# Repaso Gram-Schmidt.

Dada una base $B = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ de vectores de algún subespacio $S \leq \mathbb{K}^n$, buscamos una base $U$, $U = \{u_1, \dots, u_k\}$ tal que $U$ sea un conjunto ortogonal y que $\langle u_1, \dots, u_k \rangle$ genere $S$.

Vamos a hacerlo de una forma particular. Queremos: $\langle v_1 \rangle = \langle u_1 \rangle$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle$$
$$\vdots$$
$$\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$$

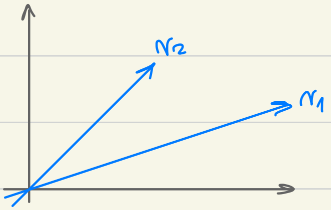
- Veamos un ejemplo en $\mathbb{R}^2$

Queremos $\langle v_1 \rangle = \langle u_1 \rangle$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle = \mathbb{R}^2$$

En $\mathbb{R}^2$ podemos pensar que necesitamos proyectar un vector sobre otro.

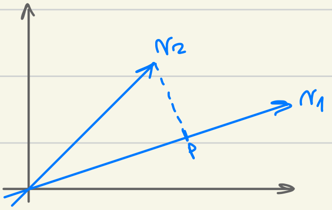
Consideremos $\{v_1, v_2\}$ dos vectores linealmente independientes como los del siguiente gráfico



Inicialmente podemos considerar $u_1 = v_1$
$\Rightarrow \langle u_1 \rangle = \langle v_1 \rangle$

El objetivo ahora es elegir un $u_2$ que cumpla que $u_1 \perp u_2$ y $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle$

Podemos tomar un punto $p$ sobre la recta de tal forma que $v_2 - p \perp v_1$



$p$ se encuentre sobre la recta $\Rightarrow p = \alpha v_1$

$$\Rightarrow v_1 \perp v_2 - p \Rightarrow v_1^t (v_2 - \alpha p) = 0$$

$$\Rightarrow v_1^t v_2 - \alpha v_1^t p = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{v_1^t v_2}{v_1^t v_1}$$

$$\Rightarrow u_2 = v_2 - p = v_2 - \underbrace{\left(\frac{v_1^t v_2}{v_1^t v_1}\right) v_1}_{\text{proyección de } v_2 \text{ sobre } \langle v_1 \rangle}$$

Llamaremos $P_{u_1}(v_2)$ a la proyección de $v_2$ sobre $\langle u_1 \rangle \overset{\shortparallel}{} \langle v_1 \rangle$

$$P_{u_1}(v_2) = \underbrace{\left(\frac{u_1^t v_2}{u_1^t u_1}\right)}_{\in \mathbb{R}} u_1 = u_1 \underbrace{\left(\frac{u_1^t v_2}{u_1^t u_1}\right)}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{\left(\frac{u_1 u_1^t}{u_1^t u_1}\right)}_{\in \mathbb{R}^{2\times 2}} v_2$$

↳ matriz de proyección

<u>OBS</u> si estamos en $\mathbb{C}$:

$$P_{u_1}(v_2) = \left(\frac{u_1^* v_2}{u_1^* u_1}\right) u_1$$

se cumple

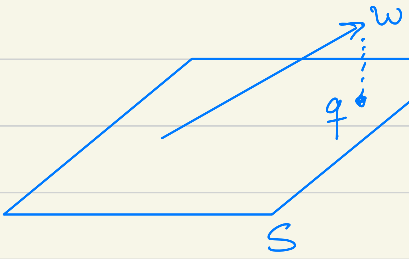
$u_2 \perp u_1$

$\langle u_1, u_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$

Esta forma de restar a un vector su proyección sobre un subespacio para obtener un vector ortogonal al subespacio funciona para más dimensiones

Sea $C = \{u_1, \ldots, u_k\}$ una base ortogonal del subespacio $S = \langle u_1, \ldots, u_k \rangle$

Buscamos proyectar ortogonalmente $w$ sobre $S$



Definimos $q = P_{u_1}(w) + P_{u_2}(w) + \cdots + P_{u_k}(w)$

Se cumple: 1) $q \in S$

2) $w - q \perp S \quad \forall s \in S$

1) Se cumple claramente pues

$$q = \frac{u_1^* w}{u_1^* u_1} u_1 + \dots + \frac{u_k^* w}{u_k^* u_k} u_k$$ es una combinación lineal de elementos de $S$ ✓

