Álgebra Lineal Computacional - Clase Práctica 4 - Normas y Número de Condición

Fausto Martínez

11 de Abril de 2025

Este documento es una guía para la clase práctica dictada, que incluye contenidos teóricos y las soluciones de los ejercicios.

Normas

Definición

Una norma de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{V}$ es una función $\|\cdot\| : \mathbb{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que cumple las siguientes propiedades:

1. $\|a\boldsymbol{v}\| = |a| \cdot \|\boldsymbol{v}\|$, para todo $a \in \mathbb{K}$ y para todo $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$.
2. $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$, para todo $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$.
3. Si $\|\boldsymbol{v}\| = 0$, entonces $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.

Definición

Hay algunas normas para $\mathbb{K}^n$ que son muy conocidas, y se definen como:

- **Norma 1:**
$$\|\boldsymbol{v}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{v}_i|$$
- **Norma 2:**
$$\|\boldsymbol{v}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}_i^2}$$
- **Norma infinito:**
$$\|\boldsymbol{v}\|_\infty = \max\{|\boldsymbol{v}_i| : i = 1, \dots, n\}$$
- **Norma p:**
$$\|\boldsymbol{v}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{v}_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Definición

Dados dos vectores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$ definimos el *producto interno* entre ellos como

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{u}^* \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} \overline{u_i} v_i \in \mathbb{K}$$

Proposición

Desigualdad de Cauchy-Schwarz: Dados $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$,

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \leq \|\boldsymbol{u}\|_2 \|\boldsymbol{v}\|_2$$

Ejercicio 1

Demostrar que dados $(a_i)_{i=1,\ldots,n} \in \mathbb{K}$, vale la igualdad

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

Solución: Si definimos $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$, y $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$, resulta, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz para estos vectores, que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} 1\right) \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) = n \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

$\square$

Definición

Sean $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$ dos normas en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{V}$, decimos que las mismas son *equivalentes* si existen dos constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que para todo $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$

$$c_1 \|\boldsymbol{v}\|_b \leq \|\boldsymbol{v}\|_a \leq c_2 \|\boldsymbol{v}\|_b$$

Ejercicio 2

Demostrar que, para todo $\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$, vale que

$$\|\boldsymbol{v}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{v}\|_1 \leq n \|\boldsymbol{v}\|_\infty$$

es decir, que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ son equivalentes en $\mathbb{K}^n$ con constantes de equivalencia $c_1 = 1, c_2 = n$.

Solución: Primero, veamos que $\|\boldsymbol{v}\|_1 \geq \|\boldsymbol{v}\|_\infty$ para todo $\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$. Esto se deduce de que

$$\|\boldsymbol{v}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i| \geq \max_{i=1,\ldots,n} |v_i| = \|\boldsymbol{v}\|_\infty$$

pues al ser todos los términos de la suma no negativos, el máximo de los términos debe ser menor o igual que la suma completa.

Para ver que $\|\boldsymbol{v}\|_1 \leq n \|\boldsymbol{v}\|_\infty$, basta con notar que cada término $|v_i|$ de la sumatoria, cumple, por definición del máximo, que $|v_i| \leq \max_{i=1,\ldots,n} |v_i| = \|\boldsymbol{v}\|_\infty$. Por ende, tenemos que

$$\|\boldsymbol{v}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{v}\|_\infty = n \|\boldsymbol{v}\|_\infty$$

$\square$

Proposición

En un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, todas las normas son equivalentes.

Definición

Decimos que una sucesión de vectores $\{\boldsymbol{v}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge bajo una cierta norma $\|\cdot\|$ a un vector $\boldsymbol{v}$ si

$$\|v_n - v\| \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

Ejemplo 1. La sucesión de vectores $\boldsymbol{v}_n = \begin{pmatrix} \frac{n^2+1}{n^2-1} \\ \frac{1}{n^3}+4 \\ 6e^{-n}-1 \end{pmatrix}$ converge al vector $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 2. La sucesión de vectores $\boldsymbol{v}_n = \begin{pmatrix} n \\ \frac{1}{4n^7} \end{pmatrix}$ **no** converge.

