Nombre y apellido: DANTE COCÚ

N° de libreta y hojas entregadas: 1179/22, 5

1	2	3	4	Calificación
B	B	X | BB b)	B	8 (ocho)

Álgebra Lineal Computacional

Examen Final – 1 de agosto 2024

Ejercicio 1. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $A_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2^{n-1}} & \frac{1}{2^{n-1}} & \cdots & \frac{1}{2^{n-1}} & 0 \\ \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^n} & \cdots & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix}$.

(a) Probar que $Cond_\infty(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

(b) ¿Qué sucede con $Cond_2(A_n)$ cuando $n \to \infty$?

Ejercicio 2. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que el polinomio característico es $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1/2)^3(\lambda - 1)$ y tal que $\mathrm{Nu}(A - 1/2I) = \langle (1,2,3,1)(a,2,2,2)(0,1,1,1)\rangle$, $\mathrm{Nu}(A - I) = \langle (0,0,0,1)\rangle$ con $a \in \mathbb{R}$

a) Encontrar los valores de a para los cuales A es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

b) Para $a = 0$ y $v = (0,1,1,2)$ decidir si existe el $\lim_{k\to\infty} A^k v$. En caso de que exista calcularlo.

Ejercicio 3. Dadas $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$, $m \geq n$, se quiere resolver el problema de cuadrados mínimos, i.e: encontrar x^* tal que, $\|Ax^* - b\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$.

a) Demostrar que si $\mathrm{rango}(A) = n$ entonces el problema de cuadrados mínimos tiene solución única. Probar además que A^+b es la solución (A^+ es la pseudoinversa).

b) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(i) Encontrar la descomposición en valores singulares de A y calcular A^+.

(ii) Se quiere ajustar la siguiente tabla

x	0	$-\pi/8$	$\pi/4$
y	1	1/2	-1

por un modelo de la forma $f(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x)$ en el sentido de cuadrados mínimos. **Resolver el problema utilizando los resultados del item a).**

Ejercicio 4. Sea $k \in \mathbb{R}$ y sea $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ k & -1 & -1 \\ -3k^2 & 3k & -1 \end{pmatrix}$

a) Hallar todos los valore de $k \neq -1/3, -1$ para los que Gauss-Seidel converge.

b) Sea $b = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$, $k = 3$ y x^* solución de $Ax^* = b$. Encontrar todos los valores iniciales para los que el método converja en 1 paso a la solución x^*.

Importante: Justificar claramente todas las respuestas.

1

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^n} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix}$$

a) $\mathrm{Cond}_\infty(A_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$

Sabemos que:

$$\mathrm{Cond}_\infty(A_n) = \sup\left\{ \frac{\|A\|_\infty}{\|A-B\|_\infty} \right\}$$

$$\therefore \mathrm{Cond}_\infty(A_n) \geq \frac{\|A\|_\infty}{\|A-B\|_\infty}$$

con B singular

$$\|A\|_\infty = 1$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2^{n-1}} & \frac{1}{2^{n-1}} & \cdots & \frac{1}{2^{n-1}} & 0 \\ \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^n} & \cdots & \frac{1}{2^n} & 0 \end{pmatrix}$$ singular (col 0 en n)

$$A - B = \begin{pmatrix} & & 0 & & \\ & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix}$$

$$\|A - B\|_\infty = \frac{1}{2^n}$$

$$\frac{\|A\|_\infty}{\|A - B\|_\infty} = \frac{1}{\frac{1}{2^n}} = 2^n$$

$$2^n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$$

$$\therefore \quad \mathrm{Cond}_\infty(A_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$$

$\blacksquare$

b) Sabemos que

$\sqrt{n} \; cond_2(A_n) \geq cond_\infty(A_n)$

$\sqrt{n} \; cond_2(A_n) \geq 2^n$

$cond_2(A_n) \geq \dfrac{2^n}{\sqrt{n}}$

Pero $\dfrac{2^n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

$\therefore \; cond_2(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

②

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \tfrac{1}{2})^3(\lambda - 1)$$

$Nu(A - \frac{1}{2}I) =$

$\langle (1,2,3,1), (a,2,2,2), (0,1,1,1) \rangle$

$Nu(A - I) = \langle (0,0,0,1) \rangle$

a) Para que A ~~sea~~ diagonalizable

dim de $Nu(A - \frac{1}{2}I) \oplus Nu(A - I) = 4$

$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ a & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene que tener rango 3

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Con $a \neq 0$ se cumple.

$\therefore \boxed{a \neq 0}$

b) Ya que hay solo un AVAL de módulo $= 1$ existe estado límite y es su AVEC asociado,

i.e.: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$

$$\cancel{\Rightarrow \lim_{k\to\infty} A^k v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sum_{i=1}^{n} v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}}$$

③

a)

Si $\operatorname{rango}(A) = n$

$\Rightarrow$ podemos reducir la matriz A a una matriz

$\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\tilde{A}x = b \to \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Sistema de ecuaciones de n incógnitas y n ecuaciones (SCD único).

