Traspuesta y traza

Definición:

1) Dada una matriz $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, la matriz traspuesta $A^t \in \mathbb{K}^{n \times m}$ es aquella que tiene por columnas las filas de A.

Formalmente, si $A = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}}$

$$\Rightarrow A^t = (a_{ji})_{\substack{j=1,\dots,n \\ i=1,\dots,m}}$$

Ej: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Propiedades:

- $(A^t)^t = A$
- $(\alpha A)^t = \alpha A^t$
- $(A \cdot B)^t = B^t A^t$

Ejercicio: Hacer dem. de cada prop.

Para la propiedad del producto usar la definición del producto de matrices y la de traspuesta. (Ej 11 P1)

2) La traza de una matriz A cuadrada ($tr(A)$) se define como la suma de los elementos de la diagonal.

$$A = (a_{ij})_{i,j=1\dots n}$$

$$\Rightarrow tr(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Ej: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow tr(A) = 1+5+9 = 15.$

Propiedades: $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$

(matrices cuadradas de misma dimensión)

- $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$

- $tr(\alpha A) = \alpha\, tr(A)$ • $tr(A^t) = tr(A)$
- $tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$

<u>Ejercicio</u>: hacer una demostración de cada propiedad (Ej 11 P1).
Para la del producto usar definición del producto.

3) Una matriz A cuadrada se dice simétrica si es igual a su traspuesta.
$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es simétrica si $A = A^t$.

<u>Propiedad</u>: $A \cdot A^t$ y $A^t A$ son simétricas

Ejercicio: hacer una dem. de eso (ej

Matriz identidad e inversa

$$Id_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2\times 2}$$

$$Id_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

Inversa: Dada $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ una matriz cuadrada, A se dice inversible si existe una matriz $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$:

$$A \cdot B = Id_{n \times n} = B \cdot A.$$

En este caso la matriz B es única, se la llama inversa de A y se la nota por A^{-1}.

¿Cómo se busca la inversa de una matriz?

Buscamos B: $A \cdot B = Id_{n \times n}$.

Si miramos esta igualdad por columna, buscamos B:

$$C_1(A \cdot B) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ es decir } A \cdot \underbrace{C_1(B)}_{} = e_1^t$$

buscamos vector $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

es decir, $C_1(B)$ es una solución de

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = e_1^t$$

Resolvemos la matriz ampliada

$$\left(A \,\middle|\, \begin{matrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{matrix}\right)$$

Para la segunda columna

$C_2(A\cdot B) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$, es decir $A\cdot \underbrace{C_2(B)}_{\text{buscamos vector } \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}} = e_2^t$

es decir, $C_2(B)$ es una solución de

$$A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = e_2^t$$

Resolvemos la matriz ampliada

$$\left(A \,\middle|\, \begin{matrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{matrix}\right).$$

y así ..... para la columna n:

$C_n(A\cdot B) = \begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix}$, es decir $A\cdot \underbrace{C_n(B)}_{\text{buscamos vector } \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}} = e_n^t$

es decir $C_n(B)$ es una solución de

$$A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = e_n^T$$

Resolvemos la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \end{array}\right).$$

Es decir, tenemos que resolver n- sistemas lineales $A.X = e_i$ con $i = 1 \ldots n$. Escribimos todo junto

$$\left(\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ A & 0 & 1 & & \vdots \\ & \vdots & & \ddots & 0 \\ & 0 & 0 & \cdots 0 & 1 \end{array}\right),$$ de esta manera

cuando terminemos de triangular, si llegamos a:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots & & \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right)$$

↳ Acá tendremos la columna n de B que buscábamos.

acá tendremos la columna 1 de B que buscábamos

$\Rightarrow$ esa $B = (b_{ij})_{i,j=1\dots n}$ es la matriz que hace que $A \cdot B = Id$.

Si en cambio al hacer eliminación Gaussiana llegamos a una fila de ceros del lado izquierdo, tendremos que no existe la B buscada y por lo tanto la matriz A no es inversible.

