Matrices hermitianas:

Vimos la clase pasada que

Corolario: Si $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ es hermitiana entonces A es unitariamente semejante a una matriz diagonal real.

Es decir, toda matriz hermitiana se diagonaliza, sus autovalores son reales y se puede elegir una base de autovectores que sea una BON.

Ejemplo:

Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}$, queremos encontrar autovalores y base ortonormal de autovectores.

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1-i \\ -1+i & \lambda-2 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-2) - (-1-i)(-1+i)$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda + 2 - 2 = \lambda^2 - 3\lambda$$

$\chi_A(\lambda) = 0 \iff \lambda = 0$ ó $\lambda = 3$

Calculamos autovectores:

$\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1-i \\ -1+i & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1-i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x + (1+i)y &= 0 \\ x &= -(1+i)y \end{aligned}$$

$F_2 - (1-i)F_1 \to F_2$

$-2 + (1-i)(1+i) = 0$

$$E_0 = \langle (-(1+i), 1) \rangle_{gen}$$

$\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1-i \\ -1+i & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1-i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} 2x - (1+i)y &= 0 \\ x &= \frac{(1+i)}{2}y \end{aligned}$$

$F_2 + \frac{(1-i)}{2} F_1 \to F_2$

$1 - \frac{(1-i)(1+i)}{2} = 0$

$$E_3 = \langle \left(\frac{1+i}{2}, 1\right) \rangle_{gen}$$

$\Rightarrow$ A es diagonalizable en $\mathbb{C}$ y

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} -1-i & \frac{1+i}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot C^{-1}$$

Recordar que en $\mathbb{C}^2$ el pi viene dado por $\langle x, y \rangle = x^* \cdot y$

$$\left\langle \begin{pmatrix} -1-i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$\begin{pmatrix} -1+i & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = (-1+i)\left(\frac{1+i}{2}\right) + 1 = 0$$

Es decir los autovectores son ortogonales.

Además podemos elegirlos de norma 1

$$\|(-1-i, 1)\|_2 = \sqrt{|-1-i|^2 + |1|^2} = \sqrt{3}$$

$$\left\|\left(\frac{1+i}{2}, 1\right)\right\|_2 = \sqrt{\left|\frac{1+i}{2}\right|^2 + |1|^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Usamos $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$

$$\Rightarrow \quad U = \begin{pmatrix} \frac{-1-i}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{2}\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$ es un matriz unitaria,

ya que sus columnas son una BON (además de ser base de autovectores).

$$\Rightarrow \quad U^{-1} = U^* = \begin{pmatrix} \frac{-1+i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1-i}{\sqrt{2}\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

y $A = U \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} U^*$.

Vemos que pudimos ver que A es unitariamente semejante a una matriz diagonal real. (Como sabíamos por el corolario).

¿Cómo es el procedimiento general para construir la matriz de cambio de base que sea unitaria?

Es necesario el siguiente Lema.

Lema: Sea $A \in \mathbb{k}^{n\times n} \Rightarrow \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle$ $\forall x, y \in \mathbb{k}^n$. Si A es hermitiana, se tiene $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ $\forall x, y \in \mathbb{k}^n$.

Dem: $\langle Ax, y\rangle = (Ax)^* \cdot y = x^* \cdot A^* y$
$= \langle x, A^* y\rangle$

Si A es hermitiana $A^* = A \Rightarrow \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ $\blacksquare$

Lema: Si A es hermitiana y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ son autovalores distintos, entonces cualquier par de autovectores v, w asociados a λ y μ respectivamente son ortogonales.

