Descomposición de Schur

Vimos en clases anteriores que una matriz $A \in \mathbb{k}^{n\times n}$ se dice diagonalizable si existe una matriz C inversible y D diagonal:

$$A = C \cdot D \cdot C^{-1},$$

y esto era equivalente a que exista B una base de autovectores de A de manera que si T_A es la tl definida por $T_A(x) = A \cdot x$, se tiene

$$[T_A]_{EE} = C(B,E) \cdot [T_A]_{BB} \, C(E,B).$$

En este caso, si existe C inversible:

$A = C \cdot D \cdot C^{-1}$ se dice que las matrices A y D son semejantes.

Si bien no toda matriz es semejante

a una matriz diagonal que tiene en su diagonal los autovalores (es decir no toda matriz es diagonalizable) vamos a probar que TODA matriz A es semejante a una matriz T triangular superior que tiene en su diagonal a los autovalores de A.

Teorema (de Schur): Dada $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ con autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (no necesariamente distintos) existen matrices U (unitaria) y T triangular superior:

$$A = U \cdot T \cdot \underbrace{U^*}_{\overset{\shortparallel}{U^{-1}}} \quad \text{con } \underbrace{t_{ii} = \lambda_i}_{\text{en la diagonal de T están los autovalores de A}} .$$

Def: Si $A = U \cdot B \, U^*$ con U unitaria se dice que A es unitariamente semejante a B.

Entonces el teo de Schur dice que toda matriz A es unitariamente semejante a una matriz T triangular superior que tiene los autovalores de A en su diagonal.

Matrices semejantes:

Def: Dadas $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ se dice A y B son semejantes si existe C inversible tal que $A = C B C^{-1}$.

Notar que esto equivale a $B = C^{-1} A C$

Ejercicio: Si notamos $A \sim B$ si A y B son semejantes, probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

Luego, A se dice diagonalizable si A es semejante a una matriz diagonal.

Propiedades:

1) Si $A \sim B \Rightarrow \chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda)$ y por lo tanto los autovalores de A y B son los mismos.

Dem: Si $A \sim B \Rightarrow \exists\ C$ inv: $A = CBC^{-1}$

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - CBC^{-1})$$

$$= \det(\underbrace{C\lambda C^{-1}}_{\lambda I} - CBC^{-1})$$

$$= \det(C(\lambda I - B)C^{-1})$$

$$= \det C \cdot \det(\lambda I - B) \underbrace{\det(C^{-1})}_{1/\det C}$$

$$= \det(\lambda I - B) = \chi_B(\lambda).$$

luego los autovalores, que son los ceros del polinomio característico, son los mismos.

2) Si $A \sim B \Rightarrow \operatorname{Tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$

Dem: Usamos que $\mathrm{tr}(M.N)=\mathrm{tr}(N.M)$

$$\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(\underbrace{C}_{}\cdot\underbrace{B\,C^{-1}}_{})=\mathrm{tr}(B\,C^{-1}C)=\mathrm{tr}(B)$$

Matrices unitariamente semejantes

Def: Dados $A,B\in\mathbb{K}^{n\times n}$ se dice que son unitariamente semejantes si existe $U\in\mathbb{K}^{n\times n}$ unitaria: $A=U\,B\,U^*$

donde $U^*=\overline{U}^t$ (traspuesta y conjugada)

Recordar que U es unitaria si vale alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

1) Las filas de U son una BON de $\mathbb{K}^n$
2) Las columnas de U son una BON de $\mathbb{K}^n$
3) $U.U^*=U^*.U=I$ (es decir $U^*=U^{-1}$)
4) $\|Ux\|_2=\|x\|_2 \quad \forall x\in\mathbb{K}^n$

Propiedades de matrices unitarias:

