Nombre y apellido:

Número de libreta:

1	2	3	4	Calificación

Álgebra Lineal Computacional

Final – 2 de mayo de 2023

Ejercicio 1. Dados

$$A_n = \begin{pmatrix} n & 2n & 0 \\ 0 & 1 & n \\ n-1 & 2n & 1 \end{pmatrix}.$$

y $n = 10^4$.

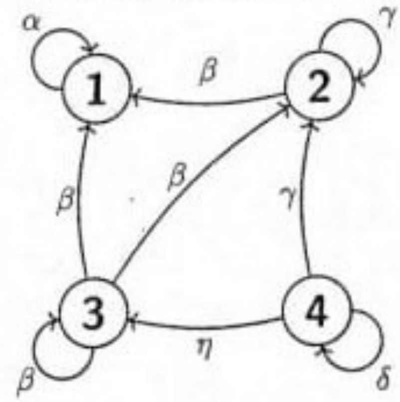
(a) Resolver el sistema $Ax = \begin{pmatrix} n \\ n \\ n \end{pmatrix}$ por eliminación gaussiana con aritmética de punto flotante de base 10 de 3 dígitos de mantisa y redondeo.

(b) Calcular la solución exacta del sistema y calcular el error relativo

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty},$$

para $\tilde{x}$ la solución hallada en el ítem anterior.

Ejercicio 2. Se tiene el proceso de Markov descripto por la figura:



y se sabe que la suma de los elementos de la diagonal de P es $\frac{13}{6}$.

(a) Escribir la matriz de transición P.

(b) Decidir si dado cualquier estado inicial v_0 habrá un estado límite. Indicar en particular si el estado inicial $v_0 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3})$ tiene estado límite y en tal caso calcularlo.

(c) Decidir si existe P^∞. Si existe, calcularla.

Ejercicio 3. Sea:

$$A = \begin{pmatrix} p & 0 & pq \\ 0 & q & q^2 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix},$$

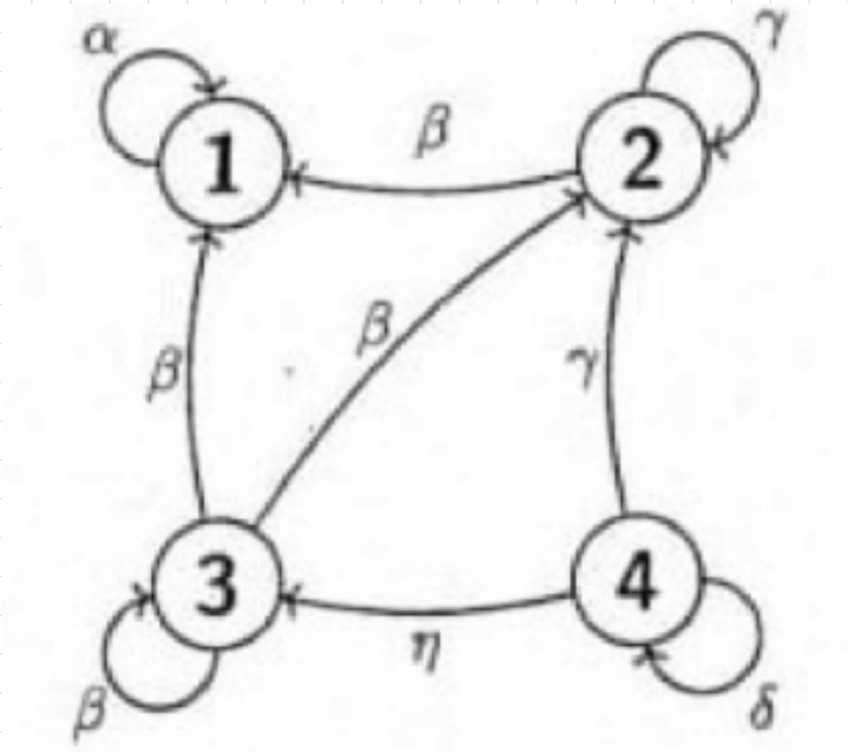
con $p, q \in \mathbb{R}_{>0}$ (reales **positivos**). Se quiere resolver el sistema $Ax = b$, con $b \in \mathbb{R}^3$.

(a) Decidir para qué valores de p, q el método de Jacobi resulta convergente.

(b) Decidir para qué valores de p, q el método de Gauss-Seidel resulta convergente.

(c) Para $p = 1$ y $q = 1/4$, ¿cuál método converge más rápido?

②



a)

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta & 0 \\ 0 & \gamma & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \beta & \eta \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}$$

$\alpha = 1$

$\beta = 1/3$

$\gamma = 2/3$

$\alpha + \gamma + \beta + \delta = \frac{13}{6}$

$\delta = \frac{13}{6} - 1 - 1/3 - 2/3$

$\delta = 1/6$

$2/3 + \eta + 1/6 = 1$

$\eta = 1/6$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$$

b) $\det(\lambda I - P) =$

$(\lambda - 1)(\lambda - 2/3)(\lambda - 1/3)(\lambda - 1/6)$

$\therefore \exists$ estado límite (1 solo AVAL de módulo 1).

