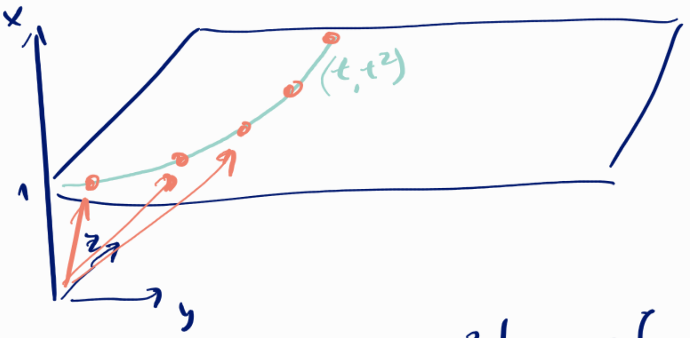
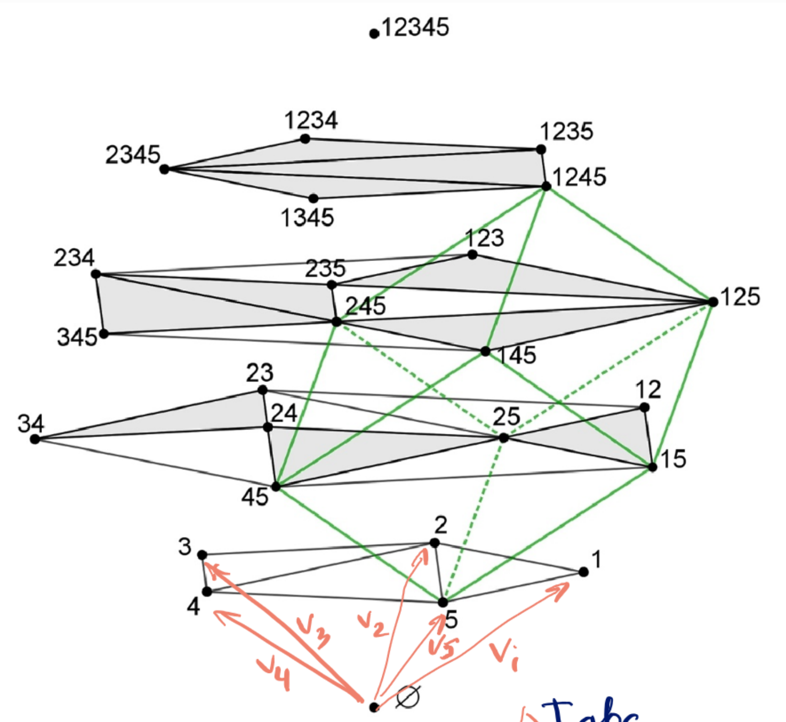
$$Z_{n,3} = \sum_{i=1}^{n} [0, v_i] \qquad v_i := (1, t_i, t_i^2)$$

$$t_1 < \ldots < t_n$$



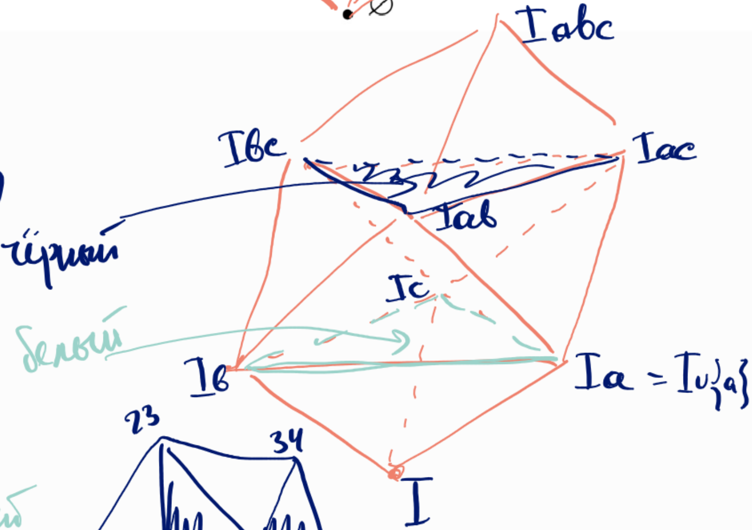
$$H_k = \left\{ (k, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} y \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\}, \; k \in \mathbb{Z}$$

