Álgebra Lineal Computacional

Examen Final – 09 de septiembre de 2024

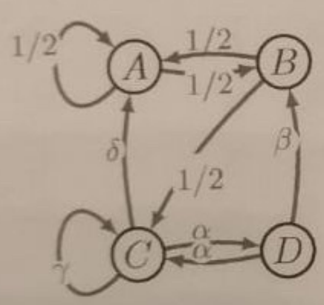
Ejercicio 1. (2.5 pts) Sea $\boldsymbol{A}_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz con coeficientes dados por,

$$a_{ij} = \begin{cases} n & \text{si } i = 1 \text{ o } j = 1 \\ n/i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Probar que $\operatorname{cond}_\infty(\boldsymbol{A}_n) \geq cn^2$ para alguna constante independiente de n .

B b) Probar que $\operatorname{cond}_2(\boldsymbol{A}_n) \longrightarrow \infty$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

C **Ejercicio 2.** (2.5 pts) Una población en estudio está distribuida en un territorio dividido en 4 sectores (A, B, C y D, en ese orden). El tamaño de esta población es constante y los individuos se desplazan de un sector al otro de acuerdo al diagrama,



a) Se sabe que $\boldsymbol{u} = (0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^t$ es un estado de equilibrio. Construir la matriz de transiciones de Markov completando convenientemente las probabilidades de las transiciones faltantes.

b) Se sabe que existen dos autovectores, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ tales que sus correspondientes autovalores tienen módulo menor a uno y tal que $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = (0, \frac{5}{8}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{2})^t$. Determinar si existe estado límite si la distribución de población inicial es $\boldsymbol{v}_0 = (0, \frac{5}{8}, \frac{3}{8}, 0)^t$.

C c) ¿Existe $\mathbf{P}^\infty$?

Ejercicio 3. (2.5 pts)

B (a) Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, de rango r, con valores singulares no nulos: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r$. Probar que dado $s < r$ existe una matriz $\boldsymbol{A}_s$ de rango s que satisface $\|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}_s\|_2 = \sigma_{s+1}$.

C (b) Sea

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ -8 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Encontrar la descomposición en valores singulares de $\boldsymbol{A}$ y hallar una matriz $\boldsymbol{A}_2$, de rango 2 tal que $\|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}_2\|_2 = \cancel{2}.$ 4

Ejercicio 4. (2.5 pts) Para aproximar las soluciones del sistema $Ax = b$ para la matriz $A = \begin{pmatrix} 12 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ se propone el siguiente método iterativo,

$$x_{n+1} = (I - \alpha D^{-1}A)x_n + \alpha D^{-1}b,$$

siendo I la matriz identidad, D la matriz diagonal de A y $\alpha > 0$.

B a) Probar que si la sucesión converge a un cierto x, entonces x es la solucion del sistema $Ax = b$.

mal b) Indicar para que valores de α el método propuesto resulta convergente.

①

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1/2 & & & 0 \\ \vdots & & 1/3 & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $\text{Cond}_\infty(A_n) \geq c n^2$

Sabemos que:

$$\text{Cond}_\infty(A_n) \geq \frac{\|A_n\|_\infty}{\|A_n - B\|_\infty}$$

Con B singular

$\|A_n\|_\infty = n^2$

$$B = \begin{pmatrix} n-1/c & n & \cdots & n \\ 1 & 1/2 & & 0 \\ \vdots & & 1/n-2 & \\ 1 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$ singular ($\det = 0 \ \forall n$)

$$A-B=\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1/c & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & n/(n-1) & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \to 1/c \\ \\ \to n/(n-1) \\ \to 1 \end{array}$$