2) veamos que $u_j \perp w-q$ para $1 \leq j \leq k$

$$u_j^*(w-q) = u_j^*\left(w - \sum_{i=1}^{k} P_{u_i}(w)\right) =$$

$$= u_j^* w - \sum_{i=1}^{k} u_j^* P_{u_i}(w) = u_j^* w - \sum_{i=1}^{k} u_j^* \left(\frac{u_i^* w}{u_i^* u_i}\right) u_i$$

$$= u_j^* w - \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{u_i^* w}{u_i^* u_i}\right) \underbrace{u_j^* u_i}_{=0 \text{ si } j \neq i} =$$

$$= \cancel{u_j^* w} - \frac{\cancel{u_j^* w}}{\cancel{u_j^* u_j}} \cdot \cancel{u_j^* u_j} = 0$$ ✓

Luego, si $q$ es ortogonal a cada componente de la base $C$ que generan entonces $q$ es ortogonal a cualquier combinación de ellos. Es decir, a cualquier $s \in S$.

$$\text{Llamamos } P_S(w) = \sum_{i=1}^{k} P_{u_i}(w)$$

a la proyección de $w$ sobre el subesp. $S$.

---

Vimos que a partir de una base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ podemos "ortogonormalizarla" con Gram-Schmidt y obtener una nueva base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ que cumple:

$$\langle v_1 \rangle = \langle q_1 \rangle$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle q_1, q_2 \rangle$$

$$\vdots$$

$$\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle = \langle q_1, q_2, \ldots, q_n \rangle$$

Esto nos permite escribir cada $u_i$ como combinación lineal de los $q_i$:

$$\langle v_1 \rangle = \langle q_1 \rangle \Rightarrow v_1 = r_{11} q_1$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle q_1, q_2 \rangle \Rightarrow v_2 = r_{12} q_1 + r_{22} q_2$$

$$\vdots$$

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle = \langle q_1, q_2, \dots, q_n \rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_n = r_{1n} q_1 + r_{2n} q_2 + \dots + r_{nn} q_n$$

Reescribamos lo anterior de forma matricial

$$\left( v_1 \middle| v_2 \middle| \dots \middle| v_n \right) = \underbrace{\left( q_1 \middle| q_2 \middle| \dots \middle| q_n \right)}_{Q} \underbrace{\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & r_{nn} \end{pmatrix}}_{R}$$

con $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz "ortogonal"

$R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz triangular superior con $r_{ii} \neq 0$

FACTORIZACION QR

# Matrices ortogonales

Sea $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz cuadrada.
Decimos que Q es una matriz ortogonal si cumple cualquiera de las siguientes propiedades (ver ejercicio 18 - Práctico 3)

① $Q^{-1} = Q^{t}$
② Las columnas de Q forman una b.o.n
③ Las filas de Q forman una b.o.n
④ $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$

Cualquiera de estas propiedades es una definición válida de matriz ortogonal.

En $\mathbb{C}^{n \times n}$ las llamamos matrices unitarias y reemplazamos la propiedad ① por $Q^{-1} = Q^{*}$ siendo $Q^{*} = \bar{Q}^{t}$

Sea $Q$ con columnas $q_1, \dots, q_n$:

$$Q = \left( q_1 \,\middle|\, q_2 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, q_n \right)$$

Usando ① obtenemos la siguiente igualdad:

$$\underline{Q^t Q = I}$$

$$\begin{pmatrix} q_1^t \\ \hline q_2^t \\ \hline \vdots \\ \hline q_n^t \end{pmatrix} \left( q_1 \,\middle|\, q_2 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, q_n \right) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Si igualamos la posición $(i,j)$ del resultado del producto a la izquierda de la igualdad con la posición $(i,j)$ de la matriz a la derecha de la igualdad obtenemos:

$$q_i^t q_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

lo cual nos dice que las columnas de $Q$ forman una b.o.n. (es decir, ① $\Rightarrow$ ②)

# Veamos algunas propiedades

- Si $Q_1$ y $Q_2$ son ortogonales $\Rightarrow Q_1 \cdot Q_2$ también

Verifiquemos que $Q_1Q_2$ cumple ①

$$(Q_1Q_2)^t(Q_1Q_2) = Q_2^t \underbrace{Q_1^t Q_1}_{I} Q_2 = Q_2^t Q_2 = I$$

$\Rightarrow (Q_1Q_2)^t$ es la inversa de $Q_1Q_2$

- Veamos que ① $\Rightarrow$ ④

q.v.q. $\|Qx\|_2 = \|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, $Q$ ortogonal

veamos $\|Qx\|_2^2 = (Qx)^t(Qx) = x^t \underbrace{Q^tQ}_{\substack{\shortparallel \\ I \\ \text{por } \textcircled{1}}} x = x^tx$