Para el caso de las matrices, veremos que será útil introducir el concepto de *normas subordinadas* (en lugar de, por ejemplo, utilizar las mismas normas de los vectores pensando a las matrices como vectores de $\mathbb{K}^{nm}$). Esto motiva la siguiente definición:

Definición

Dada una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$, y un par de normas vectoriales $\|\cdot\|_n : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ y $\|\cdot\|_m : \mathbb{K}^m \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, definimos la *norma subordinada* de la misma como

$$\|\boldsymbol{A}\|_{m,n} = \max_{0\neq \boldsymbol{x}\in\mathbb{K}^n} \left\{ \frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_m}{\|\boldsymbol{x}\|_n} \right\} = \max_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{K}^n,\, \|\boldsymbol{x}\|_n=1} \{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_m\}$$

Proposición

Sean $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y toda norma **subordinada** vale que

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\| \leq \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|$$

Esta definición puede llegar a ser un poco abrumadora, pero por suerte para muchos de los casos que nos interesan en esta materia, tenemos maneras sencillas de calcular las normas subordinadas de matrices. Aprovecho que eso ocurre y entonces listo, sin demostrar, las maneras de calcular las normas

Proposición

Sea $\in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz cuadrada, entonces vale que sus normas subordinadas son:

- **Norma 1:**
$$\|\boldsymbol{A}\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right\}$$
Es decir, cuando uno quiere calcular la norma 1 de una matriz, tomamos módulo de cada entrada de la misma, sumamos los valores por **columnas**, y tras obtener los valores para cada columna, nos quedamos con el máximo entre ellos.

- **Norma 2:**
$$\|\boldsymbol{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})}$$
Esta definición cobrará más sentido cuando veamos autovalores, pero la idea sería primero efectuar la multiplicación $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$, luego obtener el *radio espectral* de esa matriz, que sería el mayor de sus autovalores, y a eso hacerle raíz cuadrada.

- **Norma infinito:**
$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right\}$$
Es decir, cuando uno quiere calcular la norma infinito de una matriz, tomamos módulo de cada entrada de la misma, sumamos los valores por **filas**, y tras obtener los valores para cada filas, nos quedamos con el máximo entre ellos.

Como tip para recordar estas cosas, sirve pensar que como el infinito tiene una forma "achatada", tenemos que sumar las filas, y como el uno tiene una forma "estirada", tenemos que sumar las columnas. Para la norma 2 sirve como regla mnemotécnica recordar la palabra "pata".

Ejemplo 3. Hallar las normas 1 e infinito de las siguiente matrices

(a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 7 & -4 & -5 \\ 7 & -7 & 6 \end{pmatrix}$

(b) $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -6 & 5 & -7 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

Solución:

(a) $\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \max\{4+4+3, 7+4+5, 7+7+6\} = \max\{11, 16, 20\} = 20.$
$\|\boldsymbol{A}\|_1 = \max\{4+7+7, 4+4+7, 3+5+6\} = \max\{18, 18, 14\} = 18.$

(b) $\|\boldsymbol{B}\|_\infty = \max\{1+0+4, 6+5+7, 3+3+3\} = \max\{5, 18, 9\} = 18.$
$\|\boldsymbol{B}\|_1 = \max\{1+6+3, 0+5+3, 4+7+3\} = \max\{10, 8, 14\} = 14.$

Ejercicio 3

Demostrar que, para toda matriz cuadrada $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$

$$\frac{1}{n}\|\boldsymbol{A}\|_1 \leq \|\boldsymbol{A}\|_\infty \leq n\|\boldsymbol{A}\|_1$$

es decir, que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ son equivalentes en $\mathbb{K}^{n\times n}$ con constantes de equivalencia $c_1 = \frac{1}{n}, c_2 = n$.

Solución: Podemos utilizar el ejercicio 2, que nos dice que $\|\boldsymbol{v}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{v}\|_1 \leq n\|\boldsymbol{v}\|_\infty$.