Sea $U \in \mathbb{K}^{n\times n}$ unitaria, entonces:

i) $\|U\|_2 = 1$

Dem: $$\|U\|_2 = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ux\|_2}{\|x\|_2} \overset{4)}{=} \max_{x\neq 0} \frac{\|x\|_2}{\|x\|_2} = 1$$

ii) Si U es ortogonal $\Rightarrow$ $U^{-1} = U^*$ es ortogonal

Dem: U ortogonal $\Rightarrow$ $U^{-1} = U^*$

$$U^* \cdot \underbrace{(U^*)^*}_{U} = U^* \cdot U = I \Rightarrow U^* \text{ es ortogonal.}$$

iii) $\text{Cond}_2(U) = 1$

Dem: $\|U\|_2 = 1$. Además U^{-1} es ortogonal

$$\Rightarrow \|U^{-1}\|_2 = 1 \Rightarrow \text{Cond}_2(U) = \|U\|_2 \, \|U^{-1}\|_2 = 1$$

iv) $\det(U^*) = \overline{\det(U)}$

$$\det(U^*) = \det(\bar{U}^t) \overset{\det(M)=\det(M^t)\ \forall M \text{ matriz}}{=} \det(\bar{U}) = \overline{\det(U)}$$

iv) $|\det U| = 1$.

Dem: $U \cdot U^* = I$

$\Rightarrow \det(U \cdot U^*) = 1$

$\Rightarrow \det U \cdot \det U^* = 1$

$\Rightarrow \det U \cdot \overline{\det(U)} = |\det U| = 1$

Si U es unitaria $U = U^*$

$\Rightarrow \det U \in \mathbb{R}$?

OBS: Si U es ortogonal (unitaria y real) $\Rightarrow \det U = \pm 1$.

v) Si λ es autovalor de $U \Rightarrow |\lambda| = 1$.

Dem:

Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ autovalor de $U \Rightarrow$

existe $v \neq 0$: $Uv = \lambda v$.

$$\underbrace{\| \lambda v \|_2}_{|\lambda| \, \|v\|_2} = \underbrace{\| U v \|_2}_{\|v\|_2} \qquad \begin{array}{l} v \neq 0 \\ \Rightarrow |\lambda| = 1. \end{array}$$

vi) Si U y $V \in \mathbb{K}^{n \times n}$ son unitarias $\Rightarrow$ $U \cdot V$ es unitaria.

Dem:

$$UV (UV)^* = U \underbrace{V V^*}_{Id} U^* = U U^* = Id.$$

vii) Si notamos $A \sim_U B$ si A y B son unitariamente semejantes, probar que $\sim_U$ es una relación de equivalencia.

Descomposición de Schur

Empecemos con un ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda-2 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda-1)\left[(\lambda-2)\lambda+1\right] = (\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+1)$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-1)^2 = (\lambda-1)^3.$$

1 es el único autovalor de A.

Si A fuera diagonalizable, existiría

C inversible: (donde las columnas de C serían los autovectores):

$$A = C \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{Id} \cdot C^{-1} = Id.$$

abs!

$\Rightarrow$ A no es diagonalizable (ni en $\mathbb{R}$, ni en $\mathbb{C}$).

Calculamos autovectores

$$I - A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad x = y, \ z = 0 \quad \Rightarrow \ E_1 = \langle (1,1,0) \rangle$

$v = (1,1,0)$ autovector asociado al autovalor 1. Llamamos

$\frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$ autovector normalizado

Queremos U ortogonal:

$A \cdot U = U \cdot T$ con T triangular sup y los autovalores en diag.

$$A\cdot\left(u_1 | u_2 | u_3\right) = \left(u_1 | u_2 | u_3\right)\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A u_1 = u_1 \rightarrow u_1$ debe ser $v_1/\|v_1\|$

Si completamos a una BON, tendremos u_2 y u_3. Queremos $A u_2 = * u_1 + u_2$.

y $A u_3 = * u_1 + * u_2 + u_3$.

