

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
Кафедра обчислювальної математики

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 3

На тему:

Вирішення задач теплопровідності

студента 4-го курсу бакалаврату
Гаврилка Євгенія Дмитровича

Київ – 2017

Постанова задачі

Визначити температуру всередині і на поверхні цегляної колони діаметром 0.5 м через одну годину, якщо раптово температура навколишнього середовища знизилась з +20 до - 20 С. Фізичні характеристики цегляної колони мають такі значення: $\lambda = 0.77 \text{ W}/(m \cdot K)$; $c = 0.83 \text{ kJ}/(kg \cdot K)$; $\rho = 1600 \text{ kg}/m^3$; $\gamma = 7 \text{ W}/(m^2 \cdot K)$

1. Метод безпосередньої заміни похідних частковими

1.1. Теорія

Робимо заміну для безрозмірного рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} &= 0 \\ 4\varphi_1 &= 4\varphi_0 + 4h\varphi'_0 + \frac{2h^2}{3}\varphi''_0 + O(h^3) \\ \varphi_2 &= \varphi_0 + 2h\varphi'_0 + \frac{2h^2}{2}\varphi''_0 + O(h^3) \\ 4\varphi_1 - \varphi_2 &= 3\varphi_0 + 2h\varphi'_0 \\ \varphi'_0 &= \frac{4\varphi_1 - \varphi_2 - 3\varphi_0}{2h} + O(h^2) \\ 4\varphi_{N-1} &= 4\varphi_N - 4h\varphi'_N + \frac{2h^2}{3}\varphi''_N \\ \varphi_{N-2} &= \varphi_N - 2h\varphi'_N + \frac{2h^2}{2}\varphi''_N \\ 4\varphi_{N-1} - \varphi_{N-2} &= 3\varphi_N - 2h\varphi'_N \\ \varphi'_N &= \frac{3\varphi_N + \varphi_{N+2} - 4\varphi_{N-1}}{2h} + \gamma_1 \varphi_N = 0 \end{aligned}$$

Рис. 1. Теорія

$$\begin{aligned}
\frac{(u_i^{\hat{\delta}+1} - u_i^{\hat{\delta}})}{\tau} &= \left(\frac{1}{x} (x(2u^{\hat{\delta}+1} + (1-\delta)u^{\hat{\delta}})) \right)_{x,i}; \\
x_i(u_i^{\hat{\delta}+1} - u_i^{\hat{\delta}}) &= \frac{\tau}{h} (x_{i+\frac{1}{2}}(2u^{\hat{\delta}+1} + (1-\delta)u^{\hat{\delta}})_{x,i+1} - \\
&\quad - x_{i-\frac{1}{2}}(2u^{\hat{\delta}+1} + (1-\delta)u^{\hat{\delta}})_{x,i}); \\
x_i(u_i^{\hat{\delta}+1} - u_i^{\hat{\delta}}) &= \frac{\tau}{h^2} (x_{i+\frac{1}{2}}(2(u_{i+1}^{\hat{\delta}+1} - u_i^{\hat{\delta}+1}) + (1-\delta)(u_{i+1}^{\hat{\delta}} - u_i^{\hat{\delta}})) \\
&\quad - x_{i-\frac{1}{2}}(2(u_i^{\hat{\delta}+1} - u_{i-1}^{\hat{\delta}+1}) + (1-\delta)(u_i^{\hat{\delta}} - u_{i-1}^{\hat{\delta}}))) \\
x_i u_i^{\hat{\delta}+1} - \frac{\tau}{h^2} (x_{i+\frac{1}{2}} 2(u_{i+1}^{\hat{\delta}+1} - u_i^{\hat{\delta}+1})) &= x_{i-\frac{1}{2}} 2(u_i^{\hat{\delta}+1} - u_{i-1}^{\hat{\delta}+1}) \\
&= x_i u_i^{\hat{\delta}} + \frac{\tau}{h^2} (1-\delta) (x_{i+\frac{1}{2}}(u_{i+1}^{\hat{\delta}} - u_i^{\hat{\delta}}) - \\
&\quad - x_{i-\frac{1}{2}}(2u_i^{\hat{\delta}} - u_{i-1}^{\hat{\delta}})) \\
&= \frac{\tau}{h^2} x_{i-\frac{1}{2}} 2u_{i-1} + (x_i + \frac{\tau}{h^2} 2x_{i+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{h^2} 2x_{i-\frac{1}{2}}) u_i - \\
&= \frac{\tau}{h^2} x_{i+\frac{1}{2}} 2u_{i+1} =
\end{aligned}$$