$= \|x\|_2^2$

$\Rightarrow \|Qx\|_2 = \|x\|_2$

- $\|Q\|_2 = 1$

En efecto, $\|Q\|_2 = \max\limits_{\|x\|_2=1} \|Qx\|_2 \overset{\textcircled{4}}{=} \max\limits_{\|x\|_2=1} \|x\|_2 = 1$

Como $Q^{-1}$ también es ortogonal $\Rightarrow \|Q^{-1}\|_2 = 1$

Luego: $\underline{\text{cond}_2(Q) = \|Q\|_2 \|Q^{-1}\|_2 = 1}$

- $|\det(Q)| = 1$

$$1 = \det(I) = \det(Q^{-1}Q) = \det(Q^{-1})\det(Q) =$$
$$= \det(Q^t)\det(Q) = \det(Q)\det(Q) = \det(Q)^2$$
$$\Rightarrow \quad 1 = |\det Q|$$

Ejemplos de matrices unitarias:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Nota (y ejercicio): todas las propiedades anteriores se pueden verificar para $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitaria.

# Factorización QR vía reflexiones.

**Def** : $H\in\mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz de Householder si $\exists\, u\in\mathbb{R}^n$, $\|u\|_2=1$, tal que

$$H = I - 2\underbrace{uu^t}_{\in\mathbb{R}^{n\times n}}$$

**Obs** : si el vector $u$ no tiene norma 1 entonces podemos definir $H = I - 2\frac{uu^t}{u^tu}$

Como $u^tu=\|u\|_2^2 \Rightarrow H = I - 2\frac{uu^t}{\|u\|_2^2} = I-2\frac{u}{\|u\|_2}\frac{u^t}{\|u\|_2}$

Nuestro objetivo será utilizar matrices de Householder para triangular una matriz de la siguiente forma

$$A=\begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{pmatrix} \xrightarrow{H_1A} \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix} \xrightarrow{H_2H_1A} \begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & & \vdots \\ \vdots & 0 & * & & \vdots \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{n-1}\cdots H_1A} \cdots \to \underset{\text{triáng. superior}}{\begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & * & & \vdots \\ \vdots & 0 & * & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\, 0 & * \end{pmatrix}}$$

Veamos algunas propiedades de $H = I - 2uu^t$

- H es simétrica: $H^t = (I - 2uu^t)^t = I^t - 2(uu^t)^t$

  $= I - 2(u^t)^t u^t = I - 2uu^t = H$ ✓

- H es ortogonal: $H^t H = I$

$$H^t H = HH = (I - 2uu^t)(I - 2uu^t) =$$

$$= I - 2uu^t - 2uu^t + 4u\underbrace{u^t u}_{\|u\|_2^2 = 1} u^t =$$

$$= I - 4uu^t + 4uu^t = I$$ ✓

Además recordemos que H por ser ortogonal no modifica la norma 2 de los vectores:

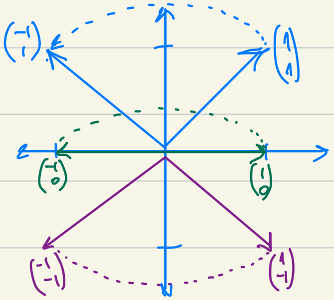
$$\|Hx\|_2 = \|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Veamos un ejemplo en $\mathbb{R}^2$ el efecto que tiene H sobre vectores.

consideremos $u = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow H = I - 2uu^t = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1\ \ 0) = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$$



$$H\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

$$H\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$

$$H\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$$

Observamos que H refleja respecto al plano vertical generado por $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Es decir, respecto a una dirección perpendicular a u (u es el vector que define H).

( Ejercicio: tomar $u = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$. Qué efecto tiene H? Respecto a qué dirección refleja? )

**Teorema** Sean $v, w \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|v\|_2 = \|w\|_2$ y sea $u = \dfrac{v-w}{\|v-w\|_2}$ con $H = I - 2uu^t$ la matriz de Householder asociada.

Entonces se cumple $Hv = w$ y $Hw = v$.