Extendemos a una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$:

$u_2 = (0, 0, 1)$

$u_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ sirven ?

$$U_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow U_1^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$y\quad\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}}_{u_1}+1\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{u_2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}}_{u_3}$$

Hasta aquí:

$$A\cdot(u_1|u_2|u_3)=(u_1|u_2|u_3)\begin{pmatrix}1&1/\sqrt{2}&*\\0&1&*\\0&1/\sqrt{2}&1\end{pmatrix}$$

Última columna:

$$A\underbrace{\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}}_{u_3}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}=-2\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}}_{u_1}+1\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}}_{u_3}$$

$$A\cdot(u_1|u_2|u_3)=(u_1|u_2|u_3)\left(\begin{array}{c|cc|}1&1/\sqrt{2}&-2\\\cline{2-3}0&1&0\\0&1/\sqrt{2}&1\\\cline{2-3}\end{array}\right)$$

$$\underset{\displaystyle A_1}{\shortparallel}$$

$$A_1=\begin{pmatrix}1&0\\1/\sqrt{2}&1\end{pmatrix}$$ tiene mismos autovalores de A !

¿Será casualidad?

Tenemos $A \cdot U_1 = U_1 \cdot A_1$

$$\Rightarrow \quad U_1^* A U_1 = A_1$$

es decir A y A_1 son unitariamente semejantes, luego tienen mismos autovalores.

Miramos ahora la submatriz A_1

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Buscamos $U_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ unitaria:

$$A_1 U_2 = U_2 \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot I_{2\times 2} - A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es autovector.

Completo con $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$A_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 1.\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_1 \cdot \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1/\sqrt{2}\\0&1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Definimos

$$V_2 = \left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\ \hline 0&\multicolumn{2}{c}{\boxed{U_2}}\\ 0&&\end{array}\right) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$U_1^{*} A U_1 = \left(\begin{array}{c|cc}1&1/\sqrt{2}&-2\\ \hline 0&\multicolumn{2}{c}{\underbrace{\begin{matrix}1&0\\1/\sqrt{2}&1\end{matrix}}_{\overset{\parallel}{A_1}}}\\ 0&&\end{array}\right) \text{ y } U_2^{*} A_1 U_2 = \begin{pmatrix}1&1/\sqrt{2}\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V_2^{*}\left(U_1^{*} A U_1\right) V_2$$

$$= \left(\begin{array}{c|c}1&0 \cdots 0\\ \hline 0&\\ \vdots&U_2^{*}\\ 0&\end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|c}1&1/\sqrt{2} \quad -2\\ \hline 0&\\ &A_1\\ 0&\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}1&0 \cdots 0\\ \hline 0&\\ \vdots&U_2\\ 0&\end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c}1&1/\sqrt{2} \quad -2\\ \hline 0&\\ &U_2^{*}A_1U_2\\ 0&\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc}1&1/\sqrt{2}&-2\\ \hline 0&1&1/\sqrt{2}\\ 0&0&1\end{array}\right)$$

chequeamos con $U = U_1 V_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$U^* \cdot A \cdot U$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T \text{ buscada.}}$$

que es triangular superior.

<u>Teorema</u> (de Schur): Dada $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ con autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (no necesariamente distintos) existen matrices U (unitaria) y T triangular superior:

$$A = U \cdot T \cdot \underbrace{U^*}_{\overset{\shortparallel}{U^{-1}}} \quad \text{con } t_{ii} = d_i .$$

Dem: Tomamos d_1 autovalor de A

$\Rightarrow \exists$ w_1 autovector asociado, con lo cual $w_1 \neq 0$ y podemos tomarlo $\|w_1\| = 1$ con

$A w_1 = d_1 w_1$

Si completamos a una BON de $\mathbb{K}^n$

$B = \{w_1, z_2, \dots, z_n\}$ una BON

y llamamos $U_1 = \left(w_1 | z_2 | \cdots | z_n \right)$

$$A U_1 = \left(A w_1 | A z_2 | \cdots | A z_n \right)$$

$$= \left(d_1 w_1 | A z_2 | \cdots | A z_n \right)$$

$$= \left(w_1 | z_2 | \cdots | z_n \right) \left(\begin{array}{c|ccc} d_1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow U_1^* A U_1 = \left(\begin{array}{c|ccc} d_1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Como A y $\left(\begin{array}{c|ccc} d_1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$ son

semejantes (son unitariamente semejantes)

