Normas vectoriales.

Repasemos el concepto de norma sobre vectores de n coordenadas. Ya conocen la norma euclídea como medida de distancia entre vectores en el espacio euclídeo. En el laboratorio vimos que no es conveniente comparar valores (o vectores) por igualdad ("=") debido a los errores de representación y operación. Las normas también nos servirán cuando analicemos convergencia en secuencias de vectores.

La norma euclídea conocida nos dice que la distancia al origen de un vector $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ puede calcularse como

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Podemos extender esta medida a n coordenadas: $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$

Obs: en $\mathbb{C}$ consideramos los módulos de las coordenadas

$$x \in \mathbb{C} : \quad \|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2}$$

Esta norma euclídea es un caso particular de función sobre un $\mathbb{K}$-e.v. V que asigna a cada $x \in V$ un real no negativo. Definamos qué propiedades debe cumplir esta función.

Def. Una norma de un $\mathbb{K}$-e.v. V es una función $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que cumple las siguientes propiedades:

1. $\|x\| \geq 0 \quad (\text{y } \|x\| = 0 \iff x = 0)$, $x \in V$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in V$
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para cualquier $x, y \in V$

Se puede ver que la norma euclídea (o norma-2) cumple las propiedades ① y ②. Para demostrar la ③ veamos primero una desigualdad que nos será útil.

Desigualdad de Cauchy-Schwarz : $\boxed{|\bar{x}^t y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2 \quad \text{con } x,y \in \mathbb{K}^n}$

Dem: Veamos primero en $\mathbb{R}$. Si $x=0$ o $y=0$ se cumple claramente.
Supongamos $x \neq 0$ e $y \neq 0$ y consideremos la función $\phi(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
$\phi(\lambda) = \|x - \lambda y\|_2^2$. Se observa que $\phi(\lambda) \geq 0$ por propiedad de norma.

$u^t u = \sum u_i^2 = \|u\|_2^2$

$$\Rightarrow 0 \leq \|x - \lambda y\|_2^2 = (x-\lambda y)^t (x - \lambda y) = x^t x - 2\lambda x^t y + \lambda^2 y^t y =$$
$$= \|x\|_2^2 - 2x^t y \lambda + \lambda^2 \|y\|_2^2$$

Vemos que $\phi(\lambda)$ es una cuadrática y ≥ 0, por lo tanto tiene una o ninguna raíz en $\mathbb{R}$.

$$\phi(\lambda) = \|y\|_2^2 \lambda^2 - 2x^t y \lambda + \|x\|_2^2 = a\lambda^2 + b\lambda + c$$

$\rightarrow$ las raíces serán $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Para que $\phi(\lambda)$ tenga una o ninguna raíz en $\mathbb{R}$ debe cumplirse que el discriminante sea ≤ 0 $\Rightarrow$ $\underline{b^2 - 4ac \leq 0}$

$$\Rightarrow 4(x^t y)^2 - 4\|x\|_2^2 \|y\|_2^2 \leq 0$$
$$\Rightarrow \cancel{4}(x^t y)^2 \leq \cancel{4}\|x\|_2^2 \|y\|_2^2$$
$$\Rightarrow |x^t y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2 \quad \checkmark$$

En $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, observemos que

$$|\bar{x}^t y| = \left|\sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i\right| \leq \sum_{i=1}^n |\bar{x}_i||y_i| = \sum_{i=1}^n \underbrace{|x_i|}_{\in\mathbb{R}} \underbrace{|y_i|}_{\in\mathbb{R}} \overset{\text{desigualdad C.S.}}{\leq} \left\|\begin{pmatrix}|x_1|\\|x_2|\\ \vdots \\ |x_n|\end{pmatrix}\right\|_2 \left\|\begin{pmatrix}|y_1|\\|y_2|\\ \vdots \\ |y_n|\end{pmatrix}\right\|_2 =$$
$$= \|x\|_2 \|y\|_2 \checkmark$$

Ahora demostremos la prop. ③ sobre la norma-2 para corroborar que es una norma: $\|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$

