Repaso métodos iterativos: $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

Queremos resolver $Ax = b$ con A inversible.

Ya vimos métodos directos proponiendo descomposiciones LU, cholesky, etc.

Veremos ahora métodos iterativos.

Escribimos $A = L + D + U$

L triang inf con 0's en la diagonal

D diagonal

U triang sup con 0's en la diagonal.

En 3×3 por ejemplo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jacobi:

Suponemos D inversible. Resolver

$Ax=b$ es equivalente a resolver

$(L+D+U)x=b$ que equivale a resolver

$Dx=-(L+U)x+b$ que equivale a

$x=-D^{-1}(L+U)x+D^{-1}b$

Es decir, resolver $Ax=b$ equivale a encontrar x: $x=\underbrace{-D^{-1}(L+U)}_{\text{a esta matriz la llamamos } M_J}x+D^{-1}b$

Gauss-Seidel:

Suponemos $L+D$ inversible, resolver

$(L+D+U)x=b$ equivale a

$(L+D)x = -Ux + b$ que equivale a

$$x = \underbrace{-(L+D)^{-1}U}_{\substack{\text{a esta matriz} \\ \text{la llamamos } M_{GS}}} x + (L+D)^{-1}b$$

En general, dada una descomposición

$$A = M + N \quad \text{con } M \text{ inversible}$$

$$Ax = b \iff (M+N)x = b$$

$$\iff Mx + Nx = b$$

$$\iff Mx = -Nx + b$$

$$\iff x = -M^{-1}Nx + M^{-1}b$$

En caso caso proponemos resolver algo de la forma

$$x = Bx + c. \qquad \text{con } B = -M^{-1}N, \quad c = M^{-1}b$$

Dados $x_0 \in \mathbb{R}^n$, construimos la sucesión

$$x_1 = B x_0 + c$$

$$x_2 = B x_1 + c$$

$$\vdots$$

$$x_{k+1} = B x_k + c \quad (*)$$

Si pudiéramos probar que $\{x_k\}_{k \geq 0}$

es una sucesión convergente $x_k \to x^*$

tomando límite a ambos lados de la iteración $(*)$ tendremos

$x^* = B x^* + c$ con lo cual

x^* es la solución buscada de $Ax = b$ (siendo A invertible).

La pregunta ahora es ¿qué debe

satisfacer B para que $\{x_k\}_{k\geq 0}$ sea convergente?

Veamos eso:

$$x_k \longrightarrow x^* \iff x_k - x^* \longrightarrow 0.$$

Llamamos $e_k = x_k - x^*$

$$e_0 = x_0 - x^*$$

$$e_1 = x_1 - x^* = B\,x_0 + c - (B\,x^* + c)$$
$$= B\,(x_0 - x^*) = B\,e_0$$

$$e_2 = x_2 - x^* = B\,x_1 + c - (B\,x^* + c)$$
$$= B\,(\underbrace{x_1 - x^*}_{e_1}) = M^2 e_0$$

....

$e_k = B^k e_0$, y queremos $e_k \to 0$.

Vamos a querer $B^k \longrightarrow 0$.

Queremos entonces caracterizar qué matrices B tienen esta propiedad.

<u>Proposición</u>: $B^k \to 0$ si y solo si $\rho(B) < 1$

donde $\rho(B) = \max\limits_{i=1..n} |\lambda_i|$ con $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ autovalores de B.

Esta prop. sale de lo siguiente:

1. $\rho(B) \leq \|B\|$ para toda norma
2. $\forall \varepsilon > 0$, existe una norma:

$$\rho(B) \leq \|B\| \leq \rho(B) + \varepsilon.$$

1. nos dice que si existe alguna norma $\| \ \|$ tal que $\|B\| < 1 \Rightarrow \rho(B) < 1$
2. nos dice que si $\rho(B) < 1 \to$ existe alguna norma: $\|B\| < 1$.

En general para calcular $\rho(B)$ con $B = -M^{-1}N$ podemos:

- calcular autovalores de B
- usar que

$$\det(\lambda I - B) = \det(\lambda I + M^{-1}N) = \det(M^{-1}(\lambda M + N))$$

$$= \det(M^{-1}) \cdot \det(\lambda M + N)$$

luego λ es autovalor de B si y solo si $\det(\lambda M + N) = 0$.

Algunos resultados sobre M_J y M_{GS}.

Def: A se dice estrictamente diagonal dominante si $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad \forall i$

Teo: Si A es est. diag dom $\Rightarrow$

$$\rho(M_J) < 1 \text{ y } \rho(M_{GS}) < 1.$$

Es decir, ambos métodos iterativos convergen.

