

ÁLGEBRA LINEAL COMPUTACIONAL

2do Cuatrimestre 2023

Producto Matricial por bloques

Una matriz rectangular A puede particionarse en submatrices trazando líneas horizontales entre filas seleccionadas y líneas verticales entre columnas. Por ejemplo, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

puede particionarse de alguna de las siguientes formas:

$$\begin{aligned} (i) \quad \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} &= \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) & (ii) \quad \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \end{pmatrix} &= \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ (iii) \quad \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{pmatrix} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & \\ 2 & 0 & 2 & \\ 1 & 0 & 1 & \end{array} \right) & (iv) \quad \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \end{pmatrix} &= \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

En (i) la matriz A es dividida en 4 submatrices

$$A_{11} = [1], \quad A_{12} = [4, 2], \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mientras que en (ii) y (iii) la partición es en columnas y filas respectivamente. Observar que las líneas se extienden de comienzo a fin; particiones como las siguientes no son válidas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & \\ 2 & 0 & 2 & \\ 1 & 0 & 1 & \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Las submatrices de una partición usualmente se las llama **bloques** y una matriz particionada es usualmente llamada **matriz en bloques**.

Consideremos de aquí en más las matrices $A \in \mathbb{K}^{m \times p}$ y $B \in \mathbb{K}^{p \times n}$. Las siguientes son algunas de las reglas y observaciones para la realización de la multiplicación matricial en bloques.

1. Si $B = (B_{11}, \dots, B_{1n})$ es una partición en columnas de la matriz B (es decir, $B_{1k} = \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{pk} \end{pmatrix}$

para $1 \leq k \leq n$), entonces la partición en bloques del producto AB en columnas es

$$AB = (A B_{11}, A B_{12}, \dots, A B_{1n})$$

En particular, si I es la matriz identidad de orden p entonces

$$A = AI = A(e_1, e_2, \dots, e_p) = (Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_p)$$

y podemos observar que la columna j -ésima de A se puede escribir como Ae_j para $j = 1, \dots, p$.

2. De forma análoga, si A es particionada por filas como $A = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{m1} \end{pmatrix}$ donde $A_{k1} = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kp})$,

entonces

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{m1} \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} A_{11}B \\ A_{21}B \\ \vdots \\ A_{m1}B \end{pmatrix},$$

y tomando $A = I$ se tiene que la fila i de B se puede escribir como $e_i^t B$ para $i = 1, \dots, m$.

3. Si $B = (B_1, B_2)$, con $B_1 \in \mathbb{K}^{p \times r}$ y $B_2 \in \mathbb{K}^{p \times (n-r)}$ entonces

$$A(B_1, B_2) = (AB_1, AB_2).$$

Esto se observa a partir de aplicar la Regla 1 agrupando las columnas de B de forma conveniente.

4. Si $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ donde $A_1 \in \mathbb{K}^{k \times p}$ y $A_2 \in \mathbb{K}^{(m-k) \times p}$ entonces

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} A_1 B \\ A_2 B \end{pmatrix}.$$

Esto se observa a partir de aplicar la Regla 2 agrupando las filas de A de forma conveniente.

5. Si $A = (A_1, A_2)$ y $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$ con $A_1 \in \mathbb{K}^{m \times s}$, $A_2 \in \mathbb{K}^{m \times (p-s)}$, $B_1 \in \mathbb{K}^{s \times n}$ y $B_2 \in \mathbb{K}^{(p-s) \times n}$ entonces

$$(A_1, A_2) \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = (A_1 B_1 + A_2 B_2).$$

En efecto,

$$\begin{aligned} (AB)_{ij} &= \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^s a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=s+1}^p a_{ik} b_{kj} \\ &= (A_1 B_1)_{ij} + (A_2 B_2)_{ij} = (A_1 B_1 + A_2 B_2)_{ij} \end{aligned}$$

6. Si $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ entonces

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix},$$

Aquí debe cumplirse que la partición vertical de A coincide con la partición horizontal de B , es decir, el número de columnas de A_{11} y A_{21} es igual al número de filas de B_{11} y B_{12} , y el número de columnas de A es igual al número de filas de B .

