Convolution

Produit de convolution de deux fonctions

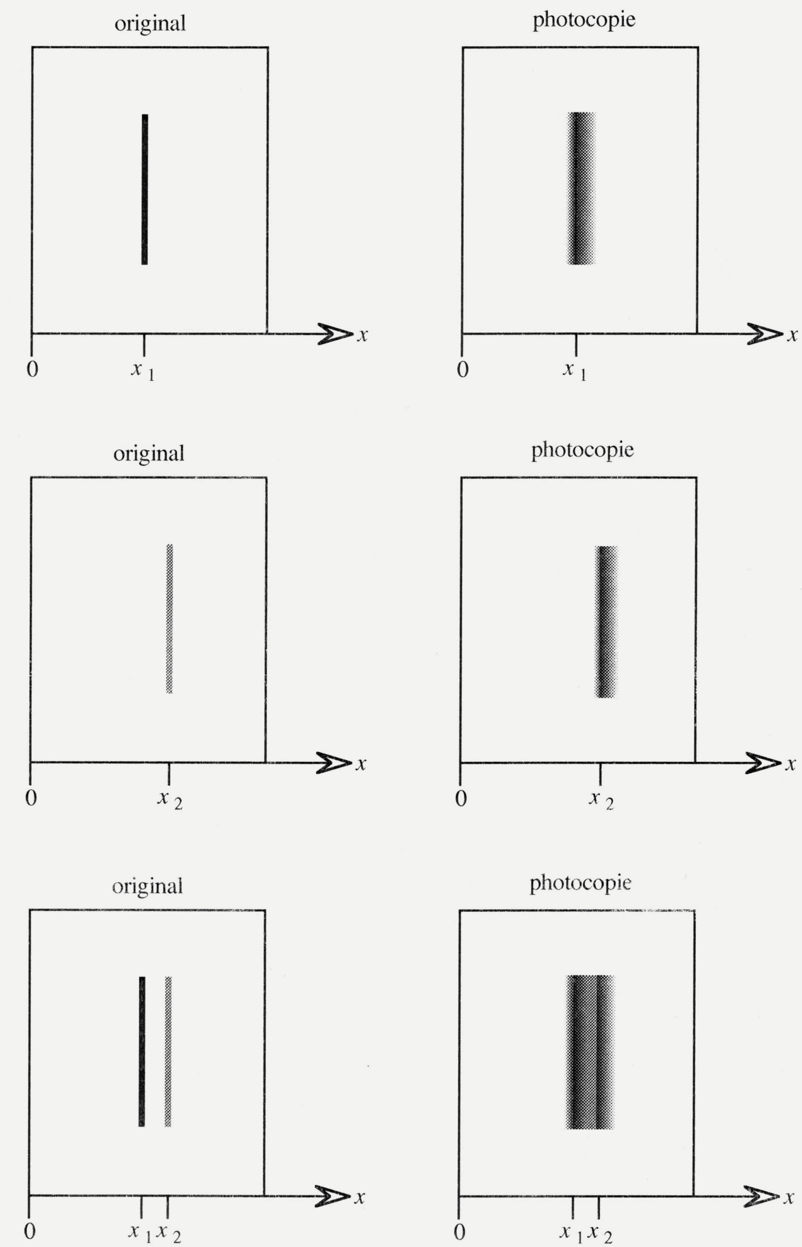
Le produit de convolution est d'une grande importance en physique. On le rencontre notamment chaque fois qu'on étudie

- la transmission d'un signal par un appareil
- une impulsion électrique fonction du temps
- une image représentée par une fonction d'une ou deux variables spatiales.
- en diffraction

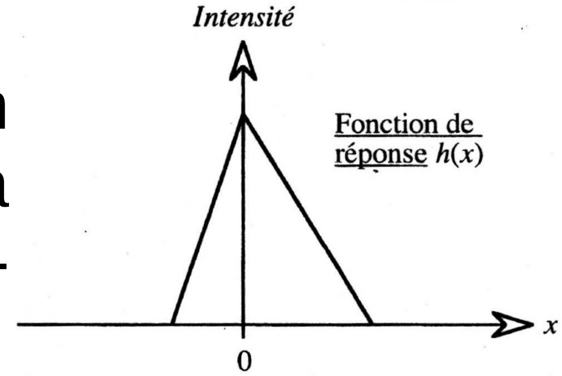
Exemple

Considérons une machine photocopieuse imparfaitement réglée.

- Un trait fin en position x_1 donnera sur la photocopie un trait étalé, centré en x_1
- De même, un trait fin, d'une intensité moindre que le premier, situé en position x_2 donnera sur la photocopie un trait étalé en largeur, et centré en x_2.
  - On peut raisonnablement admettre que l'étalement de l'encre sur la photocopie est identique pour les deux traits (mêmes largeurs d'étalement).
  - Cet étalement peut donc être décrit par une fonction caractéristique de l'appareil que nous appelons fonction d'étalement ou fonction de réponse $h(x)$.

