# Examen Final

## Álgebra Lineal Computacional

## 24 de febrero de 2025

## Ejercicio 1

Se dice que  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  es semejante a  $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$  si existe una matriz invertible  $S \in \mathbb{K}^{n \times n}$  tal que:

$$SA(S^{-1}) = B$$

- 1. Demostrar que la relación de semejanza es una relación de equivalencia.
- 2. Demostrar que si A es semejante a B, entonces:

$$Tr(A) = Tr(B)$$

Sugerencia: Utilizar la propiedad Tr(EC) = Tr(CE) para matrices C y E.

3. Probar que si A es diagonalizable (es decir, A es semejante a una matriz diagonal D) y los valores propios de A son 0 y 1, entonces:

$$A^2 = A$$

### Ejercicio 2

1. Calcular la descomposición en valores singulares (SVD) de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Probar que PA y AP tienen los mismos valores singulares que A, donde P es una matriz de permutación. Además, calcular  $||PA||_2$  y  $\kappa_2(PA)$ .

#### Ejercicio 3

Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}$$

- Determinar para qué valores de c convergen los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel.
- 2. Comparar la velocidad de convergencia de ambos métodos.
- 3. Plantear las iteraciones correspondientes para cada método.

## Ejercicio 4

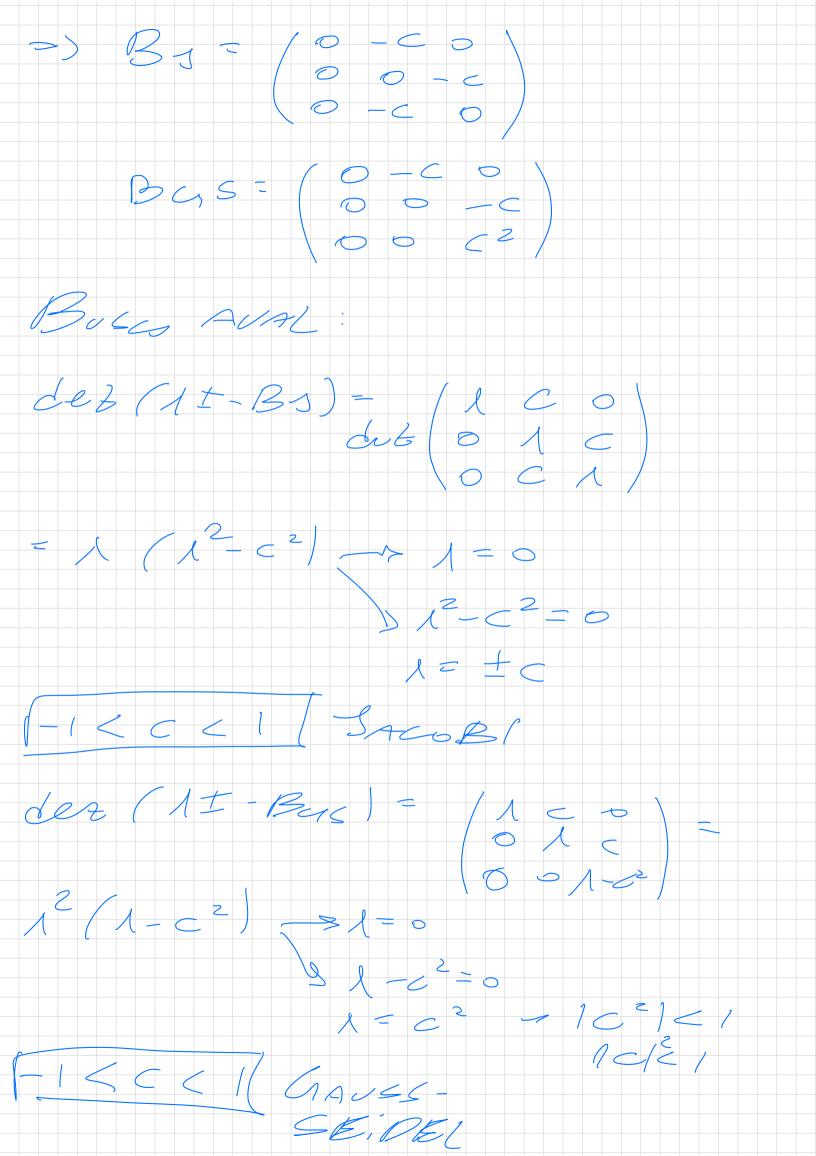
Dada la función:

$$z = ay^b e^{cx+2}$$

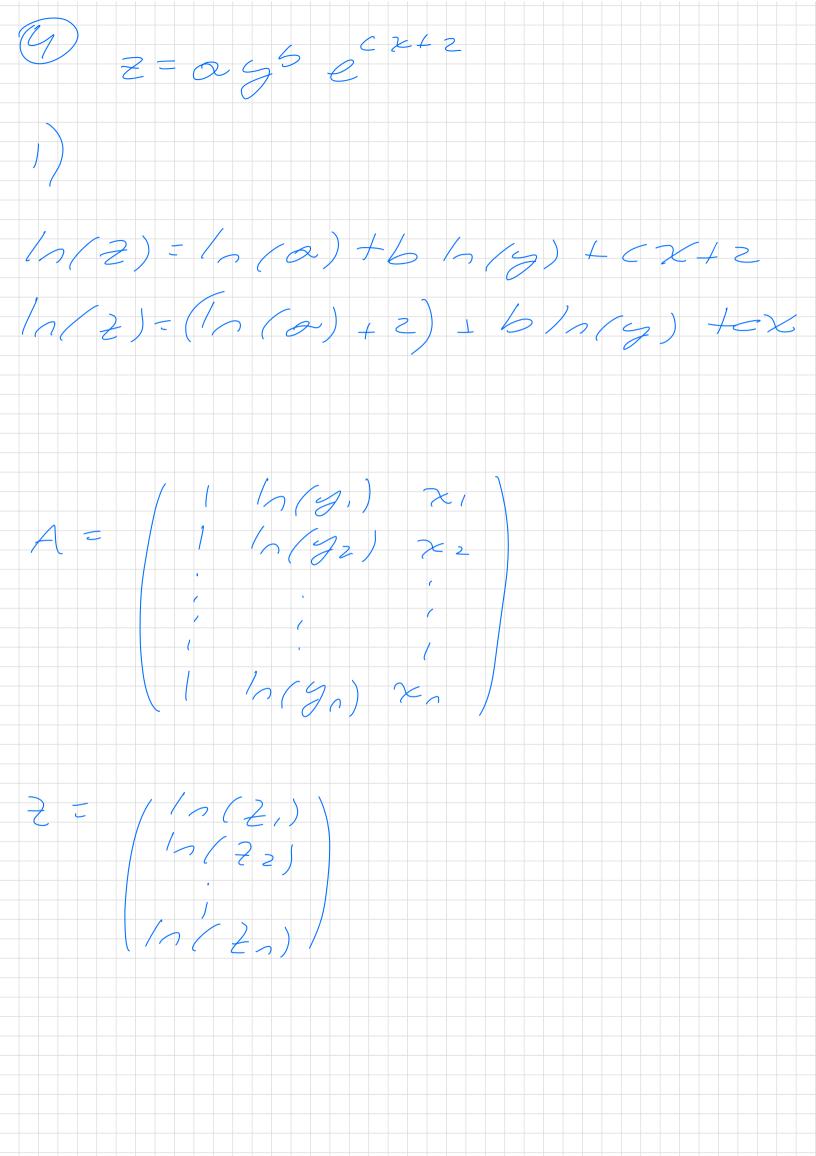
- 1. Plantear las ecuaciones de mínimos cuadrados para estimar los parámetros a, b y c.
- 2. Proponer puntos de datos para que la solución sea única.
- 3. Determinar la mínima cantidad de puntos necesarios para que la solución sea única.