Рис. 2. Теорія

1.2. Алгоритм

Фізичні змінні:

$$u_1 = 20. + 273.15 \quad (1)$$

$$u_0 = -20. + 273.15 \quad (2)$$

$$\lambda = 0.77 \quad (3)$$

$$c = 830. \quad (4)$$

$$\rho = 1600. \quad (5)$$

$$\gamma = 7. \quad (6)$$

$$R = 0.5 \quad (7)$$

$$T = 3600 \quad (8)$$

Перехід до безрозмірених змінних:

$$T_1 = \lambda / (c \cdot \rho \cdot R^2) \cdot T \quad (9)$$

$$\gamma_1 = R / \lambda \cdot \gamma \quad (10)$$

Параметри різницевої схеми:

$$N = 20 \quad (11)$$

$$M = 20 \quad (12)$$

$$\tau = T_1 / M \quad (13)$$

$$h = 1 / N \quad (14)$$

Різницева схема:

$$A_{i,i-1} = -\sigma \cdot \tau / h^2 \cdot x_{i-0.5} \quad (15)$$

$$A_{i,i+1} = -\sigma \cdot \tau / h^2 \cdot x_{i+0.5} \quad (16)$$

$$A_{i,i} = x_i - A_{i,i-1} - A_{i,i+1} \quad (17)$$

$$\varphi_i = x_i \cdot y_i + \tau \cdot (1 - \sigma)/h^2 \cdot (x_{i+0.5} \cdot (y_{i+1} - y_i) - x_{i-0.5} \cdot (y_i - y_{i-1})) \quad (18)$$

Ліві крайові умови:

$$A_{0,0} = -3 \quad (19)$$

$$A_{0,1} = 4 \quad (20)$$

$$A_{0,2} = -1 \quad (21)$$

$$\varphi_0 = 0 \quad (22)$$

Праві крайові умови

$$A_{N,N} = 3 + 2 \cdot h \cdot \gamma_1 \quad (23)$$

$$A_{N,N-1} = -4 \quad (24)$$

$$A_{N,N-2} = 1 \quad (25)$$

$$\varphi_N = 0 \quad (26)$$

СЛАР:

$$A \cdot y = \varphi \quad (27)$$

Повторюємо кроки 15-27 M разів.

2. Інтего-інтерполяційним метод

2.1. Теорія

Розглядається задача $Au=f$ з крайовими умовами. Головна ідея полягає в тому що б протабулювати значення функції на сітці. Крайові рівняння обирається так, щоб задовольняти крайовим умовам. Тобто

§ 16. Розв'язування одновимірного рівняння теплопровідності

Постановка задачі. В області $\bar{Q}_T = \{a \leq x \leq b, 0 \leq t \leq T\}$ знайти розв'язок одновимірного нестационарного рівняння теплопровідності

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{x^m} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^m k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x, t)u + f(x, t), \quad x \in (a, b), t > 0, \quad (1)$$

яке задовольняє початкові умови

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [a, b] \quad (2)$$

і крайові умови

$$\begin{aligned} \alpha_1 k(a, t) \frac{\partial u(a, t)}{\partial x} &= \beta_1 u(a, t) - \mu_1(t); \\ -\alpha_2 k(b, t) \frac{\partial u(b, t)}{\partial x} &= \beta_2 u(b, t) - \mu_2(t), \end{aligned} \quad (3)$$

де $k(x, t), q(x, t), f(x, t), u_0(x), \mu_1(t), \mu_2(t)$ задані функції; α_k, β_k ($k = 1, 2$) — задані невід'ємні сталі, причому виконуються нерівності $0 < k_0 \leq k(x, t) \leq k_1, q(x, t) \geq 0, \alpha_k^2 + \beta_k^2 \neq 0, k = 1, 2$ (k_0, k_1 — деякі сталі).

169

Рис. 3. Теорія

Методичні вказівки. Розглянемо різницьві методи розв'язування задачі (1) — (3). В області \bar{Q}_T введемо сітку $\bar{\omega}_{h,\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$, де $\bar{\omega}_h = \{x_i = a + ih, h = (b - a)/N, i = 0, 1, \dots, N\}$; $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, \tau = T/M, j = 0, 1, \dots, M\}$. Позначимо $y_{ij} = y(x_i, t_j)$.