Verifiquemos que funciona usando las reglas anteriores:

$$AB \stackrel{(\text{Regla 3})}{=} \left(\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{12} \\ B_{22} \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{\text{(Regla 4)}}{=} \left(\frac{(A_{11} \ A_{12}) \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix}}{(A_{21} \ A_{22}) \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix}} \left| \frac{(A_{11} \ A_{12}) \begin{pmatrix} B_{12} \\ B_{22} \end{pmatrix}}{(A_{21} \ A_{22}) \begin{pmatrix} B_{12} \\ B_{22} \end{pmatrix}} \right. \right) \\
& \stackrel{\text{(Regla 5)}}{=} \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

7. Consideremos finalmente el caso general. Sea $A \in \mathbb{K}^{m \times p}$ particionada en r filas de bloques y s columnas de bloques, con cada bloque $A_{ij} \in \mathbb{R}^{m_i \times p_j}$, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq s$:

$$A = \begin{matrix} & p_1 & & p_s \\ m_1 & \left(\begin{array}{ccc} A_{11} & \dots & A_{1s} \end{array} \right) \\ \vdots & \left(\begin{array}{ccc} \vdots & & \vdots \end{array} \right) \\ m_r & \left(\begin{array}{ccc} A_{r1} & \dots & A_{rs} \end{array} \right) \end{matrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} m_1 + \dots + m_r = m \\ p_1 + \dots + p_s = p \end{array} \right.$$

Y sea $B \in \mathbb{K}^{p \times n}$ una matriz en bloques con s filas de bloques y t columnas de bloques:

$$B = \begin{matrix} & n_1 & & n_t \\ p_1 & \left(\begin{array}{ccc} B_{11} & \dots & B_{1t} \end{array} \right) \\ \vdots & \left(\begin{array}{ccc} \vdots & & \vdots \end{array} \right) \\ p_s & \left(\begin{array}{ccc} B_{s1} & \dots & B_{st} \end{array} \right) \end{matrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} p_1 + \dots + p_s = p \\ n_1 + \dots + n_t = n \end{array} \right.$$

Si todos los productos $A_{ik}B_{kj}$ en

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^s A_{ik}B_{kj}, \quad i = 1, \dots, r, \quad j = 1, \dots, t$$

se encuentran bien definidos, entonces

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & \dots & A_{rs} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \dots & B_{st} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{r1} & \dots & C_{rt} \end{pmatrix}$$

Para que el producto por bloques pueda realizarse se tienen los siguientes requerimientos:

- La estructura de las filas de los bloques de B debe coincidir con la estructura de las columnas de los bloques de A : la matriz B debe tener una cantidad de filas de bloques que coincida con la cantidad de columnas de bloques de A .
- Deben coincidir las dimensiones respectivas para hacer posible el producto bloque a bloque: si consideramos la columna i -ésima de bloques de A (es decir, A_{1i}, A_{2i}, \dots), y la i -ésima fila de bloques de B (es decir, B_{i1}, B_{i2}, \dots) el producto $A_{1i}B_{i1}$ debe poder realizarse, para lo cual, $\#cols(A_{1i}) = \#filas(B_{i1})$ para todo i .
- La partición en filas de bloques de A y en columnas de bloques de B puede ser cualquiera.

La partición en bloques de $C \in \mathbb{K}^{m \times n}$ está determinada por la partición de las filas de A y las columnas de B :

$$C = \begin{matrix} & n_1 & & n_t \\ m_1 & \left(\begin{array}{ccc} C_{11} & \dots & C_{1t} \end{array} \right) \\ \vdots & \left(\begin{array}{ccc} \vdots & & \vdots \end{array} \right) \\ m_r & \left(\begin{array}{ccc} C_{r1} & \dots & C_{rt} \end{array} \right) \end{matrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} n_1 + \dots + n_t = n \\ m_1 + \dots + m_r = m \end{array} \right.$$

Ejemplo 1. Usualmente es muy útil escribir el producto matriz-vector Ax , con $x \in \mathbb{K}^p$, como una combinación lineal de las columnas de A . Veamos que esto es un caso particular de la multiplicación en bloques. Si A es particionada por columnas como $A = (A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1p})$ entonces para que el producto en bloques sea realizable, x debe particionarse en filas de bloques de la misma forma. Luego,

$$Ax = (A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1p}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = x_1 A_{11} + x_2 A_{12} + \dots + x_p A_{1p}.$$

Ejemplo 2.

$$A = \left(\begin{array}{c|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right) \quad B = \left(\begin{array}{c|cc} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ \hline b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array} \right)$$

Aquí tenemos un caso particular de la Regla 6 donde se verifican las condiciones: hay dos columnas de bloques en A y dos filas de bloques en B . Además, coinciden las dimensiones respectivas para que el producto sea realizable. Observando la Regla 7, el producto C tiene la misma partición que A y B :

$$C = \left(\begin{array}{c|cc} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ \hline c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{array} \right)$$

Veamos qué operaciones se realizan para el cálculo de cada bloque:

$$\begin{aligned} C_{11} &= A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = \underbrace{a_{11} \cdot b_{11}}_{1 \times 1 \cdot 1 \times 1} + \underbrace{(a_{12}, a_{13}) \begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}}_{2 \times 1 \cdot 1 \times 2} \\ C_{12} &= A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = \underbrace{a_{11} \cdot (b_{12}, b_{13})}_{1 \times 1 \cdot 1 \times 2} + \underbrace{(a_{12}, a_{13}) \begin{pmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}}_{1 \times 2 \cdot 2 \times 2} \\ C_{21} &= A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \cdot b_{11}}_{2 \times 1 \cdot 1 \times 1} + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}}_{2 \times 2 \cdot 2 \times 1} \\ C_{22} &= A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} (b_{12}, b_{13})}_{2 \times 1 \cdot 1 \times 2} + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}}_{2 \times 2 \cdot 2 \times 2} \end{aligned}$$

Observar que todos los productos son realizables.

