
Листочек 2. Поперечник Урысона

Напомню, что d -мерный поперечник Урысона компактного метрического пространства X может быть определён одним из следующих эквивалентных способов.

$$\text{UW}_d(X) = \inf_{\substack{\bigcup U_i = X \\ \text{mult.}\{U_i\} \leq d+1}} \sup_i \text{diam}(U_i),$$

где инфимум берётся по открытым покрытиям кратности не более $d + 1$.

$$\text{UW}_d(X) = \inf_{\substack{p: X \rightarrow Z \\ \dim Z \leq d}} \sup_{z \in Z} \text{diam}(p^{-1}(z)),$$

где инфимум берётся по всем непрерывным отображениям p в метризуемые пространства размерности не более d .

Обозначения в задачах:

- B^n обозначает шар единичного радиуса в \mathbb{R}^n ;
 - \square^n обозначает куб с единичным ребром в \mathbb{R}^n ;
 - \triangle^n обозначает правильный n -мерный симплекс с единичным ребром в евклидовом пространстве.
21. Пусть у непрерывного отображения $f : B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ образ имеет размерность меньше, чем n . Докажите, что f сдвигает какую-то точку на расстояние не меньше 1.
22. Пусть дано непрерывное отображение $f : B^n \rightarrow Z$ в метризуемое пространство размерности меньше, чем n . Докажите, что прообраз какой-то точки нельзя накрыть шаром радиуса меньше 1.
23. Вычислите $\text{UW}_{n-1}(B^n)$.
24. (Исследовательская задача) Чему равно $\text{UW}_{n-2}(B^n)$?
25. (Исследовательская задача) Лемма Лебега о покрытиях влечёт, что $\text{UW}_{n-1}(\square^n) = 1$. Правда ли, что $\text{UW}_d(\square^n) = \sqrt{n-d}$?
26. Используя лемму Кнастера–Куратовского–Мазуркевича, покажите, что $\text{UW}_{n-1}(\triangle^n) = 1/n$.
27. (Исследовательская задача) Чему равны поперечники $\text{UW}_d(\triangle^n)$?