Dem Hacemos la cuenta: $Hv = (I - 2uu^t)\, v$

$$= \left(I - 2\frac{(v-w)(v-w)^t}{\|v-w\|_2^2}\right) v = v - \frac{2(v-w)(v-w)^t v}{\|v-w\|_2^2} = \circledast$$

Consideremos el denominador $\|v-w\|_2^2$

$$\|v-w\|_2^2 = (v-w)^t(v-w) = v^tv - w^tv - v^tw + w^tw =$$

$$\underset{w^tv = v^tw}{=} \|v\|_2^2 - 2v^tw + \|w\|_2^2 \underset{\|v\|_2 = \|w\|_2}{=} 2\|v\|_2^2 - 2v^tw =$$

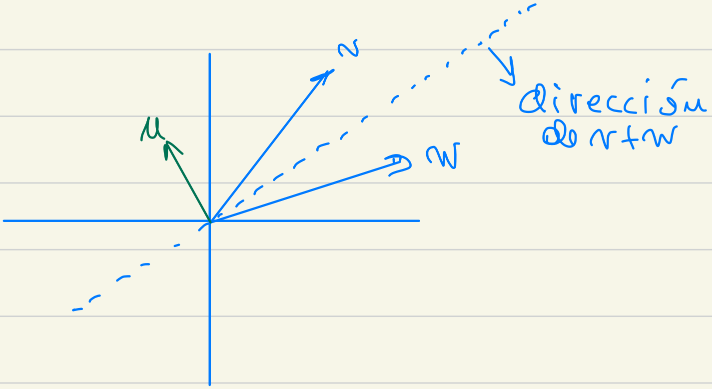
$$= 2v^tv - 2v^tw = 2v^t(v-w) = 2(v-w)^t v$$

$$\circledast = v - \frac{\cancel{2}(v-w)\cancel{(v-w)^t v}}{\cancel{2(v-w)^t v}} = v - (v-w) = w$$

#

Para $Hw = v$ se hace un desarrollo similar y se deja como ejercicio.

Veamos gráficamente lo que nos dice el teorema



$$u = \frac{v-w}{\|v-w\|_2}$$

$$H = I - 2uu^t$$

Habíamos interpretado que H refleja respecto de una dirección que es perpendicular al vector u que define la matriz H.
La dirección de u es v-w y H refleja respecto a v+w. Veamos que estas direcciones son perpendiculares entre sí, es decir, veamos que $v-w \perp v+w$:

$$(v-w)^t(v+w) = v^tv + \cancel{v^tw} - \cancel{w^tv} - w^tw =$$

$$= \|v\|_2^2 - \|w\|_2^2 = 0 \quad \text{pues } \|v\|_2 = \|w\|_2 \quad \checkmark$$

Si $v+w$ es la dirección respecto a la cual refleja $H$, ¿cuál será el efecto esperado de $H$ sobre $v+w$? Debería mantenerlo igual.

$$H(v+w) = (I - 2uu^t)(v+w) =$$

$$= \left(I - 2\frac{(v-w)(v-w)}{\|v-w\|_2^2}\right) v+w = v+w - 2\frac{(v-w)\overbrace{(v-w)^t(v+w)}^{0}}{\|v-w\|_2^2}$$

$$= v+w$$

¿Cuál será el efecto de $H$ sobre $u$?

$$Hu = H\frac{(v-w)}{\|v-w\|_2} = \left(I - 2\frac{(v-w)(v-w)^t}{\|v-w\|_2^2}\right)\frac{(v-w)}{\|v-w\|_2} =$$

$$= \frac{v-w}{\|v-w\|_2} - 2\frac{(v-w)\cancel{(v-w)^t(v-w)}}{\cancel{\|v-w\|_2^2}\,\|v-w\|_2} = \frac{v-w}{\|v-w\|_2} - 2\frac{(v-w)}{\|v-w\|_2} =$$

$$= -\frac{(v-w)}{\|v-w\|_2} = -u \longrightarrow$$ reflexión de $u$ respecto de $v+w$ $(\perp u)$

¿Cómo usamos reflexiones para triangular?
Veamos ejemplo en $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

**Ejemplo** sea $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ \sqrt{3}/2 & 0 \end{pmatrix}$

Queremos triangularla para llevar A a una matriz R triangular superior.

$\Rightarrow$ Buscamos H / $HA = \left[ H\begin{pmatrix}1/2\\ \sqrt{3}/2\end{pmatrix} \middle| H\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$

$\Rightarrow H \underbrace{\begin{pmatrix}1/2\\ \sqrt{3}/2\end{pmatrix}}_{v} = \underbrace{\begin{pmatrix}*\\ 0\end{pmatrix}}_{w}$ con $* = \left\| \begin{pmatrix}1/2\\ \sqrt{3}/2\end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

de esta forma $\|v\|_2 = \|w\|_2$ y usando teorema definimos u

$u = \underbrace{\begin{pmatrix}1/2\\ \sqrt{3}/2\end{pmatrix}}_{v} - \underbrace{\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}}_{w} = \begin{pmatrix}-1/2\\ \sqrt{3}/2\end{pmatrix}$ $\quad H = I - 2uu^T$ $\quad$ (Notar que $\|u\|_2 = 1$)