За допомогою інтегро-інтерполяційного методу апроксимуємо задачу (1) — (3) різницевою схемою з ваговими коефіцієнтами [22, с. 378—381, с. 398—405]:

$$\begin{aligned} \bar{x}_i^m y_{i,i}^j = & \sigma (\bar{p} y_{x,i}^{j+1})_{x,i} - \sigma \bar{x}_i^m \bar{q}_i y_i^{j+1} + (1 - \sigma) (\bar{p} y_{x,i}^j)_{x,i} - \\ & - (1 - \sigma) \bar{x}_i^m \bar{q}_i y_i^j + \bar{x}_i^m \bar{f}_i, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} i = 1, 2, \dots, N-1, j = 1, 2, \dots, M, y_i^0 = u_0(x_i), \\ i = 0, 1, \dots, N; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma \alpha_1 \bar{p}_1 y_{x,1}^{j+1} + (1 - \sigma) \alpha_1 \bar{p}_1 y_{x,1}^j = & x_0^m \beta_1 \sigma y_0^{j+1} + (1 - \sigma) \beta_1 x_0^m y_0^j - x_0^m \bar{\mu}_1 + \\ & + \frac{h}{2} \alpha_1 \bar{x}_0^m y_{i,0}^j - \frac{h}{2} \alpha_1 \bar{x}_0^m (\bar{f}_0 - \sigma \bar{q}_0 y_0^{j+1} + (1 - \sigma) \bar{q}_0 y_0^j); \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} - \sigma \alpha_2 \bar{p}_N y_{x,N}^{j+1} - (1 - \sigma) \alpha_2 \bar{p}_N y_{x,N}^j = & \sigma x_N^m \beta_2 y_N^{j+1} + (1 - \sigma) \beta_2 x_N^m y_N^j - \\ - x_N^m \bar{\mu}_2 + \frac{h}{2} \alpha_2 \bar{x}_N^m y_{i,N}^j - \frac{h}{2} \alpha_2 \bar{x}_N^m (\bar{f}_N - \sigma \bar{q}_N y_N^{j+1} - (1 - \sigma) \bar{q}_N y_N^j), \end{aligned} \quad (6)$$

де

$$\bar{x}_0^m = h^{-1} \int_0^{x_1} x^m dx; \quad \bar{x}_N^m = h^{-1} \int_{x_{N-1}}^{x_N} x^m dx;$$

$$\bar{x}_i^m = (2h)^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} x^m dx, \quad i = 2, 3, \dots, N-1;$$

$$\begin{aligned} \bar{p}_i = x_{i-1/2}^m \bar{k}_{i-1/2}, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad \bar{S}_i = s_j^{j+\sigma} = s(x_i, t_j + \sigma\tau), \\ i = 0, 1, \dots, N; \quad j = 0, 1, \dots, M-1. \end{aligned}$$

Покладаючи в (4) — (6) $\sigma = 0$, дістаємо явну схему; при $\sigma = 1$ — схему з випередженням (повністю неявну схему); при $\sigma = 0,5$ — симетричну схему Кранка — Ніколсона, яка записується на шаблоні з шести вузлів.

У разі досить гладких вихідних даних різницева схема (4) — (6) стійка при $\sigma \geq 0,5$ і має місце рівномірна збіжність її зі швидкістю $O(h^2 + \tau^{m\sigma})$, де

$$m_\sigma = \begin{cases} 2 & \text{при } \sigma = 0,5; \\ 1 & \text{при } \sigma \neq 0,5. \end{cases}$$

Рис. 4. Теорія

Різницєва схема (4) — (6) при $\sigma \neq 0$ буде неявною, тому y_i^{l+1} знаходиться як розв'язок СЛАР з тридіагональною матрицею, а саме:

