Nombre y apellido:

Número de libreta:

1	2	3	4	Calificación

Álgebra Lineal Computacional

Examen Final – 20 de julio de 2023

Ejercicio 1: (2.5 pts) Sea $\varepsilon > 0$ y $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 8 & \frac{1}{\varepsilon} & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Probar que $Cond_\infty(A) \to \infty$ cuando $\varepsilon \to \infty$.
b) Probar que $Cond_\infty(A) \to \infty$ cuando $\varepsilon \to 0^+$.
c) Probar que $Cond_2(A) \to \infty$ cuando $\varepsilon \to 0^+$ y cuando $\varepsilon \to \infty$.

Ejercicio 2: (2.5 pts) Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

T_J la matriz de Jacobi asociada a A y D, L y U las partes diagonal, inferior y superior de A.

a) Probar que λ es autovalor T_J si y solo si $\det(\lambda D + L + U) = 0$.
b) Probar que el método de Jacobi aplicado a A no converge.
c) Sean $M = 2D + L$, $N = U - D$. Probar que x es solución de $Ax = b$ si y solo si es solución de $x = -M^{-1}Nx + M^{-1}b$.
d) Probar que el método asociado a M y N converge $\forall x_0$.

Ejercicio 3: (2.5 pts)

a) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que A tiene todos sus valores singulares iguales si y solo si es múltiplo de una matriz ortogonal. *(Sugerencia: Recordar que el producto de dos matrices ortogonales es una matriz ortogonal y que el 'si y solo si' son dos implicaciones).*
b) Sea $B = (-2)Q$, con $Q = \left(q_1 \middle| q_2 \middle| q_3 \right)$ una matriz ortogonal. Hallar dos descomposiciones en valores singulares distintas de B. (*Observación*: dos descomposiciones $C = U_1\Sigma_1V_1^t = U_2\Sigma_2V_2^t$ son iguales si y solo si $U_1 = U_2$ y $\Sigma_1 = \Sigma_2$ y $V_1 = V_2$.)
c) Calcular una matriz singular que sea más cercana a B en norma 2.

Ejercicio 4: (2.5 pts)

a) Probar que si los elementos de las filas de una matriz suman λ entonces λ es autovalor de la matriz. Concluir que si los elementos de las columnas de una matriz suman λ entonces λ también es autovalor de la matriz y que por lo tanto 1 es siempre autovalor de una matriz de Markov.
b) Un grupo de mariposas polinizan tres flores diferentes (A, B y C). Cada minuto cambian de flor. Como las flores A y C están lejos, ninguna que esté en A va a C y ninguna va de C a A. Además, cada minuto la mitad de las mariposas que están en C van a B, la mitad de las que están en B van a C y la mitad de las que están en A van a B. Ninguna se queda en B. Hallar, si existe, el estado límite y decidir cuántas mariposas habrá a largo plazo en cada flor si inicialmente hay 4 en A, 8 en B y ninguna en C.

Justifique todas sus respuestas

1

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 8 & 1/\varepsilon & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $\mathrm{Cond}_\infty(A) \xrightarrow[\varepsilon \to \infty]{} \infty$

Sabemos que:

$$\mathrm{Cond}_\infty(A) \geq \frac{\|A\|_\infty}{\|A-B\|_\infty}$$

$$\|A\|_\infty = 23 + \frac{1}{\varepsilon}$$

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 8 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$ singular ($\det = 0$)

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\|A-B\|_\infty = 1/\varepsilon$$

$$\frac{\|A\|_\infty}{\|A-B\|_\infty} = \frac{23+\frac{1}{\varepsilon}}{\frac{1}{\varepsilon}} = 23\varepsilon + 1$$

$$23\varepsilon + 1 \xrightarrow[\varepsilon \to \infty]{} \infty$$

$$\therefore \ \operatorname{cond}_\infty(A) \xrightarrow[\varepsilon \to \infty]{} \infty$$

$\blacksquare$

b)

