Ejercicio de Final - 9 de septiembre de 2024

23 de Julio de 2025

Ejercicio 1

Sea $\boldsymbol{A}_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz con coeficientes dados por

$$a_{ij} = \begin{cases} n & \text{si } i = 1 \text{ o } j = 1 \\ \frac{n}{i} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Probar que $\text{cond}_\infty(\boldsymbol{A}_n) \geq cn^2$ para alguna constante c independiente de n.

(b) Probar que $\text{cond}_2(\boldsymbol{A}_n) \longrightarrow \infty$ cuando $n \to \infty$.

Solución:

(a) Observemos que las matrices tienen la siguiente forma

$$A_n = \begin{pmatrix} n & n & n & \cdots & n & n \\ n & \dfrac{n}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \dfrac{n}{3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & 0 & 0 & \cdots & \frac{n}{n-1} & 0 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ la matriz

$$B_n = \begin{pmatrix} n & n & n & \cdots & n & n \\ n & \dfrac{n}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \dfrac{n}{3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & 0 & 0 & \cdots & \frac{n}{n-1} & 0 \\ n & 0 & 0 & \cdots & \frac{n}{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

que es singular pues tiene dos filas iguales, resulta

$$A_n - B_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{n}{n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

y por ende $\|\boldsymbol{A}_n - \boldsymbol{B}_n\|_\infty = \frac{2n-1}{n-1}$
Luego

$$\begin{aligned}
\operatorname{cond}_\infty(\boldsymbol{A}_n) &\geq \sup_{\boldsymbol{B} \text{ singular}} \left\{ \frac{\|\boldsymbol{A}_n\|_\infty}{\|\boldsymbol{A}_n - \boldsymbol{B}\|_\infty} \right\} \\
&\geq \frac{\|\boldsymbol{A}_n\|_\infty}{\|\boldsymbol{A}_n - \boldsymbol{B}_n\|_\infty} \\
&= \frac{n^2}{\frac{2n-1}{n-1}} \\
&= \frac{n^2(n-1)}{2n-1} \\
&\geq \frac{1}{2}n^2
\end{aligned}$$

Donde la última desigualdad vale pues $\frac{n-1}{2n-1} \geq \frac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$
Esta última expresión tiende a infinito cuando n lo hace, por lo que $\operatorname{cond}_\infty(\boldsymbol{A}_n)$ también debe hacerlo.

(b) Como vale que

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{A}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{A}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\boldsymbol{A}\|_\infty$$

para toda matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{cond}_2(\boldsymbol{A}_n) &= \|\boldsymbol{A}_n\|_2 \|\boldsymbol{A}_n^{-1}\|_2 \\
&\geq \frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{A}_n\|_\infty \frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{A}_n^{-1}\|_\infty \\
&= \frac{1}{n}\operatorname{cond}_\infty(\boldsymbol{A}_n) \\
&\geq \frac{1}{n}n^2 \\
&= n
\end{aligned}$$

que también tiende a n cuando infinito lo hace y listo.