$H = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}-1/2\\ \sqrt{3}/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/2 & \sqrt{3}/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1/4 & -\sqrt{3}/2\\ -\sqrt{3}/2 & 3/2\end{pmatrix}$

↳

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Verifiquemos:

$$H\begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 + 3/4 \\ 3/4 - \sqrt{3}/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Además $H\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow HA = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = H^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

Recordemos que H es ortogonal y simétrico

$\Rightarrow H^{-1} = H$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = QR$$

#

¿Cómo calculamos $A=QR$ usando reflexiones cuando tenemos matrices de mayor dimensión?

El primer paso para triangular la primera columna de $A$ ya lo sabemos hacer:

$$H_1 A = \begin{pmatrix} * & * \; \cdots \; * \\ \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \underbrace{\boxed{\begin{matrix} * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * \end{matrix}}}_{A_1} \end{pmatrix}$$

Para este primer paso construimos una $H_1$ que refleje:

$$H_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

tomando $u = \begin{pmatrix} a_{11} - * \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$ $\qquad H_1 = I - 2\dfrac{uu^t}{u^t u}$

$$* = \left\| \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \right\|_2$$

$$H_1 A = \overbrace{\begin{pmatrix} * & * \cdots * \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{\tilde{A}_1} \\ 0 & \end{pmatrix}}^{A_1} \qquad \tilde{A}_1 \in \mathbb{R}^{n-1 \times n-1}$$

Para el segundo paso volvemos a realizar lo mismo sobre $\tilde{A}_1$, Es decir, considero $\tilde{A}_1$ y $\tilde{H}_2$ / $\hat{H}_2 \tilde{A}_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}}$

Definimos $H_2 = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \tilde{H}_2 \\ 0 & \end{array}\right)$

$$\Rightarrow H_2 (H_1 A) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \tilde{H}_2 \\ 0 & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} * & * \cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & \tilde{A}_1 \\ 0 & \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} * & * \cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & \hat{H}_2 \tilde{A}_1 \\ 0 & \end{array}\right) = \begin{pmatrix} * & \cdots & & * \\ 0 & * & & \vdots \\ \vdots & 0 & * & \vdots \\ 0 & 0 & * & \cdots * \end{pmatrix}$$

De esta forma continuamos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ \hline & 0 & & \tilde{H}_{n-1} \end{array}\right) \cdots \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \\ \hline 0 & & \tilde{H}_3 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \tilde{H}_2 \\ 0 & \end{array}\right) H_1 A = \underbrace{\begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & * & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}}_{R}$$

triang. sup.

$$\Rightarrow \quad H_{n-1} \cdots H_2 H_1 A = R$$

$$A = \underbrace{H_1^t H_2^t \cdots H_{n-1}^t}_{Q} R = QR$$

¿Cómo resolvemos un sistema conociendo la fact. QR?

$$Ax = b \Rightarrow Q\underbrace{Rx}_{y} = b \quad \begin{cases} Qy = b \xrightarrow{\text{fácil!!}} y = Q^t b \\ Rx = y \end{cases}$$

↳ triang. sup.
resuelvo con sustitución hacia atrás.

**Teorema**: Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, no singular. Entonces existen únicas $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonal y $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ triangular superior con $r_{ii} > 0$ tal que $A = QR$.

dem La existencia ya la justificamos por construcción usando Householder.

Veamos unicidad.

Supongamos existen dos factorizaciones $A = Q_1 R_1 = Q_2 R_2$ (todas inversibles!)

$$\Rightarrow \quad \underbrace{R_1 R_2^{-1}}_{t.\ sup.} = \underbrace{Q_1^t Q_2}_{ortog.}$$

Usemos el siguiente lema:

Lema Si $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es triangular y ortogonal entonces es diagonal (con $\pm 1$ en la diagonal).

(La demo del lema la dejamos como ejercicio para el lector!)

Luego, usando el lema: $R_1 R_2^{-1} = Q_1^t Q_2 = D$

con $D = \begin{pmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{pmatrix}$ diagonal.

$$\Rightarrow \quad R_1 = \begin{pmatrix} \pm 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pm 1 \end{pmatrix} R_2$$

pero ambas $(R_2)_{ii} > 0$ y $(R_1)_{ii} > 0$

$\Rightarrow D = I \quad \Rightarrow R_1 = R_2$ y $Q_1 = Q_2$

⌗