3) 
$$A = \begin{pmatrix} 1 & C & 0 \\ 0 & C & 1 \end{pmatrix}$$

1)  $B = -0^{-1}(2+u) = -\pm^{-1}(2+u)$ 
 $B = -0^{-1$ 



o's fara - 12 C2 1 Cester g ez andred net-63. 2) Paro CE (-(1) 10(2 101 = 75 enveze no 5 ropis ge gee su ras 2000 est-1  $\chi(n_{4}) = B_{3} \chi(n_{4}) + b$ GAUGESTIDEL: x (141) = BGS x (1) + (-(0) b



$$= \sum_{i=1}^{k} A_i = A_i + 2$$

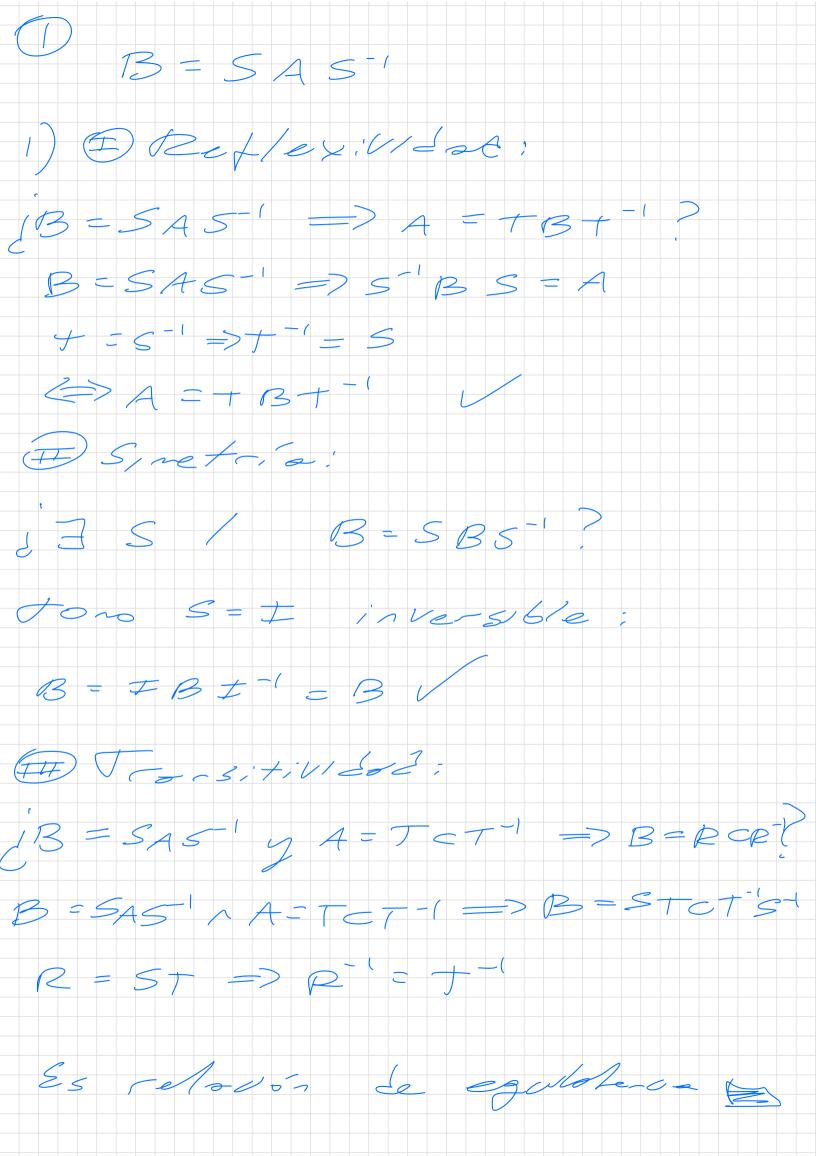
$$= \sum_{i=1}^{k} \ln(g_i) \sum_{i=1}^{k} \ln(g_i) \sum_{i=1}^{k} 2 \sum_{i=1}^{k} \ln(g_i)$$

