SCHRECK MP2I

Corentin

DM de Physique n°4

1.

Lorsque le régime permanent est atteint, la bobine se comporte comme un fil. On a donc par loi des mailles:

$u_r = E$

loi d'Ohm:

$r i_1 = E$

$$\boxed{i_1 = \frac{E}{r}}$$

2. Un interrupteur ouvert peut être assimilé à une résistance qui tend vers l'infini. Or le courant traversant cette résistance à l'instant où l'interrupteur est ouvert est identique à celui traversant l'interrupteur à l'instant juste avant. Par loi d'Ohm, cela provoque donc une tension qui tend vers l'infini aux bornes de l'interrupteur à l'instant où ce dernier est ouvert. L'air devenant conducteur lorsqu'il est soumis à de fortes tensions, il laisse alors passer l'électricité sous forme d'étincelle. Cela n'est pas souhaitable car elles peuvent endommager les pièces constituant le rupteur.

3. À l'instant précédant l'ouverture, le rupteur est fermé et se comporte comme un fil. La tension à ses bornes est donc nulle. Par loi des mailles, la tension aux bornes du condensateur est donc nulle. Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, la tension aux bornes de ce dernier à l'ouverture du rupteur est donc toujours nulle. Par loi des mailles, la tension aux bornes du rupteur lors de l'ouverture de ce dernier est donc nulle, empêchant la formation d'étincelles.

4.

Loi des mailles:

$$E = U_r + U_L + U_C$$

Loi d'Ohm et loi constitutive de la bobine:

$$E = r i + L\frac{di}{dt} + U_C$$

Loi constitutive du condensateur:

$$E = rC\frac{dU_C}{dt} + L\frac{d}{dt}\left(C\frac{dU_C}{dt}\right) + U_C$$

$$LC\frac{d^2U_C}{dt^2} + rC\frac{dU_C}{dt} + U_C = E$$

Or $q = CU_C$

Donc:

$$L\frac{d^2q}{dt} + r\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$$

$$\frac{d^2q}{dt} + \frac{r}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = \frac{E}{L}$$

On pose:

$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

donc:

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{r}{L}$

donc:

$$Q = \frac{L}{r}\omega_0 = \frac{L}{r}\cdot\frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{\sqrt{LC}}{rC} = \frac{1}{r}\cdot\sqrt{\frac{LC}{C^2}} \boxed{= \frac{1}{r}\cdot\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

$\omega_0^2 q_0 = \frac{E}{L}$

donc:

$$q_0 = \frac{E}{L\cdot\omega_0^2} = \frac{E}{L\cdot\frac{1}{LC}} \boxed{= CE}$$

On a donc:

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\cdot\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \omega_0^2 q_0}$$

5.

$i_1 = C\frac{dU_C}{dt}$

Or à $t=0^-$, la tension aux bornes du condensateur est nulle et constante.

Donc:

$$\boxed{i(t=0^-) = 0}$$

À $t=0^+$, la bobine impose un courant i_1 aux bornes du condensateur. Or à $t=0^-$ le circuit est en régime permanent. On a donc $i_1(t=0^-) = \frac{E}{r}$.

Par continuité de l'intensité aux bornes d'une bobine:

$$i(t=0^+) = i_1(t=0^+) = i_1(t=0^-) \boxed{= \frac{E}{r}}$$

À $t=0^-$, le rupteur est fermé depuis un temps très long et la tension aux bornes du condensateur est nulle, il est donc déchargé. Donc:

$$\boxed{q(t=0^-) = 0}$$

Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur:

$CU_C(t=0^+) = CU_C(t=0^-)$

$q(t=0^+) = q(t=0^-) \boxed{= 0}$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dCU_C}{dt} = C\frac{dU_C}{dt} = i$$

Donc:

$$\left.\frac{dq}{dt}\right|_{0^-} = i(0^-) \boxed{= 0}$$

$$\left.\frac{dq}{dt}\right|_{0^+} = i(0^+) \boxed{= \frac{E}{r}}$$

6. Nous pouvons voir sur la courbe que la valeur absolue de la tension aux bornes de la bougie dépasse plusieurs fois les 5 kV avant de retomber en dessous. Chaque passage au dessus des 5 kV générant une nouvelle étincelle, nous observons donc plusieurs étincelles aux bornes de la bougie.

7. Par lecture graphique, la valeur absolue de la tension aux bornes de la bougie dépasse les 5 kV 9 fois, la fermeture du rupteur entraînera donc la formation de 9 étincelles.

8.

$$U_2 = k\frac{di_1}{dt}$$

$$L_2\frac{di_2}{dt} = k\frac{di_1}{dt}$$

$$i_2 = \frac{k}{L_2}i_1$$

$$i_2 = \frac{kC}{L_2}\frac{dU_C}{dt}$$

U_2 présente un comportement oscillant. i_2 est donc également une grandeur oscillante. i_1 est donc également une grandeur oscillante. Donc U_C présente également un comportement oscillatoire. Nous sommes donc dans un régime pseudo-périodique. On a donc:

$$\boxed{Q > \frac{1}{2}}$$

9.

