Nombre y apellido:

Número de libreta:

1	2	3	4	Calificación

Álgebra Lineal Computacional

Examen Final – 5 de marzo de 2024

Ejercicio 1: (2.5 pts) **Ejercicio 1:** (2.5 pts) Dada la base $B = \{(1,2,0);(0,1,1);(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y la transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$|f|_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Dar una base de $Nu(f)$ y de $Im(f)$.
b) Decidir si $\mathbb{R}^3 = Nu(f) \oplus Im(f)$.
c) Definir $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ proyector ortogonal tal que $Im(P) = Im(f)$.

Ejercicio 2: (2.5 pts) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz inversible, de la cual se conoce su descomposición en valores singulares $A = U\Sigma V^t$ y su descomposición $A = QR$.

a) Probar que A y R tienen los mismos valores singulares.
b) Probar que toda matriz ortogonal y triangular resulta ser diagonal con ± 1's en su diagonal. Deducir que si $U = Q$ entonces V y R son matrices diagonales.
c) Sea $n = 3$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$ una matriz ortogonal con columnas q_1, q_2, q_3, y R una matriz diagonal con $r_{11} = 2, r_{22} = 1, r_{33} = -2$. Hallar la matriz singular (en términos de las columnas q_i de Q y los r_{ii}) que mejor aproxima a A en norma 2.

Ejercicio 3: (2.5 pts)

a) Probar que si los elementos de las filas de una matriz suman λ entonces λ es autovalor de la matriz. Concluir que si los elementos de las columnas de una matriz suman λ entonces λ también es autovalor de la matriz y que por lo tanto 1 es siempre autovalor de una matriz de Markov.
b) Un grupo de mariposas polinizan tres flores diferentes (A, B y C). Cada minuto cambian de flor. Como las flores A y C están lejos, ninguna que esté en A va a C y ninguna va de C a A. Además, cada minuto la mitad de las mariposas que están en C van a B, la mitad de las que están en B van a C y la mitad de las que están en A van a B. Ninguna se queda en B.

   Hallar la matriz de transición P y si existe, P^∞. Además decidir cuántas mariposas habrá a largo plazo en cada flor si inicialmente hay 4 en A, 8 en B y ninguna en C.

Ejercicio 4: (2.5 pts) Sean α y β los parámetros obtenidos por cuadrados mínimos para la aproximación por una recta $y = \alpha x + \beta$ al conjunto de mediciones $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\dots,n}$.

a) Probar que si se multiplican los valores x_i por una constante c, entonces α se multiplica por $1/c$ y β no se modifica.
b) Sea $n = 3$. Para $i = 1, 2, 3$ se define $x_i = i - 2, y_i = |i - 2|$. Calcular los valores de α y β y el error cometido en la aproximación.
c) Volver a calcular los valores de α y β si los valores de x_i se multiplican por 3. Interpretar geométricamente. ¿Se modifica el error cometido?

Justifique todas sus respuestas

②

a)

$$A = QR \quad \text{con} \quad QQ^t = I$$

$$A^tA = (QR)^t QR = R^t Q^t Q R$$

$$= R^t I R = R^t R$$

$\therefore$ $A^tA = R^tR \Rightarrow$ mismos val. sing.

b)

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots \\ & R_{22} & \vdots \\ 0 & & \ddots & R_{nn} \end{pmatrix}$$

$$R^tR = I$$

pero $R^tR = \begin{pmatrix} R_{11} & & 0 \\ R_{12} & R_{22} & \\ \vdots & & \ddots \\ & & & R_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots \\ & R_{22} & \vdots \\ 0 & & \ddots & R_{nn} \end{pmatrix}$

Fila 1:

Arrancamos con $R_{11}^2 = 1 \Rightarrow R_{11} = \pm 1$

despues $R_{11} \cdot R_{1i} = 0 \ \forall\, 1 < i \leq n \Rightarrow R_{1i} = 0$

Fila 2:

Seguimos con $R_{12}^2 + R_{22}^2 = 1 \Rightarrow R_{22} = \pm 1$

después $R_{12} \cdot R_{1i} + R_{22} \cdot R_{2i} = 0 \quad \forall\, 2 < i \leq n$

$\Rightarrow R_{2i} = 0$

Esto pasa para toda fila.