Cálculo AVEC:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -2/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & -5/6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$x_4 = 0 \quad x_3 = 0 \quad x_2 = 0$

$\langle (1, 0, 0, 0) \rangle$

$v_0 = (1/3, 1/3, 0, 1/3)$ tiene estado límite y es $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) Ya vimos que existe P^{∞}

$$P^{\infty} = \begin{pmatrix} 1 & | & | & | \\ 0 & v_2 & v_3 & v_4 \\ 0 & | & | & | \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ — & v_2 & — & \\ — & v_3 & — & \\ — & v_4 & — & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & | & | & | \\ 0 & v_2 & v_3 & v_4 \\ 0 & | & | & | \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

③

$$A = \begin{pmatrix} p & 0 & pq \\ 0 & q & q^2 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

a)

$$B_J(A) = -D^{-1}(L+U)$$

$$= -\begin{pmatrix} 1/p & 0 & 0 \\ 0 & 1/q & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & pq \\ 0 & 0 & q^2 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -q \\ 0 & 0 & -q \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Busco AVAL:

$$\det(\lambda I - B_J(A))$$

$$= \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & q \\ 0 & \lambda & q \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\lambda(\lambda^2 - q) - 0 + q(-\lambda)$$

$$\lambda^3 - \lambda q - \lambda q = \lambda^3 - 2\lambda q$$

$$= \lambda(\lambda^2 - 2q) \longrightarrow \lambda = 0$$

$$\longrightarrow \lambda = \pm\sqrt{2q}$$

$\Rightarrow$ Para que Jacobi converja

$$|\lambda| < 1 \iff 0 < \sqrt{2q} < 1$$

$$\sqrt{2q} < 1 \iff 2q < 1 \iff$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 < q < 1/2 \\ p \in \mathbb{R} \end{array}}$$

Jacobi

b)

$$B_{4,5}(A) = -(D+L)^{-1}\,U$$

$$= - \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}^{-1} U$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} p & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/q & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/p & -1/q & 1/5 \end{array}\right)$$

$$B_{4,5}(A) = - \begin{pmatrix} 1/p & 0 & 0 \\ 0 & 1/q & 0 \\ -1/p & -1/q & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & pq \\ 0 & 0 & q^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -q \\ 0 & 0 & -q \\ 0 & 0 & 2q \end{pmatrix}$$

Busco Aval

$$\det(\lambda I - B_{GS}(A)) =$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & q \\ 0 & \lambda & q \\ 0 & 0 & \lambda - 2q \end{pmatrix}$$

$$= \lambda^2 (\lambda - 2q) \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 2q \end{cases}$$

$$\therefore \quad |2q| < 1 \iff -1 < 2q < 1$$

$$\iff \underbrace{\boxed{-\tfrac{1}{2} < q < \tfrac{1}{2} \qquad q \in \mathbb{R}}}_{\text{Gauss-Seidel}}$$

c) comparo radios espectrales:

Jacobi: $\sqrt{2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71$

Gauss-Seidel: $2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$0{,}5 < 0{,}71$

$\therefore$ Gauss-Seidel converge más rápido.

①

$$A_n = \begin{pmatrix} n & 2n & 0 \\ 0 & 1 & n \\ n-1 & 2n & 1 \end{pmatrix} \quad n = 10^4$$

a) $Ax = \begin{pmatrix} n \\ n \\ n \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 10^4 & 2\times 10^4 & 0 \\ 0 & 1 & 10^4 \\ 10^4 & 2\times 10^4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10^4 \\ 10^4 \\ 10^4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10^4 & 2\times 10^4 & 0 \\ 0 & 1 & 10^4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10^4 \\ 10^4 \\ 10^4 \end{pmatrix}$$

$x_3 = 10^4$

$x_2 + 10^8 = 10^4$

$x_2 = 10^4 - 10^8 = -10^8$

$10^4 x_1 - 2\times 10^4 \times 10^8 = 10^4$

$$x_1 = 2 \times 10^8$$

$$x = \begin{pmatrix} 2 \times 10^8 \\ -10^8 \\ 10^4 \end{pmatrix}$$

b)

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 199\,980\,001 \\ -99\,990\,000 \\ 10\,000 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\| \tilde{x} - x \|_\infty}{\| x \|_\infty} =$$

$$\tilde{x} - x = \begin{pmatrix} 19999 \\ -10000 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$

$$\frac{\|\tilde{x}-x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{19999}{199980001}$$

$$= 1{,}00005 \times 10^{-4}$$