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \omega_0^2 q_0$$

Solution de l'équation homogène associée:

Polynôme caractéristique:

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$$

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2$$

$$= \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$$

$Q > \frac{1}{2}$ donc $\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right) < 0$

Donc:

$$\sqrt{\Delta} = j\,\omega_0\sqrt{4 - \frac{1}{Q^2}}$$

Donc:

$$r = \frac{\omega_0}{2Q} \pm j\,\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

On pose $\mu = \frac{\omega_0}{2Q}$, $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

La solution de l'équation homogène associée est donc:

$$q_h = (A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))e^{-\mu t}$$

Solution particulière:

$\omega_0^2 q_p = \omega_0^2 q_0$

$q_p = q_0$

Solution générale:

$$q = q_h + q_p = (A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))e^{-\mu t} + q_0$$

Conditions initiales:

$q(t=0) = 0$

$(A\cos(0) + B\sin(0))e^{-0} + q_0 = 0$

$A + q_0 = 0$

$A = -q_0$

$\left.\frac{dq}{dt}\right|_0 = 0$

$$-\omega A\sin(0)e^{-0} - \mu\cdot A\cos(0)e^{-0} + \omega B\cos(0)e^{-0} - \mu B\sin(0)e^{-0} = 0$$

$-\mu A + \omega B = 0$

$B = -\frac{\mu q_0}{\omega}$

On a donc:

$$q(t) = (-q_0\cos(\omega t) + \mu q_0\sin(\omega t))e^{-\mu t} + q_0$$

$$\boxed{q(t) = q_0\left(1 - \left(\cos(\omega t) + \frac{\mu q_0}{\omega}\sin(\omega t)\right)e^{-\mu t}\right)}$$

10.

$$\frac{d^2q}{dt} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \omega_0^2 q_0$$

On pose $x = q$ et $y = \frac{dq}{dt}$

On a donc:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{\omega_0}{Q}y - \omega_0^2 x + \omega_0^2 q_0 \end{cases}$$

11.

```
def fun_q_condensateur(V,t):
    x, y = V
    dx = y
    dy = -(omega_0/Q)*y - omega_0**2 *x + omega_0**2 * q_0
```

12.

Calcul de l'inductance de L:

Par lecture graphique sur la courbe représentative de u_2:

$T = 2{,}4\cdot 10^{-3}$ s

Méthode 1: utilisation de l'approximation $\omega = \omega_0$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{2\pi}{T}$$

$$LC = \frac{T^2}{4\pi^2}$$

$$L = \frac{T^2}{4C\pi^2}$$

Application numérique:

$$L = \frac{(2{,}4\cdot 10^{-3})^2}{4\cdot 10^{-5}\cdot\pi^2} = 0{,}015\text{ H}$$

Méthode 2: calcul avec l'expression littérale exacte de ω

$$\omega = \omega_0\cdot\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{4Q^2}}{LC}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{4\left(\frac{1}{r^2}\cdot\frac{L}{C}\right)}}{LC}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \frac{r^2C}{4L}}{LC}}$$

$$LC\omega^2 = 1 - \frac{r^2C}{4L}$$

$$LC\omega^2 + \frac{r^2C}{4L} = 1$$

$$L^2C\omega^2 - L + r^2C = 0$$

$$L^2C\frac{4\pi^2}{T^2} - L + r^2C = 0$$

$$\Delta = 1 - 4C\frac{4\pi^2}{T^2}r^2C = 1 - \frac{16\pi^2}{T^2}r^2C^2$$

$$= 1 - \left(\frac{4\pi}{T}rC\right)^2$$

$$L_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{4\pi}{T}rC\right)^2}}{2C\frac{4\pi^2}{T^2}}$$

$$L_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{4\pi}{T}rC\right)^2}}{2C\frac{4\pi^2}{T^2}} = 0{,}014\text{ H}$$

Application numérique:

$$L_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4\pi}{2{,}4\cdot 10^{-3}}\cdot 6\cdot 10^{-5}}}{2\cdot 10^{-5}\cdot\frac{4\pi^2}{(2{,}4\cdot 10^{-3})^2}} = 3{,}7\cdot 10^{-4}\text{ H}$$

$$L_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4\pi}{2{,}4\cdot 10^{-3}}\cdot 6\cdot 10^{-5}}}{2\cdot 10^{-5}\cdot\frac{4\pi^2}{(2{,}4\cdot 10^{-3})^2}} = 0{,}014\text{ H}$$

Nous prenons donc $L = 0{,}014$ H car cette valeur peut être considérée comme commune aux deux méthodes de calcul.

On détermine ω_0 et Q en fonction des grandeurs caractéristiques des composants du circuit comme exprimé en question 4.

On prend l'opposé de q_0 pour tracer la courbe représentative de $-q(t)$ qui correspond donc à l'allure de la courbe représentative de $u_2(t)$.

13.

Les courbes des solutions analytique et numérique se superposent, ces deux méthodes de résolution sont donc équivalentes. Il semblerait cependant que l'approximation $u_2 = -kq$ ne soit pas cohérente car u_2 oscille entre des valeurs positives et négatives et tend vers 0 tandis que $-q$ est négative et tend vers $-q_0$.