Primero intentemos ver que $\frac{1}{n}\|\boldsymbol{A}\|_1 \leq \|\boldsymbol{A}\|_\infty$. Para eso, veamos que

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \max_{0\neq \boldsymbol{x}\in\mathbb{K}^n}\left\{\frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty}\right\} \overset{\text{Ejercicio 2}}{\geq} \frac{1}{n}\cdot \max_{0\neq \boldsymbol{x}\in\mathbb{K}^n}\left\{\frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_1}{\|\boldsymbol{x}\|_1}\right\} = \frac{1}{n}\|\boldsymbol{A}\|_1$$

Para ver la otra parte de la desigualdad, es decir que $\|\boldsymbol{A}\|_\infty \leq n\|\boldsymbol{A}\|_1$, tenemos que

$$\|\boldsymbol{A}\|_1 = \max_{0\neq \boldsymbol{x}\in\mathbb{K}^n}\left\{\frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_1}{\|\boldsymbol{x}\|_1}\right\} \overset{\text{Ejercicio 2}}{\geq} \frac{1}{n}\cdot \max_{0\neq \boldsymbol{x}\in\mathbb{K}^n}\left\{\frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_1}\right\} = \frac{1}{n}\|\boldsymbol{A}\|_\infty$$

□

Condición

Definición

Dada $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz cuadrada inversible, definimos la condición de $\boldsymbol{A}$ asociada a una norma subordinada $\|\cdot\|_*$ como

$$\text{cond}_*(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|_*\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_*$$

y si $\boldsymbol{A}$ es singular, definimos $\text{cond}_*(\boldsymbol{A}) = +\infty$

Proposición

Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $\alpha \in \mathbb{K}$, y una norma $\|\cdot\|$, valen:

(1) Para todo $\alpha \neq 0$, se tiene que $\text{cond}(\alpha\boldsymbol{A}) = \text{cond}(\boldsymbol{A})$.

(2) $\text{cond}(\boldsymbol{I}) = 1$.

(3) $\text{cond}(\boldsymbol{A}) \geq 1$.

(4) $\text{cond}(\boldsymbol{A}) = \text{cond}(\boldsymbol{A}^{-1})$

Demostración. (1) $\text{cond}(\alpha\boldsymbol{A}) = \|\alpha\boldsymbol{A}\|\,\|(\alpha\boldsymbol{A})^{-1}\| = |\alpha|\,\|\boldsymbol{A}\|\,|\alpha^{-1}|\,\|\boldsymbol{A}^{-1}\| = \|\boldsymbol{A}\|\,\|\boldsymbol{A}^{-1}\| = \text{cond}(A)$.

(2) $\text{cond}(\boldsymbol{I}) = \|\boldsymbol{I}\|\,\|\boldsymbol{I}^{-1}\| = \|\boldsymbol{I}\|\|\boldsymbol{I}\| = 1$.

(3) $\text{cond}(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|\,\|\boldsymbol{A}^{-1}\| \geq \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\| = \|\boldsymbol{I}\| = 1$

(4) Trivial.

□

Ejercicio 4

Sea $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 2n \end{pmatrix}$ con $n \geq 1$

(a) Calcular $\text{cond}_\infty(\boldsymbol{A})$.

(b) Estimar $\text{cond}_4(\boldsymbol{A})$

Solución:

(a) Para calcular $\text{cond}_\infty(\boldsymbol{A})$, debemos hallar $\|\boldsymbol{A}\|_\infty$ y $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$. Podemos ver que como $n \geq 1$, $\|\boldsymbol{A}\|_\infty = 2n$ y para hallar $\boldsymbol{A}^{-1}$ hacemos eliminación gaussiana:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & n & 1 & 0 \\ 0 & 2n & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to \frac{1}{2n} F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & n & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2n} \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_1 - nF_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2n} \end{array}\right)$$

Con lo que tenemos $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2n} \end{pmatrix}$ y por ende $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty = \frac{3}{2}$.

