Álgebra Lineal Computacional

1er Cuatrimestre 2025

Práctica N° 3: Sistemas lineales y factorización.

Ejercicio 1. Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B} \in K^{n\times n}$. Probar que:

(a) Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son triangulares superiores, $\boldsymbol{AB}$ es triangular superior.

(b) Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son diagonales, $\boldsymbol{AB}$ es diagonal.

(c) Si $\boldsymbol{A}$ es estrictamente triangular superior (es decir, $a_{ij} = 0$ si $i \geq j$), $\boldsymbol{A}^n = 0$.

Ejercicio 2. Sea $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

(a) Escalonar la matriz $\boldsymbol{A}$ multiplicándola a izquierda por matrices elementales $\boldsymbol{T}^{ij}(a)$, $a \in \mathbb{R}$, $1 \leq i,\ j \leq 4$, con $i \neq j$.

Recordar que $\boldsymbol{T}^{ij}(a) \in K^{n\times n}$ *se define como:*

$$\boldsymbol{T}^{ij}(a) = \boldsymbol{I}_n + a\boldsymbol{E}^{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad i \neq j, \quad a \in K,$$

siendo $\boldsymbol{E}^{ij}$ *las matrices canónicas de* $K^{n\times n}$.

(b) Hallar la descomposición $\boldsymbol{LU}$ de $\boldsymbol{A}$.

(c) Usando la descomposición del ítem anterior resolver el sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, para $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 3. Escribir funciones de `Python` que calculen la solución de un sistema:

(a) $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b}$, siendo $\boldsymbol{L}$ triangular inferior.

(b) $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}$, siendo $\boldsymbol{U}$ triangular superior.

Ejercicio 4. Escribir funciones de `Python` que realicen las siguientes tareas:

(a) Calcular la descomposición LU de una matriz dada $\boldsymbol{A}$, asumiendo que no es necesario realizar pivoteos.

(b) Resolver un sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, utilizando la función del ítem anterior y las del ejercicio 3. Aplicar esta función para resolver el ítem c. del ejercicio 2

Ejercicio 5. Considerar la matriz: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Probar que $\boldsymbol{A}$ no admite descomposición LU.

(b) Hallar la descomposición LU de $\boldsymbol{PA}$ para alguna matriz de permutación $\boldsymbol{P}$ adecuada.

Ejercicio 6. Para cada una de las siguientes matrices analizar existencia y unicidad de la descomposición LU (sin pivoteo). ¿Qué relación existe entre la inversibilidad de una matriz y la existencia de dicha descomposición?

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible tal que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{TS}$ donde $\boldsymbol{T} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es triangular inferior y $\boldsymbol{S} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es triangular superior. Probar:

(a) $\boldsymbol{T}$ y $\boldsymbol{S}$ son inversibles.

(b) $\boldsymbol{A}$ tiene factorización LU (con unos en la diagonal de $\boldsymbol{L}$).

(c) La matriz $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}^t & d \end{pmatrix}$ tiene factorización LU (con unos en la diagonal de $\boldsymbol{L}$), para cualquier $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ y $d \in \mathbb{R}$. Hallarla explícitamente en función de $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ y d.

Ejercicio 8. Se quiere calcular la solución del sistema lineal:

$$\begin{aligned} 10^{-3}x + 2y &= 8 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

utilizando eliminación gaussiana sin pivoteo, con aritmética de punto flotante de 3 dígitos y sistema de redondeo.

a) Analizar si el resultado difiere significativamente de la solución real.

b) Repetir el método de eliminación gaussiana eligiendo el pivote más conveniente.

Ejercicio 9. Considerar la matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 5 \\ -2 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

Mostrar que es definida positiva y calcular su descomposición de Cholesky.

Ejercicio 10. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica. Probar que $\boldsymbol{A}$ es definida positiva si y sólo si existe un conjunto de vectores linealmente independientes $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $a_{ij} = \boldsymbol{x}_i^t \boldsymbol{x}_j$.

Ejercicio 11. Sean las matrices $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Demostrar que $\boldsymbol{A}$ es simétrica definida positiva y $\boldsymbol{B}$ es no singular si y sólo si $\boldsymbol{BAB}^t$ es simétrica definida positiva.

Ejercicio 12. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $\|\boldsymbol{A}\|_2 < 1$, siendo $\|\cdot\|_2$ la norma matricial inducida por la norma 2 vectorial.

(a) Probar que $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}$ es simétrica definida positiva.

(b) Probar que la matriz $\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A}^t & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$ es simétrica definida positiva.

Ejercicio 13. Sea $B = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ una base de K^n ($K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$).

(a) Probar que si B es ortogonal, entonces

$$\mathbf{C}_{EB} = \begin{pmatrix} \cdots & \frac{\boldsymbol{v}_1^*}{\|\boldsymbol{v}_1\|_2^2} & \cdots \\ \cdots & \frac{\boldsymbol{v}_2^*}{\|\boldsymbol{v}_2\|_2^2} & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & \frac{\boldsymbol{v}_n^*}{\|\boldsymbol{v}_n\|_2^2} & \cdots \end{pmatrix}$$

(b) Probar que si B es ortonormal, entonces $\mathbf{C}_{EB} = \mathbf{C}_{BE}^*$.

(c) Concluir que si B es ortonormal, entonces las coordenadas de un vector $\boldsymbol{v}$ en base B son:

$$(\boldsymbol{v})_B = (\boldsymbol{v}_1^*\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_2^*\boldsymbol{v}, \dots, \boldsymbol{v}_n^*\boldsymbol{v}).$$

(d) Calcular $(\boldsymbol{v})_B$ siendo $\boldsymbol{v} = (1, -i, 3)$, $B = \{(\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (-\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (0, 0, i)\}$.

