Dada $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ vimos que $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ es la única sol del problema de cuadrados mínimos (es decir $\|A\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} - b\|_2 = \min \|Ax - b\|_2$) si y solo si $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ es la única solución de $A^t A x = A^t b$.

Y este sistema tenía única solución si y solo si la columnas de A son l.i.

Otra forma de ver esto es notar que

$$\|Ax - b\|_2^2 = \langle Ax - b, Ax - b \rangle$$

$$= \langle Ax, Ax \rangle - \langle Ax, b \rangle$$

En $\mathbb{R}$ $\langle Ax, b \rangle = \langle b, Ax \rangle$

$$- \langle b, Ax \rangle + \langle b, b \rangle$$

$$= (Ax)^t \cdot Ax - 2 b^t Ax + \|b\|_2^2$$

$$= x^t A^t A x - 2 b^t A x + \|b\|_2^2$$

$$\min_x \|Ax-b\|_2^2 = \min_x x^t A^t A x - 2b^t A x$$
$$= \min_x \frac{1}{2} x^t A^t A x - 2b^t A x$$

ya que $\|b\|_2^2$ no depende de x ∧ $\frac{1}{2}$ es cte. ..

Como A^tA es simétrica y semidefinida positiva (autovalores ≥ 0), tenemos que

A^tA es inversible $\Leftrightarrow$ A^tA es def. positiva

Luego $\min_x \frac{1}{2} x^t \underbrace{A^tA}_{\tilde{A}''} x - \underbrace{b^tA}_{\shortparallel \, \tilde{b}^t} x$ tiene

única solución dada por x^* la solución de $\tilde{A}x = \tilde{b}$ que equivale a las ecuaciones normales $A^tAx = A^tb$.

Supongamos que se quiere encontrar una aproximación en el sentido de los cuadrados mínimos de la siguiente tabla de datos

x	0	1	2	4
y	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	21

usando la familia de funciones

$$\{2^x, x^2\}.$$

Buscamos α, β: $\alpha 2^x + \beta x^2$

tal que $\sum_{i=1}^{4} (\alpha 2^{x_i} + \beta x_i^2 - y_i)^2$

sea mínimo.

Vemos que el problema es lineal

en las variables α y β. Lo planteamos

como buscar mín. de la norma 2

de $A\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} - b$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 2^{x_1} & x_1^2 \\ 2^{x_2} & x_2^2 \\ 2^{x_3} & x_3^2 \\ 2^{x_4} & x_4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 4 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$$

y $\quad b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \\ 9/2 \\ 21 \end{pmatrix}$

Como las columnas de A son li sabemos que la única solución $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ que minimiza $\left\| A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - b \right\|$ viene dada por la única solución de

$$A^t \cdot A\, x = A^t b$$

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 16 \\ 0 & 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 4 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 277 & 274 \\ 274 & 273 \end{pmatrix}$$

$$A^t \cdot b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 16 \\ 0 & 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \\ 9/2 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 358.5 \\ 356 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 277 & 274 & 358.5 \\ 274 & 273 & 356 \end{array}\right) \overset{F_1 - F_2 \to F_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & \overset{5/2}{\overset{\shortparallel}{2.5}} \\ 274 & 273 & 356 \end{array}\right)$$

$F_1/3 \to F_1$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1/3 & 5/6 \\ 0 & 273 - \frac{274}{3} & 356 - \frac{5}{\cancel{6}_{3}} \cdot \cancel{274}^{137} \end{array}\right)$$

685

$F_2 - 274 F_1 \to F_2$

$$\frac{545}{3} \cdot \beta = \frac{383}{3} \Rightarrow \beta = \frac{383}{545} \simeq 0.7$$

$$\alpha + \frac{1}{3}\beta = \frac{5}{6} \Rightarrow \alpha = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} \cdot \frac{383}{545} \simeq 0.6$$

$$\Rightarrow f(x) = 0.6 \times 2^x + 0.7 \times x^2$$

es la que mejor aproxima la tabla en el sentido de los cuadrados mínimos en la familia de funciones que son combinaciones lineales de

2^x y x^2.