$\therefore R_{ii} = \pm 1 \quad \forall\, 0 < i \leq n$

$\wedge\ R_{ij} = 0 \quad \forall\, 0 < i, j \leq n \quad i \neq j$

$\blacksquare$

$QR = Q \Sigma V^t$

$R = \Sigma V^t$

$$R = \begin{pmatrix} \text{---} & \sigma_1 v_1 & \text{---} \\ \text{---} & \sigma_2 v_2 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & \sigma_n v_n & \text{---} \end{pmatrix}$$

Pero R es triang sup. y V es ortogonal.

Por lo tanto R es ortogonal y triang sup. $\Rightarrow R$ diag

Pero si R es diag

ΣV^t tiene que ser diagonal. y Σ es diag.

$\Rightarrow V$ tiene que ser diagonal

$\blacksquare$

c) $Q = (q_1 \; q_2 \; q_3)$

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^t A = R^t R = R^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

AVAL: $\lambda_{1,2} = 4, \; \lambda_3 = 1$

Val singulares: $\sigma_{1,2} = 2, \; \sigma_3 = 1$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = U \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U = A \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U = QR \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \left(q_1 \middle| q_2 \middle| q_3 \right) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \left(q_1 \middle| q_2 \middle| q_3 \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \left(q_1 \middle| -2 q_3 \middle| \frac{1}{2} q_2 \right)$$

$$A = \left(q_1 \;\middle|\; -2q_3 \;\middle|\; \tfrac{1}{2} q_2 \right) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \left(q_1 \;\middle|\; -2q_3 \;\middle|\; \tfrac{1}{2} q_2 \right) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \left(2q_1 \;\middle|\; 0 \;\middle|\; 0 \right)$$

④ $y = \alpha x + \beta$

$\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\dots,n}$

a)

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ x_i & 1 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} \vdots \\ y_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$A^t A = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{pmatrix}$$

$$A^t y = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \alpha + \sum_{i=1}^{n} x_i \beta = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha + n\beta = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \beta}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Si multiplicamos x_i por c $\Rightarrow$

$$\tilde{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{n} c x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} c x_i \tilde{\beta}}{\sum_{i=1}^{n} c^2 x_i^2}$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{c\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \tilde{\beta}\right)}{c^2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)}$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{c} \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \tilde{\beta}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{c} \alpha$$

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha}{n}$$

$$\tilde{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \tilde{\alpha}}{n}$$

$$\tilde{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} c x_i \frac{1}{c} \alpha}{n}$$

$$\tilde{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha}{n} = \beta$$

$\blacksquare$

5)

x	-1	0	1
y	1	0	1

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A^tA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^t y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

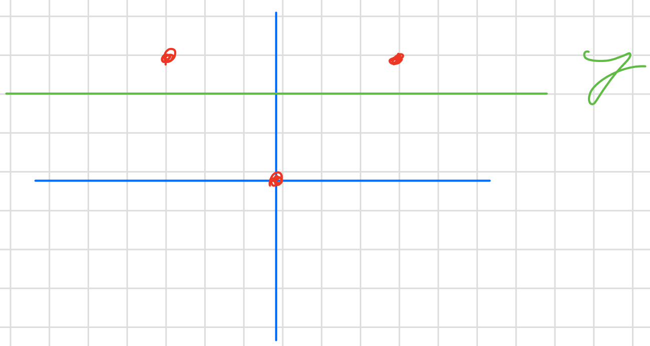
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 2/3 \end{array}$$

$$E = \sum_{i=1}^{3} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \frac{1}{3}^2 + \frac{2}{3}^2 + \frac{1}{3}^2$$

$$= \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

c) $\alpha = 0$

$\beta = 2/3$



No se nota. E pq es igual.

①

a) $Nu(f) = \langle (0,1,0) \rangle$

$Im(f) = \langle (1,1,1), (0,1,1) \rangle$

Paso a canónicas:

$$P_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$Nu(f) = \langle (0,1,1) \rangle$

$Im(f) = \langle (1,3,2), (0,1,2) \rangle$

b) $\mathbb{R}^3 = Nu(f) \oplus Im(f)$

Veo si son LI:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\Rightarrow Nu(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^3$$

c) $v_1 = (1, 3, 2)$

$v_2 = (0, 1, 2)$

$$\tilde{v}_1 = (1, 3, 2) \rightsquigarrow \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = u_1$$

$$\tilde{v}_2 = v_2 - proy_{\tilde{v}_1}(v_2)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{v_2 \, \tilde{v}_1}{\tilde{v}_1 \tilde{v}_1} \tilde{v}_1$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{7}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$v_2 = \frac{2}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} & -1/\sqrt{6} & 0 \\ 3/\sqrt{14} & -1/\sqrt{6} & 0 \\ 2/\sqrt{14} & 2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}$$