Nombre y apellido: Nicolás Bayón

Número de libreta: 160/20

1	2	3	4	Calificación
B-	X	B	B=	7 (siete)

Álgebra Lineal Computacional

Examen Final – 18 de diciembre de 2023

Ejercicio 1: (2.5 pts)

a) Probar que si $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un proyector no nulo y $A = |P|_{\mathcal{E}}$ es la matriz de P en la base canónica, entonces $\|A\|_2 \geq 1$.

b) Dada la base $B = \{(1,0,0); (1,1,0); (1,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y la transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$|f|_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

i) Decidir si f es un proyector.

ii) Construir $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ proyector ortogonal distinto de la identidad tal que $g(v) = v$ para todo $v \in Imf$.

Ejercicio 2: (2.5 pts) Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, n \geq 2$, se dice una *matriz flecha* si es de la forma

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & d_{n-2} & 0 & c_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_{n-1} & c_{n-1} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} & d_n \end{bmatrix}$$

para constantes reales d_i $(1 \leq i \leq n)$ y c_i, b_i $(1 \leq i \leq n-1)$, y con $d_i \neq 0$ para $1 \leq i \leq n-1$. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz flecha inversible.

a) Probar que A admite descomposición LU (L con unos en la diagonal). Calcular explícitamente los valores de L y U.

b) Sea $d_i = 1$ para todo $1 \leq i \leq n$. Para cada ítem, hallar valores no nulos de c_i y b_i para los cuales:

i) $Cond_\infty(L) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

ii) $Cond_\infty(A) \geq n^2$.

Ejercicio 3: (2.5 pts)

(a) Dada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica. Probar que A es ortogonal si y solo si todos los autovalores de A son $\lambda = \pm 1$.

(b) Concluir que la única matriz simétrica, ortogonal y definida positiva es la matriz identidad.

(c) Determinar todos los valores de α y β números reales para los cuales la matriz $A = \begin{pmatrix} \beta & \alpha & \beta \\ \alpha & \beta & \beta^2 \\ \beta & \beta & \alpha^2 \end{pmatrix}$ es simétrica, ortogonal ~~y tiene al 1 como autovalor simple.~~

Ejercicio 4: (2.5 pts) Sea $k \in \mathbb{R}$ y $C = \{(1,0), (0,k), (-1,1)\}$ un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$.

a) Hallar la recta que pasa por el origen y es la más cercana en el sentido de cuadrados mínimos al conjunto de puntos C. Mostrar que dicha recta no depende de k.

b) Calcular el error cometido en la aproximación de cuadrados mínimos. ¿Para qué valor de k el error es mínimo? Explicar por qué siendo que cuadrados mínimos minimiza el error cometido y éste depende de k, la solución hallada en el ítem a) no depende de k.

Justifique todas sus respuestas

(2)

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 & c_1 \\ & d_2 & & c_2 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

a)

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & d_2 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & d_3 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & d_4 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & d_2 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & d_3 & c_3 \\ 0 & b_2 & b_3 & d_4 - \frac{c_1 b_1}{d_1} \end{pmatrix}$$

$$M_1 = I_4 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{b_1}{d_1} \end{pmatrix} e_4^1$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & d_2 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & d_3 & c_3 \\ 0 & 0 & b_3 & d_4 - \frac{c_1 b_1}{d_1} - \frac{c_2 b_2}{d_2} \end{pmatrix}$$

$$M_2 = I_n - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{b_2}{d_2} \end{pmatrix} e_4^{2}$$

$$U = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & d_2 & & & c_2 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & d_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n - \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i b_i}{d_i} \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & 0 \\ \frac{b_1}{d_1} & \frac{b_2}{d_2} & \cdots & \frac{b_{n-1}}{d_{n-1}} & 1 \end{pmatrix}$$

y A admite descomp LU porque los elementos de la diagonal no son nulos y nunca van a serlo después de las operaciones. (porque las columnas por encima de la diagonal son cero, no quiere decir que las operaciones son $d_i \pm 0$ y nunca se anula).

