Métodos Iterativos

Queremos resolver $Ax = b$.

$A = M + N$

$Mx = -Nx + b$ (M fácil de invertir)

$$x = \underbrace{-M^{-1}N}_{B}\, x + \underbrace{M^{-1}b}_{C}$$

[Puedo pensar que $F(x) = Bx + C$
$\Rightarrow$ la solución de $Ax = b$ es UN PUNTO FIJO de F]

Planteamos la iteración: $x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + C$

Obs: x es la solución $(Ax = b \iff x = Bx + C)$

(Iteración) $x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + C$

(Ecuación que x cumple) $x = Bx + C$

$$x^{(n+1)} - x = Bx^{(n)} - Bx + \cancel{C} - \cancel{C}$$

$$x^{(n+1)} - x = B(x^{(n)} - x)$$

$e^{(n)} = x^{(n)} - x$ (el ERROR)

$$e^{(n+1)} = Be^{(n)}.$$

$$e^{(n+1)} = Be^{(n)} = B(Be^{(n-1)}) = \dots = B^{n+1}e^{0}.$$

$$\Rightarrow \quad \|e^{(n+1)}\| = \|B^{n+1} e^0\| \le \underbrace{\|B^{n+1}\|} \cdot \|e^0\|$$

Para obtener convergencia necesito $\|B^{n+1}\| \to 0$

- $\|B^{n+1}\| \le \|B\|^{n+1}$

$\Rightarrow$ si $\|B\| < 1$ para alguna norma.

$\Rightarrow$ el MÉTODO converge.

- $\rho(B) < 1$

$\Rightarrow$ el MÉTODO converge.

(VALE: $\rho(B) = \inf_{\|\cdot\|} \|B\|$)

<u>MÉTODOS:</u>

1) Richardson : $M = I$

$$x^{(n+1)} = -(A - I) \cdot x^{(n)} + b.$$

2) Jacobi : $M = D = \text{diag}(A)$

$$x^{(n+1)} = -D^{-1}(\underbrace{L+U}_{M-D})\, x^{(n)} + D^{-1} b.$$

3) Gauss Seidel : $A = L + U + D$, $M = D + L$

$$x^{(n+1)} = -\underbrace{(L+D)^{-1}\, U}\, x^{(n)} + (L+D)^{-1} b.$$

<u>ejemplo:</u> Estudiar la convergencia de Gauss-Seidel para la matriz: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & -2 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$.

Calculo $\underline{\underline{B_{GS}}}$ $\quad L + D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$B_{GS} = -\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} F_2 - F_1 \\ F_3 - 4F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{6}F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/12 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & -3 & 8 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$F_3 + 3F_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -\frac{9}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{32} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} \end{array}\right)$$

$$\underline{\underline{B_{GS}}} = -\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{9}{32} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{9}{32} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}}}$$

Busco autovalores:

$$\det\left(B_{GS} - \lambda I\right) = \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} - \lambda & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{9}{32} & \frac{1}{8} - \lambda \end{pmatrix} = -\lambda \cdot \left(\left(-\frac{1}{12} - \lambda\right)\left(\frac{1}{8} - \lambda\right) + \frac{3}{32} \right)$$

$$-\lambda \left(\lambda^2 - \frac{1}{8}\lambda + \frac{1}{12}\lambda - \frac{1}{96} + \frac{3}{32} \right)$$

$$-\lambda \left(\lambda^2 - \frac{1}{24}\lambda - \frac{8}{96} \right) = 0 \quad \begin{array}{l} \nearrow \lambda = 0 \\ \searrow \lambda^2 - \frac{1}{24}\lambda - \frac{1}{12} = 0 \end{array}$$

$$\lambda^2 - \frac{1}{12}\lambda - \quad = 0$$

$$\hookrightarrow \lambda = \frac{\frac{1}{12} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{12}\right)^2 - \frac{4}{12}}}{2}$$

$$\lambda = \frac{\frac{1}{12} \pm \sqrt{\frac{1}{144} - \frac{1}{3}}}{2}$$

$$\frac{1}{144} - \frac{1}{3} = \frac{1 - 48}{144} = -\frac{47}{144}. \qquad \lambda = \frac{\frac{1}{12} \pm \sqrt{\frac{47}{144}}\, i}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 0 \;, \quad \lambda_2 = \frac{1}{24} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{47}{144}}\, i \;, \quad \lambda_3 = \frac{1}{24} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{47}{144}}\, i$$

$$\rho(B_{GS}) = |\lambda_2| = |\lambda_3| = \sqrt{\left(\frac{1}{24}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{47}{144}}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{24^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{47}{144}} = \sqrt{\frac{1}{4\cdot 144} + \frac{47}{4\cdot 144}}$$

$$= \sqrt{\frac{48}{4\cdot 144}} = \sqrt{\frac{\cancel{4}\cdot 12}{\cancel{4}\cdot 144}} = \underline{\sqrt{\frac{1}{12}} < 1}$$

$\Rightarrow$ Gauss-Seidel converge para todo $x^{(0)}$.

<u>Obs</u>: en este caso $\quad \|e^{(m)}\| \leq C\,\underbrace{\rho(B_{GS})}^{m} \|e^{(0)}\|$

$$\|e^{(m)}\| \leq C\left(\sqrt{\frac{1}{12}}\right)^m \|e^{(0)}\|$$

↳ cuanto más chico $\rho(B)$, más rápida la convergencia.