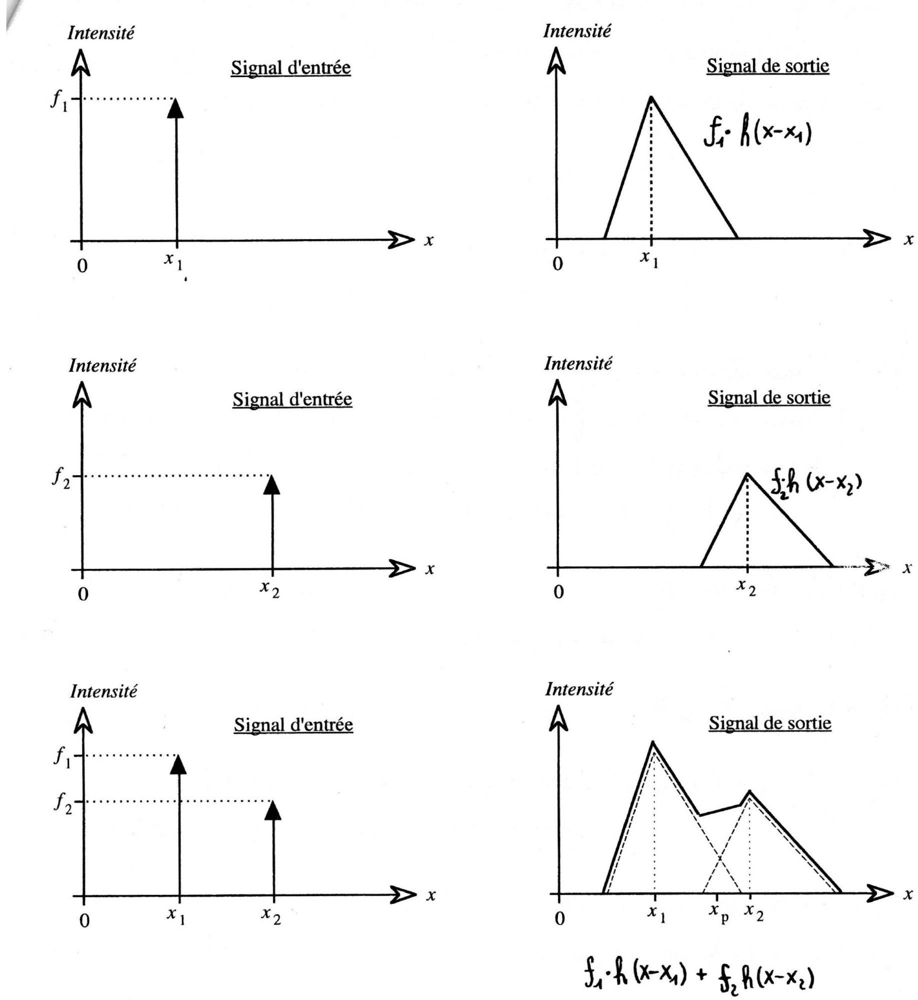

original
photocopie
x
0
x 1
original
photocopie
x
0
x 2
original
photocopie
x
0
x 1 x 2

Dans le cas présent, cette fonction décrit la proportion d'encre qui sera imprimé de part de d'autre de la position centrale (=position du trait).



Pour un trait en x_1, d'une intensité f_1, la photocopie donne donc la fonction d'étalement centrée en x_1 et multiplié par f_1, puisque c'est l'intensité du trait sur l'original qui détermine la quantité totale d'encre qui sera imprimé.

<u>original</u>		<u>photocopie</u>
trait en x_1	$\rightarrow$	"trait étalé" centré en x_1 : $h(x - x_1)$
intensité f_1	$\rightarrow$	$f_1 \cdot h(x - x_1)$



De même, pour le 2^e trait (en x_2), on aura un “trait étalé”, centré en x_2 ($\rightarrow h(x - x_2)$) et dont l’intensité (=quantité totale d’encre imprimée) est proportionnelle à l’intensité du trait sur l’original $\rightarrow f_2 \cdot (x - x_2)$

