Листочек 1. Лемма Шпернера

1. Квадрат, вершины которого покрашены в цвета 1, 2, 3, 4, триангулирован. Вершины триангуляции покрашены в те же 4 цвета, причём на стороне квадрата между вершинами цветов i и j использованы только цвета i и j. Докажите, что в такой триангуляции можно найти не менее двух разноцветных треугольников триангуляции (треугольников, у которых вершины покрашены в три разных цвета).

2. Вершины триангуляции треугольника покрасили какими-то цветами (их может быть много). Докажите, что найдётся либо разноцветный треугольник, либо одноцветный коннектор (связный подграф, задевающий все стороны исходного треугольника).

3. (Дуальная лемма Шпернера) Пусть вершины триангуляции трёхмерного тетраэдра $\triangle^3$, грани которого назовём F_0, F_1, F_2, F_3, покрашены в цвета $0, 1, 2, 3$ так, что:

   - относительная внутренность грани F_i (т.е. грань без граничного треугольника) покрашена в цвет i; дополнительно гарантируется, что в этой относительной внутренности есть хотя бы одна вершина;
   - относительная внутренность ребра $F_i \cap F_j$ (т.е. ребро без концов) покрашена в цвета i, j; дополнительно потребуем, чтобы в этой относительной внутренности была хотя бы одна вершина.
   - вершина $F_i \cap F_j \cap F_k$ покрашена в любой из цветов i, j, k.

   Докажите тогда, что существует элементарный тетраэдр разбиения с разноцветными вершинами.

   Замечание. Технические ограничения можно опустить, если разрешить красить вершины в несколько цветов одновременно (в духе леммы Кнастера–Куратовского–Мазуркевича).

4. (Частный случай теоремы Гейла–Бапата) Рассматриваются три различные раскраски вершин триангуляции треугольника $\triangle^2$. Первая раскраска использует цвета $1^{(1)}, 2^{(1)}, 3^{(1)}$, вторая — цвета $1^{(2)}, 2^{(2)}, 3^{(2)}$, третья — цвета $1^{(3)}, 2^{(3)}, 3^{(3)}$. Все три раскраски шпернеровские. Докажите, что существует элементарный треугольник разбиения, вершины которого покрашены в цвета $1^{(i)}, 2^{(j)}, 3^{(k)}$, где (i, j, k) — некоторая перестановка чисел $1, 2, 3$.

5. Правильный треугольник разбит на 25 равных треугольников. Вершины триангуляции пронумеровали неким образом числами от 1 до 21. Докажите, что метки в вершинах какого-то ребра различаются хотя бы на 6.

6. Два игрока играют в гекс на доске, имеющей форму ромба, разбитого на шестиугольники (см. рисунок во второй лекции). Докажите, что у первого игрока есть выигрышная стратегия.

7. Пусть трёхмерный многогранник P — *простой*, то есть в каждой вершине сходится три ребра. Допустим, P покрыт объединением открытых множеств так, что никакая точка не накрыта четырьмя из них. Докажите, что какое-то из множеств покрытия задевает хотя бы четыре грани P.

8. На единичном круге B^2 задано векторное поле $v : B^2 \to \mathbb{R}^2$, т.е. каждой точке $x = (x_1, x_2) \in B^2$ поставлен в соответствие вектор $v(x) = (v_1(x), v_2(x)) \in \mathbb{R}^2$. Пусть известно, что поле нигде не обращается в ноль ($v(x) \neq (0,0)$), а также что поле $v(x)$ непрерывно зависит от точки x (при малом изменении x поле $v(x)$ меняется слабо). Рассматривается однократный обход граничной окружности $S^1 = \partial B^2$, запараметризованной при помощи функции $x(t),\ t \in [0,1]$, и измеряется количество оборотов вектора $v(x(t))$, когда t пробегает от 0 до 1, а $x(t)$ пробегает граничную окружность. Докажите, что это число оборотов обязано быть нулевым. (*Подсказка*: триангулируйте мелко круг и придумайте шпернеровскую раскраску, связанную с полем.)