<u>Resultados</u>: 1) A es ESTRÍCTAMENTE diagonal dominante

$\Rightarrow$ Jacobi converge

Gauss Seidel converge.

(Def: A es E.D.D si $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$)

2) A es simétrica y definida $\oplus$

Gauss Seidel converge.

Jacobi → NO necesariamente.

3) A es TRIDIAGONAL $\Rightarrow$ VALE $\rho(B_{GS}) = \rho(B_J)^2$

• Si Jacobi converge $\Rightarrow$ Gauss Seidel TAMBIÉN converge y es más rápido

• Si Jacobi no converge $\Rightarrow$ Gauss Seidel TAMPOCO (y diverge más rápido)

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & -2 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow$ ES estrictamente diagonal dominante

$2 > |-1| + 0$ ✓

$6 > |1| + |-2|$ ✓

$8 > |4| + |-3|$ ✓

$\Rightarrow$ Sabemos que Jacobi y Gauss Seidel convergen.

Propiedad: $B = -M^{-1}N$.

λ es un autovalor de $B \iff \det(\lambda M + N) = 0$.

D/ λ autovalor de $B \Rightarrow \det(-M^{-1}N - \lambda I) = 0$

$$0 = \det(-M^{-1}N - \lambda I) = \det(-M^{-1}N - \lambda M^{-1}M) =$$

$$= \det(-M^{-1}\cdot(N + \lambda M)) = \underbrace{\det(-M^{-1})}_{\neq 0} \cdot \det(N + \lambda M)$$

$$\iff \det(N + \lambda M) = 0.$$

— x —

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ estudiar la convergencia de Jacobi y Gauss Seidel.

JACOBI: $B_J = -D^{-1}(L+U) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ los autovalores de B_J salen de

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

La propiedad diría: $\det\left(\lambda \cdot D + L + U\right)$

$$= \det\begin{pmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 2 & \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda\left(\lambda^2 - 2\right) - 2\left(\lambda - 2\right) - 2\left(2 - 2\lambda\right)$$

$$= \lambda^3 \cancel{-2\lambda} \cancel{-2\lambda} + \cancel{4} - \cancel{4} + \cancel{4\lambda} = \lambda^3$$

$$\Rightarrow \rho(B_J) = 0 \rightarrow \text{Jacobi converge}$$

(Esto significa que $B_J^3 = 0 \Rightarrow e^{(3)} = B_J^3 e^{(0)} = 0$
$\Rightarrow$ Jacobi encuentra la solución exacta en 3 pasos)

<u>GAUSS SEIDEL</u>: por propiedad:

λ es autovalor de $B_{GS} \Longleftrightarrow \det\left(\lambda(L+D) + U\right) = 0$

$$\det\left(\lambda(L+D)+U\right) = \det\begin{pmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ \lambda & \lambda & 1 \\ 2\lambda & 2\lambda & \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda\left(\lambda^2 - 2\lambda\right) - 2\left(\lambda^2 - 2\lambda\right) - 2\cancel{\left(2\lambda^2 - 2\lambda^2\right)}$$

$$= \lambda^3 - 2\lambda^2 - 2\lambda^2 + 4\lambda = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda =$$

$$= \lambda\left(\lambda^2 - 4\lambda + 4\right) = \lambda(\lambda-2)^2 \begin{cases} \rightarrow \lambda = 0 \\ \rightarrow \underline{\lambda = 2} \text{ (doble)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \rho(B_{GS}) = 2 \rightarrow \text{GS } \underline{\text{no converge}}.$$

Ej: Estudiar la convergencia de Jacobi para la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -122 & -19 & 44 & 23 \\ 24 & 176 & 23 & -7 \\ 84 & -49 & -162 & -50 \\ 30 & 97 & 86 & 186 \end{pmatrix}$$

Obs: $\underbrace{30 + 97 + 86}_{213} > 186 \to$ A NO es ESTRICTAMENTE diagonal dominante.

$$B_J = - \begin{pmatrix} 0 & \frac{-19}{-122} & \frac{44}{-122} & \frac{23}{-122} \\ \frac{24}{176} & 0 & \frac{23}{176} & \frac{-7}{176} \\ \frac{84}{-162} & \frac{-49}{-162} & 0 & \frac{-50}{-162} \\ \frac{30}{186} & \frac{97}{186} & \frac{86}{186} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{19}{122} & \frac{44}{122} & \frac{23}{122} \\ -\frac{24}{176} & 0 & -\frac{23}{176} & \frac{7}{176} \\ \frac{84}{162} & -\frac{49}{162} & 0 & -\frac{50}{162} \\ -\frac{30}{186} & -\frac{97}{186} & -\frac{86}{186} & 0 \end{bmatrix}$$

Obs: ver $\|B_J\|_\infty$ es lo mismo que ver si A es estrictamente diagonal dominante

es fácil ver que $\|B_J\|_1 < 1 \Rightarrow$ Jacobi converge!

— x —

Programas: JACOBI:

$u = -D^{-1}(Nx - b)$

```
for k in range(K):
    for i in range(n):
        u_i = (b_i - Σ_{j≠i} a_ij x_j) / a_ii
    x = u
return x.
```

Gauss Seidel:

```
for k in range(K):
    for i in range(n):
        x_i = (b_i - Σ_{j≠i} a_ij · x_j) / a_ii
    ⋮
return x.
```