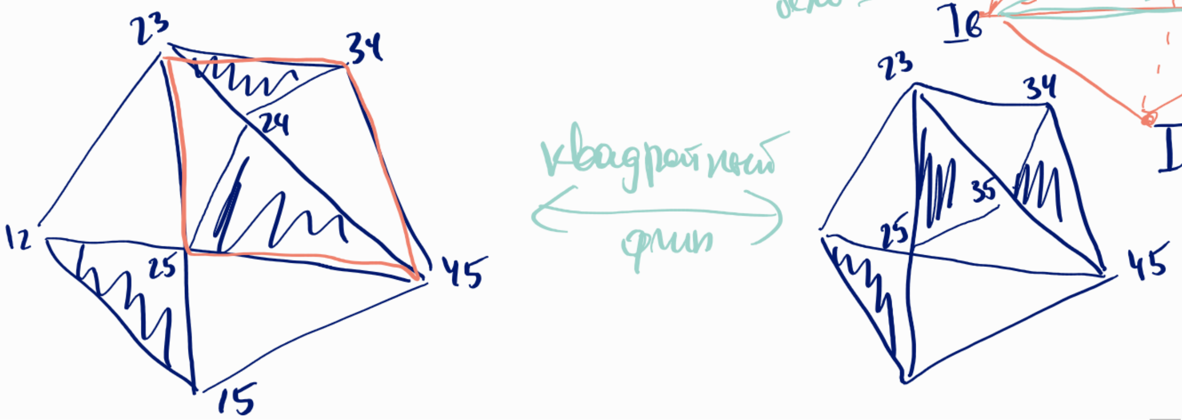


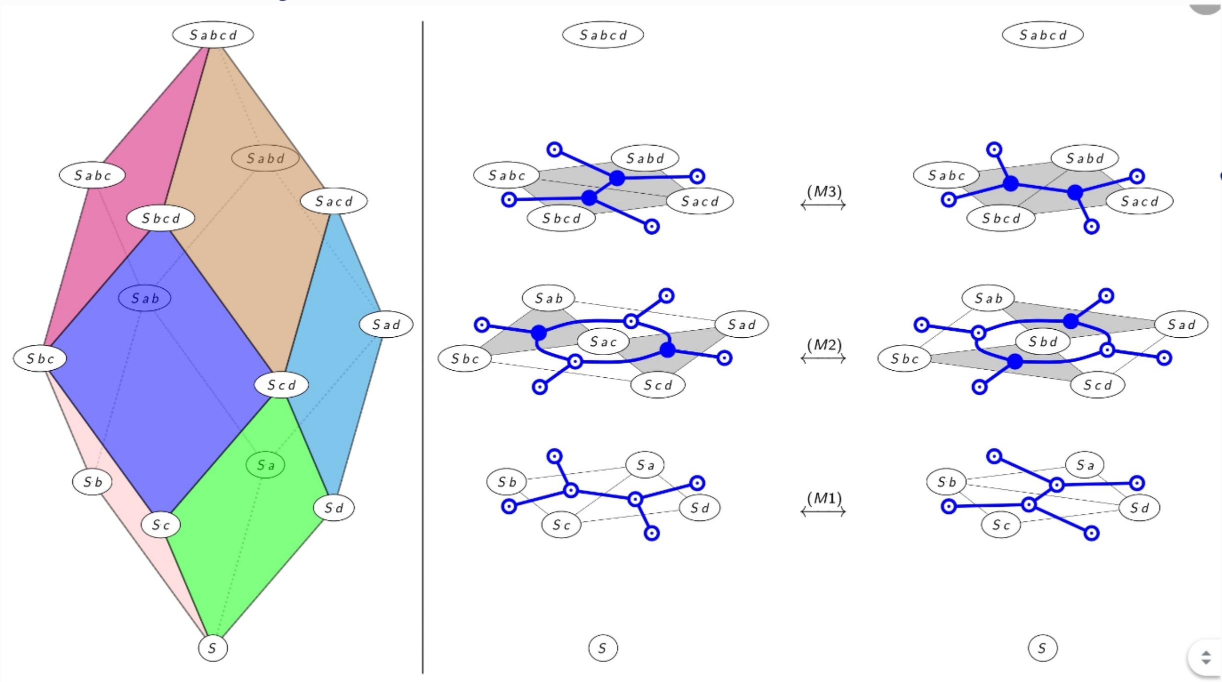
Вершины зонотопального разбиения

$$\longleftrightarrow \quad I \subset [n] = \{1, \ldots, n\}$$

$$v_I = \sum_{i \in I} v_i$$







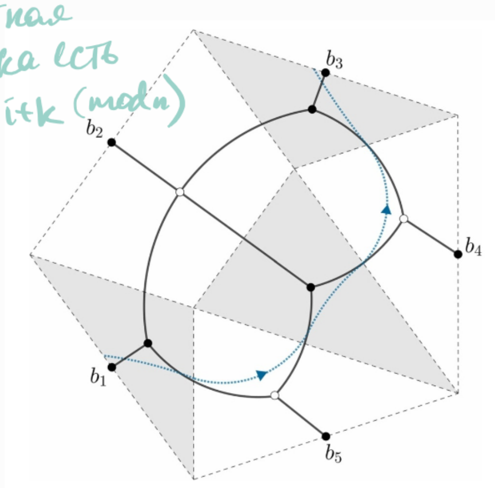
чёрный флип

квадратный флип

белый флип

Плабик типа (n,k) — сечение зонотопального разбиения $H_k \cap Z_{n,3}$ — его маршрутная перестановка есть $i \mapsto i+k \pmod n$

(planar bicolored)



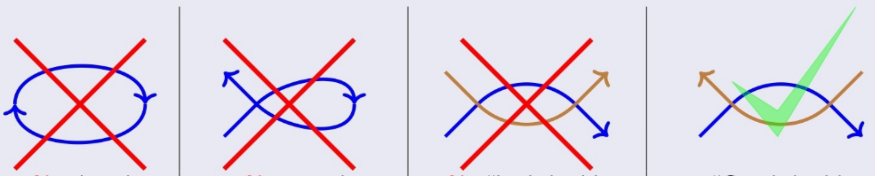
Оригинальное определение А. Постникова
(trivalent reduced plabic graph)

Плабик — плоский граф, вложенный в диск
n граничных вершин степени 1
внутренние вершины тривалентные
покрашены в чёрный/белый

Маршрут — путь в плабике
в белых верш. поворачивает налево
в чёрных — направо