Teo: Si A es simétrica y definida positiva entonces GS converge ($\rho(M_{GS}) < 1$) pero J puede no converger

OBS: •) Existen matrices A para los cuales J converge y GS no.

•) Existen matrices A para los cuales no convergen J ni GS.

•) En $\mathbb{R}^2$; $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$M_J = -D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{M_J}(\lambda) = \lambda^2 - \frac{a_{12}\,a_{21}}{a_{11}\,a_{22}}$$

λ autovalor $\Rightarrow \lambda^2 = \dfrac{a_{12}\,a_{21}}{a_{11}\,a_{22}}$

$$\Rightarrow |\lambda| = \sqrt{\left|\frac{a_{12}\,a_{21}}{a_{11}\,a_{22}}\right|}$$

$$\Rightarrow \rho(M_J) = \sqrt{\left|\frac{a_{12}\,a_{21}}{a_{11}\,a_{22}}\right|}$$

$$M_{GS} = -(D+L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} \\ 0 & \dfrac{a_{12}\,a_{21}}{a_{11}\,a_{22}} \end{pmatrix}$$

$$\chi_{M_{GS}}(\lambda) = \lambda\left(\lambda - \frac{a_{12}\,a_{21}}{a_{11}\,a_{22}}\right)$$

autovalores son $\lambda = 0$ $\lambda = \frac{a_{12} a_{21}}{a_{11} a_{22}}$

$$\rho(M_{GS}) = \left| \frac{a_{12} a_{21}}{a_{11} a_{22}} \right|$$

$$\Rightarrow \quad \rho(M_{GS}) = \left[\rho(M_J)\right]^2$$

Con lo cual GS converge si y solo si J converge.

Entonces si $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es sim y def positiva convergen ambos métodos.

<u>Teo</u>: Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es tridiagonal

$$\rho(B_{GS}) = \left(\rho(B_J)\right)^2$$

<u>Teo</u>: Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica y def positiva $\Rightarrow$ GS es convergente.

Ej de parcial:

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -c & 1/2 \\ c & 1 & c/2 \\ 4c & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Decidir para qué valores de c el método de GS resulta convergente para todo vector inicial x_0.

$$M_{GS} = -(D+L)^{-1} U$$

$$= -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 4c & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -c & 1/2 \\ 0 & 0 & c/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -c & 1 & 0 \\ -4c & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -c & 1/2 \\ 0 & 0 & c/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} 0 & -c & 1/2 \\ 0 & c^2 & 0 \\ 0 & 4c^2 & -2c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & c & -1/2 \\ 0 & -c^2 & 0 \\ 0 & -4c^2 & 2c \end{pmatrix}$$

$$\chi_{M_{GS}}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -c & 1/2 \\ 0 & \lambda + c^2 & 0 \\ 0 & 4c^2 & \lambda - 2c \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \left((\lambda + c^2)(\lambda - 2c) \right)$$

Autovalores $= \{0, -c^2, 2c\}$

$$\rho(\chi_{M_{GS}}) = \text{máx} \{c^2, |2c|\}$$

Debe ser $c^2 < 1$ y $|2c| < 1$

$|c| < 1$ y $|c| < 1/2$

Nota:

$\text{máx}\{a, b\} \leq k \iff a \leq k$ y $b \leq k$

b) Para $c = 1/3$ $\quad \rho(\chi_{M_{GS}}) = 2/3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 1/2 \\ 1/3 & 1 & 1/6 \\ 4/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_J = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1/3 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/6 \\ 4/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & -1/2 \\ -1/3 & 0 & -1/6 \\ -4/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{M_J}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1/3 & 1/2 \\ 1/3 & \lambda & 1/6 \\ 4/3 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \cdot \left(\lambda^2 + \frac{1}{9} \right) + \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{18} - \frac{\lambda}{2} \right)$$

$$= \lambda \left(\lambda^2 + \frac{1}{9} \right) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{9} + \lambda \right)$$

$$= \lambda^3 + \frac{1}{9}\lambda - \frac{2}{3}\lambda - \frac{2}{27} \qquad \frac{1}{9} - \frac{6}{9}$$

$$= \lambda^3 - \frac{5}{9}\lambda - \frac{2}{27}$$

$$27\lambda^3 - 15\lambda - 2 = 0$$

$$(3\lambda)^3 - 5(3\lambda) - 2 = 0$$

$$\mu^3 - 5\mu - 2 = 0 \qquad \mu = -2 \text{ es raíz}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -5 & -2 \\ -2 & & -2 & 4 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\mu^2 - 2\mu - 1 = 0 \qquad \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$3\lambda = -2 \qquad 3\lambda = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$\lambda = -\frac{2}{3}, \quad \lambda = \frac{1+\sqrt{2}}{3}, \quad \lambda = \frac{1-\sqrt{2}}{3}$$

$$\rho(M_J) = \frac{1+\sqrt{2}}{3} < 1$$

$$\rho(M_J) > \rho(M_{GS})$$

2) $A = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 3/2 & 3/2 \end{pmatrix}$