Inversa a derecha y rango

Hasta aquí mostramos que dada una matriz cuadrada $A \in \mathbb{k}^{n\times n}$ si existe solución de $Ax=b$ para cualquier $b \in \mathbb{k}^n$, entonces podemos construir $B \in \mathbb{k}^{n\times n}$: $A \cdot B = Id_{n\times n}$.

Pero sabemos que existe solución única de $Ax=b$ para cualquier b es si y solo si al hacer operaciones permitidas de fila llegamos a $(\tilde{A}|\tilde{b})$ escalonada que no tiene ninguna fila de ceros. O sea

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots \; 0 & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{con } \tilde{a}_{ii} \neq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Esto nos dice que

$$rg(\tilde{A}) = \dim < F_1(\tilde{A}), \ldots, F_n(\tilde{A}) > = n \text{ y}$$

como $< F_1(A), \ldots, F_n(A) > = < F_1(\tilde{A}), \ldots, F_n(\tilde{A}) >$ estos subespacios deben tener misma dim con lo cual

$$rg(A) = \dim < F_1(A), \ldots, F_n(A) > = n$$

Luego, vimos que: Dado $A \in \mathbb{k}^{n \times n}$

Existe $B \in \mathbb{k}^{n \times n}$: $A \cdot B = Id_{n \times n}$ si y solo si $rg(A) = n$.

Veamos ahora que si existe B: $AB = Id_{n \times n}$ entonces existe C : $C \cdot A = Id_{n \times n}$ y además $B = C = A^{-1}$.

Supongamos que pudimos encontrar B:

$AB = Id_{n\times n}$ (con la técnica que planteamos arriba) $\Rightarrow rg(A) = n$

Veamos que existe C: $C \cdot A = Id_{n\times n}$.

Buscamos C: $C \cdot A = Id_{n\times n} \Rightarrow$ mirando ahora operaciones de fila, debe ser

$$F_i(CA) = F_i(C) \cdot A = e_i$$

$\Rightarrow$ resolvemos los sistemas lineales:

$$\underset{\sim}{x} \cdot A = e_i$$

$x \in \mathbb{R}^{1\times n}$ será la fila i de C

que trasponiendo: $A^t \, x^t = e_i^t$

y como $rg(A^t) = rg(A) = n$ vemos que debe tener única solución para cada i

y entonces podemos construir C: $C A = Id_{n\times n}$

Tenemos entonces $A \cdot B = Id$ y $C \cdot A = Id$

$\Rightarrow$ multiplicando la 1^{era} ec. por C a izquierda nos queda

$$C\cdot(AB) = C\cdot Id \Rightarrow \underbrace{(C\cdot A)}_{\substack{\shortparallel \\ Id}}\cdot B = C$$

$$\Rightarrow \quad B = C.$$

luego mostramos lo que queríamos.

Además, podemos concluir que

A inversible $\Leftrightarrow rg(A) = n$.

<u>Relación entre sistemas lineales e inversa:</u>

Dada una matriz cuadrada $A \in \mathbb{k}^{n\times n}$

Son equivalentes:

1) El sistema $Ax = b$ tiene solución única para un b particular

2) El sistema $Ax = b$ tiene solución única para todo b.

3) A es inversible.

Dem:

1) $\Rightarrow$ 2) Sea b fijo, al hacer eliminación de Gauss a la matriz ampliada $(A|b)$ llegamos a $(\tilde{A}|\tilde{b})$ donde $\tilde{A}$ no tiene ninguna fila de ceros.
De hecho al ser A cuadrada, llegamos a una matriz triangular inferior (con ceros debajo de la diagonal) y elementos de la diagonal no nulos.

Pero esto es independiente de quién sea el b que tome.
Luego para cualquier b tendremos lo mismo.

2) $\Rightarrow$ 3).

Como hicimos antes, si tomamos $Ax = e_i$ y resolvemos, cada solución única de este sistema es la columna i de la matriz inversa.

3) $\Rightarrow$ 1) Si A es invertible $\Rightarrow$ $\exists\, A^{-1}$:

$$A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = Id_{n\times n}$$

luego $x = A^{-1}b$ es una solución de $Ax=b$ ya que $A\cdot(A^{-1}b)$

$$= (AA^{-1})\cdot b = Id_{n\times n}\cdot b = b.$$

Además es única ya que si x es solución de manera que $Ax=b$

$$\Rightarrow \underbrace{A^{-1}(Ax)} = A^{-1}\cdot b$$

$$\Rightarrow \quad x = A^{-1}b \text{, es decir}$$

x debe ser $A^{-1}\cdot b$.