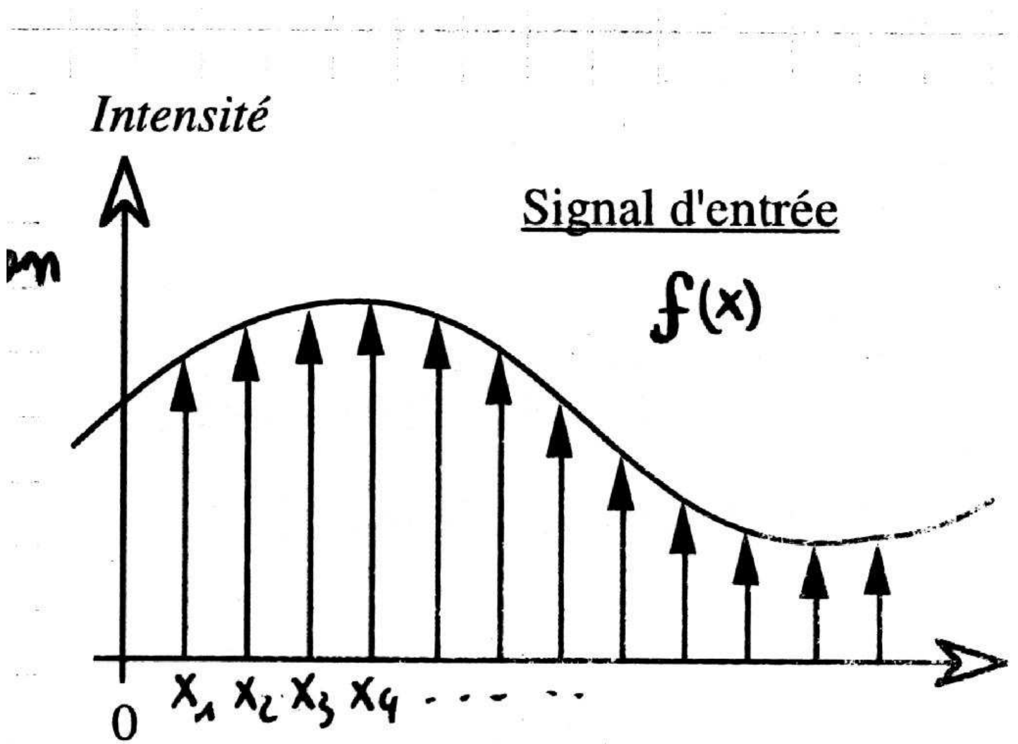
Si les deux traits sont présents sur l'original, la photocopie sera donc constituée de la superposition des deux “traits étalés”.

$$\rightarrow f_1 \cdot h(x - x_1) + f_2 \cdot h(x - x_2) = S(x)$$ = signal de sortie

Remarquons que certains points (x_p par exemple) reçoivent une contribution des deux signaux.

S'il y a plusieurs traits en $x_1, x_2, x_3, ...etc,$ d'intensités respectives $f_1, f_2, f_3, ...etc,$ le signal de sortie est donné par :

$$S(x) = \sum_i f_i h(x - x_i)$$



Si le signal d'entrée est une fonction continue de x, on peut passer de la sommation à une intégration :

$$S(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)h(x-u)du$$

Cette intégrale est appelée *produit de convolution* des fonctions $h(x)$ et $f(x)$. il est noté : $f \circledast h$

$$\boxed{S(x) = f \circledast h = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)h(x-u)du}$$

Propriétés du produit de convolution

Le produit de convolution est

- commutatif : $f \circledast h = h \circledast f$
- associatif : $f \circledast (g \circledast h) = (f \circledast g) \circledast h$
- distributif : $f \circledast (g + h) = f \circledast g + f \circledast h$

autres noms utilisés

- produit de convolution
- produit de composition
- intégrale de superposition
- en anglais : convolution, folding product
- en allemand : faltung

La *fonction de réponse* est aussi appelée :

- fonction d'appareil
- fonction d'étalement
- smoothing function
- line spread function (LSF)
- point spread function (PSF)
- fonction de transfer

Évaluation graphique de l'intégrale de convolution

équation : $y(t) = x(t) \circledast h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau$