$\Rightarrow$ A y A_1 tienen los mismos autovalores

y d_1 es autovalor de A_1 $\Rightarrow$

$d_2 \cdots d_n$ son autovalores de A_1

Tomamos $A_1 \in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$ y d_2

autovalor $\Rightarrow \exists\, w_2 \neq 0,\ w_2 \in \mathbb{K}^{n-1}$

autovector.

Completamos a una BON de $\mathbb{K}^{n-1}$

$$\{w_2, z_3^{(2)}, \ldots, z_n^{(2)}\}$$

y construimos

$$U_2 = \left(w_2 \,\middle|\, z_3^{(2)} \,\middle|\, \dots \,\middle|\, z_n^{(2)} \right)$$ de

manera que

$$U_2^* A_1 U_2 = \left(\begin{array}{c|ccc} d_2 & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & U_3 & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$ y así ......

Si ahora $V_2 = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & U_2 & \\ 0 & & & \end{array} \right)$

$$\Rightarrow V_2^* U_1^* A U_1^* V_2 =$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & U_2^* \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|ccc} d_1 & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & U_2 \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} d_1 & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & U_2^* A_1 U_2 & \\ 0 & & & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|ccc} d_1 & * & * & \dots & * \\ 0 & d_2 & * & \dots & * \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & U_3 & \\ 0 & 0 & & & \end{array} \right)$$

donde U_3 tiene $d_3, \dots, d_n$ como autovalores ....

Así seguimos inductivamente hasta encontrar $U_1, V_2, V_3, \dots, V_{n-1}$:

$$\overbrace{V_{n-1}^{*} V_n^{*} \cdots V_2^{*} \cdot U_1^{*}}^{U^{*}} A \overbrace{U_1 V_2 \cdots V_n}^{U} = T$$

con $$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & & * \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$ triangular inferior

Si llamamos $U = U_1 V_2 \cdots V_n$ es producto de matrices unitarias y por lo tanto es unitaria, tenemos

$$U^{*} . A . U = T$$ como queríamos

Notar que cada V_j la construimos poniendo un bloque identidad y otro con U_j :

$$V_2 = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & U_2 \\ 0 & \end{array}\right), \quad V_3 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \boxed{U_3} \\ 0 & 0 & \end{array}\right) \cdots V_j = \left(\begin{array}{c|c} Id_{j-1} & 0 \\ \hline 0 & U_j \end{array}\right)$$

¿Qué pasa si la matriz A es hermitiana?

<u>Def</u>: Una matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ se dice hermitiana si $A = A^*$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esto es $A = \bar{A}^t$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esto es $A = A^t$ (simétrica).

<u>Ej</u>: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & \sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{A}^t = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

luego A es hermitiana.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ hermitiana

Por teo Schur $\exists$ U unitaria y T triangular superior:

$$U^* A U = T \Leftrightarrow A = U T U^*$$

$$\Rightarrow A^* = U T^* U$$

Como $A = A^*$

$$UTU^* = UT^*U^* \Rightarrow T = T^*$$

U y U^* son inversible

T es triang sup $\Rightarrow$ T^* es triang inf

$\Rightarrow$ T es diagonal, además $t_{ii} = \overline{t_{ii}}$

luego $t_{ii} \in \mathbb{R}$.

Es decir, T es diagonal real y tiene los autovalores en la diagonal.

<u>Corolario</u>: Si $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ es hermitiana entonces A es unitariamente semejante a una matriz diagonal real.

Es decir, toda matriz hermitiana se diagonaliza, sus autovalores son reales y se puede elegir una base de autovectores que sea una BON.