Dem: $Av = \lambda v$, $Aw = \mu w$

$$\Rightarrow \langle Av, w\rangle = \bar{\lambda}\langle v, w\rangle \underset{\lambda \text{ es real}}{=} \lambda \langle v, w\rangle$$

$$\parallel$$

$$\langle v, Aw\rangle = \langle v, \mu w\rangle = \mu\langle v, w\rangle$$

$$\Rightarrow (\lambda - \mu)\langle v, w\rangle = 0 \underset{\lambda \neq \mu}{\Rightarrow} \langle v, w\rangle = 0.$$ $\blacksquare$

Luego, dada $A \in \mathbb{K}^{m \times m}$ hermitiana para encontrar U unitaria:

$$A = U \cdot D\ U^* \quad \text{con } D \text{ diagonal real}$$

hacemos lo siguiente:

1) Calculamos autovalores

$d_1, \dots, d_k$ (que son reales) $k \leq m$, contamos solo los distintos)

2) Calculamos

$$E_{d_i} = Nu(d_i I - A) \quad \text{los}$$

autoespacios con $i = 1 \dots, k$

Como sabemos que A es diagonalizable en $\mathbb{K}$ debe ser $\dim E_{d_i} =$ multiplicidad de d_i en $\chi_A(d)$.

Además sabemos que si $v_i \in E_{d_i}$ $v_j \in E_{d_j}$ con $d_i \neq d_j \Rightarrow v_i \perp v_j$

3) En cada E_{λ_i} que tengan dimensión ≥ 2 hacemos un proceso de Gram-Schmidt para quedarnos con una base ortonormal de E_{λ_i}

En cada E_{λ_i} que tenga $\dim = 1$ solo normalizamos para quedarnos con un autovector de norma 1.

Si llamamamos B_i a cada base de autovectores que sean una BON para cada E_{λ_i} $\Rightarrow$

$$B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$$

es una BON que sirve para poner en las columnas de U.

Ejemplo: Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

A es simétrica $\Rightarrow$ sus autovalores son reales y se diagonaliza por una BON.

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{pmatrix} = (\lambda-2)\left((\lambda-2)^2-1\right)$$

$$+ \underbrace{(-(\lambda-2)-1)}_{-\lambda+1} - (\underbrace{1+\lambda-2}_{\lambda-1})$$

$$= (\lambda-2)\underbrace{(\lambda^2-4\lambda+3)}_{(\lambda-1)(\lambda-3)} - 2(\lambda-1)$$

$$= (\lambda-1)\left[(\lambda-2)(\lambda-3)-2\right]$$

$$= (\lambda-1)\underbrace{\left[\lambda^2-5\lambda+4\right]}_{(\lambda-1)(\lambda-4)} = (\lambda-1)^2(\lambda-4)$$

$\lambda=4$ $\quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad E_4 = \langle (1,1,1) \rangle$

$\lambda=1$ $\quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad E_1 = \langle (-1,0,1), (-1,1,0) \rangle$

BON de E_4, $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$

Buscamos BON de E_1

$$\dot{q}_2 = (-1,1,0) - \frac{\langle (-1,0,1), (-1,1,0) \rangle}{2} (-1,0,1)$$

$$= (-1,1,0) - \frac{1}{2}(-1,0,1) = \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right) \right\}$$

$\Rightarrow$ Si $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $A = U \cdot D \cdot U^*$.

(Para chequear, ver que U es unitaria y que $A \cdot U = U \cdot D$).

Norma 2 de matrices hermitianas:

Recordemos

$$\|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

Si $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ es hermitiana $\Rightarrow$ existen $U \in \mathbb{K}^{n \times n}$ unitaria y $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonal y real:

$$A = U \cdot D\, U^*$$

donde $U = \left(q_1 | \cdots | q_n \right)$ con

$\{q_1, \dots, q_n\}$ es una BON de autovectores.

y $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$ con $d_1, \dots, d_n$ autovalores

Entonces

$$\|Ax\|_2 = \|U D U^* x\|_2 = \|D U^* x\|_2$$

$\downarrow$

U unitaria

Si llamamos $y = U^* x$

$$Dy = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 y_1 \\ d_2 y_2 \\ \vdots \\ d_n y_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \|Dy\|_2^2 = |d_1 y_1|^2 + \dots + |d_n y_n|^2$$
$$= |d_1|^2 |y_1|^2 + \dots + |d_n|^2 |y_n|^2$$
$$\leq \max_{i=1..n} |d_i|^2 \, \|y\|_2^2$$

OBS: $\max_{i=1..n} |d_i|^2 = \left(\max_{i=1..n} |d_i| \right)^2 = \lambda_{max}^2$