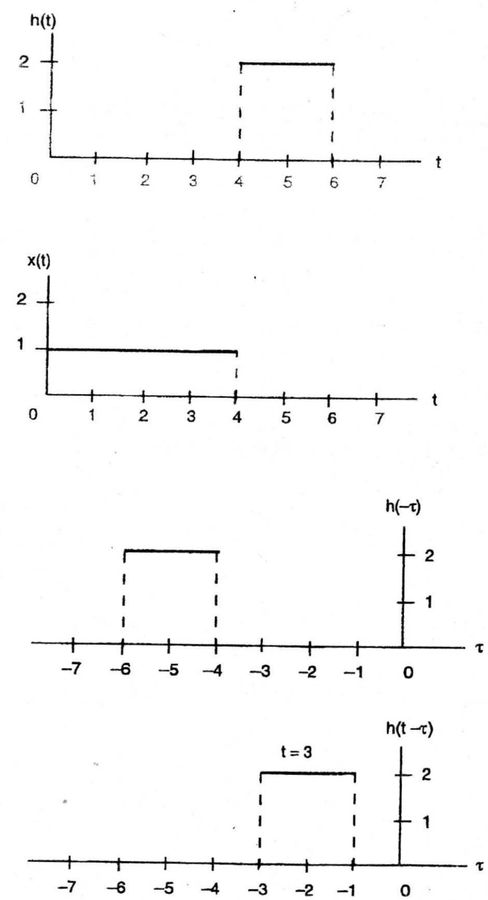


Figure 1.12 — *Evaluation de l'intégrale de convolution*

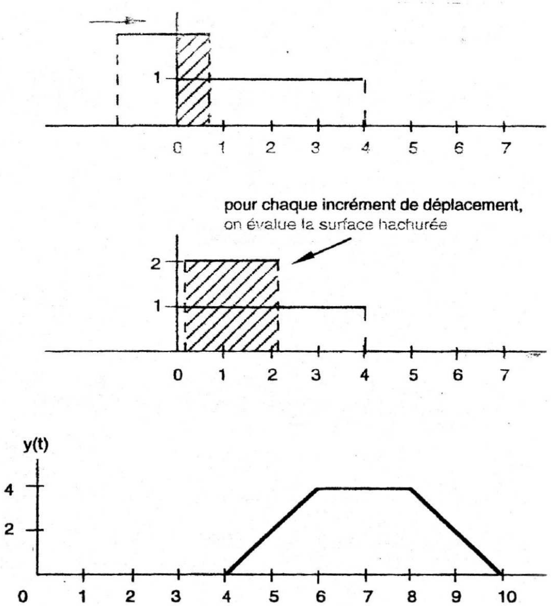


Figure 1.12 (suite) — *Evaluation de l'intégrale de convolution*

Prenons deux fonctions $x(t)$ et $h(t)$. Pour evaluer le produit de convolution

$$y(t) = x(t) \circledast h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau$$

les fonctions $x(\tau)$ et $h(t-\tau)$ sont nécessaires. Pour obtenir $x(\tau)$ et $h(\tau)$, il suffit d'effectuer un changement de variable. La fonction $h(-\tau)$ est ensuite obtenue en prenant l'image de $h(\tau)$ par rapport à l'axe des ordonnées. La fonction $h(t-\tau)$ est simplement égale à la fonction $h(-\tau)$ décalée de la valeur t. Pour évaluer l'équation, il est nécessaire de multiplier et d'intégrer la fonction $x(\tau)$ par $h(t-\tau)$ pour toutes les valeurs de t comprises entre $-\infty$ et $+\infty$. On peut résumer cette marche à suivre en quatre points:

1. obtention de l'image miroir de la fonction $h(\tau)$;
2. déplacement de la fonction $h(-\tau)$ de t (obtention de $h(t-\tau)$);
3. multiplication de $x(\tau)$ par $h(t-\tau)$;
4. intégration de la surface déterminée par le produit $x(\tau)h(t-\tau)$.

Convolution par une fonction de Dirac

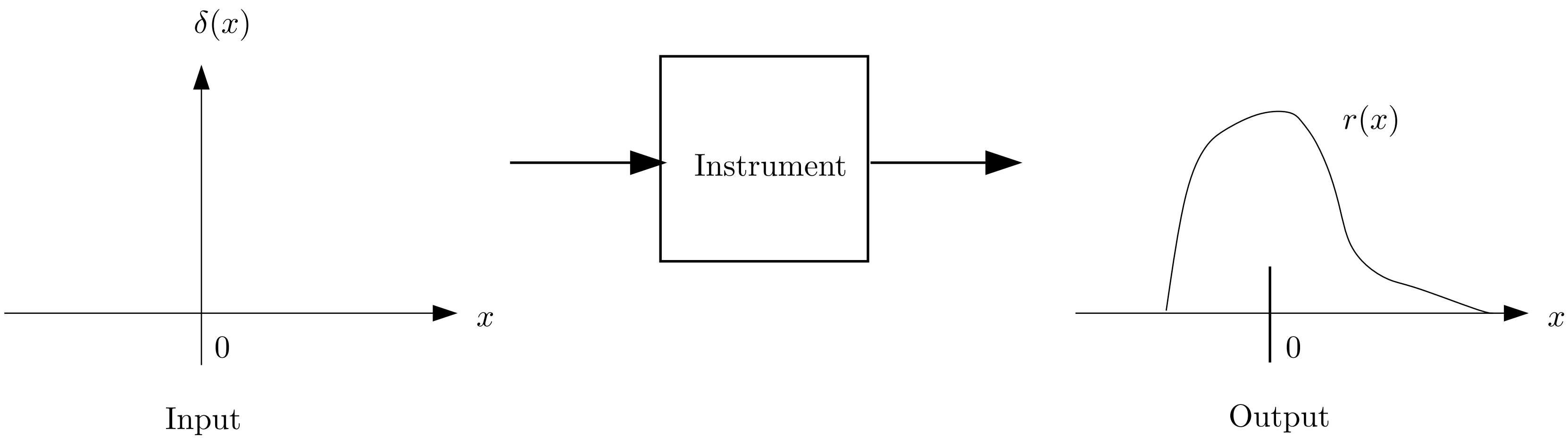
Convolution par un $\delta(x)$ à l'origine

$$f(x) \circledast \delta(x) = \delta(x) \circledast f(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\delta(u)}_{\substack{\text{=0,} \\ \text{sauf pour} \\ u=0}} \cdot f(x-u)du = f(x)$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\delta(x) \quad \text{est l'élément neutre de la convolution}}$

Exemple :