En general se puede pedir encontrar una combinación lineal de una familia de funciones dadas

$\phi_0, \dots, \phi_m$ que mejor aproxime los datos de una tabla

x	x_1	$\dots$	x_n
y	y_1	$\dots$	y_n

Es decir, se busca:

$$\min_{a_0,\dots,a_m} \sum_{i=1}^{n} \left(a_0\phi_0(x_i)+\dots+a_m\phi_m(x_i)-y_i\right)^2 \quad (\times)$$

En este caso planteamos

$$A = \begin{pmatrix} \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \dots & \phi_m(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & & \phi_m(x_n) \end{pmatrix}$$

y $b = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Luego encontrar el $(a_0, \dots, a_m)$ que hace mínimo (x) equivale a encontrar

$$\min_{a_0, \dots, a_m} \left\| A \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} - b \right\|_2$$

<u>Ojo</u>: Aquí tendremos que analizar si para esa familia $\{\phi_0, \dots, \phi_m\}$ y esos datos $x_1 \dots x_n$, la matriz A tiene columnas l.i.

Sólo si $\phi_0(x) = 1$, $\phi_1(x) = x, \dots, \phi_m(x) = x^m$

estamos en el caso de polinomios y una condición suficiente para que A tenga columnas l.i. es que $x_i \neq x_j \ \forall \, i \neq j$.

Interpolación:

Vimos que dada una función $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, si buscamos el polinomio interpolador que pasa por n puntos $(x_1, f(x_1)) \ldots (x_n, f(x_n))$ (es decir $P(x)$ de grado $\leq n-1$ con $P(x_i) = f(x_i)$) se puede calcular como:

1) El que mejor aproxima en el sentido de los cuadrados mínimos
2) Con la base de Lagrange.

Vimos además que a medida que tomo más puntos (nodos) el polinomio interpolador se estropea cerca de los extremos, en el sentido que el error

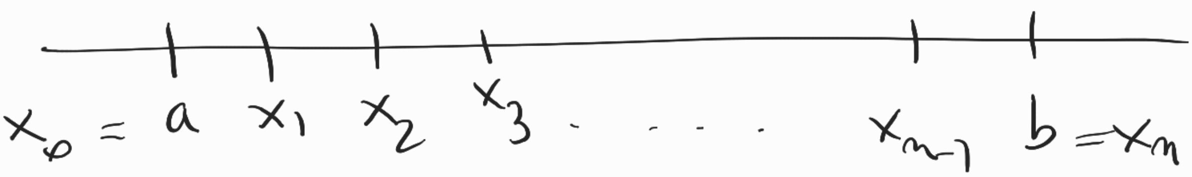
$$E_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

se hace grande para x cerca de los extremos y $x \neq x_i$.

Una alternativa es dar una aproximación usando poligonales:

Partimos $[a,b]$ con los nodos

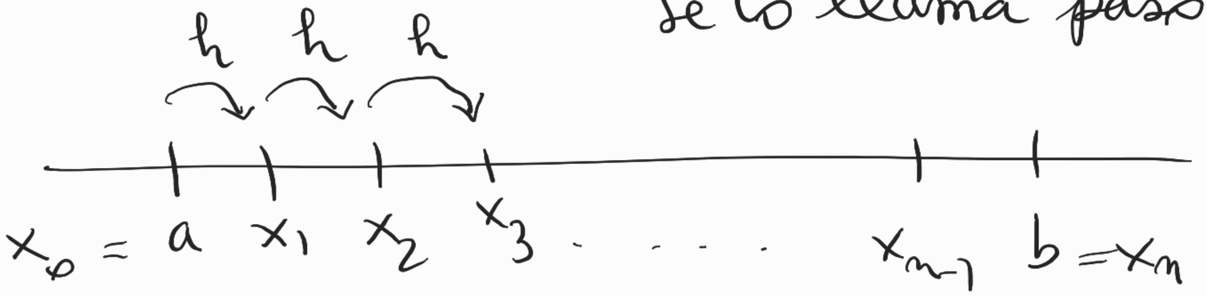
$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$



