задачі

Розглядається система керування (1), (2), в якій $g_1(t), g_2(t)$ - функції керування, $t \in [0, T]$, $a_1(t) = a_1$, $a_2(t) = a_2$, $b_1(t) = b_1$, $b_2(t) = b_2$ - додатні константи.

Побудувати множину досяжності в момент $T > 0$ за умови, що обмеження на початковий стан задається нерівностями

$$0 \leq N_1 \leq \alpha \tag{3}$$

$$0 \leq N_2 \leq \beta \tag{4}$$

а обмеження на керування мають вигляд

$$-h_1 \leq g_1(t) \leq h_1 \tag{5}$$

$$-h_2 \leq g_2(t) \leq h_2 \tag{6}$$

де $\alpha, \beta, h1, h2$ – додатні константи.

2 Математичні викладки

З теорії відомо, що система (1), (2) за умов (5), (6) є стандарною задачею множини досяжності лінійної системи керування, яка може бути обчислена за формулою

$$X(t, M_0) = \Theta(t, t_0) M_0 + \int_{t_0}^{t} \Theta(t, s) B(s) U(s) \mathrm{d}s \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) = -a_1 x(t) - b_2 y(t) \tag{8}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t) = -b_1 x(t) - a_2 y(t) \tag{9}$$

де $\Theta(t, s) = A(t)\Theta(t, s)$, $\Theta(s, s) = I$
Тут у позначеннях постанови задачі:

$$A(t) = A = \begin{bmatrix} -a_1 & -b_2 \\ -b_1 & -a_2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$B(t) = B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Очислемо матрицю Θ:

$$\Theta(t, s) = \begin{bmatrix} \frac{p_1 \mathrm{e}^{q_2(s-t)} + \mathrm{e}^{q_1(s-t)} p_2}{k^2} & \frac{b_2\left(-\mathrm{e}^{q_2(s-t)} + \mathrm{e}^{q_1(s-t)}\right)}{k^2} \\ \frac{p_1 p_2\left(-\mathrm{e}^{q_2(s-t)} + \mathrm{e}^{q_1(s-t)}\right)}{k^2 b_2} & \frac{p_2 \mathrm{e}^{q_2(s-t)} + \mathrm{e}^{q_1(s-t)} p_1}{k^2} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Тут:

$$k = \sqrt{{a_1}^2 - 2\, a_1 a_2 + {a_2}^2 + 4\, b_1 b_2} \tag{13}$$

$$q_1 = 1/2\, k + 1/2\, a_1 + 1/2\, a_2 \tag{14}$$

$$q_2 = 1/2\, k - 1/2\, a_1 - 1/2\, a_2 \tag{15}$$

$$p_1 = 1/2\, k - 1/2\, a_1 + 1/2\, a_2 \tag{16}$$

$$p_2 = 1/2\, k + 1/2\, a_1 - 1/2\, a_2 \tag{17}$$

Знайдемо опорну функцію від $X(t, M_0)$:

$$c(X(t, M_0), \psi) = c(M_0, \Theta^*(t, t_0)\psi) + \int_{t_0}^{t} c(U(s), B^*(s)\Theta^*(t, s)\psi) \mathrm{d}s \tag{18}$$

$$c(M_0, \Theta^*(t, t_0)\psi) = \begin{cases} A_1 N_1 & 0 \leq A_1 \\ 0 & A_1 < 0 \end{cases} + \begin{cases} A_2 N_2 & 0 \leq A_2 \\ 0 & A_2 < 0 \end{cases} \tag{19}$$

$$A_1 = A_{1,1}\psi_1 - A_{1,2}\psi_2 \tag{20}$$

$$A_2 = -A_{2,1}\psi_1 + A_{2,2}\psi_2 \tag{21}$$

$$A_{1,1} = \frac{p_2 \mathrm{e}^{-T a_1} + \mathrm{e}^{T a_2} p_1}{k} \tag{22}$$

$$A_{1,2} = -\frac{p_1 p_2 \left(\mathrm{e}^{-T a_1} - \mathrm{e}^{T a_2}\right)}{k b_2} \tag{23}$$

$$A_{2,1} = -\frac{b_2 \left(\mathrm{e}^{-T a_1} - \mathrm{e}^{T a_2}\right)}{k} \tag{24}$$

$$A_{2,2} = \frac{\mathrm{e}^{-T a_1} p_1 + \mathrm{e}^{T a_2} p_2}{k} \tag{25}$$