Si $\tilde{A}$ es cuadrada $\Longrightarrow$

$\tilde{A}^{-1} = A^{+}$ $\therefore$

$$\tilde{A}x = b \iff \tilde{A}^{-1}\tilde{A}x = A^{+}b$$

$$\iff x = A^{+}b \quad \blacksquare$$

5)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i) Si $A = U \Sigma V^t$

$\Rightarrow A^+ = V \Sigma^+ U^t$

$$A^t A = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Calculo AVAL:

$$\det(A^t A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 3/2 - \lambda & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{3}{2} - \lambda\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{9}{4} - 3\lambda + \lambda^2 - 1/4 = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$

$\Rightarrow \sigma_1 = \sqrt{2}$, $\sigma_2 = 1$

AVEC :

$$\mathrm{Nu}({}^tAA - 2I) =$$

$$\mathrm{Nu}\begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathrm{Nu}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Nu}({}^tAA - 2I) = \langle (-1, 1) \rangle$$

$$\mathrm{Nu}({}^tAA - I) =$$

$$\mathrm{Nu}\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathrm{Nu}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Nu}({}^tAA - I) = \langle (1, 1) \rangle$$

$$v_1 = (1, -1)$$
$$v_2 = (1, 1)$$
$$\rightsquigarrow V = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

U:

$$AA^t = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Calculo AVAL:

$$\det(AA^t - \lambda I) =$$

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1-\lambda & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left((1-\lambda)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) + (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\right)$$

$$+ (1-\lambda)\left(1 - 2\lambda + \lambda^2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda + \lambda^2 - 2\lambda + \frac{1}{2} - \lambda^3 + 2\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda$$

$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda$

$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 0$

$\sigma_1 = \sqrt{2}, \quad \sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = 0$

BUSCO AUBEC:

$$\ker(AA^t - 2I) = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & -1 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & -2 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & -2 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 + x_3 = 0 \rightarrow x_1 = -x_3$

$x_2 + \sqrt{2}\, x_3 = 0$

$\hookrightarrow x_2 = -\sqrt{2}\, x_3$

$$nu(AA^t - 2I) = \langle (1, -\sqrt{2}, 1) \rangle$$

$$nu(AA^t - I) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_2 = 0$

$x_1 = x_3$

$$\Longrightarrow nu(AA^t - I) = \langle (1, 0, 1) \rangle$$

$$Nu(AA^t) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 1 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} x_1 = -x_3 \\ x_2 = \sqrt{2}\, x_3 \end{array}$$

$$Nu(AA^t) = \langle (-1, \sqrt{2}, 1) \rangle$$

$$U = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = U \Sigma V^t$$

Con $U = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1/2 & 1/\sqrt{2} & -1/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix}$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$\therefore$

$$A^+ = V \Sigma^+ U^t$$

Con $\Sigma^+ = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^+ = \begin{pmatrix} 3/4 & \sqrt{2}/4 & 1/4 \\ 1/4 & -\sqrt{2}/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

ii)

x	0	$-\pi/8$	$\pi/4$
y	1	$1/2$	-1

$$f(x) = a\cos(2x) + b\,\mathrm{sen}(2x)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Como rango$(A) = 2 \longrightarrow$

Sol única al sistema

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = y$$

y es $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^{+}y$

$$= \begin{pmatrix} 3/4 & \sqrt{2}/4 & 1/4 \\ 1/4 & -\sqrt{2}/4 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{4+\sqrt{2}}{8} \\ -\dfrac{4+\sqrt{2}}{8} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0,68 \\ -0,68 \end{pmatrix}$$

$$\therefore f(x) = \frac{4+\sqrt{2}}{8}\left(\cos(2x) - \operatorname{sen}(2x)\right)$$

④

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ k & -1 & -1 \\ -3k^2 & 3k & -1 \end{pmatrix}$$

a)

$$B_{GS}(A) = -(D+L)^{-1} U$$

$$= - \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ k & -1 & 0 \\ -3k^2 & 3k & -1 \end{pmatrix}^{-1}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ k & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3k^2 & 3k & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & k & 1 & 0 \\ -3k^2 & 3k & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & k & 1 & 0 \\ 0 & 3k & -1 & -3k^2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3k & 1 \end{array}\right)$$

$$-(D+L)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 3k & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_{GS} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 3k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -k & -1 \\ 0 & 0 & -3k \end{pmatrix}$$

Calcolo AVAL

$$\det(\lambda I - B_{GS}) =$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda+k & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+3k \end{pmatrix} = \lambda(\lambda+k)(\lambda+3k)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -k,\ \lambda_3 = -3k$$

Ahora, para que es converja $\underbrace{|1-k|<1}_{\mathrm{I}} \wedge \underbrace{|1-3k|<1}_{\mathrm{II}}$

$\mathrm{I})\quad |1-k|<1 \iff -1<-k<1$

$$\boxed{1>k>-1}$$

$\mathrm{II})\quad |1-3k|<1 \iff -1<-3k<1$

$$\boxed{\frac{1}{3}>k>-\frac{1}{3}}$$

$\therefore\ k \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

b) $b=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$ $\quad k=3$

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ -27 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x^{*}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para que el método converja en 1 paso

$$x^0 - x^* \in Nu\left(-(D+L)^{-1}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \\ x_3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = 1$

$3(x_1 - 1) + x_2 = 0 \rightarrow x_2 = 0$

$9x_2 + x_3 - 1 \rightarrow x_3 = 1$

$\therefore$ Existe un solo valor inicial y es x^*. Tiene sentido porque con $K=3$ no converge el método GS. (solo si $x^0 = x^*$ y converge en 1 paso)