9. Пусть $g : B^3 \to \mathbb{R}^3$ — непрерывная функция, такая что на границе шара B^3 имеет место неравенство $\langle g(x), x\rangle \geqslant 0$ (треугольными скобками обозначено скалярное произведение). Докажите, что $\exists x \in B^3 : g(x) = 0$.

10. (Очень частный случай теоремы Жордана) Пусть в прямоугольнике на плоскости нарисованы две кривые, заданные непрерывными функциями $\gamma_1, \gamma_2 : [-1,1] \to [a,b] \times [c,d]$, причём γ_1 соединяет левую сторону прямоугольника с правой, а γ_2 соединяет верхнюю сторону с нижней. Докажите, что кривые пересекаются.

11. (Частный случай теоремы Пуанкаре–Миранды) На единичном квадрате $[0,1]\times[0,1]$ определены непрерывные вещественнозначные функции $f_1(x_1,x_2)$ и $f_2(x_1,x_2)$. Известно, что $\forall x_2 \in [0,1]\ f_1(0,x_2) < 0 < f_1(1,x_2)$ и $\forall x_1 \in [0,1]\ f_2(x_1,0) < 0 < f_2(x_1,1)$. Докажите, что найдётся точка $(x_1,x_2) \in [0,1]\times[0,1]$, для которой $f_1(x_1,x_2) = f_2(x_1,x_2) = 0$.

12. (Теорема Перрона–Фробениуса) Пусть матрица $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ состоит из положительных чисел. Докажите, что у неё есть собственный вектор, состоящий из положительных чисел. (*Подсказка*: это можно вывести из теоремы Брауэра.)

13. (Частный случай теоремы Карасёва) Трёхмерный куб частично покрыт открытыми множествами, никакое из которых не задевает никакую пару противоположных граней куба. Пусть известно, что никакие три множества не имеют общей точки. Докажите, что какая-то компонента связности ненакрытой части куба пересекает четыре параллельных ребра куба.

14. (Задача Н. Н. Константинова про возы) Из города A в город B ведут две не пересекающиеся дороги. Известно, что две машины, выезжающие по разным дорогам из A в B и связанные веревкой некоторой длины, меньшей 2ℓ, смогли проехать из A в B, не порвав веревки. Могут ли разминуться, не коснувшись, два круглых воза радиуса ℓ, центры которых движутся по этим дорогам навстречу друг другу?

15. (Задача Н. Н. Константинова про альпинистов) Среди ровной степи стоит гора. На вершину ведут две тропы (считаем их графиками непрерывных функций, состоящими из

конечного числа участков монотонности), не опускающиеся ниже уровня степи. Два альпиниста одновременно начали подъем (по разным тропам), соблюдая условие: в каждый момент времени быть на одинаковой высоте. Смогут ли альпинисты достичь вершины, двигаясь непрерывно?

16. (Частный случай леммы Такера) Пусть триангуляция круга B^2 антиподальна на границе, т.е. такова, что вершины триангуляции, принадлежащие граничной окружности, при центральной симметрии с центром в нуле переходят в вершины триангуляции. Пусть также вершины триангуляции помечены метками $+1, +2, -1, -2$ так, что центрально симметричные вершины с границы помечены противоположными метками. Докажите, что в этой триангуляции найдётся *диполь* — ребро с противоположными метками на концах.

17. Ковёр Серпинского — подмножество плоскости, определяемое так. Стартуем с квадрата, который разрезаем на девять равных квадратов, и средних из них выбрасываем. Затем повторяем процесс для оставшихся восьми квадратов, и так далее счётное количество раз.

    - Докажите, что топологическая размерность получившегося множества равна 1.
    - Вычислите фрактальную размерность Минковского этого множества: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln N_\varepsilon}{-\ln\varepsilon}$, где N_ε — минимальное число множеств диаметра ε, которыми можно покрыть наше множество.

18. Пусть плоскость триангулирована так, что любой треугольник триангуляции можно накрыть единичным кругом. Докажите, что тогда любой единичный круг задевает вершину триангуляции.

19. Докажите, что для любого непрерывного отображения $f : B^n \to \mathbb{R}^n$ ($B^n \subset \mathbb{R}^n$ — единичный шар с центром в начале координат) найдётся точка $x \in B^n$, такая что $x = \lambda f(x)$, $0 < \lambda \leqslant 1$.