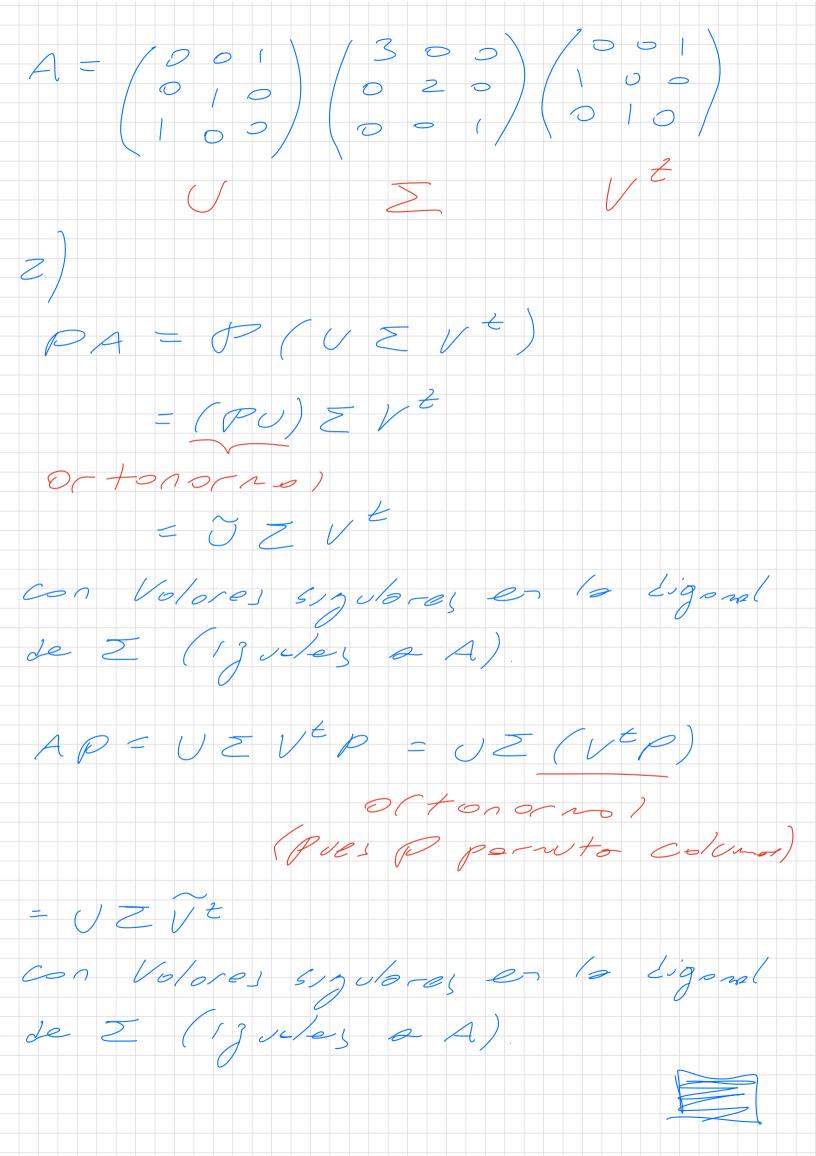
$$= \sum_{i=1}^{k} 2 \sum_{i=1}^{k} \ln(g_i) \sum_{i=1}^{k} 2 \sum_{i=1}^{k} \ln(g_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \ln(g_i) \ln(g_i)$$

$$= \sum_{i=1}$$







$$||PA||_2 = m \propto \langle 0, 0, 0, -, 0, \gamma = 3$$
 $||Conb_2(PA)| = ||PA||_2 ||(PA)^{-1}||_2$ 
 $||Conb_2(PA)|^{-1} = (3 \subseteq V^{\subset})^{-1}$ 
 $||Conb_2(PA)|^{-1} = (3 \subseteq V^{\subsete})^{-1}$ 
 $||Consider V^{\subsete}||_2 = 1$ 
 $||Conb_2(PA)| = 3 \cdot 1 = 3$