Luego tenemos que $\forall x \neq 0$

$$\|Ax\|_2 = \|DU^* x\|_2 \leq \lambda_{max} \underbrace{\|U^* x\|_2}_{\|x\|_2}$$ porque U^* es unitaria

$$\Rightarrow \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \lambda_{max} \quad \forall x \neq 0$$

$$\Rightarrow \|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \lambda_{max}. \quad 1$$

Además vemos que $\lambda_{max} = |\lambda_{i_0}|$ para algún i_0 : $1 \leq i_0 \leq n$

Sea v_{i_0} el autovector asociado a λ_{i_0}

$$\Rightarrow \frac{\| A v_{i_0} \|_2}{\| v_{i_0} \|_2} = \frac{\| \lambda_{i_0} v_{i_0} \|_2}{\| v_{i_0} \|_2} = |\lambda_{i_0}| = \lambda_{max}$$

$\Rightarrow$ como hay un $v_{i_0} \neq 0$: $\dfrac{\| A v_{i_0} \|_2}{\| v_{i_0} \|_2} = \lambda_{max}$

tenemos que $\displaystyle \max_{x \neq 0} \frac{\| Ax \|}{\| x \|} \geq \lambda_{max}$ (2)

Juntando (1) y (2) llegamos a que si A es hermitiana $\Rightarrow \| A \|_2 = \lambda_{max}$

<u>Definición</u>: Dada $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, se define radio espectral de A ($\rho(A)$) al mayor de los módulos de los autovalores

de A. Es decir

$$\rho(A) = \text{máx}\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|\}$$

$$= \max_{i=1\ldots n} |\lambda_i| = \lambda_{\text{máx}}$$

Probamos recién que **si A es hermitiana**, entonces

$$\|A\|_2 = \rho(A).$$

¿Qué podemos decir para una $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ cualquiera?

Para esto veamos que si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

$\Rightarrow$ A^*A es hermitiana y semidefinida positiva.

$$(A^* \cdot A)^* = A^* \cdot A \Rightarrow A^* \cdot A \text{ es hermit.}$$

Sea $x \in \mathbb{K}^n$ (vertical)

$$x^* A^* A x = (Ax)^* Ax = \|Ax\|_2^2 \geq 0.$$

Por ser A^*A hermitiana, entonces es unitariamente equivalente a una matriz diagonal real.

Además, los autovalores de A^*A son no negativos ya que si λ es autovalor y v autovector asociado, por la cuenta de antes

$$\underbrace{\|Av\|_2^2}_{\geq 0} = v^* \underbrace{A^*Av}_{\lambda v} = \lambda \underbrace{\|v\|_2^2}_{>0}$$

$$\Rightarrow \lambda \geq 0.$$

Además tenemos que

$$\|Ax\|_2^2 = \langle Ax, Ax \rangle$$

$$= \langle x, A^* A x \rangle$$

$$\leq \|x\|_2 \, \|A^* A x\|_2$$

$$\leq \|A^* A\|_2 \, \|x\|_2^2$$

y como $A^* A$ es hermitiana vimos

que $\|A^* A\|_2 = \rho(A^* A)$

si $x \neq 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \right)^2 \leq \rho(A^* A)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \sqrt{\rho(A^* A)}$$

$$\Rightarrow \quad \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \sqrt{\rho(A^* A)}$$

Además sea $\lambda_{max} = \rho(A^* A)$ el máximo de los módulos de los autovalores de A^*A y sea v_{max} el autovector asociado a λ_{max}

$$\Rightarrow \|Av_{max}\|_2^2 = \langle Av_{max}, Av_{max} \rangle$$

$$= \langle v_{max}, A^*A\, v_{max} \rangle$$

$$= \langle v_{max}, \lambda_{max} v_{max} \rangle = \lambda_{max} \|v_{max}\|_2^2$$

$$\Rightarrow \frac{\|Av_{max}\|_2^2}{\|v_{max}\|_2^2} = \lambda_{max} = \rho(A^*A)$$

$$\Rightarrow \frac{\|Av_{max}\|_2}{\|v_{max}\|_2} = \sqrt{\rho(A^*A)}$$

$$\Rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$$