$Ax=b$

$\Leftarrow D$ invertible

$x = -D^{-1}(L+U)x + D^{-1}b$

$$M_J = -D^{-1}(L+U)$$

En este caso vemos que $D = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$ $(\det D = 0)$ es no invertible y no se puede aplicar el método.

y $M_{GS} = -(D+L)^{-1} \cdot U$

con $D+L = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 3/2 \end{pmatrix}$

que tampoco es invertible y no se puede aplicar el método.

b) $x_{k+1} = (I - A) x_k + b$

si $x_k \to x^*$ $\to$ $x^* = (I - A) x^* + b$

$\Leftrightarrow$ $x^* = x^* - A x^* + b \Leftrightarrow A x^* = b.$

c) $M = I - A = \begin{pmatrix} 1-3/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & -3/2 & 1-3/2 \end{pmatrix}$

$\to$ $M = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

$|\lambda I - M| = \begin{vmatrix} \lambda + 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & \lambda - 1 & -1/2 \\ 0 & 3/2 & \lambda + 1/2 \end{vmatrix}$

$= (\lambda + \frac{1}{2}) \left[(\lambda - 1)(\lambda + \frac{1}{2}) + \frac{3}{4} \right]$

$+ \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \right)$

$= (\lambda + \frac{1}{2}) \left[\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \right]$

$= (\lambda + \frac{1}{2}) \left[\lambda^2 - \frac{1}{2} \right] = \lambda (\lambda + \frac{1}{2})(\lambda - \frac{1}{2})$

$\Rightarrow \rho(M) = \frac{1}{2} \Rightarrow$ converge.

3) Sea $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$

Se quiere resolver

$$A\,x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Hallar $\alpha \neq 0$: GS converge.

$$M_{GS} = -(D+L)^{-1} U$$

$$= -\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} 1/\alpha & 0 & 0 \\ -1/\alpha^2 & 1/\alpha & 0 \\ 1/\alpha^3 & -1/\alpha^2 & 1/\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Inversa

(*)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & -1/\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha^2 & -1/\alpha & 1 & -\alpha \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/\alpha^2 & 1/\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/\alpha^3 & -1/\alpha^2 & 1/\alpha \end{array}\right)$$

$$= -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/\alpha \\ 0 & 0 & -1/\alpha^2 \\ 0 & 0 & 1/\alpha^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/\alpha \\ 0 & 0 & 1/\alpha^2 \\ 0 & 0 & -1/\alpha^3 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - M_{GS}) = \det\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1/\alpha \\ 0 & \lambda & -1/\alpha^2 \\ 0 & 0 & \lambda + 1/\alpha^3 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \left[\lambda \left(\lambda + \frac{1}{\alpha^3} \right) \right] = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ ó } \lambda = -\frac{1}{\alpha^3}$$

$$\rho(M_{GS}) = \left| -\frac{1}{\alpha^3} \right| = \frac{1}{|\alpha|^3} < 1 \iff |\alpha| > 1$$

GS converge para todo dato inicial si $|\alpha| > 1$.

b) $M_J = -D^{-1}(L+U)$

$$= -\begin{pmatrix} 1/\alpha & & \\ & 1/\alpha & \\ & & 1/\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/\alpha \\ 1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1/\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - M_J) = \det\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1/\alpha \\ 1/\alpha & \lambda & 0 \\ 0 & 1/\alpha & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \cdot \lambda^2 + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha^2} = \lambda^3 + \frac{1}{\alpha^3} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lambda = -\frac{1}{\alpha} \qquad \rho(M_J) = \left| -\frac{1}{\alpha} \right| = \frac{1}{|\alpha|} < 1$$

$$\Longleftrightarrow |\alpha| > 1.$$

Si $|\alpha| > 1 \Rightarrow |\alpha|^3 > |\alpha|$

$\Rightarrow \dfrac{1}{|\alpha^3|} < \dfrac{1}{|\alpha|} \rightarrow$ conviene GS.