Como la norma-2 es positiva probemos $\|x+y\|_2^2 \leq (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2$

$$\Rightarrow \|x+y\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^2 \overset{|z|^2 = \bar{z}z}{=} \sum_{i=1}^{n} \overline{(x_i+y_i)}\,(x_i+y_i) = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i y_i =$$

$$= \underbrace{\sum |x_i|^2}_{\|x\|_2^2} + \underbrace{\sum |y_i|^2}_{\|y\|_2^2} + \underbrace{\sum \bar{x}_i y_i + \sum \bar{y}_i x_i}_{⊛} \leq \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2$$

$$⊛ = \sum \bar{x}_i y_i + \sum \bar{y}_i x_i \leq \left|\sum \bar{x}_i y_i + \sum \bar{y}_i x_i\right| \overset{|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|}{\leq} \underbrace{\left|\sum \bar{x}_i y_i\right|}_{\leq \|x\|_2\|y\|_2 \text{ des. C.S.}} + \underbrace{\left|\sum \bar{y}_i x_i\right|}_{\leq \|y\|_2\|x\|_2 \text{ des. C.S.}} \leq$$

$$\leq 2\|x\|_2\|y\|_2$$

La norma-2 es un caso particular de la norma-p:

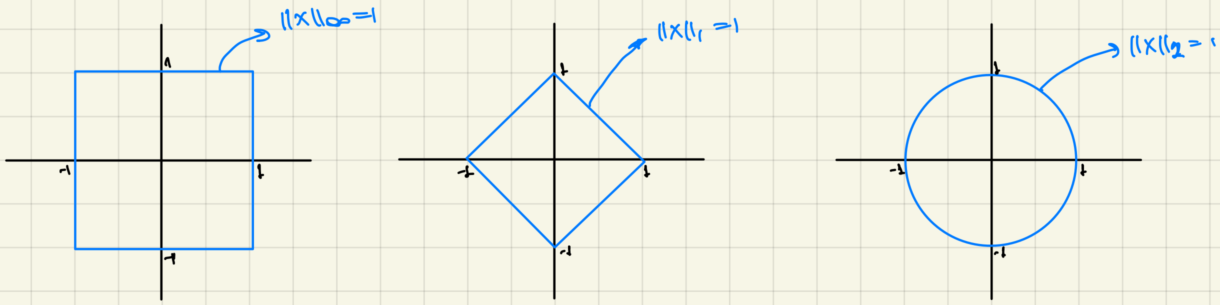
norma-1 : $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$

norma-2 : $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2}$

norma-p : $\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p}$

norma-∞ : $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

Ejemplo en $\mathbb{R}^2$ de puntos con norma $=1$ para diferentes normas-p vectoriales.



$\left\|\binom{x}{y}\right\|_\infty = \max\{|x|, |y|\} = 1$ $\quad \left\|\binom{x}{y}\right\|_1 = |x| + |y| = 1$ $\quad \left\|\binom{x}{y}\right\|_2 = \sqrt{x^2+y^2} = 1$

Equivalencia entre normas.

Decimos que las normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_*$ son equivalentes si $\exists\, c_1, c_2 > 0$ tal que $\forall x \in V$: $c_1 \|x\|_* \leq \|x\| \leq c_2 \|x\|_*$

Es más, en un $\mathbb{K}$-e.v. se puede probar que todas las normas son equivalentes.

Ejemplo de equivalencias (probarlo!):

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\, \|x\|_2$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\, \|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$$

A partir de estas equivalencias podemos usar alguna norma de conveniencia para calcular distancia entre vectores x e y: $d(x,y) = \|x-y\|$

Def: Una sucesión de vectores $\{x^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x bajo una norma $\|\cdot\|$ si $\|x^{(n)} - x\| \to 0$ cuando $n \to \infty$

Normas matriciales.

Al igual que con vectores podemos definir normas sobre matrices.
Una función $\|\cdot\| : \mathbb{K}^{n\times m} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ es norma si cumple para cualquier $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$:

① $\|A\| \geq 0$ y $\|A\| = 0 \iff A = 0$

② $\|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\|$, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$

③ $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ para cualquier $B \in \mathbb{K}^{n\times m}$

Además diremos que la norma es sub-multiplicativa si cumple, cuando $m = n$, la propiedad $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$
De esta forma tenemos definida una distancia entre la matriz A y B como $\|A-B\|$.

Ejemplos para $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$:

- norma de Frobenius $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{ij} |a_{ij}|^2}$

  Esta norma cumple la prop. submultiplicativa (probar usando desig. C.S.!)

- norma de máximo $\|A\|_M = \max_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} |a_{ij}|$

  Cumple las propiedades de norma pero no es submultiplicativa

  Contraejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\|AB\|_M = 2 \not\leq \|A\|_M \, \|B\|_M = 1$$

Otra posibilidad es definir normas matriciales a partir de normas vectoriales. Llamaremos a estas normas "subordinadas" o "inducidas" por una norma vectorial.