Ejercicio para el lector. Dadas las siguientes particiones, determinar si el producto por bloques es realizable y en tal caso, determinar las dimensiones de los bloques de C y calcularlos.

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad B = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Ejercicio

Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Probar, mediante inducción en la dimensión de la matriz, que si A y B son triangulares inferiores (superiores) entonces el producto AB es triangular inferior (superior).

Resolución. Probaremos esta propiedad para matrices cuadradas y triangulares inferiores, y la inducción la realizaremos en n , el tamaño de la matriz. El mecanismo para la demostración es similar a cualquier demo por inducción: por un lado podemos asumir que la propiedad es cierta para matrices de tamaño n y probar que vale para tamaño $n + 1$, o podemos probar la propiedad para matrices de tamaño n asumiendo que la propiedad vale para matrices de tamaño estrictamente menor a n .

Utilizando este segundo esquema, nuestra **hipótesis inductiva** será:

*Para cualquier $A, B \in \mathbb{K}^{k \times k}$ matrices triangulares inferiores,
con $k < n$, el producto AB es triangular inferior.*

Caso base. Considerando $n = 1$, la propiedad se cumple trivialmente para escalares.

Paso inductivo. Nuestro objetivo aquí es probar que la propiedad se cumple para matrices de tamaño $n \times n$. Considerando $n > 1$, aquí es donde nos resulta útil la partición en bloques, ya que al ser éstos de tamaño menor a n podremos aplicar el argumento inductivo. Luego, probaremos que AB es triangular inferior para $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ asumiendo que vale nuestra hipótesis inductiva (i.e., que la propiedad vale para matrices de tamaños menores).

Consideremos la partición en bloques cuadrados:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right) \quad B = \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array} \right)$$

Asumiendo $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ con n par¹, entonces los bloques A_{ij} y B_{ij} son de tamaño $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$, para $1 \leq i, j \leq 2$. Nuestras matrices A y B son triangulares inferiores, por lo tanto A_{11}, A_{22}, B_{11} y B_{22} deben ser triangulares inferiores, $A_{12} = 0$ y $B_{12} = 0$.

Dadas estas dos matrices triangulares inferiores veamos cómo es el producto AB :

$$\begin{aligned} AB &= \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & 0 \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A_{11}B_{11} + 0 \cdot B_{21} & A_{11} \cdot 0 + 0 \cdot B_{22} \\ \hline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21} \cdot 0 + A_{22}B_{22} \end{array} \right) = \\ &= \left(\begin{array}{c|c} A_{11}B_{11} & 0 \\ \hline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Observar que el bloque $(1, 2)$ es una matriz nula. Para terminar de demostrar que este producto es triangular inferior, debemos ver que el bloque $(1, 1)$ y el bloque $(2, 2)$ son triangulares inferiores (observar que el bloque $(2, 1)$ no nos importa).

En el bloque $(1, 1)$ tenemos el producto $A_{11}B_{11}$. Aquí es donde podemos aplicar nuestra hipótesis inductiva ya que estamos ante el producto de dos matrices triangulares inferiores de tamaño menor estricto a n . El mismo argumento podemos aplicarlo para el bloque $(2, 2)$: A_{22} y B_{22} son dos matrices triangulares inferiores de tamaño menor estricto a n y por lo tanto $A_{22}B_{22}$ también es triangular inferior por H.I.

¹Luego de leer toda la resolución, queda como ejercicio para el lector verificar que para n impar el producto por bloques es realizable.

Verificando que los bloques $(1, 1)$ y $(2, 2)$ del producto de matrices son triangulares inferiores entonces la matriz AB es triangular inferior, lo que concluye nuestra demostración. \square

Ejercicios para el lector

- Repetir la demostración pero considerando una nueva partición donde la primera fila y columna se separan del resto de la matriz:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right) \quad B = \left(\begin{array}{c|c} b_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array} \right)$$

donde $A_{22} = \begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{(n-1) \times (n-1)}$, $A_{21} = \begin{pmatrix} a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n-1}$ y

$A_{12} = (a_{12}, \dots, a_{1n})$ es un vector fila de $n - 1$ componentes. La misma descripción se aplica a la partición de B .

- Repetir la demostración para el caso triangular superior.