Determinante:

Queremos definir una función

$$G: \mathbb{K}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{K}$$

que me diga si una matriz es inversible o no. Por ej. serviría algo así:

$$G(A) \neq 0 \iff A \text{ no inversible.}$$

Como ya sabemos la función

$$\det : \mathbb{K}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{K}$$

es lo que nos sirve ya que

$$\det(A) \neq 0 \iff A \text{ es inversible}$$

Recordemos:

1. $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$.

2. $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \overset{\text{por fila } 1}{=}$

$$a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

En general se define recursivamente

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A(i|j))$$

para cualquier $i = 1 \dots n$, donde

$A(i|j)$ = submatriz de A resultante de quitar fila i y columna j.

Este es el desarrollo por la fila i. Se puede hacer también por columna.

<u>Propiedades del determinante:</u>

1) $\det(Id_{n\times n}) = 1$

2) $$\det\begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i + F_i' \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i' \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$$

3) $\det\begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ \alpha F_i \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} = \alpha \det\begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$

4) $\det\begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \\ F_i \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} = 0.$

A las propiedades 2) 3) y 4) se las llama multilineal alternada por filas.

Se puede definir lo mismo por columnas.

Se puede probar que det es la única aplicación $G: \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ que satisface 1), 2), 3), 4).

Con esas propiedades alcanza para detectar si una matriz en $\mathbb{K}^{n\times n}$ es inversible o no ya que:

$$A \in \mathbb{K}^{n\times n} \text{ no inversible}$$

$$\Updownarrow$$

$$rg(A) < n$$

$$\Updownarrow$$

alguna fila de A se escribe como comb. lineal de las otras

$$\Updownarrow \quad \text{usando propiedades}$$

$$\det(A) = 0.$$

Idea de esto último: Si $A = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$ y por ejemplo $F_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i F_i$

$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_{n-1} \\ \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i F_i \end{pmatrix} \underset{\text{Prop}}{=} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \underbrace{\det\begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_{n-1} \\ F_i \end{pmatrix}}_{=0}$$

porque en $\begin{matrix} F_1 \\ \vdots \\ F_{n-1} \\ F_i \end{matrix}$ → acá esta F_i con $i=1 \dots n-1$ se repite una fila

luego $\det(A) = 0$.

Otras propiedades del det:

- Si A es triangular superior, es decir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots \; 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

(basta elegir por columna 1 en cada paso).

- Lo mismo si A es triangular inferior,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{2n} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

- $\det(A) = \det(A^t)$.

- $\det(\alpha A) = \alpha^n \cdot \det(A)$

- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

- $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$ si A es inversible.

<u>Proposición</u>: A inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

<u>Dem</u>:

$\Rightarrow$) Si A es inversible $\Rightarrow$ existe A^{-1}: $A \cdot A^{-1} = Id$

$\Rightarrow \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$.

$\Rightarrow \det(A) \neq 0$

$\Leftarrow$) $\det A \neq 0 \Rightarrow A$ inversible es equivalente a probar que

A no inversible $\Rightarrow \det A = 0$

Si A no es inversible $\Rightarrow rg(A) < n$

$\Rightarrow$ existe una fila que es combinación lineal de las otras,

supongamos sin pérdida de generalidad que $F_n = \alpha_1 F_1 + \dots + \alpha_{n-1} F_{n-1}$

$$\Rightarrow \det(A) = \det \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_{n-1} \\ \alpha_1 F_1 + \dots + \alpha_{n-1} F_{n-1} \end{pmatrix}$$

Por propiedades 2) y 3)

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \underbrace{\det \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_{n-1} \\ F_i \end{pmatrix}}_{=0}$$

Acá está F_i

$=0$ por propiedad 4)

para todo i, ya que para cada i entre 1 y $n-1$, esa fila ya está repetida encima.