$$c(U(s), B^*(s)\Theta^*(t,s)\psi) = |B_1| * h_1 + |B_2| * h_2 \tag{26}$$

$$B_1 = B_{1,1}\psi_1 - B_{1,2}\psi_2 \tag{27}$$

$$B_2 = -B_{2,1}\psi_1 + B_{2,2}\psi_2 \tag{28}$$

$$B_{1,1} = \frac{\mathrm{e}^{a_2(-s+T)} p_1 + \mathrm{e}^{-a_1(-s+T)} p_2}{k} \tag{29}$$

$$B_{1,2} = -\frac{p_1 p_2 \left(-\mathrm{e}^{a_2(-s+T)} + \mathrm{e}^{-a_1(-s+T)}\right)}{k b_2} \tag{30}$$

$$B_{2,1} = \frac{b_2 \left(\mathrm{e}^{a_2(-s+T)} - \mathrm{e}^{-a_1(-s+T)}\right)}{k} \tag{31}$$

$$B_{2,2} = \frac{\mathrm{e}^{a_2(-s+T)} p_2 + \mathrm{e}^{-a_1(-s+T)} p_1}{k} \tag{32}$$

Тоді опорна функція від множини досяжності:

$$c(X(t,M_0),\psi) = \begin{cases} A_1 N_1 & 0 \le A_1 \\ 0 & A_1 < 0 \end{cases} + \begin{cases} A_2 N_2 & 0 \le A_2 \\ 0 & A_2 < 0 \end{cases} + h_1 \cdot \int_{t_0}^{t} |B_1(s)| \mathrm{d}s + h_2 \cdot \int_{t_0}^{t} |B_2(s)| \mathrm{d}s \tag{33}$$

Складність у подальшому обчисленні представляють інтеграли: $\int_{t_0}^{t} |B_1(s)| \mathrm{d}s$ та $\int_{t_0}^{t} |B_2(s)| \mathrm{d}s$

Зауважимо, що всі чисельні змінні додатні.

3 Опис алгоритму

$$k = \sqrt{{a_1}^2 - 2\,a_1 a_2 + {a_2}^2 + 4\,b_1 b_2} \tag{34}$$

$$q_1 = 1/2\,k + 1/2\,a_1 + 1/2\,a_2 \tag{35}$$

$$q_2 = 1/2\,k - 1/2\,a_1 - 1/2\,a_2 \tag{36}$$

$$p_1 = 1/2\,k - 1/2\,a_1 + 1/2\,a_2 \tag{37}$$

$$p_2 = 1/2\,k + 1/2\,a_1 - 1/2\,a_2 \tag{38}$$

$$A_{1,1} = \frac{p_2 \mathrm{e}^{-Ta_1} + \mathrm{e}^{Ta_2} p_1}{k} \tag{39}$$

$$A_{1,2} = -\frac{p_1 p_2 \left(\mathrm{e}^{-Ta_1} - \mathrm{e}^{Ta_2}\right)}{k b_2} \tag{40}$$

$$A_{2,1} = -\frac{b_2 \left(\mathrm{e}^{-Ta_1} - \mathrm{e}^{Ta_2}\right)}{k} \tag{41}$$

$$A_{2,2} = \frac{\mathrm{e}^{-Ta_1} p_1 + \mathrm{e}^{Ta_2} p_2}{k} \tag{42}$$

$$B_{1,1} = \frac{\mathrm{e}^{a_2(-s+T)} p_1 + \mathrm{e}^{-a_1(-s+T)} p_2}{k} \tag{43}$$

$$B_{1,2} = -\frac{p_1 p_2 \left(-\mathrm{e}^{a_2(-s+T)} + \mathrm{e}^{-a_1(-s+T)}\right)}{k b_2} \tag{44}$$

$$B_{2,1} = \frac{b_2 \left(\mathrm{e}^{a_2(-s+T)} - \mathrm{e}^{-a_1(-s+T)}\right)}{k} \tag{45}$$

$$B_{2,2} = \frac{\mathrm{e}^{a_2(-s+T)} p_2 + \mathrm{e}^{-a_1(-s+T)} p_1}{k} \tag{46}$$

4 Опис програми

Програма послідовно рахує коефіцієнти

5 Опис обчислювальних експериментів

Для моделюваняя множини досяжності вирішувалась поставленна задача з константними керуючими функціями. Як результат був отриманий паралелограм. Задачі вирішувалися окремо з дискретним кроком. Точки досяжності візуалізуються на площині (див. додаток).

6 Висновки

Досить складно обрахувати інтеграл від модуля функції довільної структури.

Розв'язок при $limt- > \inf$ не залежить від початкового стану.

Якщо вирішувати задачу тільки коли змінні додатні, це не тривіальна задача та не має аналітичного розв'язку.

7 Література