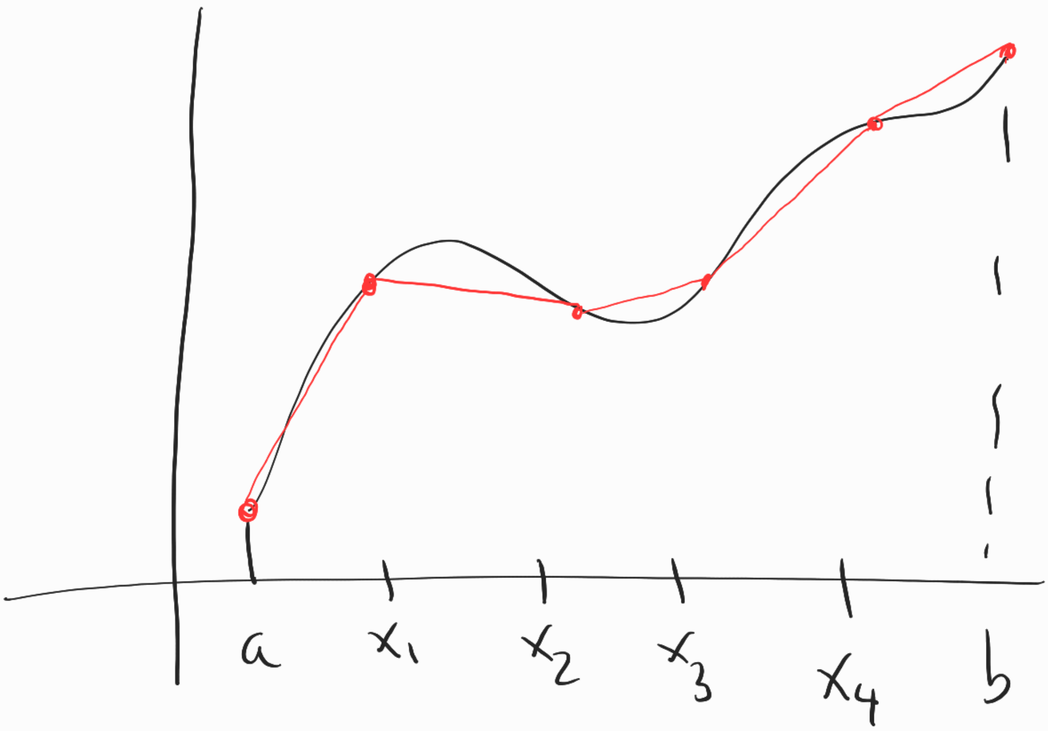
Si los tomamos equiespaciados tendremos

$$x_i = a + i\frac{(b-a)}{n}$$

Se lo llama paso $h = \frac{b-a}{n}$



Por ejemplo:

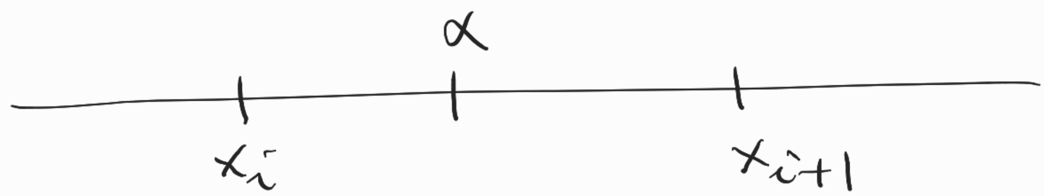


En general, en cada $[x_i, x_{i+1}]$ $i=0,\dots,n-1$ definimos

$$q_i(x) = \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i} \cdot (x-x_i) + f(x_i)$$

recta secante que pasa por $(x_i, f(x_i))$ y $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$

Para cada $\alpha \in [a,b]$ fijo $\alpha \neq x_i$ $\forall\, i=0,\dots,n+1$, tenemos que $\alpha \in (x_i, x_{i+1})$ para algún i.