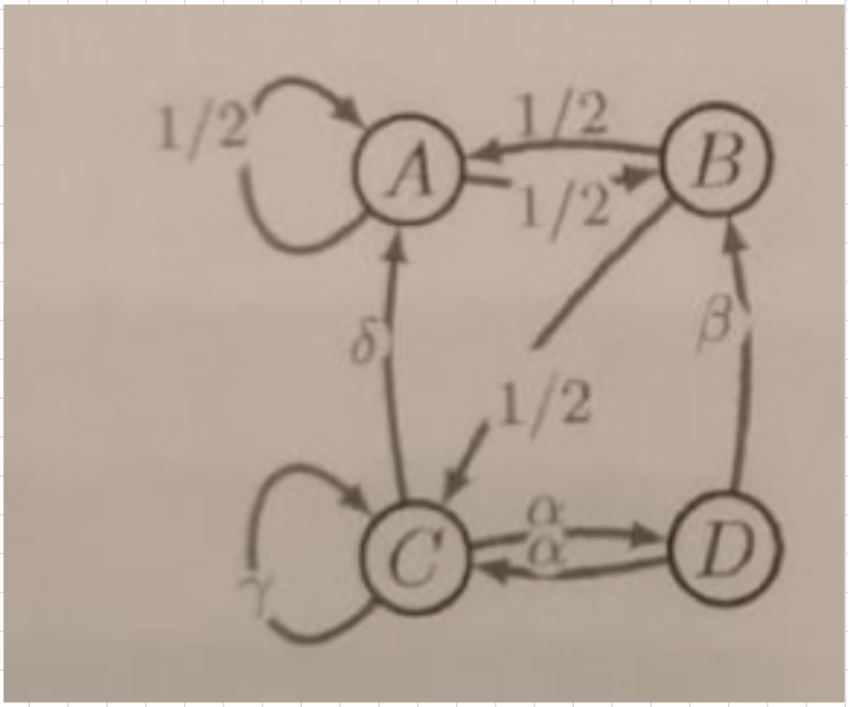
$$\frac{n}{n-1} > 1 \quad \forall n$$

tomo c tal que $\dfrac{1}{c} > n/(n-1)$

$$\Rightarrow \|A-B\|_\infty = \frac{1}{c}$$

$$\therefore \frac{\|A\|_\infty}{\|A-B\|_\infty} = \frac{n^2}{1/c} = c\,n^2$$

②



a) $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

Si v es estado de equilibrio, quiere decir que es un autovector de autovalor 1.

$\iff Pv = \lambda v \iff Pv = v$

con $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & \delta & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 1/2 & \gamma & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & \delta & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 1/2 & \gamma & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\delta = 0 \longrightarrow \delta = 0$$

$$1/2\,\beta = 0 \longrightarrow \beta = 0$$

$$1/2\,\gamma + 1/2\,\alpha = 1/2 \longrightarrow \gamma = 0$$

$$1/2\,\alpha = 1/2 \longrightarrow \alpha = 1$$

$$\therefore P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5/8 \\ -1/8 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ puedo construir a v_0

como $v_0 = u + (v + w)$

$$v_0^{\infty} = (1)^{\infty} u + (s)^{\infty} v + (t)^{\infty} w$$

con $|s| < 1$, $|t| < 1$

$$\Rightarrow v_0^{\infty} = 1 \cdot u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

c) Tengo que ver los autovalores y que sean menor a 1 de módulo.

$$\det(P - \lambda I) = \begin{pmatrix} 1/2 - \lambda & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)(-\lambda)(\lambda^2-1) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)(\lambda^2-1)$$

$$= \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)(-\lambda^3+\lambda) - \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}$$

$$= -\frac{1}{2}\lambda^3 + \frac{1}{2}\lambda + \lambda^4 - \lambda^2 - \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}$$

$$= \lambda^4 - \frac{1}{2}\lambda^3 - \frac{5}{4}\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4}$$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0{,}80$, $\lambda_3 = -0{,}3$, $\lambda_4 = -1$

Como hay dos AVAL de módulo 1 $\Rightarrow$ no existe pr.

(-1ᵉʳ osucio)

(3)

a)

Sabemos que $\|M\|_2 = \sigma_M$

con σ_M mayor valor singular de M.

$\Rightarrow$ Tomo A_s como la matriz de rango s que mejor aproxima a A en norma 2.

$$\Rightarrow A_s = U \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & & \sigma_s & 0 & \\ 0 & & & \ddots & 0 \end{pmatrix} V^t$$

$$A - A_s = \tilde{U} \tilde{\Sigma} \tilde{V}^t$$

$$\text{con } \tilde{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & 0 & & & \\ \vdots & & \sigma_{s+1} & & \\ & & & \sigma_{s+2} & \\ 0 & & & & \ddots \; \sigma_r \end{pmatrix}$$

$\therefore \sigma_{s+1}$ es el mayor valor sing. de $A - A_s \iff \|A - A_s\| = \sigma_{s+1}$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ -8 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^t A = \begin{pmatrix} 68 & 32 & 0 \\ 32 & 68 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\det(A^tA - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 68-\lambda & 32 & 0 \\ 32 & 68-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 16-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (16-\lambda)\left((68-\lambda)^2 - 32^2\right)$$

$$= (16-\lambda)(68^2 - 136\lambda + \lambda^2 - 32^2)$$

$$= (16-\lambda)(\lambda^2 - 136\lambda + 3600)$$

$$= 16\lambda^2 - 2176\lambda + 57600 - \lambda^3 + 136\lambda^2$$
$$-3600\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 152\lambda^2 - 3776\lambda + 57600$$

$$\lambda_1 = 100,\ \lambda_2 = 36,\ \lambda_3 = 16$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = 10,\ \sigma_2 = 6,\ \sigma_3 = 4$$