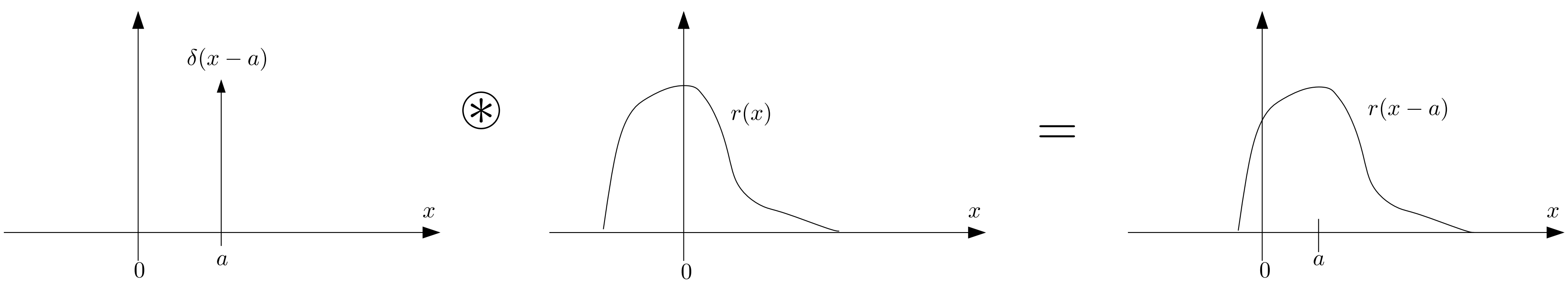
Signal de sortie :

$$S(x) = \delta(x) \circledast r(x) = r(x) \quad \text{où} \quad \begin{cases} \delta(x) & \text{impulsion très brève} \\ r(x) & \text{réponse du système} \end{cases}$$

Convolution par un Dirac centrée en $x = a$: $\delta(x-a)$

$$f(x) \circledast \delta(x-a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\delta(u-a)}_{\substack{\text{=0, sauf} \\ \text{pour } u=a}} \cdot f(t-u)du = \underbrace{f(x-a)}_{\substack{\text{fonction } f(x) \\ \text{translaté de } a}}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{La convolution par } \delta(x-a) \text{ est une translation de } a}$



Convolution par un peigne de Dirac

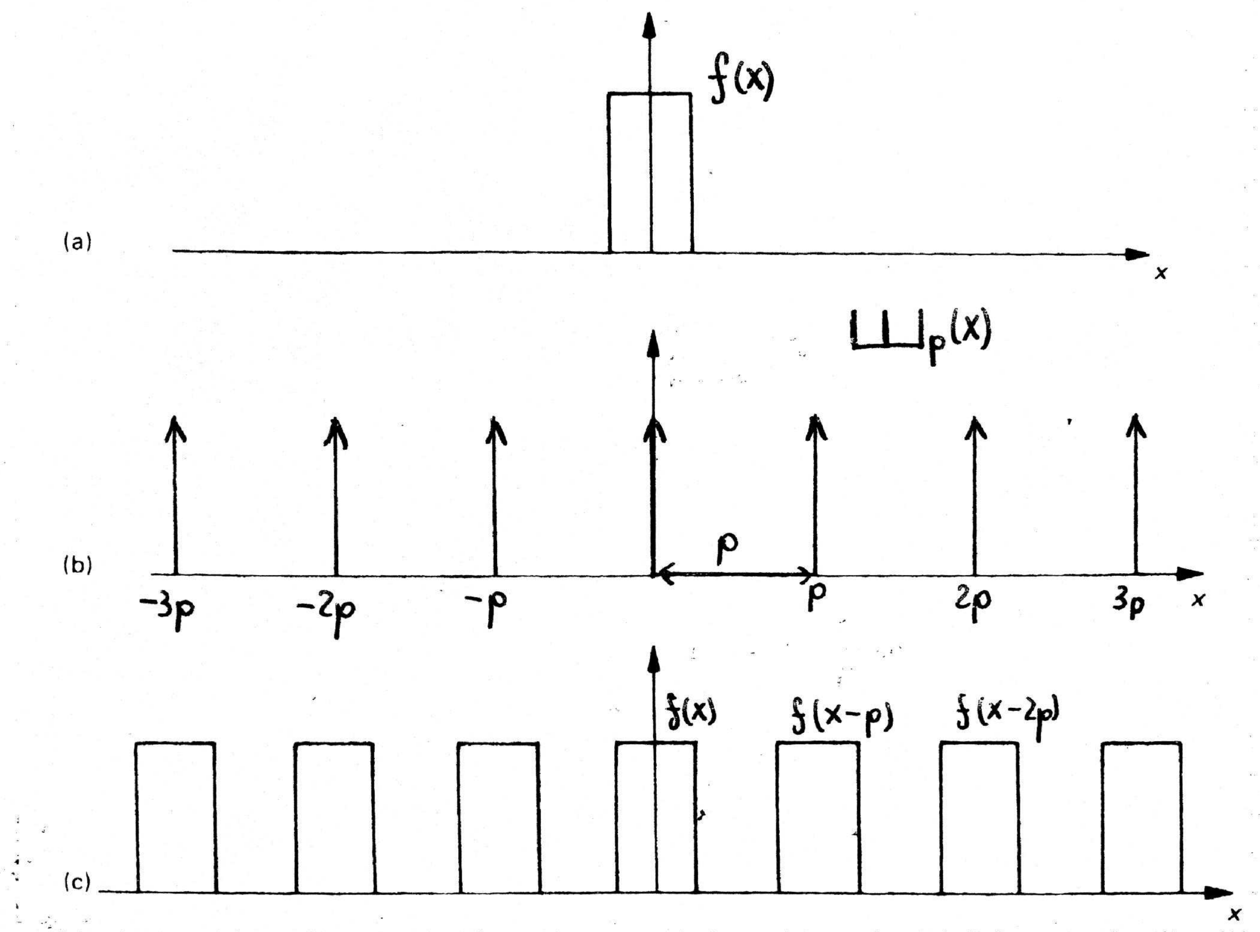
peigne de Dirac de période p : $\text{Ш}_p(x) == \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(x - jp)$