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ singular}$$

$$\frac{\|A\|_\infty}{\|A-\tilde{B}\|_\infty} = \frac{23 + 1/\varepsilon}{23} = 1 + \frac{1}{23e}$$

$$1 + \frac{1}{23} \cdot \frac{1}{e} \xrightarrow[e \to 0^+]{} +\infty$$

$$\therefore \ \text{cond}_\infty(A) \xrightarrow[e \to 0^+]{} \infty$$

c) $\sqrt{n}\, \text{cond}_2(A) \geq \text{cond}_\infty(A)$

$(n = 4)$

$$2\,\text{cond}_2(A) \geq \text{cond}_\infty(A)$$

$$\text{cond}_2(A) \geq \frac{1}{2}\text{cond}_\infty(A)$$

$$\text{cond}_2(A) \xrightarrow[\substack{e \to \infty \\ e \to 0^+}]{} \infty$$

$\blacksquare$

② $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a)

$$T_J = -D^{-1}(L+U)$$

$$D = I = D^{-1}$$

$$T_J = -(L+U)$$

λ autovalor $\Longleftrightarrow \det(\lambda I - T_J) = 0$

Pero $\lambda I - T_J = \lambda D - [-L-U]$

$= \lambda D + L + U$

$\therefore \lambda$ AVAL $\Longleftrightarrow \det(\lambda D + L + U) = 0$

$\blacksquare$

b)

$$T_J = -D^{-1}(L+U) = -(L+U)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - T_J) =$$

$$\det\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda + \lambda(\lambda^2+1)$$

$$= \lambda^3 + 2\lambda \rightarrow \pm\sqrt{2}\,i = \lambda_{1,2}$$

$$\rightarrow 0 = \lambda_3$$

$$\Rightarrow |\lambda_{1,2}| = \sqrt{2} > 1$$

$\therefore$ El método Jacobi no converge

c) $M = 2D + L$

$N = U - D$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/8 & -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$x = -M^{-1}Nx + M^{-1}b$$

$$x = M^{-1}(-Nx + b)$$

$$Mx = -Nx + b$$

$$Mx + Nx = b$$

$$(M + N)x = b$$

$$(2D + L + U - D)x = b$$

$$(D + L + U)x = b$$

$$Ax = b$$

$$\therefore Ax = b \Longleftrightarrow x = -M^{-1}Nx + M^{-1}b$$

d)

$$-M^{-1}N = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/8 & -1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/8 & -1/8 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(-M^{-1}N - \lambda I\right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1/2 - \lambda & 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/4 - \lambda & 1/2 \\ 1/8 & -1/8 & 1/4 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \left(1/2 - \lambda\right)\left(\left(\frac{1}{4} - \lambda\right)^2 + \frac{1}{16}\right) - \frac{1}{2}\left(\left(-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4} - \lambda\right) - \frac{1}{16}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\left(\frac{2}{16} - \frac{1}{2}\lambda + \lambda^2\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{16} + \frac{1}{4}\lambda\right)$$

$$= \frac{1}{16} - \cancel{\frac{1}{4}\lambda} + \cancel{\frac{1}{2}\lambda^2} - \cancel{\frac{2}{16}\lambda} + \cancel{\frac{1}{2}\lambda^2} - \cancel{\lambda^3} + \frac{1}{16} - \cancel{\frac{1}{8}\lambda}$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{8}$$

$$\lambda_1 = 1/2, \quad \lambda_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{3}\, i}{4}$$

y $1 > \left|\frac{1+\sqrt{3}\,i}{4}\right| > \left|\frac{1}{2}\right| > \left|\frac{1-\sqrt{3}\,i}{4}\right|$

$\Rightarrow$ El radio espectral es menor a 1.

$\therefore$ El método converge

③
a) $A = K\tilde{A}$

Valores singulares son raíces AVAL de AA^t.