$$\begin{aligned} c_1 v_1 + b_1 v_2 &= \varphi_1; \\ d_i v_{i-1} + c_i v_i + b_i v_{i+1} &= \varphi_i, \quad i = 2, 3, \dots, N; \\ d_{N+1} v_N + c_{N+1} v_{N+1} &= \varphi_{N+1}, \end{aligned} \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} b_1 &= \sigma \frac{\tau}{h^2} \alpha_1 \tilde{p}_1; \quad c_1 = -\sigma \frac{\tau}{h} \beta_1 \tilde{x}_0^m - \frac{\alpha_1}{2} \tilde{x}_0^m - \\ &\quad - \sigma \frac{\tau}{2} \alpha_1 \tilde{x}_0^m \tilde{q}_0 - b_1; \\ \varphi_1 &= (1 - \sigma) \frac{\tau}{h} \beta_1 \tilde{x}_0^m y_0^l - \frac{\tau}{h} \tilde{x}_0^m \mu_2 - \frac{\alpha_1}{2} \tilde{x}_0^m y_0^l - \\ &\quad - \frac{\tau}{2} \alpha_1 \tilde{x}_0^m \tilde{f}_0 + (1 - \sigma) \frac{\tau}{2} \alpha_1 \tilde{x}_0^m \tilde{q}_0 y_0^l - (1 - \sigma) \frac{\tau}{h^2} \alpha_1 \tilde{p}_1 (y_1^l - y_0^l); \\ d_1 &= \frac{\sigma \tau}{h^2} \tilde{p}_1; \quad b_i = \frac{\sigma \tau}{h^2} \tilde{p}_{i+1}; \quad c_i = -\tilde{x}_i^m - \tau \sigma \tilde{x}_i^m \tilde{q}_i - (d_i + b_i); \\ \varphi_i &= -\tilde{x}_i^m y_i^l - \frac{\tau(1 - \sigma)}{h^2} (\tilde{p}_{i+1} (y_{i+1}^l - y_i^l) - \tilde{p}_i (y_i^l - y_{i-1}^l)) + \\ &\quad + \tau(1 - \sigma) \tilde{x}_i^m \tilde{q}_i y_i^l - \tau \tilde{f}_i \tilde{x}_i^m, \quad i = 2, 3, \dots, N; \\ d_{N+1} &= \sigma \frac{\tau}{h^2} \alpha_2 \tilde{p}_N; \quad c_{N+1} = -\sigma \frac{\tau}{h} \beta_2 \tilde{x}_N^m - \frac{\alpha_2}{2} \tilde{x}_N^m - \sigma \frac{\tau}{2} \alpha_2 \tilde{x}_N^m \tilde{q}_N - d_{N+1}; \\ \varphi_{N+1} &= (1 - \sigma) \frac{\tau}{h} \beta_2 \tilde{x}_N^m y_N^l - \frac{\tau}{h} \tilde{x}_N^m \mu_2 - \frac{\alpha_2}{2} \tilde{x}_N^m y_N^l - \frac{\tau}{2} \tilde{x}_N^m \tilde{f}_N + \\ &\quad + (1 - \sigma) \frac{\tau}{2} \alpha_2 \tilde{x}_N^m \tilde{q}_N y_N^l + (1 - \sigma) \frac{\tau}{h^2} \alpha_2 \tilde{p}_N (y_N^l - y_{N-1}^l). \end{aligned} \quad (8)$$

Таким чином, розв'язавши СЛАР (7), знайдемо значення $y_i^{l+1} = v_{i+1}$ ($i = 0, 1, \dots, N$), якщо відомо розв'язок y_i^l на j -му ярусі (на нульовому ярусі розв'язок задається виразом (5)).