$$f(x) \circledast \text{Ш}_p(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(x) \circledast \delta(x - jp)$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(x - jp)$$

$\Rightarrow$ chaque terme dans cette somme représente la fonction $f(x)$ translaté de jp (=$j^{\text{ième}}$ multiple de la période p).

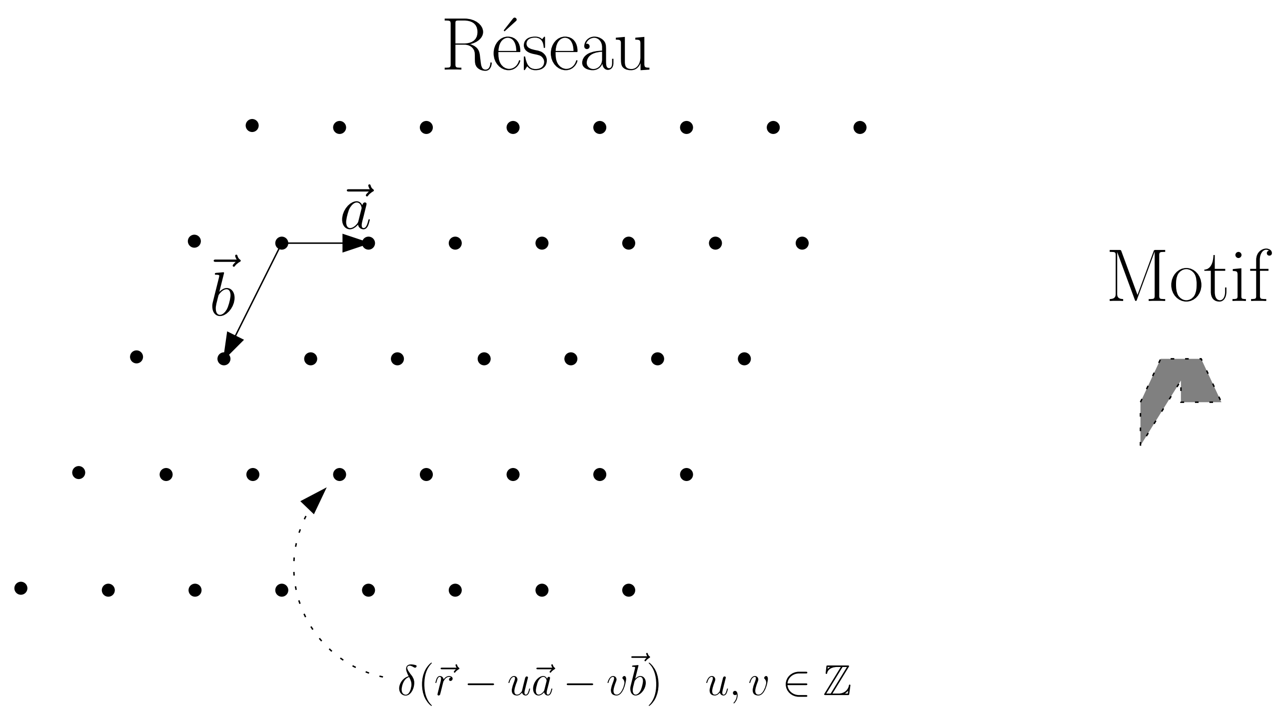
La convolution par un peigne de Dirac engendre une fonction périodique