Definition (Postnikov (2007))

A plabic graph is *reduced* if it contains:



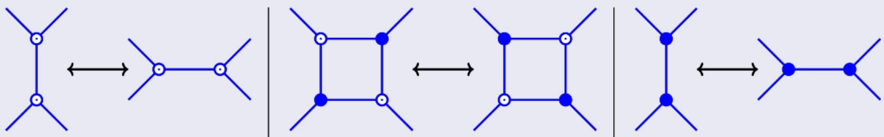
No closed strands	*No* strand intersects itself	*No* "bad double crossings"	"Good double crossings" are OK!

Можно рассматривать двудольные плабики
(фактор по $\sim$
$T_1 \sim T_2$ если их можно соединить чёрными/белыми флипами)

Утв. Маршрутная перестановка не меняется при флипах

Theorem (Postnikov (2007))

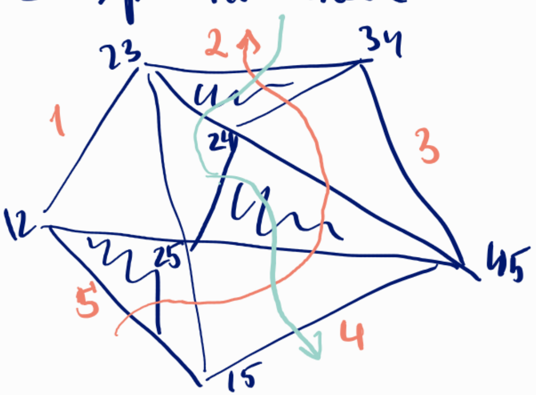
Any two (k,n)-plabic graphs are connected by a sequence of moves:



(M1) (M2) (M3)

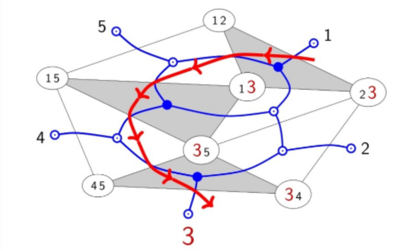
Следует из аналогичной теоремы для зонотопальных разбиений

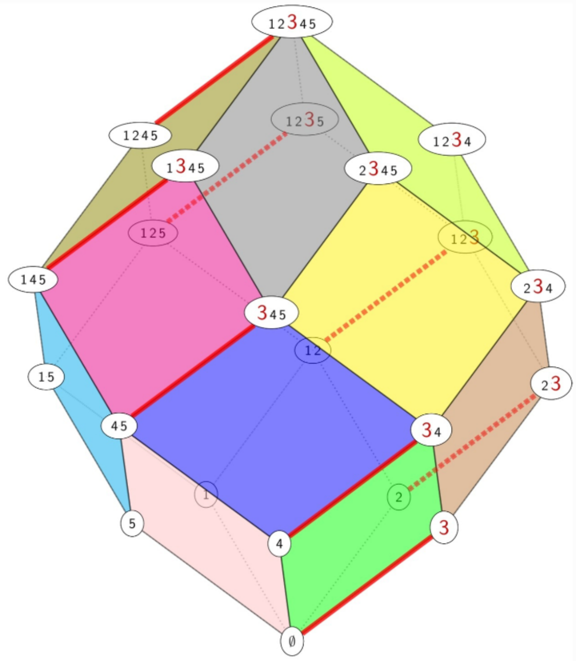
Утв. Вершины, содержащие метку i
= Вершины слева от маршрута $j \to i$



