Descomposición LU:

Empecemos con un ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Vimos como hacer eliminación Gaussiana

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2+3F_1 \to F_2 \\ F_3 - F_1 \to F_3}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y vimos que hacer operaciones de fila a una matriz corresponde con multiplicar a izquierda por una matriz adecuada:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 0 \quad 0} \\ \boxed{3 \quad 1 \quad 0} \\ \boxed{-1 \quad 0 \quad 1} \end{pmatrix}}_{= L_1} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{= A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

① Esto me dice que la fila 1 de la matriz producto queda igual

② Esto me dice que la fila 2 de la matriz producto será

3 veces Fila 1 + 1 vez Fila 2 + 0 veces Fila 3

③ Esto me dice que la fila 3 de la matriz producto será

$-1 \times$ Fila 1 + $0 \times$ Fila 2 + $1 \times$ Fila 3

Notemos que en cada operación de fila que hacemos podemos elegir reemplazar a la fila en cuestión por ella misma + un múltiplo de otra, es decir hacer una operación del tipo $F_i + kF_j \to F_i$.

Esto hace que la matriz L_1 tenga todos 1's en la diagonal.

Además si lo hacemos ordenadamente y dejamos F_1 como pivote para triangular tendremos que en el 1er paso hacemos operaciones del tipo

$$F_i + k \cdot F_1 \longrightarrow F_i \quad \text{con } i \geq 2$$

con lo cual la matriz L_1 será triangular inferior.

Si seguimos haciendo eliminación ahora con la nueva fila 2 como pivote tendremos.

Hasta aquí

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=L_1} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para poner aquí un cero hacemos $F_3 + \frac{1}{2} F_2 \to F_3$

Esto corresponde con multiplicar a izquierda por

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$L_2 . L_1 . A = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

$= U$ que es triangular superior

Además, notar que:

$$L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$ que es triangular inferior con 1's en la diagonal

$$L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ que es triangular inferior con 1's en la diagonal.

$\Rightarrow$ Como $L_2 L_1 A = U$

$$A = L_1^{-1} L_2^{-1} \cdot U$$

Además $L_1^{-1} L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} := L$$

que también es triangular inferior con 1's en la diagonal $\Rightarrow$

$$A = L \cdot U \quad \text{con}$$

L una matriz triangular inferior con 1's en la diagonal

U una matriz triangular superior.

Algunas preguntas:

1) De qué sirve?

2) Esto siempre se puede hacer?

3) Cuántas operaciones hacemos?

4) Es estable? (En términos de propagación de errores)

Respondamos 1).

Supongamos que A se descompone como $A = L \cdot U$ con A inversible y L una matriz triangular inferior con 1's en la diagonal

U una matriz triangular superior.

Entonces para resolver el sistema

lineal $Ax=b$, resolvemos

$$LUx=b.$$

Para esto, resolvemos en cascada los sistemas:

$$L \cdot y = b$$
$$Ux = y$$

Cada sistema es triangular, por lo que su solución se puede hacer por sustitución hacia atrás (cada uno con un costo de $\sim n^2$ operaciones).

Por ej

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ \cdots & & & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$l_{11} y_1 = b_1$ $\qquad y_1 = b_1 / l_{11}$ $\qquad$ 1 div

$l_{21} y_1 + l_{22} y_2 = b_2 \rightarrow y_2 = b_2 - l_{21} y_1 / l_{21}$

1 suma, 2 prod/div

Paso i $\rightsquigarrow$ $i-1$ sumas

i prod / div

$$\sum_{i=1}^{n} 2i-1 = 2\sum_{i=1}^{n} i - n = \cancel{2}\cdot\frac{n(n+1)}{\cancel{2}} - n$$

$$= n^2$$

Para responder 2) veamos algunas propiedades de matrices triangulares:

Llamamos:

TI1 = matrices triangulares inferiores con 1's en la diagonal.

TI = matrices triangulares inferiores

TS = matrices triangulares superiores

Proposición:

1) multiplicar matrices TI1 da una matriz TI1

2) La inversa de una matriz TI1 es otra matriz TI1.

Valen las mismas prop para matrices TI y matrices TS.

Hagamos ahora la cuenta que hicimos en el ejemplo para una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

1er Paso: Si $\boxed{a_{11} \neq 0}$

Hacemos

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 \\ -\frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L_1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ 0 & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix}$$

$2^{\underline{do}}$ Paso: Si $\boxed{\tilde{a}_{22} \neq 0}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\tilde{a}_{32}}{\tilde{a}_{22}} & 1 \end{pmatrix}}_{L_2} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ 0 & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ 0 & 0 & \tilde{\tilde{a}}_{33} \end{pmatrix}}_{U}$$

$\Rightarrow L_2 L_1 A = U$

L_1 es inversible y $L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

L_2 es inversible y

$$L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\tilde{a}_{32}}{\tilde{a}_{22}} & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$L = L_1^{-1} L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} & \frac{\tilde{a}_{32}}{\tilde{a}_{22}} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A = \underbrace{L_1^{-1} L_2^{-1}}_{L} U = L \cdot U$$

En general para matrices en $\mathbb{K}^{n \times n}$ el procedimiento es el mismo.

Respondamos la pregunta

2) Esto siempre se puede hacer?

Rta: No!

Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 8 & -1 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

supongamos que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = u_{11} \qquad 2 = u_{12} \qquad 6 = u_{13}$$

$$4 = l_{21} u_{11} = l_{21} \qquad 8 = \underbrace{l_{21} u_{12}}_{8} + u_{22}$$

$$\Rightarrow u_{22} = 0$$

$$-1 = \underbrace{l_{21} \, u_{13}}_{24} + u_{23} \Rightarrow u_{23} = -25$$

$$-2 = l_{31} \, u_{11} \Rightarrow l_{31} = -2$$

$$3 = \underbrace{l_{31} \, u_{12}}_{-4} + l_{32} \underbrace{u_{22}}_{=0} = -4 \quad \text{abs!}$$

Por qué pasó esto? Triangulemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 8 & -1 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 - 4F_1 \to F_2 \\ F_3 + 2F_1 \to F_3}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -25 \\ 0 & 7 & 17 \end{pmatrix}$$

para seguir usábamos $\tilde{a}_{22} \neq 0$!

Sin embargo, sabemos que sí se puede si permutamos $F_2 \longleftrightarrow F_3$ que corresponde a multiplicar a izquierda por $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Si hacemos eso, podemos seguir

$$\underset{F_2 \leftrightarrow F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 7 & 17 \\ 0 & 0 & -25 \end{pmatrix} = U, \text{ llegamos a } U \text{ triang superior}$$

Es decir, si llamamos

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tenemos que

$$P L_1 A = U$$

Truco: $\quad P L_1 A = P L_1 P^{-1} P A$

donde $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P$

que vuelve a intercambiar filas 2 y 3.

$\Rightarrow$ $P L_1 \underbrace{P^{-1}}_{P}$ es una matriz que intercambia filas 2 y 3 y columnas 2 y 3

donde $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $P L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

y $P L_1 P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \tilde{L}_1$

que quedó triangular inferior con 1's en la diagonal $\Rightarrow$

$$U = P L_1 A = \underbrace{P L_1 P^{-1}}_{=} P A$$

$$= \tilde{L}_1 P A$$

$$\Rightarrow \quad PA = \underbrace{\tilde{L}_1^{-1}}_{\parallel} \cdot U$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y obtuvimos una descomposición L.U de la matriz $P \cdot A$ donde P es una matriz de permutación.

Este procedimiento funciona en general para matrices $\mathbb{K}^{n \times n}$.

3) Cuántas operaciones hacemos?

Para Paso 1:

a) hacemos $\frac{a_{i1}}{a_{11}} \dashrightarrow m_{i1} \quad i=2,..,n$

$$L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ m_{n1} & 0 & \cdots 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$n-1$ divisiones

b) Hacemos $L_1 A$, para eso

$a_{ij} - m_{i1} \cdot a_{1j} \dashrightarrow \tilde{a}_{ij}$ con $i=2,..,n$, $j=2,..,n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ -m_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -m_{n1} & \cdots & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \tilde{a}_{n1} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

Acá se hacen $(n-1)^2$ multiplicaciones y restas

Para paso dos hacemos esto mismo para la submatriz $\begin{pmatrix} \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & & \\ \tilde{a}_{n1} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ haremos $n-2$ divisiones y $(n-2)^2$ multiplicaciones y restas.

En total:

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n-k)+2(n-k)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} i+2i^2$$

$$= \frac{(n-1)n}{2} + 2 \cdot \frac{1}{6} \overbrace{n(n-1)(2n-1)}^{2n^3-3n^2+n}$$

$$= \frac{1}{3}\left(2n^3-3n^2+n\right)+\frac{1}{2}(n^2-n)$$

$$= \frac{2}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n \sim \frac{2}{3}n^3$$

4) Es estable? (En términos de propagación de errores)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L_2 L_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

y en general, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & 1 \\ -1 & 1 & & & \vdots \\ -1 & -1 & 1 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & -1 & & \\ -1 & -1 & -1 & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ los coef de U crecen hasta $O(2^n)$

¿Cómo podemos garantizar a priori si se podrá hacer la descomposición LU sin hacer permutaciones?

Definimos los menores principales de una matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ como:

$$A(1:k, 1:k) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

Vale lo siguiente:

<u>Proposición</u>: Una matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ tiene descomposición $A = LU$ con L y U inversibles si y solo si $\det(A(1:k), A(1:k)) \neq 0$ para todo $k = 1, \dots, n$.

Dem:

$\Rightarrow$) $A = L \cdot U$ con L y U inversibles

$\Rightarrow l_{ii} \neq 0 \wedge u_{ii} \neq 0 \quad \forall i = 1 \dots n$

Como para cada $k = 1, \dots, n$

$$A(1:k, 1:k) = \underbrace{L(1:k, 1:k)}_{\text{invers.}} \cdot \underbrace{U(1:k, 1:k)}_{\text{invers.}}$$

$\Rightarrow \det(A(1:k, 1:k)) \neq 0$.

$\Leftarrow$) $a_{11} = A(1:1, 1:1) \neq 0$

$\Rightarrow$ se puede construir L_1:

$$L_1 \cdot A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \tilde{a}_{n2} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}}_{\tilde{A}}$$

$\Rightarrow A = L_1^{-1} \cdot \tilde{A}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \frac{a_{m1}}{a_{11}} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \tilde{a}_{n2} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A(1:2, 1:2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{21}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix}$$

y como $\underbrace{\det A(1:2, 1:2)}_{\neq 0 \text{ por hip}} = \underbrace{a_{11}}_{\neq 0 \text{ por paso } 1} \cdot \tilde{a}_{22}$

$\Rightarrow \tilde{a}_{22} \neq 0$ y podemos seguir y construir L_2 ....

Inductivamente probamos lo que se quiere.