En cristallographie

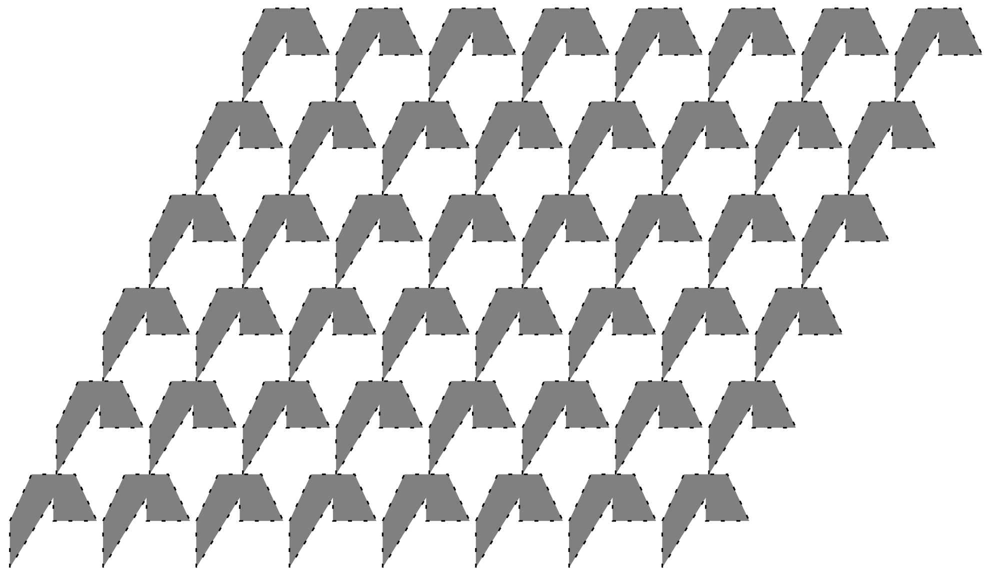
peigne de Dirac en 2 ou 3 dimensions = Réseau (de Dirac) (périodicité:$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$)

Réseau : $$\text{III}_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}(\vec{r}) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} \sum_{w=-\infty}^{+\infty} \delta(\vec{r} - u\vec{a} - v\vec{b} - w\vec{c})$$



Cristal

Cristal = Réseau $\circledast$ Motif



Théorème de la convolution

Énoncé

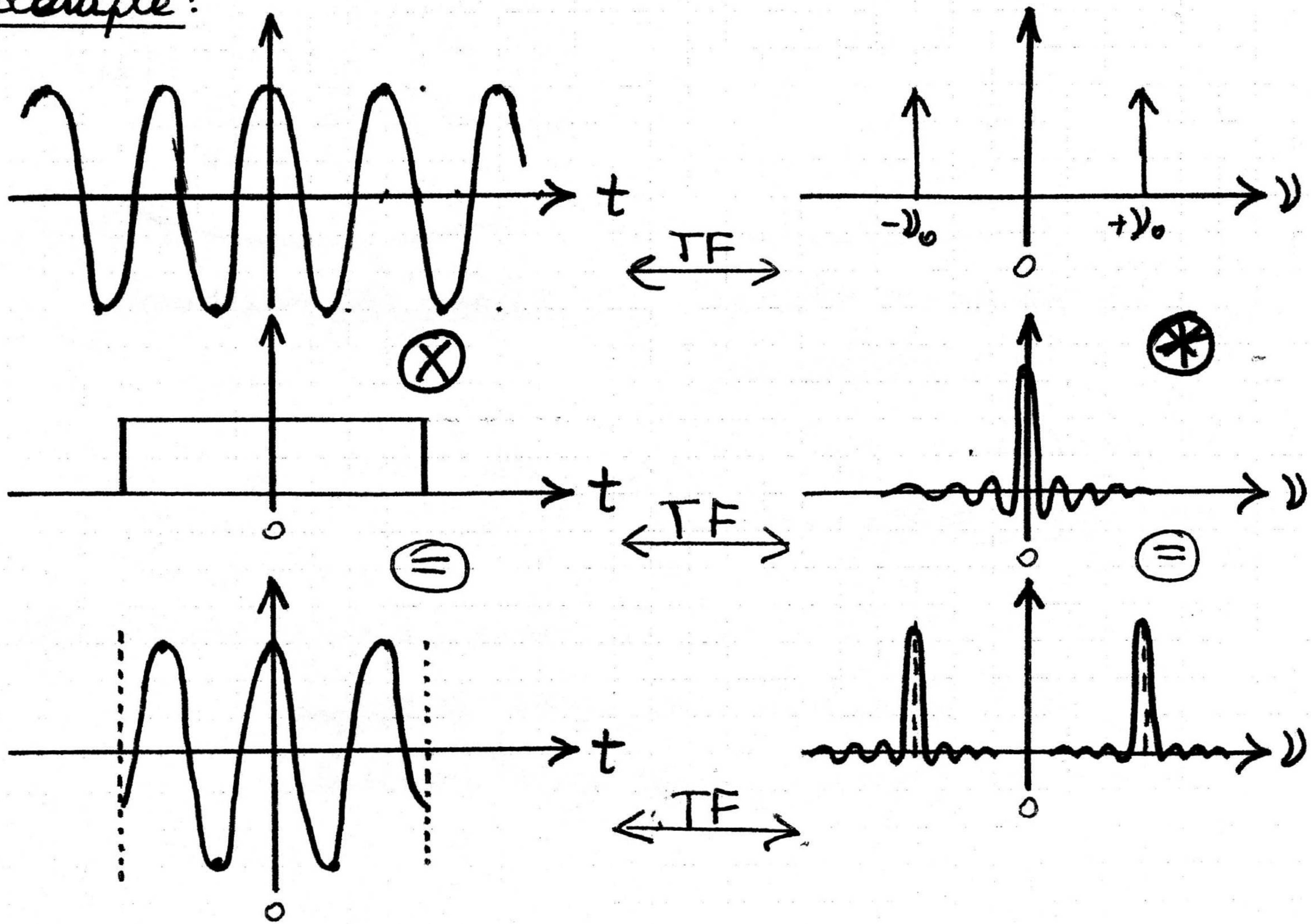
La transformée de Fourier d'un produit de convolution est le produit simple des transformées de Fourier