AVEC :

$$Nu(A^tA - 100I) = \begin{pmatrix} -32 & 32 & 0 \\ 32 & -32 & 0 \\ 0 & 0 & -84 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{matrix}$$

$$\langle (1, 1, 0) \rangle$$

$$Nu(A^tA - 36I) = \begin{pmatrix} 32 & 32 & 0 \\ 32 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1 = -x_2 \\ x_3 = 0 \end{matrix}$$

$$\langle (-1, 1, 0) \rangle$$

$$Nu(A^tA - 16I) = \begin{pmatrix} 52 & 32 & 0 \\ 32 & 52 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = x_3 \end{matrix}$$

$\langle (0, 0, 1) \rangle$

$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$

$v_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$

$v_3 = (0, 0, 1)$

$$V^t = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AA^t = \begin{pmatrix} 68 & -32 & 0 \\ -32 & 68 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

(mismos AVAL)

$$Nu(AA^t - 100I) = \begin{pmatrix} -32 & -32 & 0 \\ -32 & -32 & 0 \\ 0 & 0 & -84 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{matrix}$$

$\langle (1, 1, 0) \rangle$

$$Nu(AA^t - 36I) = \begin{pmatrix} 32 & -32 & 0 \\ -32 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} x_3 = 0 \\ x_1 = x_2 \end{matrix}$$

$$\langle (1, 1, 0) \rangle$$

$$Nu(AA^t - 4I) = \begin{pmatrix} 52 & -32 & 0 \\ -32 & 52 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -84 & 0 \\ -32 & 52 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = x_3 \end{matrix} \qquad \langle (0, 0, 1) \rangle$$

$$U_1 = \left(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0 \right)$$

$$U_2 = \left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0 \right)$$

$$U_3 = (0, 0, 1)$$

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = U \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} V^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -8 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} V^t$$

$\Rightarrow$ valor singular $= 4$

$\therefore \; \|A - A_2\|_2 = 4$

4)

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x_{n+1} = (I - \alpha D^{-1} A) x_n + \alpha D^{-1} b$$

a) $x^* = x^{(*+1)} = x$

$$A = (L + D + U)$$

$$x = (I - \alpha D^{-1} A) x + \alpha D^{-1} b$$

$$Ix - (I - \alpha D^{-1} A) x = \alpha D^{-1} b$$

$$(I - I + \alpha D^{-1} A) x = \alpha D^{-1} b$$

$$\alpha D^{-1} A x = \alpha D^{-1} b$$

$$A x = \frac{\alpha}{\alpha} D D^{-1} b$$

$$A x = b$$

$\blacksquare$

b) Veo el rango espectral de $(I - \alpha D^{-1} A)$, si es menor a uno, el método converge.

$$I - \begin{pmatrix} \alpha/2 & & 0 \\ & \alpha/3 & \\ 0 & & \alpha/2 \end{pmatrix} A$$

$$= I - \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha/2 & 0 \\ -\alpha/3 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-\alpha & -\alpha/2 & 0 \\ -\alpha/3 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix} = B$$

BUSCO AVAL:

$$\det(B - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\alpha-\lambda & -\alpha/2 & 0 \\ -\alpha/3 & 1-\alpha-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\alpha-\lambda)\left((1-\alpha-\lambda)^2 - \frac{\alpha^2}{36}\right)$$

$$= ((1-\alpha)-\lambda)\left((1-\alpha)^2 - 2(1-\alpha)\lambda + \lambda^2 - \frac{\alpha^2}{36}\right)$$

$$= (1-\alpha)^3 - 2(1-\alpha)^2\lambda + (1-\alpha)\lambda^2 - \frac{\alpha^2}{36}(1-\alpha)$$

$$- (1-\alpha)^2\lambda + 2(1-\alpha)\lambda^2 - \lambda^3 + \frac{\alpha^2}{36}\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 3(1-\alpha)\lambda^2 - \left(3(1-\alpha)^2 + \frac{\alpha^2}{36}\right)\lambda + (1-\alpha)^3 - \frac{\alpha^2}{36}$$