Como resultado final, $\text{cond}_\infty(\boldsymbol{A}) = 3n$.

(b) Para estimar la condición en norma 4, recordamos que por estar en un espacio vectorial de dimensión finita, existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que

$$c_1 \|\boldsymbol{A}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{A}\|_4 \leq c_2 \|\boldsymbol{A}\|_\infty$$

De lo que podemos deducir que

$$\text{cond}_4(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|_4 \, \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_4 \leq c_2 \|\boldsymbol{A}\|_\infty c_2 \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty = c_2^2 \,\text{cond}_\infty(\boldsymbol{A}) = 3\, c_2^2\, n$$

$$\text{cond}_4(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|_4 \, \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_4 \geq c_1 \|\boldsymbol{A}\|_\infty c_1 \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty = c_1^2 \,\text{cond}_\infty(\boldsymbol{A}) = 3\, c_1^2\, n$$

Es decir, que

$$3\, c_1^2\, n \leq \text{cond}_4(\boldsymbol{A}) \leq 3\, c_1^2\, n$$

para $c_1, c_2 > 0$, con lo que podemos concluir que $\text{cond}_4(\boldsymbol{A}) \in \Theta(n)$.

Proposición

Considerando el problema de resolver un sistema lineal

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

con $\boldsymbol{b} \neq 0$ y $\boldsymbol{A}$ inversible. Si $\boldsymbol{b}$ se almacena con un error $\Delta \boldsymbol{b}$, la solución se modificará un Δx, y el impacto en el error relativo se puede acotar con el número de condición como

$$\frac{1}{\text{cond}(A)} \frac{\|\Delta \boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \leq \frac{\|\Delta \boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \text{cond}(\boldsymbol{A}) \frac{\|\Delta \boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$$

Esta desigualdad lo que nos quiere decir coloquialmente es que el *cuánto* se modifica la solución del sistema al perturbar levemente los datos que tenemos depende altamente del número de condición. Para ilustrar esto, propongo el siguiente ejercicio:

Ejercicio 5

Considere los sistemas lineales $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{By} = \boldsymbol{b}$ donde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1.0001 \end{pmatrix} \text{ y } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2.0001 \end{pmatrix}$$

(a) Hallar el número de condición de $\boldsymbol{A}$ en norma ∞.

(b) Hallar la solución $\boldsymbol{x}$ del primer sistema y la solución del sistema perturbado

$$\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{b}},$$

donde $\tilde{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{b} + \begin{pmatrix} 0 \\ -0.0001 \end{pmatrix}$

(c) Hallar el número de condición de $\boldsymbol{B}$ en norma ∞.

(d) Hallar la solución $\boldsymbol{y}$ del segundo sistema y la solución del sistema perturbado

$$\boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{y}} = \tilde{\boldsymbol{b}},$$

donde $\tilde{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{b} + \begin{pmatrix} 0 \\ -0.0001 \end{pmatrix}$

Solución:

(a) Recordando que $\text{cond}_\infty(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|_\infty \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$, nos proponemos hallar la inversa de $\boldsymbol{A}$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_1 - 2F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to \frac{1}{3}F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Con lo que la inversa de $\boldsymbol{A}$ es

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esa forma, recordando que $\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right\}$, podemos concluir que

$$\text{cond}_\infty(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|_\infty \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty = \max\{3+2, 0+1\} \cdot \max\{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}, 0+1\} = 5 \cdot 1 = 5.$$

(b) Dado que ya tenemos la inversa, podemos calcular la resolución de los sistemas fácilmente, y resulta para el sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, que

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2.0001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.00007 \\ -2.0001 \end{pmatrix}$$

y para el sistema perturbado $\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}$, tenemos que

$$\boldsymbol{A}^{-1}\tilde{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2.0002 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.00013 \\ -2.0002 \end{pmatrix}$$

Lo que me interesa que nos llevemos de estos dos ítems es lo siguiente: agarramos un sistema que tiene una matriz **bien condicionada**, y al modificar un poco los datos iniciales, la solución no se vió alterada tanto. Piensénlo así: si viene un amigo físico, ingeniero, médico o lo que sea, que extrajo datos de algún experimento y nos los da para encontrarle solución a algún problema que tenga, pero con datos que pueden tener ruidos naturales de la vida misma, podemos estar tranquilos de que nuestra solución va a estar cerca de la real, ir tranquilos a nuestro amigo y decirle, tu solución va a andar por acá. Ok, buenísimo, y ¿qué pasa si no está bien condicionada?

