Examen Final

Álgebra Lineal Computacional

24 de febrero de 2025

Ejercicio 1

Se dice que $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es semejante a $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ si existe una matriz invertible $S \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tal que:

$$SA(S^{-1}) = B$$

1. Demostrar que la relación de semejanza es una relación de equivalencia.
2. Demostrar que si A es semejante a B, entonces:
$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$$
Sugerencia: Utilizar la propiedad $\mathrm{Tr}(EC) = \mathrm{Tr}(CE)$ para matrices C y E.
3. Probar que si A es diagonalizable (es decir, A es semejante a una matriz diagonal D) y los valores propios de A son 0 y 1, entonces:
$$A^2 = A$$

Ejercicio 2

1. Calcular la descomposición en valores singulares (SVD) de la matriz:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$
2. Probar que PA y AP tienen los mismos valores singulares que A, donde P es una matriz de permutación. Además, calcular $||PA||_2$ y $\kappa_2(PA)$.

Ejercicio 3

Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}$$

1. Determinar para qué valores de c convergen los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel.
2. Comparar la velocidad de convergencia de ambos métodos.
3. Plantear las iteraciones correspondientes para cada método.

Ejercicio 4

Dada la función:

$$z = ay^b e^{cx+2}$$

1. Plantear las ecuaciones de mínimos cuadrados para estimar los parámetros a, b y c.
2. Proponer puntos de datos para que la solución sea única.
3. Determinar la mínima cantidad de puntos necesarios para que la solución sea única.

③ $$A = \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}$$

1) $$B_J = -D^{-1}(L+U) = -I^{-1}(L+U)$$

$$B_{GS} = -(D+L)^{-1}U = -(I+L)^{-1}U$$

$$B_J = -I \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & -c \\ 0 & -c & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{GS} = -\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}^{-1}} U$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -c & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_{GS} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & c & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad B_J = \begin{pmatrix} 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & -c \\ 0 & -c & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

BUSCAS AVAL :

$$\det(\lambda I - B_J) = \det \begin{pmatrix} \lambda & c & 0 \\ 0 & \lambda & c \\ 0 & c & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda^2 - c^2) \longrightarrow \lambda = 0$$

$$\searrow \lambda^2 - c^2 = 0$$

$$\lambda = \pm c$$

$$\boxed{-1 < c < 1}$$ JACOBI

$$\det(\lambda I - B_{GS}) = \begin{pmatrix} \lambda & c & 0 \\ 0 & \lambda & c \\ 0 & 0 & \lambda - c^2 \end{pmatrix} =$$

$$\lambda^2(\lambda - c^2) \longrightarrow \lambda = 0$$

$$\searrow \lambda - c^2 = 0$$

$$\lambda = c^2 \rightarrow |c^2| < 1$$

$$|c|^2 < 1$$

$$\boxed{-1 < c < 1}$$ GAUSS-SEIDEL

$\therefore$ Para $-1 < c < 1$ convergen ambos métodos.

2) Para $c \in (-1,1)$ $|c|^2 < |c|$

$\Rightarrow$ GS converge más rápido ya que su radio espectral es menor

3)

JACOBI:

$$x^{(n+1)} = B_J \, x^{(n)} - b$$

GAUSS-SEIDEL:

$$x^{(n+1)} = B_{GS} \, x^{(n)} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} b$$

④ $z = a y^b e^{cx+z}$

1)

$$\ln(z) = \ln(a) + b\ln(y) + cx + z$$

$$\ln(z) = (\ln(a) + z) + b\ln(y) + cx$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \ln(y_1) & x_1 \\ 1 & \ln(y_2) & x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \ln(y_n) & x_n \end{pmatrix}$$

$$z = \begin{pmatrix} \ln(z_1) \\ \ln(z_2) \\ \vdots \\ \ln(z_n) \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad A^t A = A^t z$$

$$A^t A = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} \ln(y_i) & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} \ln(y_i) & \sum_{i=1}^{n} \ln(y_i)^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(y_i) \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(y_i) & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{pmatrix}$$

$$A^t z = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} \ln(z_i) \\ \sum_{i=1}^{n} \ln(y_i) \ln(z_i) \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(z_i) \end{pmatrix}$$

$$A^t A \begin{pmatrix} \tilde{a} \\ b \\ c \end{pmatrix} = A^t z$$

Con $\tilde{a} = \ln(a) + 2 \longrightarrow a = e^{\tilde{a} - 2}$

$$
\begin{cases}
n\tilde{a} + \sum_{i=1}^{n} \ln(y_i)\, b + \sum_{i=1}^{n} x_i\, c = \sum_{i=1}^{n} \ln(z_i) \\
\sum_{i=1}^{n} \ln(y_i)\, \tilde{a} + \sum_{i=1}^{n} \ln(y_i)^2\, b + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(y_i)\, c = \sum_{i=1}^{n} \ln(y_i)\ln(z_i) \\
\sum_{i=1}^{n} x_i\, \tilde{a} + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(y_i)\, b + \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, c = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(z_i)
\end{cases}
$$