Ejercicio 14. Aplicar el algoritmo de Gram-Schmidt para calcular bases ortonormales de los subespacios generados por las siguientes bases:

(a) $B = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$

(b) $B = \{(i, 1 - i, 0), (i, 1, 0)\}$

(c) $B = \{(1, -1, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (-1, 0, 1, 1)\}$.

Ejercicio 15. En cada uno de los siguientes casos construir un proyector $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumpla:

i) $\mathrm{Im}(f) = \{(x_1, x_2, x_3)/x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

ii) $\mathrm{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3)/x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

iii) $\mathrm{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3)/3.x_1 - x_3 = 0\}$ e $\mathrm{Im}(f) = \langle(1, 1, 1)\rangle$

Ejercicio 16.

(a) Sea $B = \{(1, -1, 0), (0, 1, -1), (0, 0, 1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$ y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que:

$$f(1, -1, 0) = (1, -1, 0), \quad f(0, 1, -1) = (0, 1, -1) \quad \text{y} \quad f(0, 0, 1) = (0, 0, 0).$$

Calcular $[f]_B$ y comprobar que f es un proyector.

(b) Construir un proyector $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Nu}(f) = \langle (1,1,1) \rangle$ e $\mathrm{Im}(f) = \{x \in \mathbb{R}^3 / \, x_1 + x_2 - 3x_3 = 0\}$. ¿Es f una proyección ortogonal?

Ejercicio 17. Sea $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ un vector columna tal que $\|\boldsymbol{v}\|_2 = 1$. Probar que:

(a) La transformación lineal definida por la matriz $\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^*$ es la proyección ortogonal sobre $\langle \boldsymbol{v} \rangle$.

(b) Si $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m\}$ es una base ortonormal del subespacio S, entonces: $\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^m \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^*$ es la proyección ortogonal sobre S.

(c) Si $\boldsymbol{A}$ es como en el ítem anterior, $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ es la proyección ortogonal sobre $S^\perp$.

(d) Eligiendo $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|\boldsymbol{v}\|_2 = 1$, corroborar gráficamente en Python que $R = \boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^*$ es la reflexión respecto de $\langle \boldsymbol{v} \rangle^\perp$.

Ejercicio 18. Sea $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular la matriz de la proyección ortogonal sobre $\mathrm{Im}(\boldsymbol{A})$.

Ejercicio 19. Sea $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Probar que son equivalentes:

(a) $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^t$.

(b) Las columnas de $\boldsymbol{Q}$ forman un conjunto ortonormal.

(c) Las filas de $\boldsymbol{Q}$ forman un conjunto ortonormal.

(d) $\|\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

Interpretar (d) geométricamente.
Sugerencia: para demostrar la implicación (d $\Rightarrow$ b) usar que $\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{y} = \frac{1}{4}(\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_2^2 - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2^2)$.

Ejercicio 20. Hallar la factorización QR de las siguientes matrices

$$a)\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}, \quad b)\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 21. Sea $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ un vector tal que $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$ y sea $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^t$ un reflector ortogonal de Householder.

(a) Siendo $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_i$, calcular explícitamente $\boldsymbol{H}$ e interpretar geométricamente $\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}$ para cualquier $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

(b) Sea $\boldsymbol{x}$ tal que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}$ con $\boldsymbol{w}$ ortogonal a $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ múltiplo de $\boldsymbol{u}$. Mostrar que $\boldsymbol{H}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}$ e interpretar geométricamente en $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 22. Implementar dos programas que calculen la descomposición QR de una matriz:

(a) Aplicando de manera directa el método de ortonormalización de Gram-Schmidt.

(b) Utilizando transformaciones de Householder.

Generar algunas matrices aleatorias y comparar las descomposiciones arrojadas por estos programa con las dadas por el comando np.linalg.qr. ¿Qué se observa?

Ejercicio 23. Implementar un programa que resuelva un sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ a partir de la descomposición QR de $\boldsymbol{A}$.

Ejercicio 24. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ con $n \geq p$ y $rango(\boldsymbol{A}) = p$, la proyección ortogonal $P_{\boldsymbol{A}}$ se define como la proyección ortogonal sobre el espacio generado por las columnas de $\boldsymbol{A}$.

(a) Usar el ejercicio 17 (b) para concluir que si $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p\}$ es una base ortonormal de las columnas de $\boldsymbol{A}$ entonces $P_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{QQ}^*\boldsymbol{y}$ donde $\boldsymbol{Q} = (\ \boldsymbol{v}_1 \mid \cdots \mid \boldsymbol{v}_p)$.

(b) Si $\boldsymbol{Q}$ es la que se obtiene por el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt y $\boldsymbol{R}$ es tal que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{QR}$. Concluir que $\boldsymbol{R}$ es inversible y que entonces la matriz de la proyección ortogonal resulta ser $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^*$.

(c) Repetir el ejercicio 17 usando usando esta última expresión.

Temas:

- Factorización LU y Cholesky: Kincaid Capítulo 4.
- Matrices ortogonales, ortonormalización: Kincaid 5.3 y Capítulo 7 Banerjee.
- Proyectores: Capítulo 7 Banerjee.
- Factorización QR: Kincaid, 5.5.

Todos estos temas están incluidos en el Capítulo 3.5, y Capítulo 4 del apunte Acosta-Laplagne.

Bibliografía:

1. Numerical Analysis. D.R. Kincaid, E.W. Cheney. Brooks/Cole Publishing Company. 1991.

2. Linear Algebra and Matrix Analysis for Statistics. Banerjee, Sudipto; Roy, Anindya, Texts in Statistical Science (1st edición), Chapman and Hall/CRC. 2014.