Spoiler: Cagamos.

(c) De vuelta, sabiendo que $\text{cond}_\infty(\boldsymbol{B}) = \|\boldsymbol{B}\|_\infty \|\boldsymbol{B}^{-1}\|_\infty$, nos proponemos hallar la inversa de $\boldsymbol{B}$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1.0001 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 + F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -0.0001 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to \frac{1}{-0.0001} F_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -10000 & -10000 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_1 - F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 10001 & 10000 \\ 0 & 1 & -10000 & -10000 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, la inversa de la matriz $\boldsymbol{B}$ es:

$$\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 10001 & 10000 \\ -10000 & -10000 \end{pmatrix}$$

Por ende, tenemos que:

$$\text{cond}_\infty(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|_\infty \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty = \max\{2, 2.0001\} \cdot \max\{20001, 20000\} = 20001 \cdot 2.0001 = 40004.0001$$

Es decir, que el número de condición en norma infinito de la matriz es 40004.0001. Este es un valor altísimo, y podemos hablar entonces de un problema *mal condicionado*.

(d) Para resolver ambos sistemas, aplicamos las mismas operaciones que hicimos al hallar la inversa (o el que quiera, también puede multiplicar por la inversa, es lo mismo):

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1.0001 & -2.0001 & -2.0002 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 + F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -0.0001 & -0.0001 & -0.0002 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2 \to \frac{1}{-0.0001} F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_1 - F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, las soluciones son:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Fijense lo bestia que es esto: modificamos a $\boldsymbol{b}$ tan solo restándole 0.0001 a la segunda coordenada y sin embargo la solución cambió brutalmente. La idea que nos tenemos que llevar de esto es que cuando la matriz tiene un número de condición alto, tenemos mucha menos confianza en nuestros algoritmos de resolución. Ya vieron número de máquina en el labo, y se pueden imaginar que, hasta el error dado por el truncamiento podría, en un problema muy mal condicionado, llevarnos a soluciones malísimas que no nos interesan.

Otra cosa interesante del número de condición es que mide de cierta manera la **cercanía relativa a alguna matriz singular**. Esto se puede deducir de la siguiente proposición, para la cual voy a dejar antes una definición para quienes aún no hayan visto las definiciones de *supremo* e *ínfimo*.

Definición

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado superiormente. Un número s se dice *supremo* de A y se nota $\sup(A)$ si cumple las siguientes condiciones:

1. **Es cota superior:** $s \geq x$ para todo $x \in A$.
2. **Es la menor de las cotas superiores:** Si $t \in \mathbb{R}$ es una cota superior de A, es decir si $t \geq x$ para todo $x \in A$, entonces vale que $s \leq t$.

Definición

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado inferiormente. Un número i se dice *ínfimo* de A y se nota $\inf(A)$ si cumple las siguientes condiciones:

1. **Es cota inferior:** $i \leq x$ para todo $x \in A$.
2. **Es la mayor de las cotas inferiores:** Si $t \in \mathbb{R}$ es una cota inferior de A, es decir si $t \leq x$ para todo $x \in A$, entonces vale que $i \geq t$.

Para no abrumarse con las definiciones, pueden pensar que es una generalización del máximo y el mínimo de conjuntos, pero para casos donde ese número no está necesariamente en el conjunto. Por ejemplo, en el caso del conjunto de la recta real $A = [0, 1)$, no podríamos hablar de que 1 sea un *máximo* del conjunto pues ni siquiera pertenece al mismo, pero sin embargo sí es un *supremo* de A.

Ejemplo 4. $\sup\{\{1, 2, 3, 4\}\} = 4$.