Para $x \in [x_i, x_{i+1}]$, definimos

$$F(x) = f(x) - q_i(x) - \left[\frac{f(\alpha) - q_i(\alpha)}{(\alpha - x_i)(\alpha - x_{i+1})}\right](x - x_i)(x - x_{i+1})$$

$$\Rightarrow \quad F(\alpha) = f(\alpha) - q_i(\alpha) - \left[f(\alpha) - q_i(\alpha)\right] = 0$$

$$F(x_i) = f(x_i) - q_i(x_i) = 0$$

$$F(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) - q_i(x_{i+1}) = 0$$

F es una función de clase C^2

que se anula en x_i, α, x_{i+1}

por teorema de Rolle, $F'(x)$

tiene dos ceros (uno en (x_i, α)

y otro en (α, x_{i+1})), entonces

de nuevo por Rolle $F''(x)$ tiene

al menos un cero.

Calculemos

$$F'(x) = f'(x) - q_i'(x) - \left[\frac{f(\alpha) - q_i(\alpha)}{(\alpha - x_i)(\alpha - x_{i+1})}\right](x - x_{i+1} + x - x_i)$$

$$F''(x) = f''(x) - \underbrace{q_i''(x)}_{\substack{\shortparallel \\ 0}} - \left[\frac{f(\alpha) - q_i(\alpha)}{(\alpha - x_i)(\alpha - x_{i+1})}\right] \cdot 2$$

porque q_i es una recta

Vimos que existe $c \in (x_i, x_{i+1})$:

$$F''(c) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$f''(c) = 2 \cdot \left[\frac{f(\alpha) - q_i(\alpha)}{(\alpha - x_i)(\alpha - x_{i+1})}\right]$$

$$\Rightarrow f(\alpha) - q_i(\alpha) = \frac{1}{2} f''(c)(\alpha - x_i)(\alpha - x_{i+1})$$

donde α era cualquiera fijo en (x_i, x_{i+1})

Es decir, para cualquier

$x \in [x_i, x_{i+1}]$ vimos que

existe $c \in (x_i, x_{i+1})$:

$$f(x) - q_i(x) = \frac{1}{2} f''(c)(x-x_i)(x-x_{i+1})$$

$$\Rightarrow |f(x) - q_i(x)| = \frac{1}{2} |f''(c)| \underbrace{|x-x_i|}_{\leq h} \underbrace{|x-x_{i+1}|}_{\leq h}$$

$$\leq \frac{1}{2} |f''(c)| h^2$$

donde $h = \dfrac{b-a}{n}$

y si llamamos $\|f''\|_\infty = \max\limits_{t \in [a,b]} |f''(t)|$

tenemos

$$|f(x) - q_i(x)| \leq \frac{1}{2} \|f''\|_\infty \cdot \frac{(b-a)^2}{n^2}$$

Si definimos $q : [a,b] \to \mathbb{R}$

$q(x) = q_i(x)$ para $x \in [x_i, x_{i+1}]$

q es una poligonal y

$$|f(x)-q(x)| \leq \frac{1}{2} \|f''\|_\infty \frac{(b-a)^2}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-q(x)| \leq \frac{1}{2} \|f''\|_\infty \frac{(b-a)^2}{n^2}$$

Ejemplo:

Si $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ $\quad f:[-1,1]\to\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{-1}{(1+x^2)^2}\cdot 2x$$

$$f''(x)=\frac{-2(1-3x^2)}{(1+x^2)^3} \Rightarrow |f''(x)|\leq 4$$

$$\forall x\in[-1,1]$$

En ese caso, si usamos nodos

$$x_i=-1+i\,\frac{2}{n} \qquad i=0,\dots,n$$

y aproximamos por poligonales tendremos:

$$|f(x) - q_i(x)| \leq \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{2^2}{n^2} = \frac{8}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in [-1,1]} |f(x) - q(x)| \leq \frac{8}{n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Integración numérica:

Idea general:

Se quiere aproximar numéricamente

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Como calcular primitivas de polinomios es estandar, un procedimiento usual es aproximar

$$f(x) \sim \underbrace{p_n(x)}_{\text{polinomio de grado } n}$$

y aproximar $\int_a^b f(x)\,dx \sim \int_a^b p_n(x)\,dx.$

Dada f, si usamos los nodos

$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n \leq b$

y calculamos $p_n(x)$ el poli interpolador: $f(x_i) = p_n(x_i) \quad \forall i = 0 \dots n$