b)

i)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 \\ b_1 & b_2 & \cdots b_{n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \vdots \\ 0 & & & 0 \\ b_1 & b_2 & \cdots b_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \text{ Singular}$$

$$\|L\|_\infty = \sum_{i=1}^{n} |b_i| + 1 \Rightarrow \|L\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

(Suma de inf positivos no nulos)

$$\|L - B\|_\infty = 1$$

Sabiendo que:

$$\text{Cond}_\infty(L) \geq \frac{\|L\|_\infty}{\|L - B\|_\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

$$\text{Cond}_\infty(L) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \quad \forall b_i \neq 0$$

ii)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & c_1 \\ & 1 & & c_2 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Propongo $c_i = 0$, $b_i = n$ $\forall i$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ n & n & \cdots\, n & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ n & n & \cdots\, n & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Singular}$$

$$\|A\|_\infty = n(n-1)+1$$
$$= n^2 - n + 1$$

Sabiendo que:

$$\|A-B\|_\infty = 1 \qquad \text{Cond}_\infty(L) \geq \frac{\|A\|_\infty}{\|A-B\|_\infty}$$

$$\text{Cond}_\infty(A) \geq n^2 - n + 1$$

③ a)

A ortogonal $\Longleftrightarrow \lambda = \pm 1$

· Como A es simétrica:

$A = Q \Lambda Q^t$ con Q ortogonal

$A = A^t$ y Λ diag de autovalores.

$\Rightarrow$)

A ortogonal: $AA^t = I \rightsquigarrow A^2 = I$

$Av = \lambda v \Longleftrightarrow AAv = A\lambda v \Longleftrightarrow$

$Iv = \lambda(Av) \Longleftrightarrow v = \lambda\lambda v \Longleftrightarrow$

$\lambda^2 = 1 \Longleftrightarrow \boxed{\lambda = \pm 1}$

$\Leftarrow$)

$A = Q \Lambda Q^t$ (Λ con ± 1 diag)

$A \cdot A = Q \Lambda \underbrace{Q^t Q}_{I} \Lambda Q^t$

$AA^t = Q \underbrace{\Lambda^2}_{I} Q^t = QQ^t = I \Rightarrow AA^t = I$

$\blacksquare$

b) $A = Q \Lambda Q^t$ con $\Lambda = I$

$A = Q I Q^t$ ya que el autovalores $= 1$ (def pos)

$A = Q Q^t$

$A = I$.

c)

$$\begin{pmatrix} \beta & \alpha & \beta \\ \alpha & \beta & \beta^2 \\ \beta & \beta & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

Simetrica : $\beta = \beta^2 \Rightarrow \beta = 1$ o $\beta = 0$

Ortogonal :

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}^2 = I$$

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= 1 \\ \alpha^4 &= 1 \end{aligned} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \alpha = \pm 1 \\ \beta = 0 \end{cases}}$$

(con $\beta = 0 \Rightarrow \alpha^2 = -1$ ABS)

(4) $C = \{(1,0), (0,k), (-1,1)\}$

a)

x	-1	0	1
y	1	k	0

$f(x) = ax + 0$ → Pasa por 0.0

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A^t A = (2) \qquad A^t y = (-1)$$

$$(2)(a) = (-1)$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{f(x) = -\frac{1}{2}x}$$

No depende de k, ya que al hacer $A^t y$ se anula el valor: $A^t y = (-1)\cdot(1) + 0\cdot k + (1)\cdot 0$

b) $\sum_{i=1}^{3}(y_i - \hat{y}_i)^2 = (1-\frac{1}{2})^2 + K^2 + (0+\frac{1}{2})^2$

$\frac{1}{4} + K^2 = E$

- Para $K = 0$ el valor es el mínimo.

- No depende de K por la condición de que pasa por 0.0. $f(0) = 0$

① a) $P\tilde{x} = \tilde{x}$

$\|Px\| = \|x\| = 1$ (normalize $\tilde{x}$)

$$\|A\|_2 = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|Ax\| \geq \|Px\| = \|x\|$$

$= 1$

$\therefore \|A\|_2 \geq 1$