Ejemplo 5. $\inf\{(-7, 1] \cup [2, 3]\} = -7$.

Ejemplo 6. $\inf\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = 0$.

Ahora sí, la proposición que quería comentarles:

Proposición

Dada una matriz cuadrada $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ inversible, se verfican las siguientes desigualdades (que son equivalentes)

$$\frac{1}{\operatorname{cond}(\boldsymbol{A})} \leq \inf_{\boldsymbol{B} \text{ singular}} \left\{ \frac{\|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\|}{\|\boldsymbol{A}\|} \right\}$$

$$\operatorname{cond}(\boldsymbol{A}) \geq \sup_{\boldsymbol{B} \text{ singular}} \left\{ \frac{\|\boldsymbol{A}\|}{\|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\|} \right\}$$

Fijense que la idea es que si $\boldsymbol{A}$ está cerca de alguna matriz singular $\boldsymbol{B}$, $\|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\|$ se hará chiquito y para que las desigualdades valgan, $\operatorname{cond}(\boldsymbol{A})$ se tendría que hacer grande, por lo que mientras más grande sea $\operatorname{cond}(\boldsymbol{A})$, más cerca estará $\boldsymbol{A}$ de ser singular.

La demostración de la proposición es un ejercicio de la guía.

Recordamos también que podíamos medir si una matriz era o no singular utilizando su determinante y viendo si era 0, entonces uno se podría preguntar, ¿no podríamos también medir si una matriz está en cierto sentido *cerca* de ser singular utilizando el determinante?

La respuesta es que **no** y lo siguiente es un ejemplo de ello.

Ejemplo 7. Sean, para cada $n \in \mathbb{N}$, las matrices $\boldsymbol{B}_n = \begin{pmatrix} 10^{-n} & 0 \\ 0 & 10^n \end{pmatrix}$

(a) A medida que n crece, ¿creen que la matriz está más *cerca* o más *lejos* de ser singular?

(b) Calcular el número de condición de $\boldsymbol{B}_n$ en norma 1 para cada $n \in \mathbb{N}$.

(c) Calcular el determinante de $\boldsymbol{B}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Solución:

(a) A medida que n crece, el 10^{-n} se va a acercando a 0, por lo que uno diría, al menos intuitivamente que la matriz se está acercando a una matriz singular (pues tiene una fila/columna de ceros). Esperaríamos entonces que nuestra medida de cercanía a una matriz singular vaya creciendo.

(b) Se puede ver que $\boldsymbol{B}_n^{-1} = \begin{pmatrix} 10^n & 0 \\ 0 & 10^{-n} \end{pmatrix}$ y por ende, que

$$\text{cond}_1(\boldsymbol{B}_n) = \|\boldsymbol{B}_n\|_1 \|\boldsymbol{B}_n^{-1}\|_1 = 10^n \cdot 10^n = 10^{2n}$$

Como esperabamos, del buen número de condición, el mismo va subiendo a medida que n aumenta.

(c) En cambio, $\det(\boldsymbol{B}_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cuál nos confirma que el determinante no es una buena medida de ver que tan cerca está una matriz de ser singular, pues haciendo crecer n podemos hacer $\boldsymbol{B}_n$ tan cercana a una singular como queramos y sin embargo el determinante seguirá siendo 1.

Ejercicio 6

Sean $\mathbb{R} \ni \alpha > 0$ y $\boldsymbol{A}_\alpha \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tales que

$$\boldsymbol{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ \alpha & \alpha^2 + 2\alpha & \alpha & 2\alpha \\ 1 & 2 & \alpha^2 - 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Encontrar los valores de α para los cuales $\boldsymbol{A}$ es inversible.

(b) Probar que $\text{cond}_\infty(\boldsymbol{A}_\alpha) \underset{\alpha \to 1}{\longrightarrow} +\infty$.

(c) ¿Qué se puede decir de $\lim\limits_{\alpha \to 1} \text{cond}_2(\boldsymbol{A}_\alpha)$?

