

SISTEMAS

① Resolver el sistema:

$$\begin{cases} (1+i)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1+i \\ i x_1 + (1-i)x_2 - x_3 = 1+i \\ 2x_1 + 2x_2 - i x_3 = 3-2i \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1+i & 2 & -2 & 1+i \\ i & 1-i & -1 & 1+i \\ 2 & 2 & -i & 3-2i \end{array} \right) \xrightarrow{F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1-i & -1+i & 1 \\ i & 1-i & -1 & 1+i \\ 2 & 2 & -i & 3-2i \end{array} \right)$$

$$\left[\frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i}{2} \right] \quad \begin{aligned} 1-i - i(1-i) &= 1-i - i + i^2 = -2i \\ -1 - i(-1+i) &= -1 + i - i^2 = i \\ -i - 2(-1+i) &= -i + 2 - 2i = 2-3i \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} F_2 - i F_1 \\ F_3 - 2 F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1-i & -1+i & 1 \\ 0 & -2i & i & 1 \\ 0 & 2i & 2-3i & 1-2i \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1-i & -1+i & 1 \\ 0 & -2i & i & 1 \\ 0 & 0 & 2-2i & 2-2i \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow (2-2i)x_3 &= 2-2i \rightarrow \boxed{x_3 = 1} \\ -2i x_2 + i \cdot 1 &= 1 \rightarrow \boxed{x_2 = \frac{1-i}{-2i} \cdot \frac{2i}{2i} = \frac{i+1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}} \\ x_1 + (1-i) \left(\frac{1+i}{2} \right) + (-1+i) \cdot 1 &= 1 \\ x_1 + 1 - 1 + i &= 1 \rightarrow \boxed{x_1 = 1-i} \end{aligned} \rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-i \\ \frac{1+i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}}$$

② Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_2 - 3x_3 = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \rightarrow 0=0 \end{cases} &\rightarrow x_1 - 2\left(\frac{1}{5} + \frac{3}{5}x_3\right) + x_3 = 0 \\ &\rightarrow \boxed{x_2 = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}x_3} \quad \begin{aligned} x_1 - \frac{2}{5} - \frac{6}{5}x_3 + x_3 &= 0 \\ \boxed{x_1 = \frac{1}{5}x_3 + \frac{2}{5}} \end{aligned} \end{aligned}$$

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{5}x_3 + \frac{2}{5}, \frac{1}{5} + \frac{3}{5}x_3, x_3 \right) = x_3 \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1 \right) + \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 0 \right)$$

Sol: $\boxed{\lambda \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1 \right) + \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 0 \right)}$

③ Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

→ la 3ª ecuación dice: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1 \rightarrow 0 = 1$ Abs!
 \Rightarrow No tiene solución.

→ ① es COMPATIBLE DETERMINADO, ② es COMPATIBLE INDETERMINADO.
 ③ es INCOMPATIBLE.

④ Resolver el siguiente sistema y el sistema homogéneo asociado.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

↓
 igualado a 0.

① ②

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - F_1, F_3 - 3F_1} \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & -3 & 5 & 0 \end{array} \right)$$

① ②

$$\xrightarrow{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

① $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ -5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5 \end{cases}$

$$\rightarrow \boxed{x_3 = \frac{5}{2} + \frac{5}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_4}$$

$$x_1 + 2x_2 - \left(\frac{5}{2} + \frac{5}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_4 \right) + x_4 = -2$$

$$x_1 + 2x_2 - \frac{5}{2} - \frac{5}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_4 + x_4 = -2$$

$\swarrow \quad \nwarrow$
 $-\frac{1}{2}x_2 \quad \quad -\frac{1}{2}x_4$

$$\boxed{x_1 = -2 + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4, x_2, \frac{5}{2} + \frac{5}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_4, x_4 \right)$$

$$= x_2 \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}, 0 \right) + x_4 \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}, 1 \right) + \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{5}{2}, 0 \right)$$

\Rightarrow Podemos escribir la sol en forma paramétrica:

$$\text{Sol: } \lambda \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}, 0 \right) + \mu \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}, 1 \right) + \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{5}{2}, 0 \right)$$

⊗

$$\textcircled{\text{II}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{el despeje es igual}$$

y queda: Sol_H : $\lambda \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}, 0 \right) + \mu \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}, 1 \right)$

\hookrightarrow homogéneo

Esto pasa siempre: la solución de un sistema (S) es: la solución del homogéneo asociado + una solución particular de (S)

En efecto: $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{5}{2}, 0 \right)$ es UNA solución del sistema $\textcircled{\text{I}}$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + 2 \cdot 0 - \frac{5}{2} + 0 = -2 \quad \checkmark \\ \frac{1}{2} - 3 \cdot 0 + \frac{5}{2} - 2 \cdot 0 = 3 \quad \checkmark \\ 3 \cdot \frac{1}{2} + 0 - \frac{5}{2} = -1 \quad \checkmark \end{cases}$$

Ejemplo: Resolver:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

A ojo puedo encontrar una solución: $\begin{cases} x_1 = 1 & x_2 = 0 \\ x_3 = 0 & x_4 = 0 \end{cases}$

\Rightarrow la solución GENERAL es:

$$\underbrace{\lambda \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}, 0 \right) + \mu \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}, 1 \right)}_{\text{sol del Homogéneo}} + \underbrace{(1, 0, 0, 0)}_{\text{una solución particular.}}$$

Prop: Todo sistema homogéneo tiene solución.
porque $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ siempre es solución.
 \hookrightarrow se lo llama solución trivial.

⑤ Decidir para qué valores de a y k el siguiente sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

$$\begin{cases} x - y + iz = 1 \\ -x + (1+k)y - 2iz = 3a-1 \\ -x \quad \quad + (1-i)z = -4 \end{cases}$$