2)

x	1	0	0
y	0	e	0
z	0	0	e

$$
\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \tilde{a} \\ b \\ c \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$\tilde{a} = 1, \quad b = -1, \quad c = -1 \quad \rightarrow a = e^{-1}$

$z = e^{-1} y^{-1} e^{-x+2}$

3)

1

$$B = SAS^{-1}$$

1) I Reflexividad:

¿$B = SAS^{-1} \Rightarrow A = TBT^{-1}$?

$B = SAS^{-1} \Rightarrow S^{-1}BS = A$

$T = S^{-1} \Rightarrow T^{-1} = S$

$\Leftrightarrow A = TBT^{-1}$ ✓

II Simetría:

¿$\exists\, S \;/\; B = SBS^{-1}$?

Tomo $S = I$ inversible:

$B = IBI^{-1} = B$ ✓

III Transitividad:

¿$B = SAS^{-1}$ y $A = TCT^{-1} \Rightarrow B = RCR^{-1}$?

$B = SAS^{-1} \wedge A = TCT^{-1} \Rightarrow B = STCT^{-1}S^{-1}$

$R = ST \Rightarrow R^{-1} = T^{-1}S^{-1}$

Es relación de equivalencia $\blacksquare$

2) $B = SAS^{-1}$

Pero $A = S^{-1} B S$

tenemos que $Tr(B) = Tr(SAS^{-1})$

$Tr(B) = Tr(SS^{-1})\, tr(A)$

$Tr(B) = Tr(I)\, Tr(A)$

$Tr(B) = 1 \cdot Tr(A) = Tr(A)$

3)

$A = PDP^{-1}$

$A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$

$= P \operatorname{diag}(d_{ii}^{2})\, P^{-1}$ $\textcircled{*}$

Donde d_{ii} son los AVAL de

A, entonces $d_{ii}^{2} = d_{ii}$ $(0^2 = 0, 1^2 = 1)$

$\textcircled{*} = PDP^{-1} = A$

$\blacksquare$

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

1)

$$A^t A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad AVAL: \{9, 4, 1\}$$

$$\sigma_1 = 3, \quad \sigma_2 = 2, \quad \sigma_3 = 1$$

$$v_1 = (0, 0, 1)$$
$$v_2 = (1, 0, 0)$$
$$v_3 = (0, 1, 0)$$

$$V^t = \begin{pmatrix} — & v_1 & — \\ — & v_2 & — \\ — & v_3 & — \end{pmatrix}$$

$$AA^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad AVAL = \{9, 4, 1\}$$

$$u_1 = (0, 0, 1)$$
$$u_2 = (0, 1, 0)$$
$$u_3 = (1, 0, 0)$$

$$U = \begin{pmatrix} | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\qquad\quad U \qquad\qquad\qquad \Sigma \qquad\qquad\qquad V^t$$

2)

$$PA = P(U\Sigma V^t)$$

$$= \underbrace{(PU)}_{\text{ortonormal}} \Sigma V^t$$

$$= \tilde{U}\Sigma V^t$$

con valores singulares en la diagonal de Σ (iguales a A).

$$AP = U\Sigma V^t P = U\Sigma \underbrace{(V^t P)}_{\text{ortonormal}}$$

(pues P permuta columnas)

$$= U\Sigma \tilde{V}^t$$

con valores singulares en la diagonal de Σ (iguales a A).

$$\|PA\|_2 = \text{máx}\langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\rangle = 3$$

$$\text{Cond}_2(PA) = \|PA\|_2 \, \|(PA)^{-1}\|_2$$

$$= 3 \, \|(PA)^{-1}\|_2$$

pero $(PA)^{-1} = (\tilde{U} \Sigma V^t)^{-1}$

Con $\Sigma^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\sigma_i}\right)$

$\therefore \|(PA)^{-1}\|_2 = 1$

$\Rightarrow \text{Cond}_2(PA) = 3 \cdot 1 = 3$