$$
\begin{array}{ccccc}
h(x) = & f(x) & \circledast & g(x) \\
\Big\downarrow \mathrm{TF} & \Big\downarrow \mathrm{TF} & & \Big\downarrow \mathrm{TF} \\
H(k) = & F(k) & \cdot & G(k)
\end{array}
$$

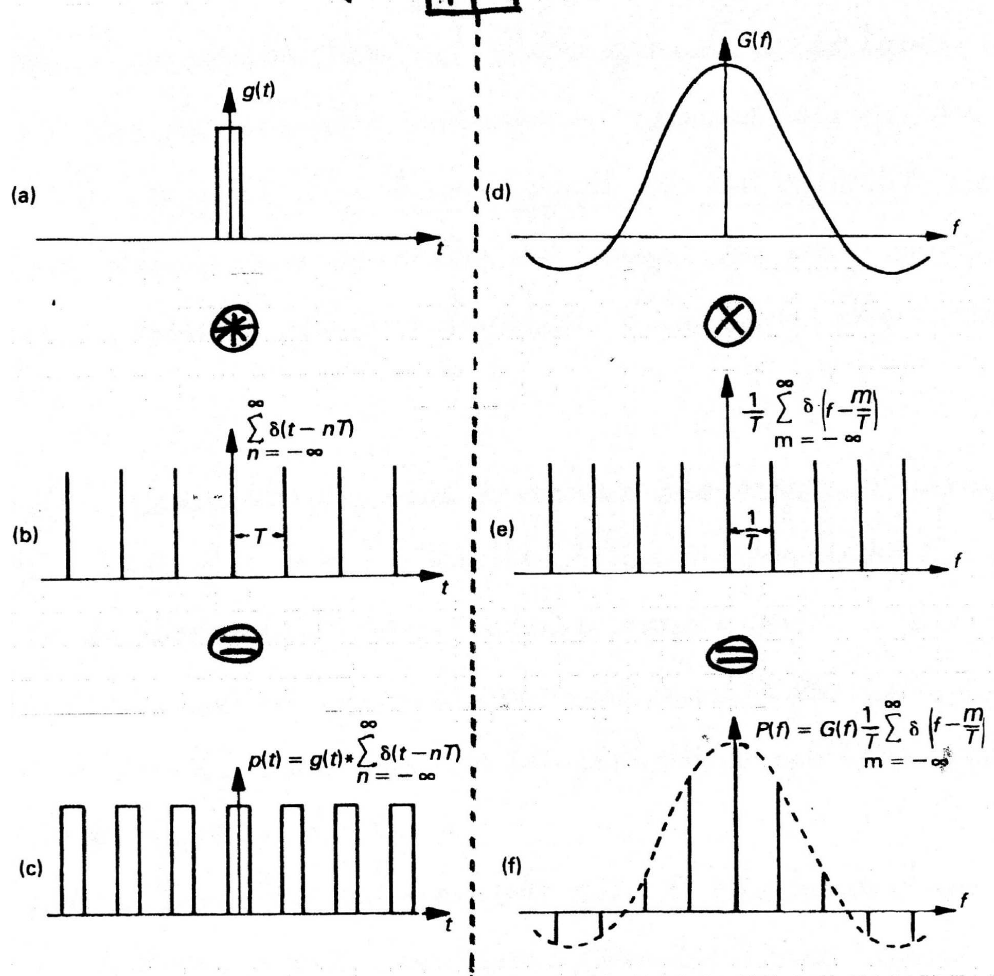
(sans démonstration)
Le théorème est également vrai pour les transformées de Fourier inverse.

Exemples

Exemple :



Les séries de Fourier comme cas particulier des transformées de Fourier



Fonction périodique $\longrightarrow$
Spectre constitué de raies discrètes $\Rightarrow$ Somme de termes discrets $\Rightarrow$ Série de Fourier

$\Rightarrow$ Diffraction (raies discrètes) = cas particulier de la diffusion lorsque l'objet présente une structure périodique (cristal)