Usamos la base de Lagrange para escribir

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, l_i(x)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f\, dx \sim \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, l_i(x)\, dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \underbrace{\int_a^b l_i(x)\, dx}_{A_i}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f\, dx \sim \sum_{i=1}^{n} f(x_i) A_i$$

con $A_i = \int_a^b l_i(x)\, dx$

A la suma $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) A_i$ se lo llama fórmula de cuadratura

OBS:

·) Una fórmula de cuadratura en $n+1$ nodos depende de cada $f(x_i)$ $i=0,\dots,n$ y de $\underbrace{A_i = \int_a^b \ell_i(x)\,dx}_{\text{que no depende de } f.}$

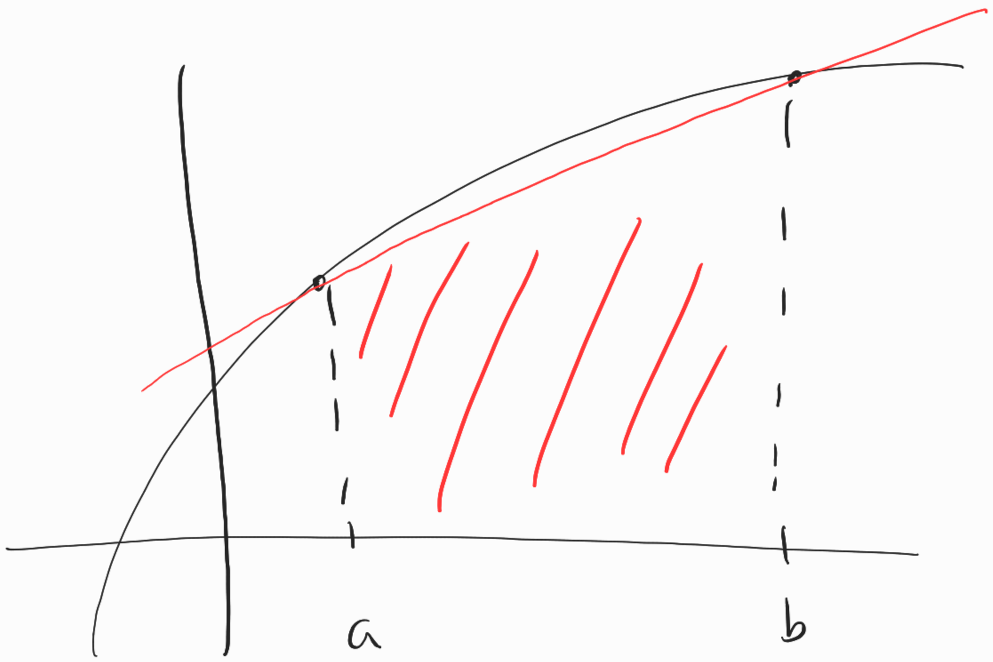
·) Una vez calculados los A_i, esa fórmula me sirve para cualquier f. En particular, si f es un polinomio de grado $\leq n$, como $f(x) = p_n(x)$ su poli interpolador de grado $\leq n$ se tendrá en este caso

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b p_n(x)\,dx.$$

Si usamos solo los nodos a y b

y buscamos la recta que pasa por

$(a, f(a)), (b, f(b))$,



Aproximamos $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \sim \int_a^b p_1(x)\,dx$

$$p_1(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$$

que se conoce como regla de los trapecios.

$$T(f) = \int_a^b f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot (x-a)\,dx$$

$$= f(a)\cdot x\Big|_a^b + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{(x-a)^2}{2}\Big|_a^b$$

$$= f(a)(b-a) + \frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}\frac{(b-a)^{\cancel{2}}}{2}$$

$$= (b-a)\left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{2}\right]$$

$$= (b-a)\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$$

Regla de trapecios compuesta:

La idea consiste en aproximar f por una poligonal q y luego

$$\int_a^b f(x)dx \sim \int_a^b q(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} q_i(x)dx$$

Ver Ej 14 P7.