Эквивалентность опр. Постникова и опр. через зонотоп принадл. П. Галашину (2017)

Достаточно проверить что "обобщенный провод" трансверсальный v_k, отделяет вершины, содержащие метку k от вершин, не содержащих метку k



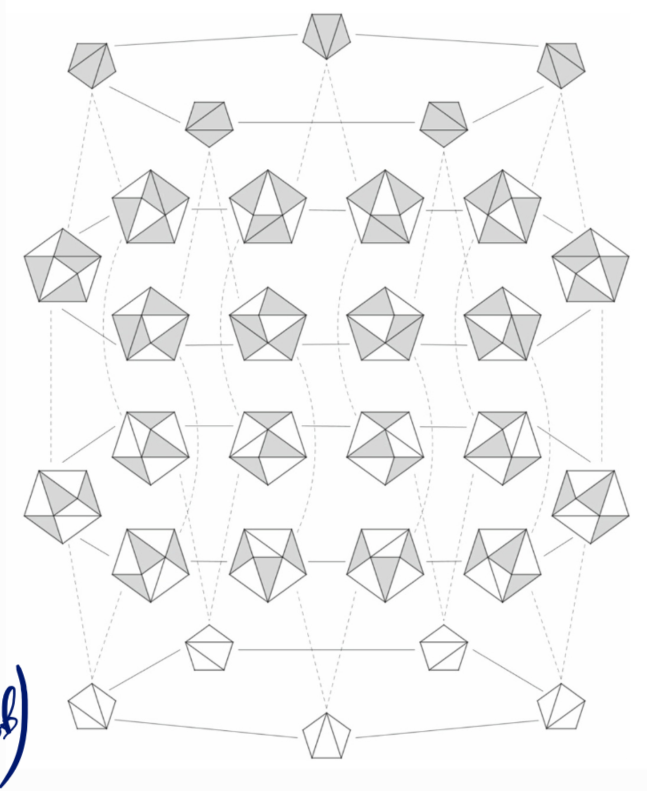


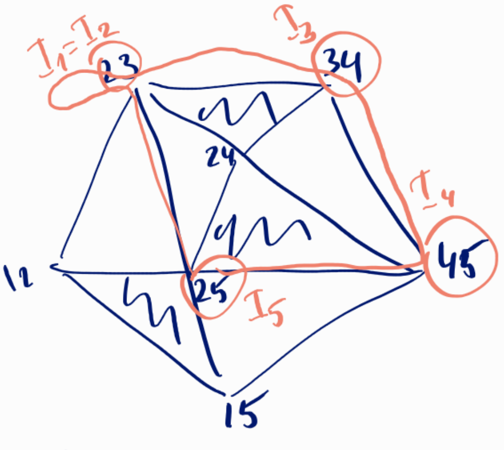
Цикл флипов в $Z_{5,3}$

$\updownarrow$

5-угольники и 10-угольники во флипах плабиков

Они порождают все флиповые соотношения (вместе с трив. 4-угольниками коммутирующих флипов)





Грассманово ожерелье $\mathcal{I} = (I_1, \dots, I_n)$

$I_1, \dots, I_n$ — k-элем. подмнож. $[n]$

$\forall i$ либо $i \notin I_i$ и тогда $I_{i+1} = I_i$

либо $i \in I_i$ и тогда $I_{i+1} = (I_i \setminus \{i\}) \cup \{j\}$

Украшенная перестановка $\pi(\mathcal{I})$: $i \longmapsto j$ если $i \in I_i$, $j \neq i$

$i \longmapsto i$ покрашена в один из двух цветов в завис. от $i \in I_i$ или $i \notin I_i$

$\downarrow$

перестановка, у которой неподвижные точки покрашены в два цвета

(Спиральность украшенной перест. $\pi^{:}(\mathcal{I})$) $=$ k

Утв. Соответствие $\mathcal{I} \longmapsto \pi^{:}$ — биекция

Плабик (приведённый, тривалентный) — односвязное объединение треугольников и рёбер внутри фиксир. ожерелья

(в рамках всевозможных (n,k)-плабиков в которых это ожерелье присутствует)