Examen Final

Álgebra Lineal Computacional

24 de febrero de 2025

Ejercicio 1

Se dice que $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es semejante a $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ si existe una matriz invertible $S \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tal que:

$$SA(S^{-1}) = B$$

1. Demostrar que la relación de semejanza es una relación de equivalencia.
2. Demostrar que si A es semejante a B, entonces:
$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$$
Sugerencia: Utilizar la propiedad $\mathrm{Tr}(EC) = \mathrm{Tr}(CE)$ para matrices C y E.
3. Probar que si A es diagonalizable (es decir, A es semejante a una matriz diagonal D) y los valores propios de A son 0 y 1, entonces:
$$A^2 = A$$

Ejercicio 2

1. Calcular la descomposición en valores singulares (SVD) de la matriz:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$
2. Probar que PA y AP tienen los mismos valores singulares que A, donde P es una matriz de permutación. Además, calcular $||PA||_2$ y $\kappa_2(PA)$.

Ejercicio 3

Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}$$

1. Determinar para qué valores de c convergen los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel.
2. Comparar la velocidad de convergencia de ambos métodos.
3. Plantear las iteraciones correspondientes para cada método.

Ejercicio 4

Dada la función:

$$z = ay^b e^{cx+2}$$

1. Plantear las ecuaciones de mínimos cuadrados para estimar los parámetros a, b y c.
2. Proponer puntos de datos para que la solución sea única.
3. Determinar la mínima cantidad de puntos necesarios para que la solución sea única.