Def: Dada $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ y dos normas vectoriales $\|\cdot\|_n$ en $\mathbb{K}^n$ y $\|\cdot\|_m$ en $\mathbb{K}^m$ respectivamente. Se define $\|\cdot\|: \mathbb{K}^{m \times n} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\boxed{\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_n}{\|x\|_m} = \max_{\|x\|_m = 1} \|Ax\|_n}$$

De esta forma tenemos automáticamente definida la norma-p matricial inducida por la norma-p vectorial:

$$\|A\|_p = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \max_{\|x\|_p = 1} \|Ax\|_p$$

Obs: notar que si $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ no es cuadrada entonces

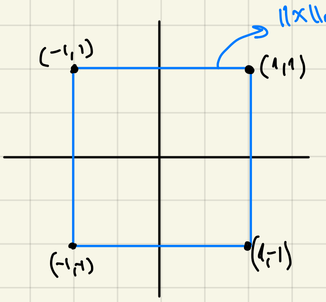
$Ax \in \mathbb{K}^n \to \|\cdot\|_p$ calculada sobre Ax es una norma-p sobre $\mathbb{K}^n$

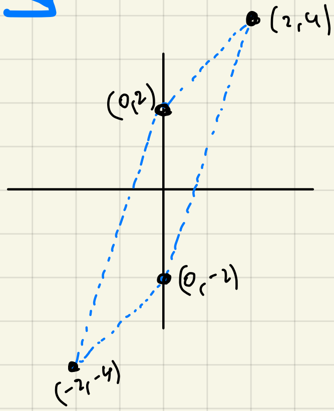
$x \in \mathbb{K}^m \to \|\cdot\|_p$ calculada sobre x es una norma-p sobre $\mathbb{K}^m$

Veamos ejemplos con $n = m = 2$ en $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

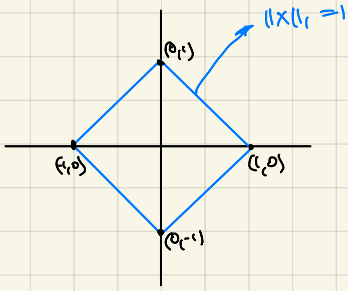
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

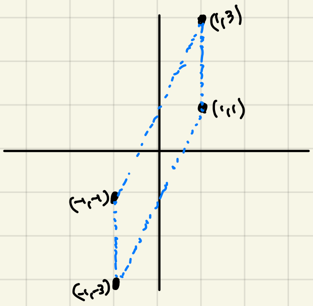
Ax



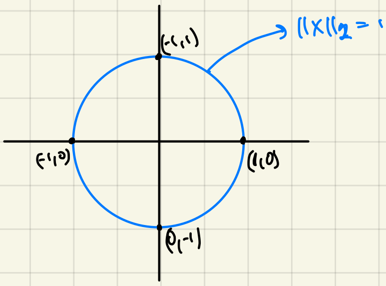


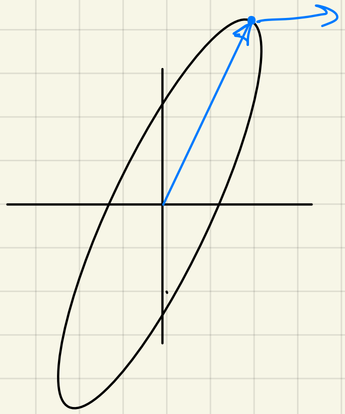
$\|A\|_\infty = 4$





$\|A\|_1 = 4$





punto más alejado del origen sobre los $\{Ax : \|x\|_2 = 1\}$

$\|A\|_2 =$ longitud de ↗

Algunas propiedades de las normas matriciales inducidas.

- $\boxed{\|I\| = 1}$

$$\|I\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ix\|}{\|x\|} = \max_{x\neq 0} \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1 \checkmark$$

- $\|A\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \Longrightarrow \|A\| \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ para cualquier $x\neq 0$

$$\Longrightarrow \boxed{\|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\|}$$

Obs: notar que $\|A\|$ es una norma matricial pero las otras normas son vectoriales.

A esta propiedad se la suele llamar "consistencia" (es decir, las normas matriciales y vectoriales son consistentes entre sí)

- Submultiplicatividad: sean A, B matrices cuadradas

$$\Rightarrow \|AB\| = \max_{\|x\|=1} \|ABx\| \underbrace{\leq}_{\substack{\|A(Bx)\| \leq \|A\|\|Bx\| \\ \text{por consistencia}}} \max_{\|x\|=1} \|A\|\,\|Bx\| = \|A\| \max_{\|x\|=1} \|Bx\| = \|A\|\,\|B\|$$

$$\therefore \boxed{\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|}$$

- Para algunas normas inducidas tenemos fórmula, $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$:

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \max\left\{ \sum_{i=1}^{n} |a_{i1}|, \sum_{i=1}^{n} |a_{i2}|, \dots, \sum_{i=1}^{n} |a_{im}| \right\} \rightarrow \text{la máxima de las sumas por columna en módulo}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| = \max\left\{ \sum_{j=1}^{m} |a_{1j}|, \sum_{j=1}^{m} |a_{2j}|, \dots, \sum_{j=1}^{m} |a_{nj}| \right\}$$

Probemos la fórmula para la norma-1 matricial. Podemos hacerlo a través de la doble desigualdad. $(A \in \mathbb{K}^{n\times m})$

$\leq$) q.v.q $\|A\|_1 \leq \max_j \sum_i |a_{ij}|$

Podemos acotar $\|Ax\|_1$ para un x genérico de norma-1 igual a 1 (si lo acotamos para cualquier x, en particular el máximo de $\|Ax\|_1$ también lo estará)

Sea $x \in \mathbb{K}^m$ tal que $\|x\|_1 = 1$

$$\Rightarrow \|Ax\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} \sum_j a_{1j}x_j \\ \sum_j a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_j a_{nj}x_j \end{pmatrix} \right\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}||x_j|$$

$$= \sum_{j=1}^{m} |x_j| \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \leq \sum_{j=1}^{m} x_j \max_k \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| = \left(\max_k \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|\right) \underbrace{\sum_{j=1}^{m} |x_j|}_{\|x\|_1 = 1}$$

$$= \max_k \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|$$

Luego, como $\|Ax\|_1 \leq \max_k \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|$ para cualquier $x : \|x\|_1 = 1$

$$\Rightarrow \underbrace{\max_{\|x\|_1 = 1} \|Ax\|_1}_{\|A\|_1} \leq \max_k \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| \quad \checkmark$$

$\geq$) q.v.q. $\|A\|_1 \geq \max_j \sum_i |a_{ij}|$

Dado que $\|A\|_1 = \max_{\|x\|_1 = 1} \|Ax\|_1 \Rightarrow \|A\|_1 \geq \|Ax\|_1$ para todo $x : \|x\|_1 = 1$

Elijamos entonces algún x^* de norma 1 tal que $\|Ax^*\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$

Sea j_* la columna que más suma en módulo, es decir, $j_* = \max\{j : \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\}$

Luego, tomando $x^* = e_{j_*} \Rightarrow \|Ax^*\|_1 = \|Ae_{j_*}\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} a_{1j_*} \\ a_{2j_*} \\ \vdots \\ a_{nj_*} \end{pmatrix} \right\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_{ij_*}| =$

$$= \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

Número de condición

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz inversible y $\|\cdot\|: \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ una norma matricial. Definimos el número de condición $\kappa(A)$ como:

$$\boxed{\kappa(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|}$$

Veamos con un ejemplo por qué importa este número al resolver un sistema.

Consideremos $\begin{pmatrix} 0{,}8566 & 0{,}6183 \\ 0{,}8415 & 0{,}6074 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}4749 \\ 1{,}4489 \end{pmatrix}$

Este sistema tiene a $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ como solución exacta.

Consideremos ahora un sistema perturbado $Ax = \tilde{b}$

- $\tilde{b} = b + \delta b$ con $\delta b = \begin{pmatrix} 0{,}0001 \\ -0{,}0001 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \tilde{b} = \begin{pmatrix} 1{,}4749 \\ 1{,}4489 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}0001 \\ -0{,}0001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}4750 \\ 1{,}4488 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Error absoluto: } \|b - \tilde{b}\|} \qquad \boxed{\text{Error relativo: } \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}}$$

En nuestro caso la perturbación es pequeña

$$\frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} \approx 0{,}000678 \approx 7 \cdot 10^{-4}$$

Tenemos 2 sistemas:

Sistema Original $Ax=b$

$$\begin{pmatrix} 0{,}8566 & 0{,}6183 \\ 0{,}8415 & 0{,}6074 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}4749 \\ 1{,}4489 \end{pmatrix}$$

→ solución exacta $x=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

Sistema perturbado $Ax=\tilde{b}$

$$\begin{pmatrix} 0{,}8566 & 0{,}6183 \\ 0{,}8415 & 0{,}6074 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}4750 \\ 1{,}4488 \end{pmatrix}$$

→ ¿cómo esperamos que sea la solución $\tilde{x}$ del sistema perturbado?

$$A\tilde{x}=\tilde{b} \quad \text{con} \quad \tilde{x}=\begin{pmatrix} -199{,}934 \\ 279{,}377 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -200{,}93 \\ 278{,}37 \end{pmatrix} = x+\delta x$$

Error relativo: $\dfrac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|} = \dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|} = 278{,}37$

En este sistema, trabajando con máxima precisión, no podemos asegurar que una pequeña perturbación en b repercuta en una pequeña perturbación en la solución del sistema modificado.