Рис. 5. Теорія

2.2. Алгоритм

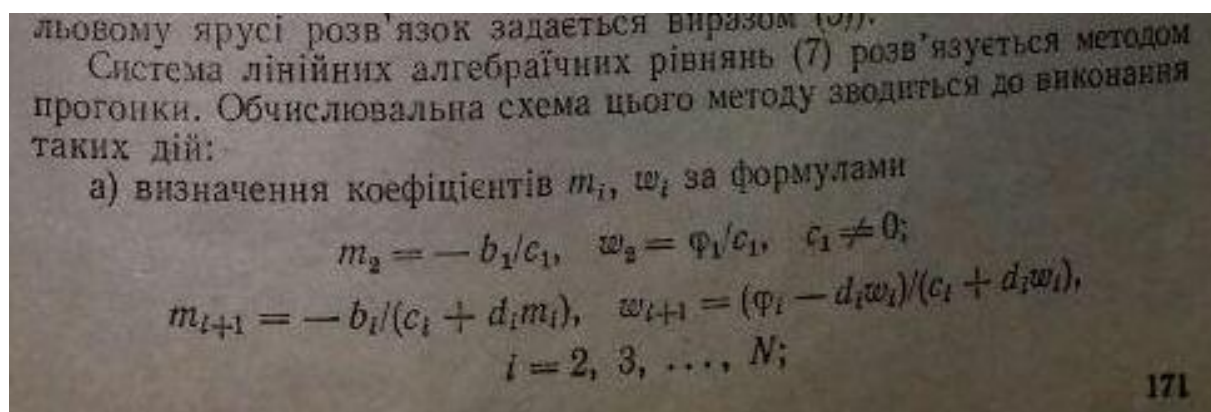


Рис. 6. Алгоритм

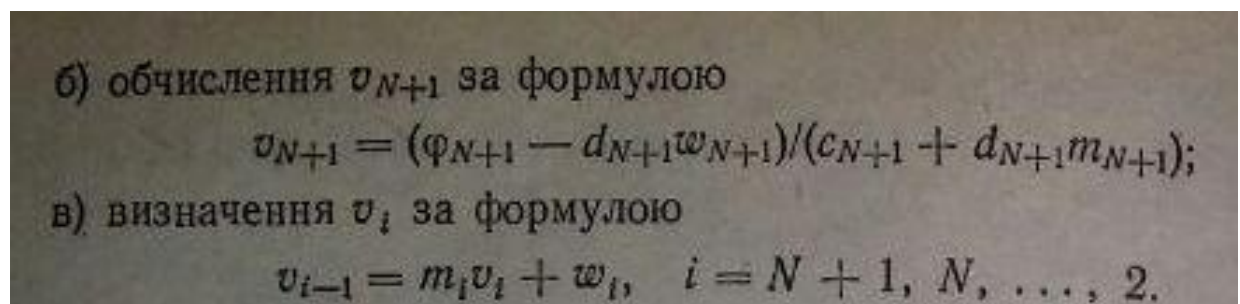


Рис. 7. Алгоритм

3. Практична частина

$n = 10$, $m = 20$, $t = 24h$

20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00
20.00	20.00	20.00	20.00	19.99	19.97	19.91	19.70	18.97	16.40	7.27
20.00	20.00	19.99	19.98	19.94	19.82	19.48	18.56	16.19	10.82	2.27
19.99	19.98	19.96	19.90	19.75	19.38	18.52	16.67	13.09	7.40	-0.43
19.94	19.92	19.85	19.70	19.35	18.61	17.18	14.63	10.58	4.84	-2.41
19.83	19.78	19.64	19.33	18.72	17.61	15.71	12.73	8.44	2.82	-3.93
19.61	19.53	19.29	18.80	17.93	16.48	14.23	10.98	6.61	1.16	-5.16
19.25	19.13	18.79	18.12	17.01	15.29	12.80	9.39	5.01	-0.25	-6.19
18.75	18.60	18.15	17.33	16.02	14.09	11.42	7.93	3.60	-1.47	-7.07
18.12	17.94	17.41	16.45	14.98	12.90	10.11	6.59	2.34	-2.54	-7.84
17.38	17.18	16.57	15.50	13.91	11.72	8.87	5.35	1.20	-3.49	-8.52
16.55	16.33	15.66	14.52	12.84	10.57	7.70	4.21	0.16	-4.34	-9.13
15.65	15.41	14.70	13.50	11.76	9.46	6.58	3.15	-0.79	-5.11	-9.68
14.69	14.45	13.71	12.47	10.70	8.38	5.52	2.15	-1.66	-5.82	-10.18
13.71	13.45	12.70	11.44	9.65	7.34	4.52	1.22	-2.48	-6.47	-10.64
12.70	12.44	11.68	10.41	8.62	6.33	3.55	0.34	-3.23	-7.08	-11.07
11.68	11.42	10.66	9.39	7.62	5.36	2.64	-0.49	-3.94	-7.64	-11.46
10.66	10.41	9.65	8.39	6.64	4.42	1.76	-1.27	-4.61	-8.16	-11.83
9.65	9.40	8.65	7.40	5.68	3.51	0.93	-2.01	-5.24	-8.66	-12.17
8.65	8.40	7.66	6.44	4.76	2.64	0.13	-2.72	-5.83	-9.12	-12.49
7.67	7.42	6.70	5.50	3.86	1.80	-0.64	-3.40	-6.40	-9.56	-12.80

n = 10, m = 10, t = 1h

20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00
20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	19.98	19.60	10.30
20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	19.92	18.84	9.53
20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	19.99	19.81	18.13	8.83
20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	19.97	19.66	17.47	8.19
20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	19.99	19.93	19.47	16.84	7.60
20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	19.99	19.89	19.27	16.25	7.05
20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	19.98	19.84	19.04	15.69	6.53
20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	19.96	19.77	18.80	15.16	6.05
20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	19.99	19.95	19.69	18.55	14.66	5.60
20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	19.99	19.93	19.61	18.29	14.18	5.18

Висновки

Процес проходить досить природньо для цегли. Методичка по інтегро-інтерполяційному методу - жах.