M — компактное риманово многообразие

Кривая $\gamma : [0,1] \to M$ называется ==геодезической==, если локально минимизирует функционал длины, т.е. для любых достаточно близких $0 \le t < t' \le 1$ отрезок $\gamma|_{[t,t']}$ — кривая кратчайшей длины между $\gamma(t)$ и $\gamma(t')$

==Вопрос==: существует ли нетривиальная замкнутая геодезическая на M?

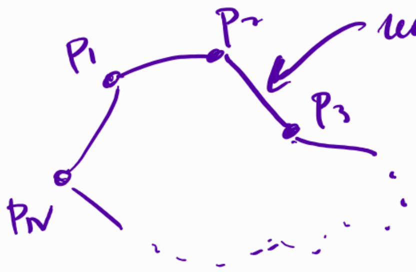
<u>Т-ма (Lyusternik-Fet, 1951)</u> Да

<u>Идея в 2D:</u> M либо ⓐ неодносвязное (π_1 нетривиальна)
либо ⓑ односвязное: $M \simeq S^2$

ⓐ (Cartan—Hadamard) Систола — геодезическая

<u>Лемма</u> Любые достаточно близкие точки $x, y \in M$ всегда можно соединить единственной геодезической

$P_N M$ — пространство геодезических многоугольников на N вершинах



геодезический отрезок

$$\sum_i dist(p_i, p_{i+1})^2 < \varepsilon$$

$$E : P_N M \to \mathbb{R} \qquad (p_{N+1} = p_1)$$

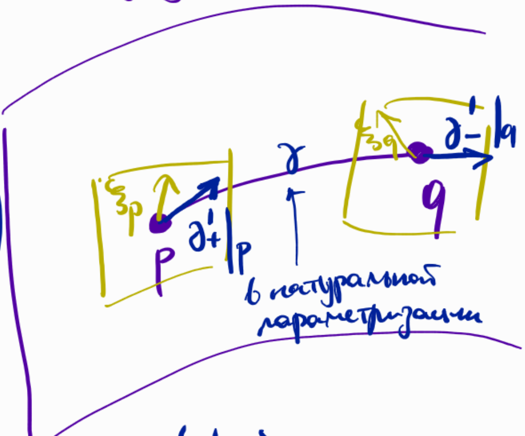
$$E(p_1, \dots, p_N) = \sum_i dist(p_i, p_{i+1})^2$$

гладкая в окрестности $P_N \subset \underbrace{M \times \dots \times M}_{N}$

<u>Лемма</u> Критические точки E — замкнутые геодезические.

$$d(dist^2)(\xi_p, \xi_q)$$

$$= 2\, dist(p,q) \cdot \left(\langle \gamma'_-|_q, \xi_q \rangle - \langle \gamma'_+|_p, \xi_p \rangle \right)$$



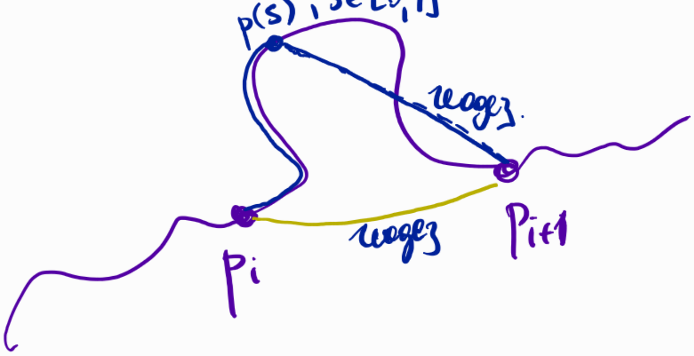
$$dE(\xi_1, \dots, \xi_n) = 2 \sum_i \langle \xi_i, \; len\, \gamma|_{[p_{i-1} p_i]} \cdot \gamma'_-|_{p_i} - len\, \gamma|_{[p_i, p_{i+1}]} \cdot \gamma'_+|_{p_i} \rangle$$

$dE=0 \iff \forall i \quad \mathrm{len}\,\gamma|_{[p_{i-1}p_i]}\cdot \gamma'_-|_{p_i} = \mathrm{len}\,\gamma|_{[p_i p_{i+1}]}\cdot \gamma'_+|_{p_i}$

$\iff$ многоугольник с равными сторонами и углами π

Д-во (a): берём любую нестягиваемую петлю γ

Для большого N заменим γ на геод. многоугольник $\in P_N M$



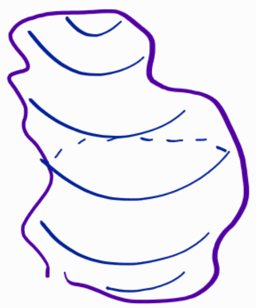
$p_i \xrightarrow{\ \gamma\ } p(s) \xrightarrow{\text{геод.}} p_{i+1}$

$s=1$ — отрезок γ

$s=0$ — геод. отрезок

Градиентный спуск вдоль $-\nabla E$ в P_N продеформирует геод. многоугольник в замкн. геодезическую

Т (Birkhoff)



(S^2, g)

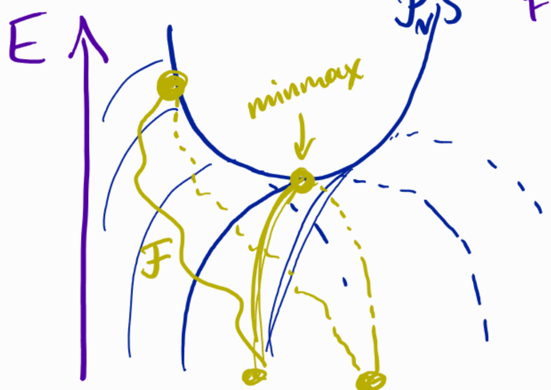
Идея Рассмотреть заметание окружностями и начать их деформировать, уменьшая длину, одновременно

$\mathcal{F}$ — семейство заметаний (S^2,g) окружностями

каждое заметание $F\in\mathcal{F}$ — это $S^2 \xrightarrow[\text{степени } 1]{\text{непрер.}} (S^2,g)$

$\uparrow$ расслоена на окружности

Birkhoff minimax: $\inf\limits_{F\in\mathcal{F}} \max\limits_{\gamma \text{ — окр. из } F} \mathrm{len}\,\gamma$ даёт нетрив. замкн. геодезическую



Укорачивание кривых по Биркгофу:

$\gamma: S^1 \to M$ запараметризована длиной дуги, $N \gg 1$ фиксир.

Фаза 1: продеформировать γ в геодез. многоугольник γ' на вершинах $\gamma(0)$, $\gamma(\frac{1}{N})$, $\gamma(\frac{2}{N})$, ..., $\gamma(\frac{N-1}{N})$

Фаза 2: продеформировать γ' в геод. многоуг. γ'' на вершинах $\gamma'(\frac{1/2}{N})$, $\gamma'(\frac{3/2}{N})$, ..., $\gamma'(\frac{N-1/2}{N})$