Теорема (Guth 2017) (была гипотезой Громова '83) $\exists c_n$ такая, что для любого компактного риманова многообразия M^n:

$$UW_{n-1} M \le c_n \sqrt[n]{\mathrm{vol}_n M}$$

Следствие: для любой римановой метрики на n-существенном n-мерном (компактном) многообразии M выполнено

$$\mathrm{Sys}\, M \le c_n \sqrt[n]{\mathrm{vol}_n M}$$

ПРЕРЕКВИЗИТЫ

(Комбинаторный) Симплициальный комплекс K — непустой набор подмножеств конечного множества V ("вершины") со свойством

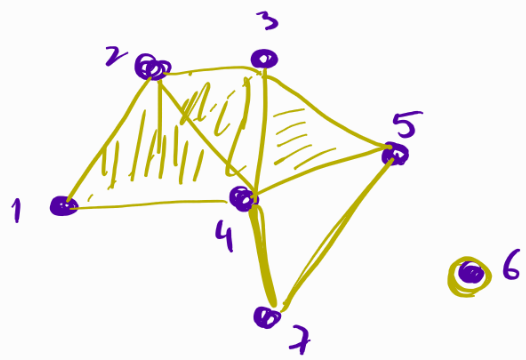
$$\left.\begin{matrix} F_1 \subset F_2 \\ F_2 \in K \end{matrix}\right\} \Longrightarrow F_1 \in K$$

$F \in K$ — "грань" комплекса K "размерности" $\dim F = \#F - 1$

(Геометрический) Симплициальный комплекс — топологическое пространство, склеенное из симплексов типа

$$\Delta^d = \left\{ (x_0, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^{d+1} \;\middle|\; \begin{matrix} x_0, \dots, x_d \ge 0 \\ \sum_i x_i = 1 \end{matrix} \right\}$$

согласно "чертежу" K (комб. симпл. комплекс): каждой грани $F \in K$ соответствует копия Δ^d, $d = \dim F$



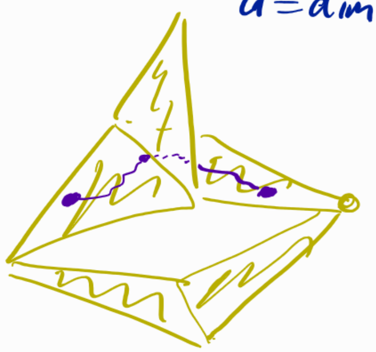
$\{1,2,3,4\} \in K$

$\{3,4,5\} \in K$

$\{4,7\} \in K$

$\{6\} \in K$

$\{5,7\} \in K$



Опр Риманов полиэдр размерности n — пространство, опред. след. набором данных

- геометрический симплициальный комплекс
- каждая грань содержится в n-мерной грани (pure)
- на каждой грани задана риманова метрика

- для любой пары пересекающихся граней их римановы метрики согласованы на пересечении (ограничения метрик на пересечение граней совпадают)

Замечания 1) Для связного риманова полиэдра dist (p,q) определяется как инфимум длин кривых γ из p в q

Ограничение $\gamma|_{F^n}$ — распадается в объединение кус. гладких кривых на римановом многообразии F^n

$$\operatorname{len}\gamma = \sum_{F^n} \operatorname{len}\gamma|_{F^n}$$

2) Подполиэдр N — подмножество полиэдра M, которое само является полиэдром

→ симплиц. структура N подчинена симплиц. структуре M

любая грань N $\subset$ некот. грани M (гладко вложена)

→ риманова метрика на N получается ограничением метрики M

3) $\forall\delta$ любая 1-липшицева функция $f: M \to \mathbb{R}$ (риманов полиэдр) может быть приближена кусочно гладкой 1-липшицевой $f': M \to \mathbb{R}$ т.ч. $|f'(x) - f(x)| < \delta$

4) (теорема Сарда) Если $f: M^n \to \mathbb{R}$ кусочно гладкая, то для почти всех $a \in f(M) \subset \mathbb{R}$ $f^{-1}(a)$ — риманов подполиэдр размерности $n-1$

5) Из неравенства коплощади следует:

Если $f: M^n \to \mathbb{R}$ кусочно гладкая и 1-липшицева, то

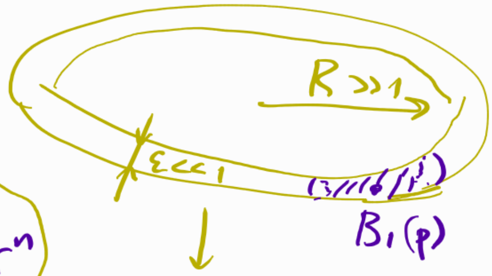
$$\int_a^b \operatorname{vol}_{n-1}(f^{-1}(t))\,dt \le \operatorname{vol}_n f^{-1}([a,b])$$

В частности, $\exists t \in [a,b]$ т.ч. $\operatorname{vol}_{n-1}(f^{-1}(t)) \le \dfrac{\operatorname{vol}_n(f^{-1}[a,b])}{b-a}$

Теорема (☆) Пусть M^n — риманов полиэдр

$\exists \varepsilon_n$ т.ч. если $\forall p \in M$ $\mathrm{vol}_n B_1(p) \le \varepsilon_n$,

то $UW_{n-1}(M) \le 2$



примерно одномерное

Эквивалентно,

$\exists \varepsilon_n$ т.ч. если $\exists r\ \forall p \in M$ $\mathrm{vol}_n B_r(p) \le \varepsilon_n r^n$

то $UW_{n-1}(M) \le 2r$

Теорема(☆) влечёт теорему Гута

Если $\mathrm{vol}_n M = V$, перемасштабируем метрику (умножим её на маленькое число α)

$\alpha = \sqrt[n]{\frac{\varepsilon_n}{V}}$ так, что $\mathrm{vol}_n\, \alpha M = \alpha^n V = \varepsilon_n$

Тогда $\forall p \in \alpha M$ $\mathrm{vol}_n \left(B_1^{\alpha M}(p)\right) \le \mathrm{vol}_n \alpha M = \varepsilon_n$

$$\xRightarrow{(☆)} UW_{n-1}(M) = \frac{1}{\alpha} UW_{n-1}(\alpha M) \le \frac{1}{\alpha} \cdot 2 = \underbrace{\frac{2}{\sqrt[n]{\varepsilon_n}}}_{c_n} \cdot \sqrt[n]{\mathrm{vol}_n M}$$