Propiedad:

$$\boxed{\dfrac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|} \leq k(A)\,\dfrac{\|b-\tilde{b}\|}{\|b\|}}$$

$(278{,}37)$ $\qquad$ $(7\cdot 10^{-4})$

- En nuestro ejemplo, la matriz está "mal condicionada" (número de condición grande)

$$k(A) \approx 4105783$$

→ Una 'pequeña' perturbación al sistema no asegura una solución cercana a la del sistema original.

Demostremos la propiedad anterior

$Ax = b \rightarrow x$ sol. del sistema original

suponiendo A inversible $\Rightarrow x = A^{-1} b$

Por otro lado tenemos el sistema perturbado y su solución : $A(x + \delta x) = b + \delta b$

$\Rightarrow A\,\delta x = \delta b \Rightarrow \delta x = A^{-1}\,\delta b \Rightarrow \|\delta x\| = \|A^{-1}\,\delta b\|$

$\Rightarrow \|\delta x\| \leq \|A^{-1}\|\,\|\delta b\|$ ①

Por otro lado $\|Ax\| = \|b\| \Rightarrow \|b\| \leq \|A\|\,\|x\|$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\|x\|} \leq \dfrac{\|A\|}{\|b\|}$ ②

Uniendo ① y ② :

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \underbrace{\|A\|\,\|A^{-1}\|}_{k(A)} \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

Siendo $\|\delta x\| = \|x - \tilde{x}\|$ y $\|\delta b\| = \|b - \tilde{b}\|$ llegamos a la desigualdad buscada

$$\boxed{\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq k(A) \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}}$$

Obs: el mismo desarrollo puede realizarse para el sistema $A^{-1} b = x$ y obtener la cota

$$\frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} \leq k(A) \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|}$$

Algunas propiedades de $k(A)$

- El número de condición siempre se define respecto a una norma y a menos que se especifique lo contrario, usaremos normas inducidas
- $\forall \alpha \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{K}$: $k(\alpha A) = \|\alpha A\| \, \|(\alpha A)^{-1}\| = \cancel{|\alpha|}\|A\| \frac{1}{\cancel{|\alpha|}} \|A^{-1}\| = k(A)$
- $k(I) = 1$ para toda norma inducida.
- $k(A) = k(A^{-1})$

Número de condición y singularidad.

El número de condición nos permite medir la distancia relativa a matrices singulares

Teorema Para $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ no singular, se cumple:

$$\frac{1}{k(A)} = \inf_{B \text{ singular}} \frac{\|A-B\|}{\|A\|}$$

La desigualdad $\frac{1}{k(A)} \leq \frac{\|A-B\|}{\|A\|}$ es un ejercicio de la práctica.

Sugerencia para probarlo: Probar que si B no es inversible entonces $\exists x \neq 0$ tal que $(A-B)x = Ax$

Esta desigualdad nos da una cota inferior para $\kappa(A)$ sin tener que calcular la inversa de A:

$$\kappa(A) \geq \frac{\|A\|}{\|A-B\|}$$

probando con diferentes matrices singulares B.

Otra cota inferior posible:

Supongamos que hemos resuelto el sistema $Ax = b$ por eliminación gaussiana y queremos estimar $\kappa(A)$.

Si elegimos $\|\cdot\|_1$, podemos calcular fácilmente $\|A\|_1$

¿Cómo estimamos $\|A^{-1}\|_1$? Veamos que:

$$\|A^{-1}\|_1 = \max_{x \neq 0} \frac{\|A^{-1}x\|_1}{\|x\|_1} \geq \frac{\|A^{-1}y\|_1}{\|y\|_1} \quad \text{para cualquier } y \neq 0$$

Podemos tomar en particular $y = b$, ya que $A^{-1}b = \hat{x}$, con $\hat{x}$ la solución hallada del sistema. $\Rightarrow \|A^{-1}\|_1 \geq \frac{\|\hat{x}\|_1}{\|b\|_1}$

y obtenemos la cota inferior $\kappa(A) \geq \frac{\|A\|_1 \|\hat{x}\|_1}{\|b\|_1}$

Observemos también que $\kappa(A)$ no guarda relación con el determinante considerando la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

$\|A\| = \alpha$ y $\|A^{-1}\| = \frac{1}{\alpha}$ para cualquier norma inducida.

$\Rightarrow \kappa(A) = 1$ (está bien condicionada)

Pero $\det(A) = \alpha^2$ y para valores muy pequeños es "casi" singular.