$\Leftarrow$)

$AA^t = K^2 \tilde{A}\tilde{A}^t = K^2 I$

$\Rightarrow \det(\lambda I - AA^t) = \det(\lambda I - K^2 I)$

$\chi(\lambda) = (\lambda - K^2)^n$

(todos AVAL $\lambda_i = K^2 \quad 0 < i \leq n$)

$\therefore$ los valores singulares son todos iguales $\delta = K$

$\Rightarrow$) Sup K de todos sus valores singulares es igual el valor

$A = SVD = S(K^2 I)D = K^2(SID)$

$= K^2 \underbrace{(SD)}_{}$

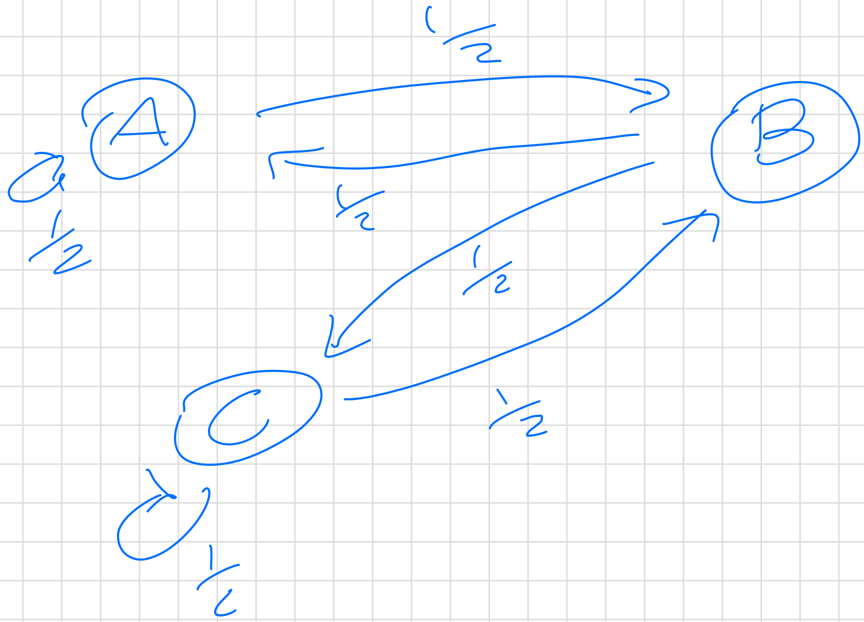
ortogonal pq S y D ortogonales

$\therefore A = K^2 \tilde{A}$ con $\tilde{A}$ ortogonal

b) $B = (-2)Q$

(4)

b)



$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\det(P - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1/2-\lambda & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -\lambda & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\left(\tfrac{1}{2}-\lambda\right)\left((-\lambda)\left(\tfrac{1}{2}-\lambda\right) - \tfrac{1}{4}\right) - \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{2}-\lambda\right)$$

$$\left(\tfrac{1}{2}-\lambda\right)\left(-\tfrac{1}{2}\lambda + \lambda^2 - \tfrac{1}{4}\right) - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{4}\lambda$$

$$\cancel{\tfrac{1}{4}\lambda} + \tfrac{1}{2}\lambda^2 - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{2}\lambda^2 - \lambda^3 \cancel{+\tfrac{1}{4}\lambda} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{4}\lambda$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + \tfrac{1}{4}\lambda - \tfrac{1}{4}$$

$$\lambda_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = \tfrac{1}{2}$$

$\therefore$ Existe el estado límite

$\nu(P-I) =$

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 = 0, \quad x_2 = x_3$

$\langle (0, 1, 1) \rangle$

$\therefore$ el estado límite es

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Como son 12 en total, habrá 6 en B y 6 en C. (0 en A) a)

$$\begin{pmatrix} \text{--- suma 1 ---} \\ \text{--- suma 1 ---} \\ \vdots \\ \text{--- suma 1 ---} \end{pmatrix} = M$$

Propongo $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$Mx = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{pmatrix} = \lambda x$ (λ AVAL de x AVEC)

M y M^t comparten AVAL $\Rightarrow$ funciona también con las columnas.

- En Markov todas las col suman 1 $\Rightarrow$ 1 es AVAL.