Solución:

(a) Para determinar los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ que hacen inversible a la matriz, buscamos cuáles no anulan su determinante. Así es que el primer paso de este ejercicio será encontrar el determinante de la matriz. Desaarrollando por la tercera columna tenemos que

$$\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{A}_\alpha) &= -\alpha \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} + (\alpha^2 - 1) \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \alpha & \alpha^2 + 2\alpha & 2\alpha \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\
&= (\alpha^2 - 1) \left(\det \begin{pmatrix} \alpha^2 + 2\alpha & 2\alpha \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \alpha & \alpha^2 + 2\alpha \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right) \\
&= \alpha^2(\alpha^2 - 1)\,,
\end{aligned}$$

de donde podemos deducir que para que $\boldsymbol{A}_\alpha$ sea inversible, necesitamos $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1$

(b) Sabemos por la proposición que

$$\operatorname{cond}_\infty(\boldsymbol{A}_\alpha) \geq \sup_{\boldsymbol{B} \text{ singular}} \left\{ \frac{\|\boldsymbol{A}_\alpha\|_\infty}{\|\boldsymbol{A}_\alpha - \boldsymbol{B}\|_\infty} \right\}.$$

A su vez, sabemos que al ser $\boldsymbol{A}_1$ una matriz singular, vale que

$$\sup_{\boldsymbol{B} \text{ singular}} \left\{ \frac{\|\boldsymbol{A}_\alpha\|_\infty}{\|\boldsymbol{A}_\alpha - \boldsymbol{B}\|_\infty} \right\} \geq \frac{\|\boldsymbol{A}_\alpha\|_\infty}{\|\boldsymbol{A}_\alpha - \boldsymbol{A}_1\|_\infty}$$

Podemos observar también que como una de las filas de $\boldsymbol{A}_\alpha$ suma 5, seguro que su norma infinito debe ser más grande que 5, por ende, tenemos que

$$\frac{\|\boldsymbol{A}_\alpha\|_\infty}{\|\boldsymbol{A}_\alpha - \boldsymbol{A}_1\|_\infty} \geq \frac{5}{\|\boldsymbol{A}_\alpha - \boldsymbol{A}_1\|_\infty}$$

Por último, como $\boldsymbol{A}_\alpha - \boldsymbol{A}_1 \underset{\alpha \to 1}{\longrightarrow} \mathbf{0}$, también ocurre que $\|\boldsymbol{A}_\alpha - \boldsymbol{A}_1\|_\infty \underset{\alpha \to 1}{\longrightarrow} \mathbf{0}$, y por ende la última expresión, que por la cadena de desigualdades, es mayor o igual que la condición infinito de $\boldsymbol{A}_\alpha$, tiende a infinito cuando α tiende a 1, lo que obliga a $\operatorname{cond}_\infty(\boldsymbol{A}_\alpha)$ a también hacerlo

(c) Recordemos que, por la equivalencia de todas las normas en $\mathbb{R}^{n \times n}$, tenemos que existen constantes $\mathbb{R} \ni c_1, c_2 > 0$ tales que

$$c_1\|\boldsymbol{A}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{A}\|_2 \leq c_2\|\boldsymbol{A}\|_\infty$$

Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{cond}_2(\boldsymbol{A}_\alpha) &= \|\boldsymbol{A}_\alpha\|_2 \|\boldsymbol{A}_\alpha^{-1}\|_2 \\ &\geq c_1\|\boldsymbol{A}_\alpha\|_\infty \, c_1\|\boldsymbol{A}_\alpha^{-1}\|_\infty \\ &= c_1^2 \cdot \operatorname{cond}_\infty(\boldsymbol{A}_\alpha) \end{aligned}$$

Lo cual, al ser $c_1^2 > 0$, implica que $\operatorname{cond}_2(\boldsymbol{A}_\alpha) \underset{\alpha \to 1}{\longrightarrow} +\infty$.

Comentario final: Las consultas, dudas, sugerencias son súper bienvenidas a `fmartinez@dm.uba.ar` o al campus de la materia.